Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais
Campus Leopoldina

Engenharia de Controle e Automação

RELATÓRIO DE ATIVIDADE PRÁTICA 04
Introdução a Função Descritiva abordando o uso da Série de Fourier

Lucas Daniel de Melo Borges
Lucas Guimarães da Rocha

Prof. Murillo Ferreira dos Santos, D. Eng.

Leopoldina, MG
17 de março de 2021

Resumo

Um dispositivo não-linear do tipo **relé ideal** foi estudado no domínio da frequência através da Transformada Discreta de Fourier utilizando o *software* MATLAB, calculando os componentes harmônicos da Série de Fourier que descreve este elemento e comparando o sinal gerado pela soma destas componentes com o sinal gerado pela saída do dispositivo.

A seguir, foi calculada a função descritiva deste dispositivo com base na Série de Fourier obtida considerando apenas a harmônica fundamental para fins de validação deste método.

1 Introdução teórica

1.1 A série de Fourier

Seja $f(t)$ uma função absolutamente integrável e períodica em um intervalo de tempo (período) T, ou seja, $f(t) = f(t+T)$. Esta função pode ser descrita pela soma de uma constante com infinitos termos senoidais e cossenoidais com amplitudes e frequências diferentes, como apresentado em (1), (2), (3) e (4). Esta soma é chamada de Série de Fourier.

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(\frac{2\pi nt}{T}) + b_n \sin(\frac{2\pi nt}{T})) \tag{1}$$

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)dt \tag{2}$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(\frac{2\pi nt}{T})dt \tag{3}$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(\frac{2\pi nt}{T})dt \tag{4}$$

Através das propriedades trigonométricas é possível reescrever a Série de Fourier unindo os termos de seno e cosseno presentes no somatório em um único termo senoidal. Isto é possível unindo a_n e b_n em f_n utilizando a equação 5. Os termos do somatório passam a ser defasados por φ_n, que é calculado através da equação 6. O termo constante da série pode ser representado por f_0 através da equação 7.

$$f_n = \sqrt{a^2 + b^2} \tag{5}$$

$$\varphi_n = \arctan\frac{a_n}{b_n} \tag{6}$$

$$f_0 = \frac{a_0}{2} \tag{7}$$

Sendo assim, a Série de Fourier pode ser reescrita pela equação 8.

$$f(t) = f_0 + \sum_{n=1}^{\infty} f_n \sin(\frac{2\pi nt}{T} + \varphi_n) \tag{8}$$

1.2 A Transformada de Fourier

Aproximando-se a periodicidade de uma função para o intervalo $]-\infty, \infty[$, é possivel generalizar a Série de Fourier para funções não periódicas. Obtemos, dessa forma, a Transformada de Fourier, uma transformação linear que transfere funções do domínio do tempo para o domínio da frequência.

A Transformada de Fourier $F(\omega)$ de uma função $f(t)$ pode ser obtida através da equação 9.

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt \tag{9}$$

Para exemplificar a ação da Transformada de Fourier, observemos a figura 1.

