Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais
Campus Leopoldina

Engenharia de Controle e Automação

RELATÓRIO DE ATIVIDADE PRÁTICA 03
Série de Fourier para sinais periódicos discretos e teorema da amostragem

Lucas Daniel de Melo Borges
Lucas Guimarães da Rocha

Prof. Murillo Ferreira dos Santos, D. Eng.

Leopoldina, MG
10 de março de 2021

Resumo

Um sinal periódico no domínio do tempo discreto foi gerado pela soma de três senóides com amplitudes e frequências diferentes. A seguir, foi utilizada a Transformada Rápida de Fourier (*Fast Fourier Transform* - FFT) para possibilitar a análise do espectro de frequência deste sinal afim de validar do método, tendo em vista que suas componentes harmônicas eram conhecidas com antecedência.

Após a validação do método, este foi aplicado em um sinal quadrado periódico afim de análisar seu espectro harmônico no domínio da frequência.

1 Introdução

1.1 A série de Fourier

Seja $f(t)$ uma função absolutamente integrável e períodica em um intervalo de tempo (período) T, ou seja, $f(t) = f(t+T)$. Esta função pode ser descrita pela soma de uma constante com infinitos termos senoidais e cossenoidais com amplitudes e frequências diferentes, como apresentado em (1), (2) e (3). Esta soma é chamada de Série de Fourier.

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(\frac{2\pi nt}{T}) + b_n \sin(\frac{2\pi nt}{T})) \tag{1}$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(\frac{2\pi nt}{T})dt \tag{2}$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(\frac{2\pi nt}{T})dt \tag{3}$$

Através das propriedades trigonométricas é possível reescrever a Série de Fourier unindo os termos de seno e cosseno presentes no somatório em um único termo senoidal. Isto é possível unindo a_n e b_n em f_n utilizando a equação 4. Os termos do somatório passam a ser defasados por φ_n, que é calculado através da equação 5. O termo constante da série pode ser representado por f_0 através da equação 6.

$$f_n = \sqrt{a^2 + b^2} \tag{4}$$

$$\varphi_n = \arctan\frac{a_n}{b_n} \tag{5}$$

$$f_0 = \frac{a_0}{2} \tag{6}$$

Sendo assim, a Série de Fourier pode ser reescrita pela equação 7.

$$f(t) = f_0 + \sum_{n=1}^{\infty} f_n \sin(\frac{2\pi nt}{T} + \varphi_n) \tag{7}$$

1.2 A Transformada de Fourier

Aproximando-se a periodicidade de uma função para o intervalo $]-\infty, \infty[$, é possivel generalizar a Série de Fourier para funções não periódicas. Obtemos, dessa forma, a

Transformada de Fourier, uma transformação linear que transfere funções do domínio do tempo para o domínio da frequência.

A Transformada de Fourier $F(\omega)$ de uma função $f(t)$ pode ser obtida através da equação 8.

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt \tag{8}$$

Para exemplificar a ação da Transformada de Fourier, observemos a figura 1.

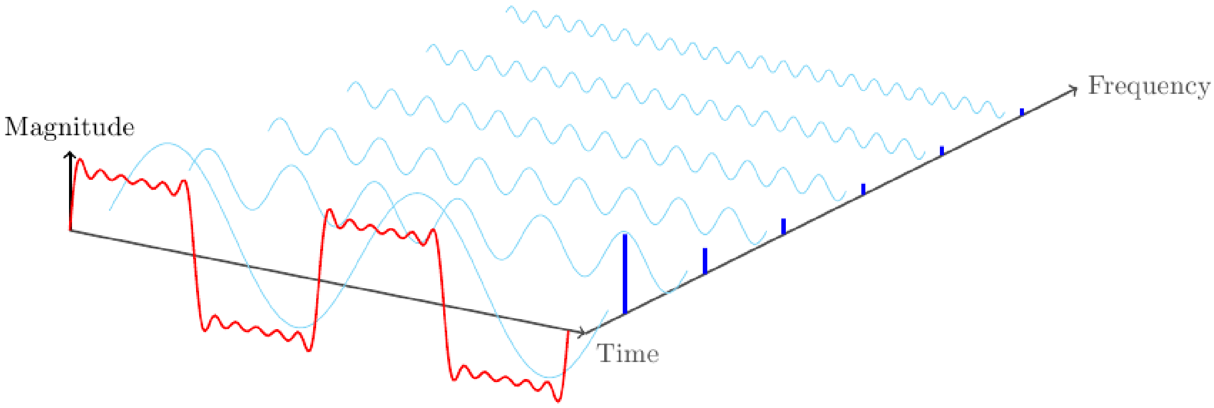

Figura 1: Transformada de Fourier observada graficamente
Fonte: Disponível em <https://tex.stackexchange.com/questions/127375/replicate-the-fourier-transform-time-frequency-domains-correspondence-illustrati>.

