



CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DE MINAS GERAIS  
Campus Leopoldina

ENGENHARIA DE CONTROLE E AUTOMAÇÃO

**RELATÓRIO DE ATIVIDADE PRÁTICA 01**  
**Identificação de Sistemas e Discretização de Controladores PID**

Lucas Daniel de Melo Borges  
Lucas Guimarães da Rocha

Prof. Murillo Ferreira dos Santos, D. Eng.

Leopoldina, MG  
17 de fevereiro de 2021

## Resumo

A partir de uma função de transferência, foi utilizado o método de identificação de *Smith* para fins de comparação e validação do método, Ademais, foram sintonizados controladores PID para esta função aproximada utilizando os métodos de sintonia de Ziegler-Nichols e Cohen-Coon. Por fim, os controladores sintonizados foram discretizados utilizando o método de discretização Trapezoidal para os períodos 0,1s e 0,001s para fins de comparação entre estes e os controladores contínuos.

# 1 Introdução

## 1.1 Método de identificação de Smith

O método de identificação de SMITH tem como objetivo extrair a  $G(s)$  que representa o comportamento do sistema de malha aberta através da análise de alguns parâmetros obtidos da curva de reação da planta conforme (1). Para que o método de identificação de Smith seja aplicado, a resposta do sistema em malha aberta para entrada degrau deve ser uma resposta monotônica.

$$G(s) = \frac{K}{\tau s + 1} e^{-Ls} \quad (1)$$

Onde  $\tau$ ,  $L$  e  $K$  são determinados por (2), (3) e (4) respectivamente.

$$\tau = 1.5(t_{63.2} - t_{28.3}) \quad (2)$$

$$L = 1.5\left(t_{28.3} - \frac{t_{63}}{3}\right) \quad (3)$$

$$K = \frac{\Delta_y}{\Delta_u} \quad (4)$$

Os valores de  $t_{63.2}$  e  $t_{28.3}$  são determinados conforme o exemplo da figura 1 que representa a saída do sistema de malha aberta para uma entrada degrau.

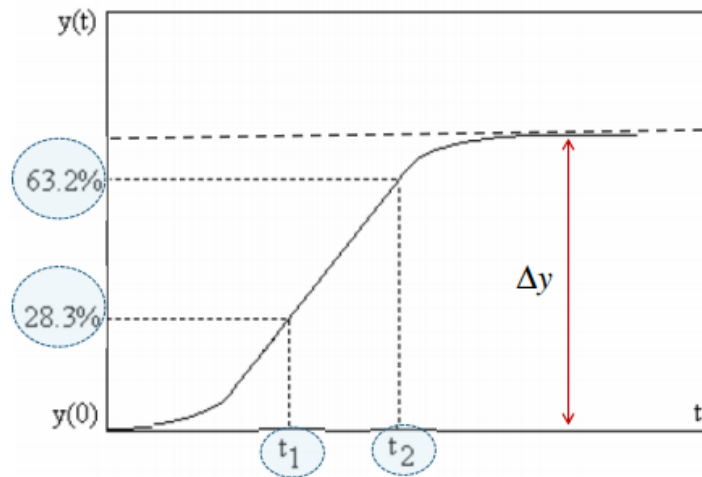


Figura 1: Método de SMITH

Conforme apresentado na figura 1 os valores de  $t_{63.2}$  e  $t_{28.3}$  são respectivos aos valores de saída do sistema em malha aberta para uma entrada degrau nos pontos que correspondem a 63.2% e 28.3% do valor de estabilização da resposta do sistema.

## 1.2 Sintonia de um controlador PID

Projetar a sintonia de um controlador PID consiste em definir os ganhos das partes proporcional ( $K_p$ ), integral ( $K_i$ ) e derivativa ( $K_d$ ). Dois métodos para sintonia serão apresentados: Ziegler-Nichols e Cohen-Coon.

Onde  $K_i$  e  $K_d$  são definidos, respectivamente, pelas equações (5) e (6).

$$K_i = \frac{K_p}{T_i} \quad (5)$$

$$K_d = K_p T_d \quad (6)$$

Ambos os métodos, para sintonia PID, são apresentados na Tabela 1.