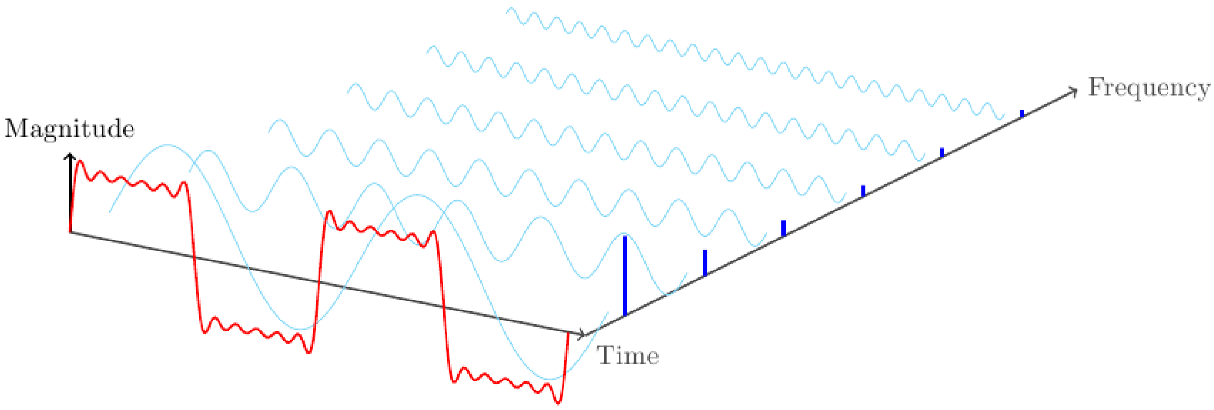

Figura 1: Transformada de Fourier observada graficamente
Fonte: Disponível em <https://tex.stackexchange.com/questions/127375/replicate-the-fourier-transform-time-frequency-domains-correspondence-illustrati>.

A função em vermelho está no domínio do tempo e, como supracitado, por ser uma função periódica, pode ser descrita pela Série de Fourier. As funções em azul-claro são todas as funções senoidais que compõem a Série de Fourier da função em vermelho (para este exemplo a componente constante f_0 é igual a 0). A série em azul, por sua vez, representa as amplitudes de todas as funções em azul-claro que compõem a função em vermelho. Na prática, a Transformada de Fourier transforma a função em vermelho na série em azul.

1.2.1 A Transformada Discreta de Fourier

Em equipamentos digitais, não é possível trabalhar com a variável tempo no formato contínuo, sendo necessário discretizá-la para realizar quaisquer cálculos. A Transformada Discreta de Fourier, apresentada na equação 10, é uma versão da Transformada de Fourier adaptada para trabalhar com variáveis discretas com N amostras.

$$F(\omega) = \frac{1}{N}\sum_{t=0}^{N-1} f(t)e^{-\dfrac{j2\pi\omega t}{N}} \tag{10}$$

Uma forma eficiente de se calcular a Transformada Discreta de Fourier de uma função é através do algoritmo chamado de "Transformada Rápida de Fourier", comumente conhecido como FFT (*Fast Fourier Transform*). Enquanto os algoritmos simples para a Transformada Discreta de Fourier possuem complexidade $O(N^2)$, o algoritmo FFT, que é baseado no método de dobramentos sucessivos, possui complexidade $O(NlogN)$, o que garante uma redução considerável no tempo de processamento. Para o desenvolvimento dos experimentos relatados neste documento foi utilizada a função **fft()** nativa do *software* MATLAB, equivalente à Transformada Rápida de Fourier.

1.3 Elementos não-lineares

Matematicamente, elementos não-lineares são elementos que, para um sinal de entrada $u(t)$, o sinal de saída $y(t)$ gerado pelo elemento não obedece ao princípio da superposição. Desta forma, não existem métodos analíticos capazeses de apresentar soluções exatas para as equações de sistema que possua estes elementos.

O princípio da superposição diz que para uma entrada $u(t)$ formada pela combinação linear de n entradas $u_n(t)$, a saída $y(t)$ gerada pode ser representada por uma combinação linear das saídas $y_n(t)$ geradas individualmente por cada entrada $u_n(t)$, como apresentado nas equações 11, 12, 13 e 14.

$$u(t) = \alpha_1 u_1(t) + ... + \alpha_n u_n(t) \quad (11)$$

$$y(t) = \alpha_1 y_1(t) + ... + \alpha_n y_n(t) \quad (12)$$

$$u(t) \rightarrow y(t) \quad (13)$$

$$u_n(t) \rightarrow y_n(t) \quad (14)$$

Na prática, as respostas geradas por sistemas que contenham elementos não-lineares não seguem um padrão analítico e calculado. Estes sistemas são capazes de gerar respostas com formatos completamente diferentes para entradas do mesmo tipo, mas com amplitudes diferentes.

1.3.1 Funções descritivas

Na maioria dos casos, para uma entrada $x(t) = X \sin \omega_0 t$, a resposta gerada por um elemento não-linear será não-senoidal, porém periódica com frequência igual à entrada. Sendo assim, como supracitado, é possível representar esta saída gerada através de uma Série de Fourier.