A função em vermelho está no domínio do tempo e, como supracitado, por ser uma função periódica, pode ser descrita pela Série de Fourier. As funções em azul-claro são todas as funções senoidais que compõem a Série de Fourier da função em vermelho (para este exemplo a componente constante f_0 é igual a 0). A série em azul, por sua vez, representa as amplitudes de todas as funções em azul-claro que compõem a função em vermelho. Na prática, a Transformada de Fourier transforma a função em vermelho na série em azul.

1.2.1 A Transformada Discreta de Fourier

Em equipamentos digitais, não é possível trabalhar com a variável tempo no formato contínuo, sendo necessário discretizá-la para realizar quaisquer cálculos. A Transformada Discreta de Fourier, apresentada na equação 9, é uma versão da Transformada de Fourier adaptada para trabalhar com variáveis discretas com N amostras.

$$F(\omega) = \frac{1}{N}\sum_{t=0}^{N-1} f(t)e^{-\dfrac{j2\pi\omega t}{N}} \tag{9}$$

Uma forma eficiente de se calcular a Transformada Discreta de Fourier de uma função é através do algoritmo chamado de ”Transformada Rápida de Fourier”, comumente conhecido como FFT (*Fast Fourier Transform*). Enquanto os algoritmos simples para a Transformada Discreta de Fourier possuem complexidade $O(N^2)$, o algoritmo FFT, que é baseado no método de dobramentos sucessivos, possui complexidade $O(NlogN)$, o que garante uma redução considerável no tempo de processamento. Para o desenvolvimento dos experimentos relatados neste documento foi utilizada a função **fft()** nativa do *software* MATLAB, equivalente à Transformada Rápida de Fourier.

2 Objetivo

O objetivo generalizado destes experimentos é analisar sinais periódicos no domínio do tempo do ponto de vista do domínio da frequência utilizando a Transformada Discreta de Fourier.

3 Desenvolvimento

3.1 1ª Análise

Na primeira análise o sinal apresentado em (10) foi estudado obtendo-se o seu espectro harmônico considerando uma amostragem de $N = 1000$ pontos por ciclo.

$$x(t) = 1,0 \sin(2\pi t) + 0,2 \sin(6\pi t) + 0,05 \sin(20\pi t) \tag{10}$$

Utilizando-se o *software* MATLAB foi construído e plotado o sinal definido em (10) juntamente com os 3 sinais senoidais que o compõem separadamente, que, por sua vez, podem ser identificados como $x1$, $x2$ e $x3$ respectivamente e são observados na figura 2.