Tabela 1: Sintonias de Ziegler-Nichols e Cohen-Coon para controladores PID

	$K_p$	$T_i$	$T_d$
<b>Ziegler-Nichols</b>	$1.2 * \frac{\tau}{L}$	$2 * L$	$0.5 * L$
<b>Cohen Coon</b>	$\frac{\tau}{L * (\frac{4}{3} + \frac{R}{4})}$	$L * (\frac{32 + 6 * R}{13 + 8 * R})$	$\frac{4}{13 + 8 * R}$

Após realizada a sintonia do controlador, este é adicionado ao sistema através da equação (7).

$$G_c(s) = K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s \quad (7)$$

## 1.3 Método de Discretização de Tustin

Como um método de discretização o método de Tustin tem como objetivo transformar uma função de tempo contínuo para um sistema de tempo discreto utilizando uma aproximação baseada na série de Taylor. Logo, obtemos uma  $G(z)$  a partir de uma  $G(s)$  aplicando a 8 à variável  $s$ .

$$s = \frac{2(1 - z^{-1})}{T(1 + z^{-1})} \quad (8)$$

## 1.4 Cálculo dos erros

Foi aplicado o cálculo dos seguintes erros para a resposta controlada pelos controladores PID contínuos sintonizados por ZN e CC: Absoluto, Absoluto Temporal, Quadrático e Quadrático Temporal, onde respectivamente são obtidos pelas equações (9), (10), (11) e (12).

$$\sum_{n=0}^{TF} |ref - Y(hT)| \quad (9)$$

$$\sum_{n=0}^{TF} |ref - Y(hT)| * hT \quad (10)$$

$$\sum_{n=0}^{TF} |ref - Y(hT)|^2 \quad (11)$$

$$\sum_{n=0}^{TF} (|ref - Y(hT)| * hT)^2 \quad (12)$$

Os métodos de cálculo dos erros apresentados foram aplicados na resposta controlada com o objetivo de comparar quantitativamente qual método de sintonia resultou em um controlador mais eficiente para a planta do estudo de caso.

## 2 Objetivo

Os objetivos gerais deste experimento podem ser divididos nos tópicos a seguir:

- Obtenção da função de transferência de um sistema de modelagem desconhecida utilizando o método de Smith supracitado a partir da resposta do sistema em malha aberta.
- Projeto da sintonia de um controlador PID para o sistema utilizando os métodos de Ziegler-Nichols e Cohen-Coon para comparação.
- Discretização de ambos os controladores sintonizados para dois valores de tempo de amostragem diferentes para comparação.

## 3 Desenvolvimento

### 3.1 Identificação do sistema

A priori, foi utilizado o método de *Smith* aplicado na curva de reação da planta que é obtida através do diagrama representado na figura 2. Obtendo a  $G(s)$  de primeiro grau aproximada que representa o comportamento do sistema de malha aberta respectivo a  $G(s)$  definida em (13).

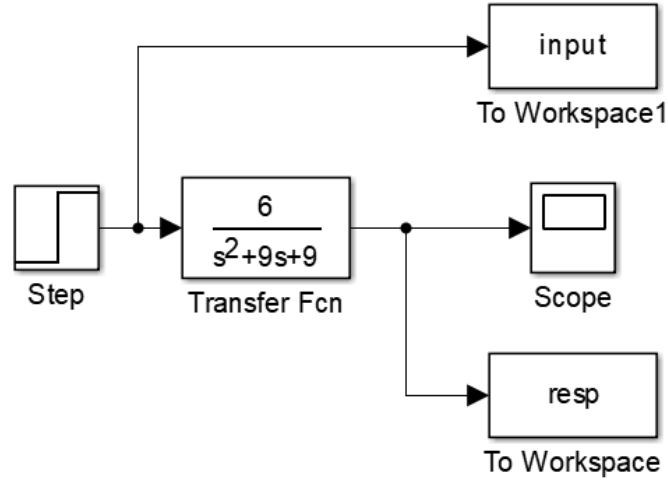


Figura 2: Diagrama de blocos para obtenção da curva de reação da planta utilizando a  $G(s)$  real

$$G(s) = \frac{6}{s^2 + 9s + 9} \quad (13)$$

Utilizando as equações (2), (3) e (4), foram obtidos os valores  $\tau = 0.8850$ ,  $L = -0.1270$  e  $K = 0.6664$  respectivamente. Dessa forma, a  $G(s)$  obtida através do método de Smith para o sistema definido em (13) é apresentada em (14).