Hodiernamente, a maioria dos controladores utilizados possuem as características de um filtro passa-baixa. Um filtro passa-baixa é capaz de atenuar ruídos de sinais, o que, na prática, significa atenuar as componentes harmônicas mais altas em um sinal. Dessa forma, um controlador generalizado atenua as componentes harmônicas da saída gerada por uma não-linearidade, o que torna possível descrever esta através, apenas, de sua componente fundamental.

Portanto, dada uma entrada $x(t) = X \sin \omega_0 t$ aplicada a um elemento não-linear, nos termos da equação 8, a função descritiva complexa $N(X)$ deste é dada por:

$$N(X) = \frac{f_0 + f_1}{X} \angle \varphi_1 \quad (15)$$

2 Objetivo

Analisar um sinal periódico discreto no domínio da frequência com o uso da Transformada Discreta de Fourier (DFT - *Discrete Fourier Transform*). Posteriormente, reconstruir o sinal a fim de valiadar a representação em Funções Descritivas, que considera apenas a componente harmônica fundamental do sinal.

3 Desenvolvimento

O experimento propõe a utilização do elemento não linear "relé ideal"com frequência de 2π rad/s com as características mostradas na Tabela 1.

Tabela 1: Características do Relé Ideal proposto

ELEMENTO	PARÂMETROS	VALOR	ON	OFF
Relé Ideal	*Upper limit*	2	0	π
	Lower limit	1		

Na Figura 2 pode-se observar o comportamento não linear do relé ideal cuja as características foram mostradas na Tabela 1.

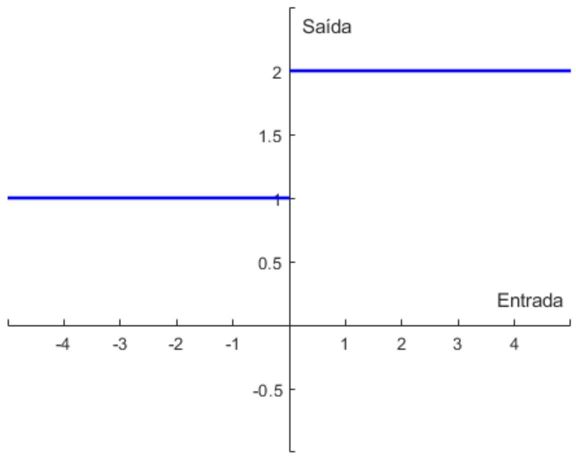

Figura 2: Comportamento não linear do relé ideal denominado Liga-Desliga

Analisando a Figura 2 pode-se observar que o Relé Ideal mantém a saída constante em 1 para valores de entrada menores que 0 e mantém a saída constante em 2 para valores de entrada maiores que 0.

A seguir são apresentadas seis questões importantes acerca do experimento relatado:

1. Representar o elemento não linear relé ideal através da série de Fourier de forma genérica para n harmônicos. Apresente a formação teórica juntamente com a representação obtida através da função **fft** do MATLAB.

2. Reconstitua o sinal aproximado considerando n até 1. Comente quão aproximada está a reconstituição.

3. Reconstitua o sinal aproximado considerando n até 3. Comente quão aproximada está a reconstituição.

4. Reconstitua o sinal aproximado considerando n até 7. Comente quão aproximada está a reconstituição.

5. A aproximação da Série de Fourier para o primeiro harmônico é válida? Argumente sua resposta.

6. Obtenha a função descritiva de forma genérica para um sinal de entrada da forma *X.sen(wt)* para o elemento não linear relé ideal apresentado no início da atividade.