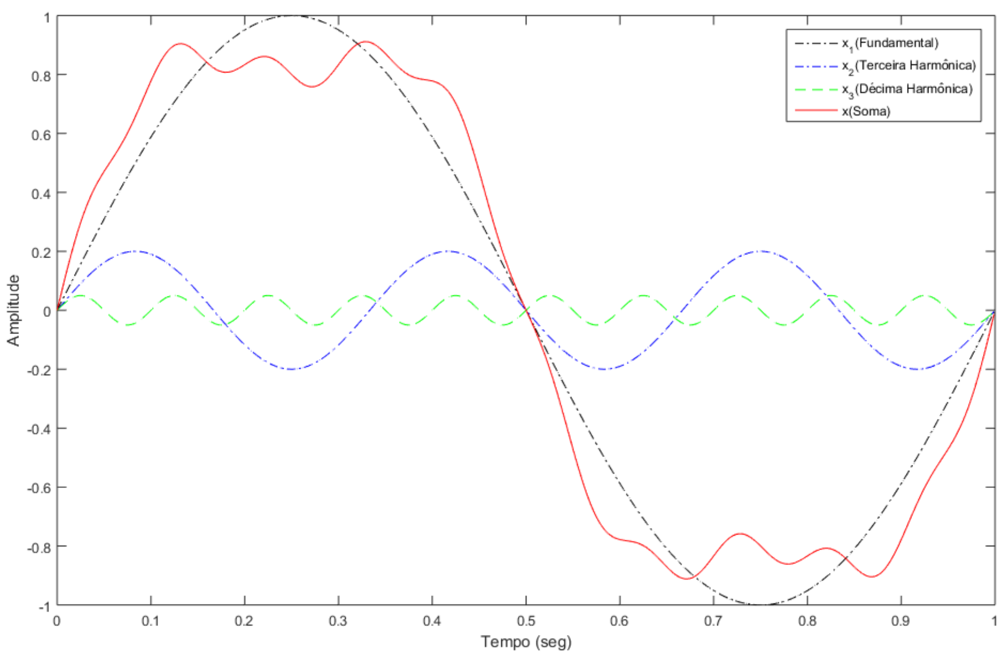

Figura 2: Sinal $x(t)$ em função do tempo e as senoides que compõe o sinal

Posteriormente, foi obtido o espectro harmônico do sinal apresentado em (10) através da utilização da função **fft()**. O resultado obtido é apresentado na figura 3.

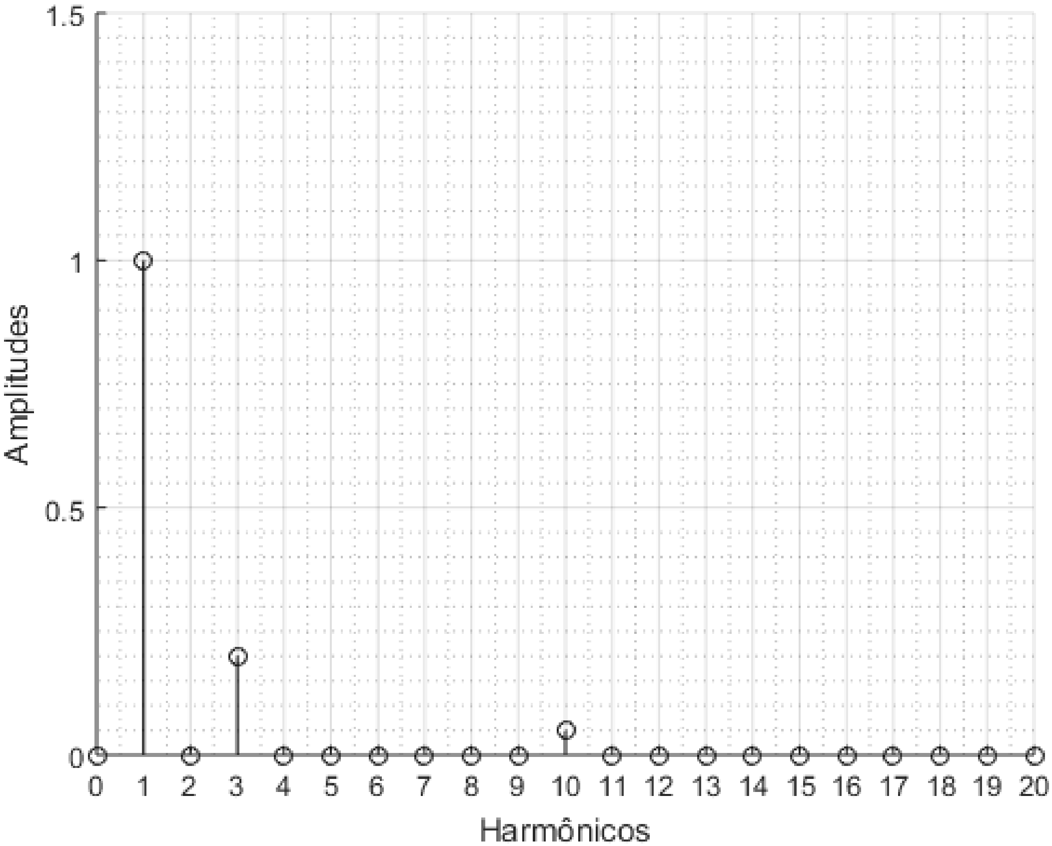

Figura 3: Espectro harmônico do sinal $x(t)$ definido em na equação 10

Com base na análise dos gráficos apresentados acima, foram respondidas as seguintes questões importantes acerca do sinal $x(t)$:

1. Qual a frequência fundamental deste sinal em Hz?

   Ao analisar as senoides que compõe o sinal em (10) observamos que a senoide representada por $x1$ na figura 2 possui a frequência de 2π rad/s que é a menor entre as três componentes do sinal. Nota-se, também, que as frequências de $x2$ e $x3$ são múltiplas de 2π. Portanto, a frequência fundamental desse sinal é 2π rad/s, equivalente a **1Hz**.