$$G(s) = \frac{0.6664}{0.8850s + 1} e^{-0.1270} \quad (14)$$

### 3.2 Sintonia dos controladores PID

Utilizando as equações apresentadas na Tabela 1 respectivas aos métodos de sintonia e a equação (7), foram calculadas as constantes  $K_p$ ,  $K_i$  e  $K_d$  para que fossem definidas as funções de transferência que representam os controladores PID contínuos calculados a partir dos métodos de Ziegler-Nichols (15) e de Cohen-Coon (16).

$$G_c(s) = 8.3622 + \frac{32.9221}{s} + 0.5310s \quad (15)$$

$$G_c(s) = 5.0894 + \frac{17.2536}{s} + 1.4389s \quad (16)$$

### 3.3 Discretização dos controladores PID

Após definidas as funções de transferência dos controladores PID contínuos de (15) e (16), foi aplicado, em ambas, o método de discretização de Tustin (Trapezoidal) para duas frequências de amostragem diferentes, onde foram obtidas (17) e (18) utilizando o método de Ziegler-Nichols para  $T = 0.1s$  e  $T = 0.001s$  respectivamente, e (19) e (20) utilizando o método de Cohen-Coon para  $T = 0.1s$  e  $T = 0.001s$  respectivamente.

$$G_c(z) = \frac{10.3z^2 - 7.255z + 0.265}{z^2 - z} \quad (17)$$

$$G_c(z) = \frac{8.922z^2 - 17.65z + 8.724}{z^2 - 1.98z + 0.9802} \quad (18)$$

$$G_c(z) = \frac{6.69z^2 - 5.676z + 0.7212}{z^2 - z} \quad (19)$$

$$G_c(z) = \frac{6.538z^2 - 12.96z + 6.42}{z^2 - 1.98z + 0.9802} \quad (20)$$

## 4 Resultados e discussões

Os resultados apresentados nesta seção foram obtidos utilizando o software *Matlab* em conjunto com o Simulink.

### 4.1 Sistema real versus sistema aproximado pelo método de *Smith*

As respostas em malha fechada das funções de transferência original definida em (13) e aproximada (14) são apresentadas na figura 3. Para obtenção da resposta ao degrau unitário aplicado a  $G(s)$  Real e aplicado a  $G(s)$  aproximada pelo método de Smith foram utilizados os diagramas de blocos representados nas figuras 2 e 4 respectivamente.

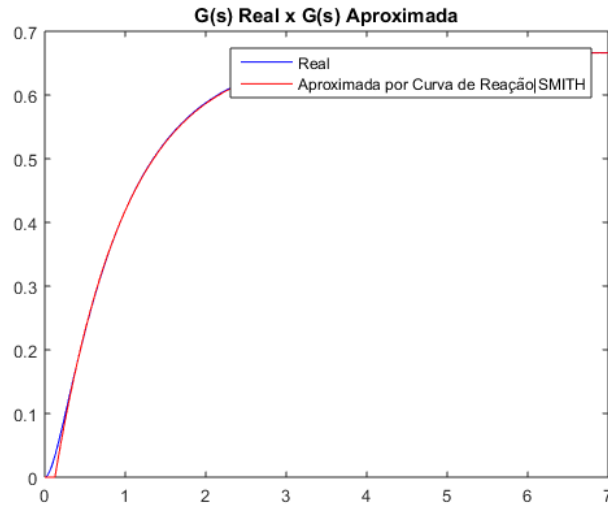


Figura 3: Respostas em malha fechada das funções de transferência original e aproximada