Estudo 1
Aplicando a Série de Fourier para o sinal de saída para n harmônicos:
Cálculo de a_0:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}[\int_0^{\pi} 2d\omega t + \int_{\pi}^{2\pi} 1d\omega t]$$
$$a_0 = \frac{1}{\pi}[(2\pi - 0) + (2\pi - \pi)]$$
$$a_0 = 3$$

Cálculo de f_0:

$$f_0 = \frac{a_0}{2}$$
$$f_0 = \frac{3}{2} = 1,5$$

Cálculo de a_n:

$$a_n = \frac{1}{\pi}[\int_0^{2\pi} y(t)cos(n\omega t)d\omega t]$$
$$a_n = \frac{1}{\pi}[\int_0^{\pi} 2cos(n\omega t)d\omega t + \int_{\pi}^{2\pi} cos(n\omega t)d\omega t]$$
$$a_n = \frac{1}{\pi}[(\frac{2sen(n\pi)}{n} - \frac{2sen(0)}{n}) + (\frac{sen(2n\pi)}{n} - \frac{sen(n\pi)}{n})]$$
$$a_n = 0$$

Cálculo do b_n:

$$b_n = \frac{1}{\pi}[\int_0^{2\pi} y(t)cos(n\omega t)d\omega t]$$
$$b_n = \frac{1}{\pi}[\int_0^{\pi} 2sen(n\omega t)d\omega t + \int_{\pi}^{2\pi} sen(n\omega t)d\omega t]$$
$$b_n = \frac{1}{\pi}[(\frac{-2cos(n\pi)}{n} + \frac{2cos(0)}{n}) + (\frac{-cos(2n\pi)}{n} - \frac{cos(n\pi)}{n})]$$
$$b_n = \frac{1}{\pi}(\frac{-cos(n\pi)}{n} + \frac{1}{n})$$

Com os valores de a_0, a_n e a_n, obtêm-se a equação genérica de Fourier que descreve o sinal:

$$f(t) = 1,5 + \sum_{n=1}^{\infty}[b_n sin(nt)]$$

Utilizando a função ***fft*** do MATLAB foi obtido o espectro harmônico do sinal de saída do sistema com relé ideal que é apresentado na Figura 3.

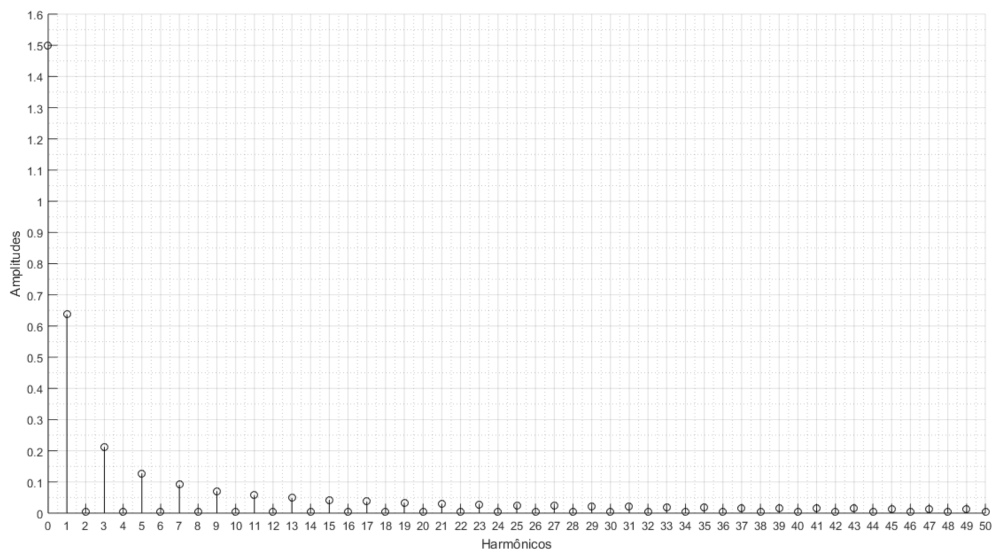

Figura 3: Espectro harmônico de frequência da saída para um sistema com relé ideal

Estudo 2

Reconstituindo o sinal aproximado pela Série de Fourier considerando n até 1 foi obtido o resultado apresentado na Figura 4.