2. Gere o gráfico com o sinal em função do tempo e seu espectro. Qual a componente CC deste sinal? O resultado da fft, $Xjw(1)$, condiz com o esperado?

   Os gráficos gerados são apresentados nas figuras 2 e 3, respectivamente. Pode-se observar através da figura 3 que o termo x_0 da Série de Fourier, que representa a componente CC do sinal, é igual a **0**. Isto que condiz com o esperado, pois o somatório que forma o sinal $x(t)$ definido em (10) é composto apenas por uma soma de senoides.

3. Qual o módulo das componentes $Xjw(2)$, $Xjw(4)$ e $Xjw(11)$? Esses valores são correspondentes às amplitudes das componentes senoidais do sinal?

   Pode-se observar, através da figura 3, que os módulos(amplitudes) das componentes $Xjw(2)$(fundamental), $Xjw(4)$(terceira harmônica) e $Xjw(11)$(décima harmônica) são, respectivamente, **1**, **0,2**, e **0,05**. Esta informação é condizente com a teoria, pois ao analisar a equação 10 que define $x(t)$ podemos observar que os resultados são respectivos as amplitudes de cada senoide no somatório que compõe o sinal resultante, sendo estes $\mathbf{1{,}0}\sin(\mathbf{1} * 2\pi t)$ (fundamental), $\mathbf{0{,}2}\sin(\mathbf{3} * 2\pi t)$ (terceira harmônica) e $\mathbf{0{,}05}\sin(\mathbf{10} * 2\pi t)$ (décima harmônica).

4. Existe defasagem entre $Xjw(2)$, $Xjw(4)$ e $Xjw(11)$? Justifique.

   Pode-se observar, através da equação 10, que não há defasagem entre $x1$, $x2$ e $x3$ pois as frequências de $x2$ e $x3$ são múltiplas da frequência de $x1$. Também pode ser afirmado que não existe defasagem entre $x1$(respectivo a $Xjw(2)$), $x2$(respectivo a $Xjw(4)$) e $x3$(respectivo a $Xjw(11)$) através da análise da figura 2, que mostra que os três sinais se encontram em 0, o que não aconteceria caso houvesse defasagem entre eles.

3.2 2ª Análise

Na segunda análise um sinal quadrado com 100 amostras em 1 ciclo completo (as cinquenta primeiras amostras possuem o valor 1 e as cinquenta seguintes possuem o valor 0) com $\Delta t = 0,01$ foi estudado.

Utilizando-se o *software* MATLAB foi construído e plotado o sinal quadrado que é apresentado na figura 4.