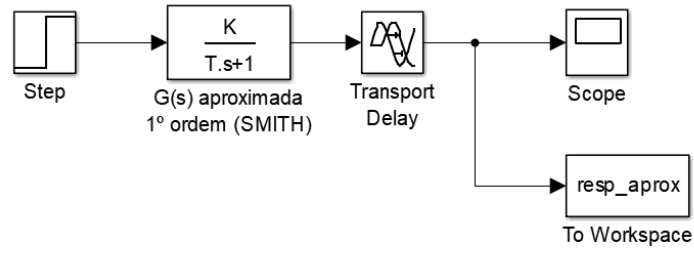


Figura 4: Diagrama de blocos para obtenção da curva de reação da planta utilizando a  $G(s)$  aproximada para fins de comparação com a curva de reação obtida com a  $G(s)$  real

Observando ambas as respostas, conclui-se que a aproximação da função de transferência pelo método de *Smith* é satisfatória por se apresentar de maneira similar à original.

## 4.2 Comparação entre os métodos de sintonia para um controlador PID contínuo

As respostas em malha fechada obtidas após a inserção de um controlador PID contínuo foram obtidas através do diagrama de blocos representado na figura 5 e são apresentadas na figura 6, comparando os dois métodos de sintonia utilizados.

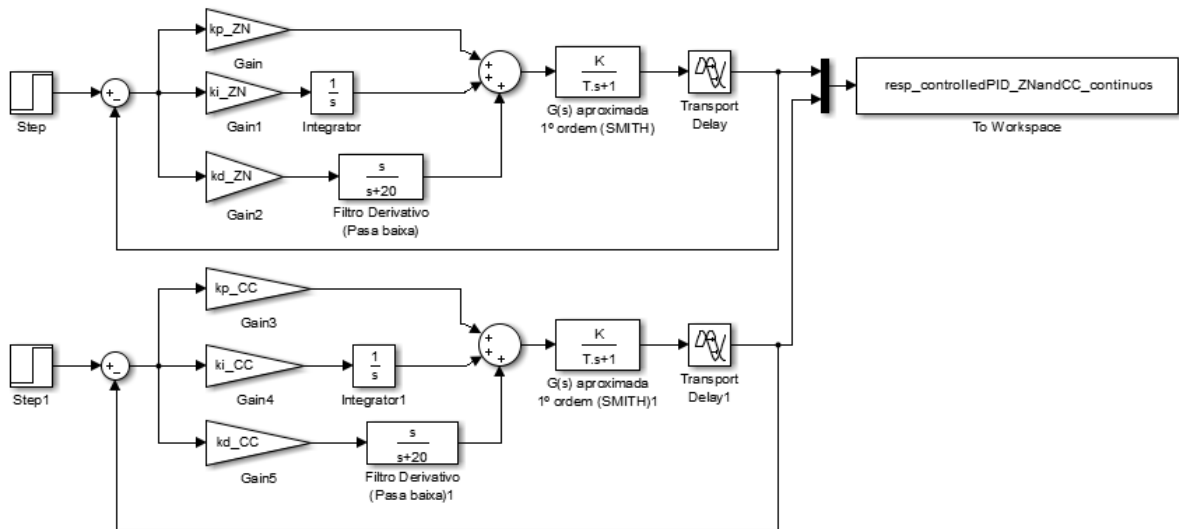


Figura 5: Diagrama de bloco do sistema em malha fechada com controlador PID contínuo

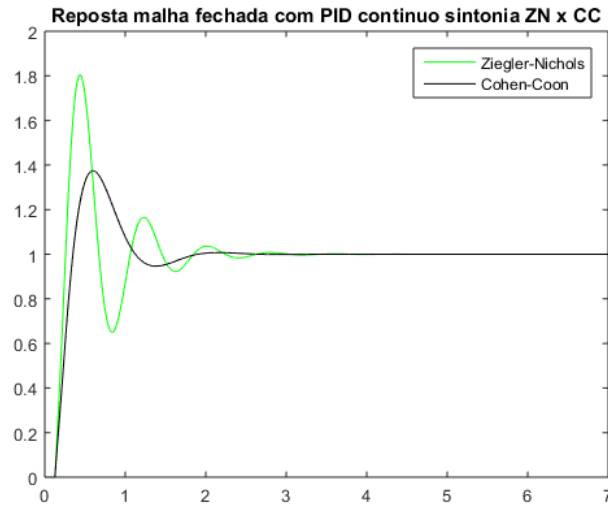


Figura 6: Resposta do sistema em malha fechada com controlador PID contínuo comparando ambos os métodos de sintonia