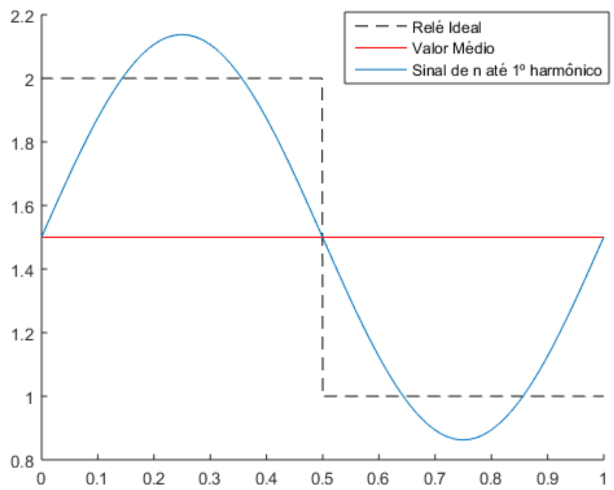

Figura 4: Sinal aproximado pela Série de Fourier considerando n até 1

Ao analisar a Figura 4 pode-se observar que a aproximação dos sinal utilizando a Série de Fourier considerando até o 1º harmônico é uma aproximação insuficiente para representar o sinal real destacado em azul pois têm-se uma senoide(sinal aproximado) para representar um sinal retangular (sinal real da saída do sistema com Relé Ideal).

Estudo 3

Reconstituindo o sinal aproximado pela Série de Fourier considerando n até 3 foi obtido o resultado apresentado na Figura 4.

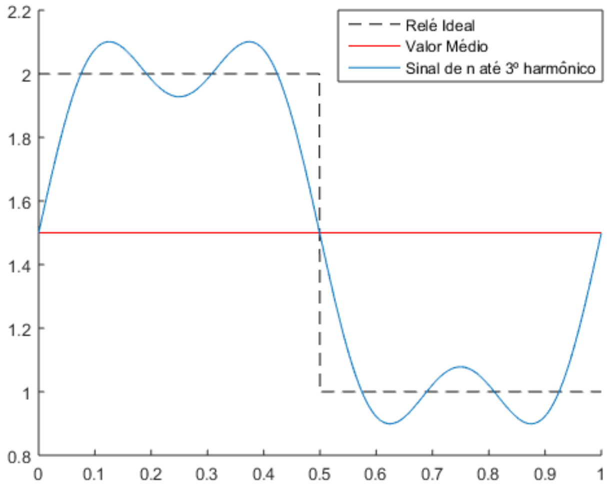

Figura 5: Sinal aproximado pela Série de Fourier considerando n até 3

Ao analisar a Figura 5 pode-se observar que a aproximação dos sinal utilizando a Série de Fourier considerando até o 3º harmônico ainda é uma aproximação insuficiente para representar o sinal real destacado em azul, porém, nota-se também que o sinal possui distorções devido devido a presença de mais harmônicos de maior frequência.

Estudo 4

Reconstituindo o sinal aproximado pela Série de Fourier considerando n até 7 foi obtido o resultado apresentado na Figura 6.

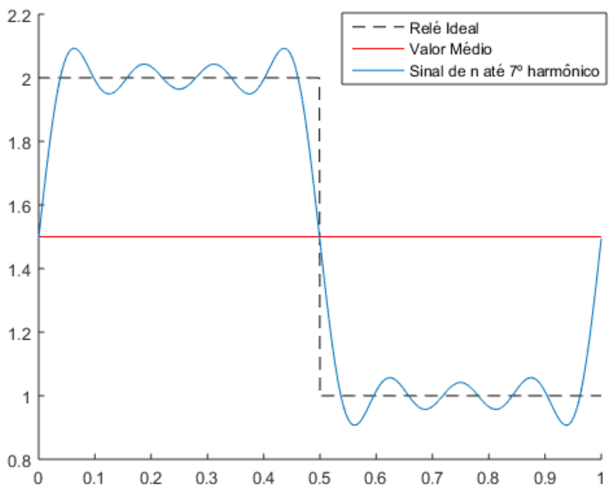

Figura 6: Sinal aproximado pela Série de Fourier considerando n até 7

Ao analisar a Figura 5 pode-se observar que a aproximação do sinal utilizando a Série de Fourier considerando até o 7º harmônico apresenta um sinal com mais oscilações que as análises anteriores onde foi considerado até o 1º e até o 3º harmônico. O sinal obtido é um sinal que se aproxima do sinal em azul que representa o sinal real da saída do sistema com Relé Ideal.