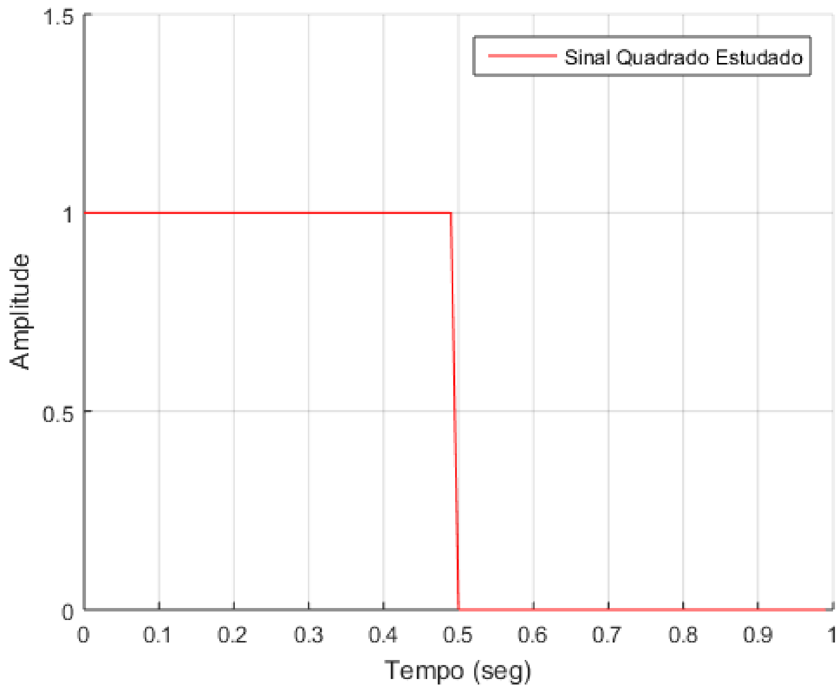

Figura 4: Sinal $y(t)$ de uma onda quadrada em função do tempo

A seguir, foram calculadas analiticamente as componentes y_0, Fundamental, Terceira Harmônica e Quinta Harmônica da Série de Fourier que representa o sinal quadrado estudado. Foram obtidos, respectivamente, os sinais senoidais (12), (13) e (14). Estes sinais foram plotados em um gráfico, apresentado na figura 5.

$$
\begin{aligned}
y_0 &= 0,5 && (11)\\
y_1(t) &= 0,6366 \sin(2\pi t) && (12)\\
y_3(t) &= 0,2122 \sin(2\pi 3t) && (13)\\
y_5(t) &= 0,1273 \sin(2\pi 5t) && (14)
\end{aligned}
$$

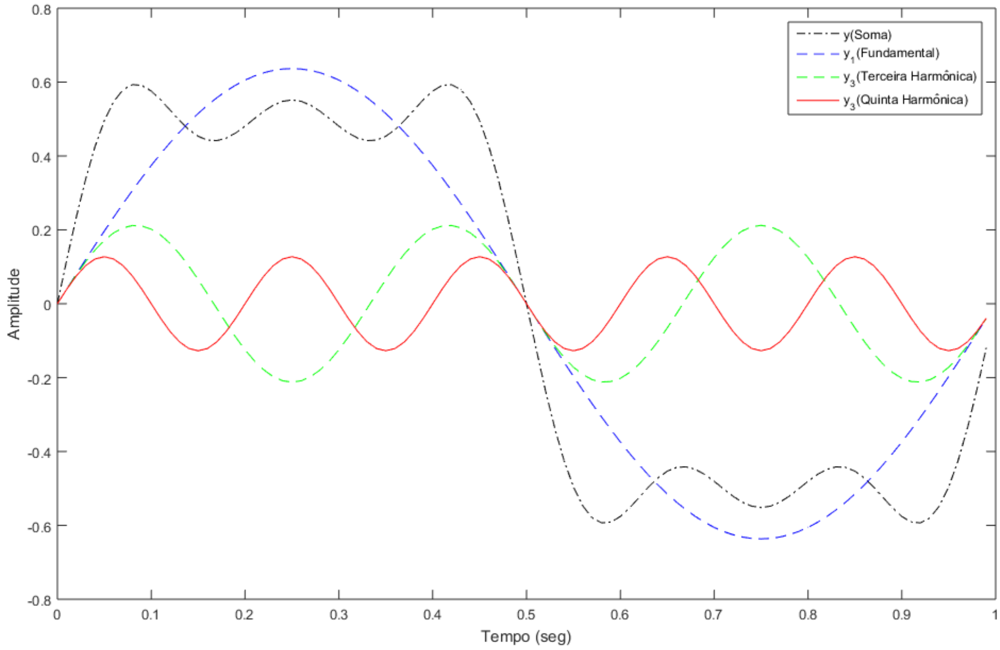

Figura 5: Sinal $y(t)$ em função do tempo e as senoides que compõe o sinal

Posteriormente, foi obtido o espectro harmônico do sinal apresentado na figura 4 através da utilização da função **fft()**. O resultado obtido é apresentado na figura 6.