Ambos os métodos de sintonia foram capazes de controlar o sistema e fazê-lo seguir a referência (igual a 1). É importante salientar que, para esta aplicação, o método de Cohen-Coon apresentou uma resposta mais satisfatória do que o método de Ziegler-Nichols, tendo em vista que seu valor sobressinal e seu tempo de assentamento foram menores.

#### 4.3 Comparação quantitativa entre os métodos de sintonia para um controlador PID contínuo através do cálculo dos erros

Utilizando as equações apresentadas em (9), (10), (11) e (12), foram calculados os respectivos erros para a resposta controlada pelo PID contínuo sintonizado pelos métodos Ziegler-Nichols e Cohen-Coon. A figura 7 apresenta os resultados do erro absoluto, erro absoluto ponderado pelo tempo, erro quadrático e erro quadrático ponderado pelo tempo.

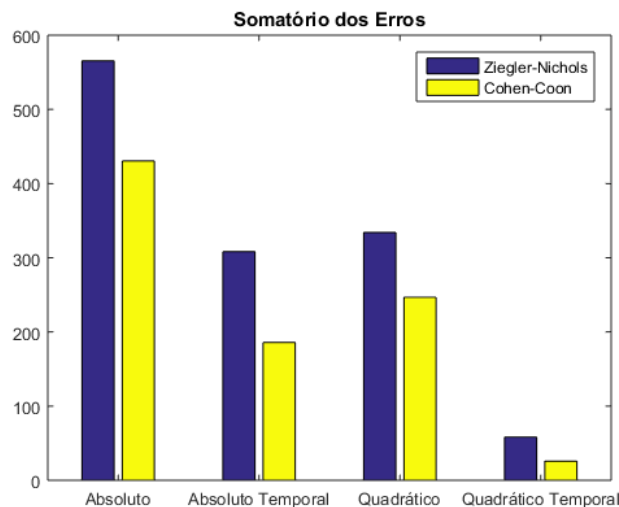


Figura 7: Erros medidos na resposta controlada pelos controladores PID contínuos sintonizados por ZN e CC



Como é possível observar, os erros apresentados pelo método de Cohen-Coon foram menores do que os apresentados pelo método de Ziegler-Nichols, reafirmando a resposta mais satisfatória obtida através do primeiro.

#### 4.4 Comparação entre os métodos de sintonia para um controlador PID discreto

As respostas em malha fechada obtidas após a discretização dos controladores PID apresentados na seção 4.2 foram implementadas através do diagrama de blocos representado na figura 8 para  $T = 0.1s$  e  $T = 0.001s$  e as respostas controladas pelos controladores discretizados com os respectivos períodos citados são apresentadas nas figuras 9 e 10 respectivamente.