Estudo 5

Ao analisar a Figura 3 pode-se observar que o valor de amplitude do 3º harmônico é $\approx 0,2$ o que representa $\approx 30\%$ do valor de amplitude da fundamental(1º harmônico) e para as próximas harmônicas têm-se respectivamente, 5º harmônico com amplitude $\approx 0,15$ que representa $\approx 25\%$ da amplitude da fundamental e 7º harmônico com amplitude $\approx 0,1$ que representa $\approx 16,67\%$ da amplitude da fundamental, portanto, dependento do objetivo da análise, a aproximação pela Série de Fourier do sinal considerando apenas até a fundamental(1º harmônico) não é válida pois os próximos harmônicos ainda influenciam com uma parcela considerável na representação do sinal aproximado. Entretanto, se a malha tiver como objetivo o controle de um sistema que tenha inserido o elemento não linear estudado e o controlador empregado na malha se comportar como um filtro passa baixa(A maioria dos controladores atenuam o sinais de alta frequência) a aproximação pela Série de Fourier do sinal considerando apenas até a fundamental(1º harmônico) é válida, pois as demais harmônicas teriam seus sinais atenuados. Para exemplificar, é mostrado abaixo o gráfico na Figura 7 do somatório do sinal aproximado de n ao 50º harmônico, que quando comparado com a Figura 4 que representa o mesmo somatório porém de n ao 1º harmônico é possível notar o quanto a forma de onda da Figura 7 é mais próximo do sinal real do que o sinal apresentado na Figura 4.

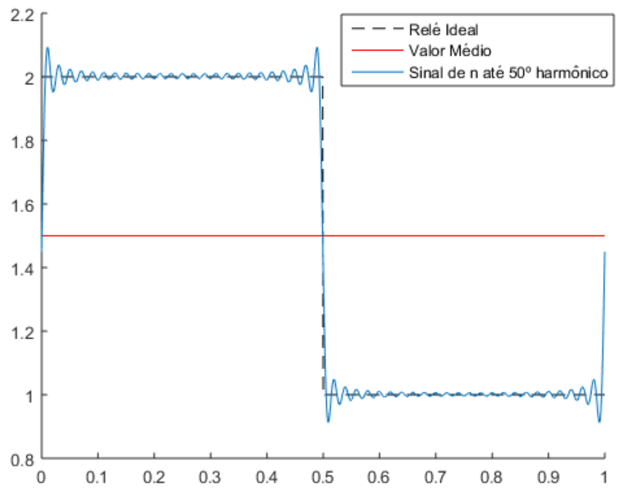

Figura 7: Sinal aproximado pela Série de Fourier considerando n até 50

Estudo 6

A função descritiva para um sinal de entrada da forma $Xsen(\omega t)$ para o elemento relé ideal é apresentada na equação 16.

$$N(X) = \frac{f_1+\sqrt{a_1^2+b_1^2}}{X} \angle \arctan\frac{a_1}{b_1}$$

$$N(X) = \frac{1,5+\sqrt{0^2+(\frac{1}{\pi}(\frac{-cos(1\pi)}{1}+\frac{1}{1}))^2}}{X} \angle \arctan\frac{0}{\frac{1}{\pi}(\frac{-cos(1\pi)}{1}+\frac{1}{1})}$$

$$N(X) = \frac{1,5+\frac{2}{\pi}}{X}\angle 0 \tag{16}$$

4 Considerações Finais

Desenvolvendo o experimento relatado, foi possível validar, em convergência com a base teórica, que conforme aumenta o número de componentes harmônicas consideradas na aproximação de um sinal periódico pela Série de Fourier, menor será a diferença desse sinal quando comparado com o sinal real.