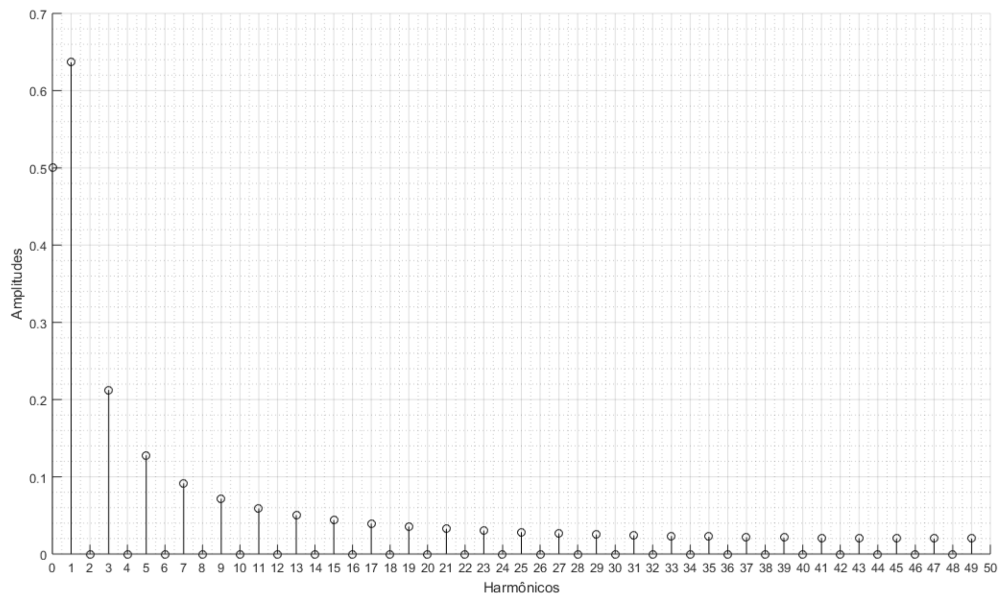

Figura 6: Espectro harmônico da onda quadrada apresentada na figura 4

Com base na análise dos gráficos apresentados acima, foram respondidas as seguintes questões importantes acerca do sinal $y(t)$:

1. Qual a frequência fundamental deste sinal em Hz?

   Ao analisar a senoide da componente fundamental apresentada em (12) observamos que a função seno possui a frequência de $2\pi rad/s$. Além disso, podemos observar na figura 5 que em 1 segundo o sinal respectivo a componente fundamental completou um ciclo. Portanto, a frequência fundamental desse sinal é 2π rad/s, equivalente a **1Hz**.

2. Gere o gráfico com o sinal em função do tempo e seu espectro. Qual a componente CC deste sinal? O resultado da fft, $Xjw(1)$, condiz com o esperado?

   Os gráficos gerados são apresentados nas figuras 5 e 6, respectivamente. Pode-se observar através da figura 3 que o termo y_0 (respectivo a $Xjw(1)$) da Série de Fourier que representa a componente CC do sinal é **0,5**, o que condiz com o esperado pois é coerente com o resultado encontrado analiticamente apresentado em 12.

3. Qual o módulo das componentes $Xjw(2)$, $Xjw(4)$ e $Xjw(6)$? Esses valores são correspondentes às amplitudes das componentes senoidais do sinal?

   Ao analisar os respectivos sinais obtidos analiticamente apresentados em (12), (13) e (14), pode-se notar que o módulo das componentes são, respectivamente, **0,6366**, **0,2122** e **0,1273**, o que condiz com o resultado obtido utilizando o MATLAB, que é ilustrado na figura 6.

4. Existe defasagem entre $Xjw(2)$, $Xjw(4)$ e $Xjw(6)$? Justifique.

   Ao analisar os respectivos sinais obtidos analiticamente apresentados em (12), (13) e (14), pode-se notar que não há defasagem entre eles. Também pode ser afirmado que não existe defasagem entre $Xjw(2)$, $Xjw(4)$ e $Xjw(6)$ através da análise da figura 5, que mostra que os 3 sinais se encontram em 0, o que não aconteceria caso houvesse defasagem entre eles.

4 Considerações Finais

Com a realização dos experimentos proposto foi possível compreender a análise de um sinal discreto no domínio da frequência através da Transformada Discreta de Fourier, bem como adquirir experiência na utilização da função **fft()** do MATLAB.

Associando os experimentos à teoria pôde-se verificar uma boa aproximação dos coeficientes gerados pelo algoritmo da **fft()** com os coeficientes calculados analitcamente, validando o funcionamento da ferramenta de simulação.