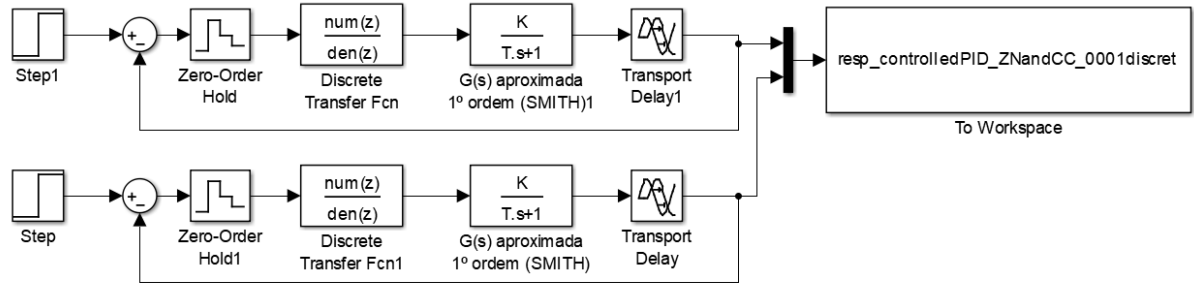


Figura 8: Diagrama de bloco do sistema em malha fechada com controlador PID discreto para  $T = 0.1s$  e  $T = 0.001s$ . (OBS: É necessário verificar se o passo de simulação é menor que o período utilizado na discretização.)

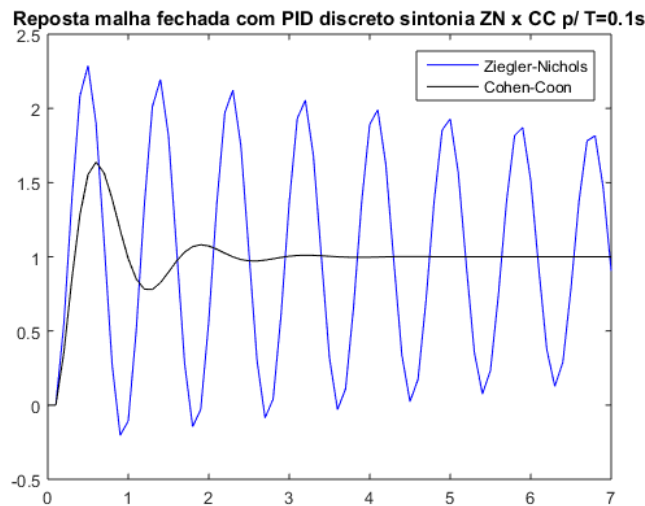


Figura 9: Resposta do sistema em malha fechada com controlador PID discreto para  $T = 0.1s$  comparando ambos os métodos de sintonia

Assim como ocorreu para o controlador PID contínuo, o método de Cohen-Coon apresentou resultado mais satisfatório do que o método de Ziegler-Nichols, tendo em vista que

o segundo não foi capaz de estabilizar a resposta do sistema no tempo apresentado no gráfico (7 segundos), enquanto o primeiro foi capaz de estabilizar em menos de 4 segundos, apresentando, ainda, valor menor de sobressinal.

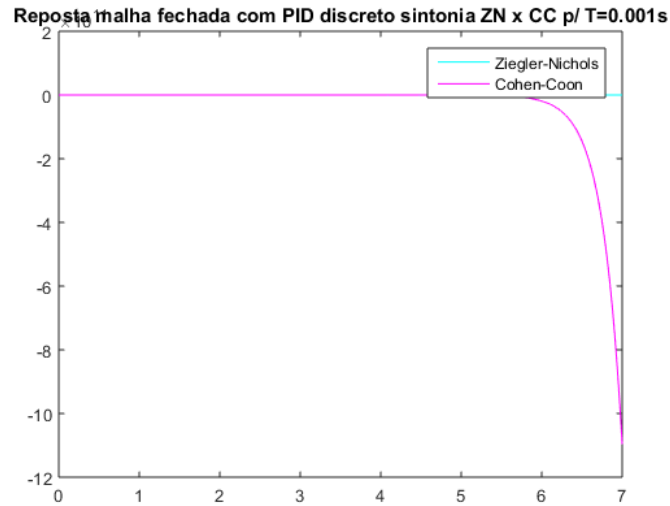


Figura 10: Resposta do sistema em malha fechada com controlador PID discreto para  $T = 0.001s$  comparando ambos os métodos de sintonia

Já o controlador PID discreto com  $T = 0,001s$  não foi capaz de controlar o sistema com nenhum dos métodos de sintonia. A resposta obtida pelo sistema com este controlador é, no mínimo, inusitada, tendo em vista que pelo método de Ziegler-Nichols esta foi igual a zero durante todo o período de tempo amostrado e, pelo método de Cohen-Coon, decresceu exponencialmente atingindo valores negativos (para uma referência igual a 1).