



CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DE MINAS GERAIS
Campus Leopoldina

ENGENHARIA DE CONTROLE E AUTOMAÇÃO

RELATÓRIO DE ATIVIDADE PRÁTICA 06
Análise de estabilidade de sistemas não lineares através do método da
função descritiva

Lucas Daniel de Melo Borges
Lucas Guimarães da Rocha

Prof. Murillo Ferreira dos Santos, D. Eng.

Leopoldina, MG
31 de março de 2021

Resumo

Um sistema composto por um elemento linear genérico e um elemento não-linear do tipo "liga-desliga" foi simulado a fim de estudar a existência e o comportamento de ciclos limites.

Através do experimento, foi possível levantar as características do ciclo limite apresentado pelo sistema e validar a teoria de análise de estabilidade de sistemas não-lineares.

1 Introdução

Matematicamente, elementos não-lineares são elementos que, para um sinal de entrada $u(t)$, o sinal de saída $y(t)$ gerado pelo elemento não obedece ao princípio da superposição. Desta forma, não existem métodos analíticos capazes de apresentar soluções exatas para as equações de sistema que possua estes elementos [?].

O princípio da superposição diz que para uma entrada $u(t)$ formada pela combinação linear de n entradas $u_n(t)$, a saída $y(t)$ gerada pode ser representada por uma combinação linear das saídas $y_n(t)$ geradas individualmente por cada entrada $u_n(t)$, como apresentado nas equações 1, 2, 3 e 4.

$$u(t) = \alpha_1 u_1(t) + \dots + \alpha_n u_n(t) \quad (1)$$

$$y(t) = \alpha_1 y_1(t) + \dots + \alpha_n y_n(t) \quad (2)$$

$$u(t) \rightarrow y(t) \quad (3)$$

$$u_n(t) \rightarrow y_n(t) \quad (4)$$

Na prática, as respostas geradas por sistemas que contenham elementos não-lineares não seguem um padrão analítico e calculado. Estes sistemas são capazes de gerar respostas com formatos completamente diferentes para entradas do mesmo tipo, mas com amplitudes diferentes.

1.0.1 Funções descritivas

Na maioria dos casos, para uma entrada $x(t) = X \sin \omega_0 t$, a resposta gerada por um elemento não-linear será não-senoidal, porém periódica com frequência igual à entrada. Sendo assim, como supracitado, é possível representar esta saída gerada através de uma Série de Fourier.

Hodiernamente, a maioria dos controladores utilizados possuem as características de um filtro passa-baixa. Um filtro passa-baixa é capaz de atenuar ruídos de sinais, o que, na prática, significa atenuar as componentes harmônicas mais altas em um sinal. Dessa forma, um controlador generalizado atenua as componentes harmônicas da saída gerada por uma não-linearidade, o que torna possível descrever esta através, apenas, de suas componentes constante e fundamental.

Portanto, dada uma entrada $x(t) = X \sin \omega_0 t$ aplicada a um elemento não-linear, a função descritiva complexa $N(X)$ deste é dada por:

$$N(X) = \frac{f_0 + f_1}{X} \varphi_1 \quad (5)$$

Onde, f_0 e f_1 são as amplitudes dos termos constante e fundamental, respectivamente, da Série de Fourier que descreve a forma de onda da saída do elemento não-linear.

1.1 Estabilidade de sistemas não-lineares

Tomemos como exemplo um sistema composto por um elemento linear $G(j\omega)$ e um elemento linear descrito por $N(X)$. Analisemos, então, o lugar geométrico das raízes (LR) de $G(j\omega)$ e de $\frac{-1}{N(X)}$. Se ambos não se cruzam no plano complexo, o sistema total é estável. Porém, se ambos se cruzam, é dito que este sistema possui um ciclo limite. Outra característica importante de se salientar é a de que um ponto no LR de $\frac{-1}{N(X)}$, se circundado pelo LR de $G(j\omega)$, tende a aumentar a amplitude de oscilação do sinal de saída. Porém, se este ponto não é circundado pelo LR de $G(j\omega)$, a amplitude do sinal de saída tende a decrescer.

Um ciclo limite genérico no ponto A é caracterizado por uma oscilação estável com amplitude X_A e frequência ω_A . Façamos um exercício simples: um leve aumento no sinal de entrada é aplicado e, se o sentido de crescimento do LR de $\frac{-1}{N(X)}$ tender a afastar o ponto A da região circundada pelo LR de $G(j\omega)$, a amplitude do sinal cairá, trazendo o ponto novamente até o ciclo limite. Por outro lado, se uma leve diminuição no sinal de entrada é aplicada, o ponto A adentrará a região circundada pelo LR de $G(j\omega)$, o que fará amplitude do sinal aumentar, trazendo novamente o ponto para o ciclo limite. Neste caso, é dito que este ciclo limite converge e, por conta disso, é um ciclo limite estável. Se a mesma análise for realizada, mas o sentido de crescimento do LR de $\frac{-1}{N(X)}$ for o inverso da primeira análise, em ambos os casos o ponto A se afastará do ciclo limite, caracterizando um ciclo limite que diverge e, portanto, é instável.

2 Objetivo

Realizar a simulação de sistemas não-lineares utilizando o *software* Simulink, observando o comportamento das respostas para os casos de estabilidade/instabilidade e ciclos limites.

3 Desenvolvimento

O experimento relatado parte do sistema não-linear apresentado na figura 1, com o elemento não-linear do tipo liga-desliga ideal.

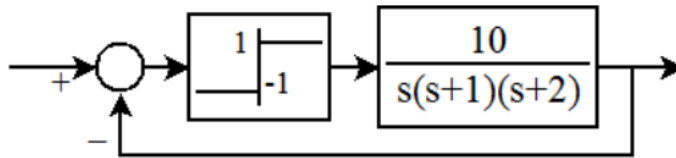


Figura 1: Sistema de controle não linear com elemento liga-desliga

Considerando o sistema apresentado na figura 1, foi proposto neste estudo os três direcionamentos apresentados abaixo:

1. **Determine a estabilidade/instabilidade do sistema. Se o sistema for instável, determine a estabilidade/instabilidade do ciclo limite.**

Primeiramente foi considerado a função descritiva N do sistema já previamente calculada na teoria que é apresentada em 6 e a partir desta foi calculado a sua

inversa $-1/N$ cujo o desenvolvimento é apresentado nas equações 7 e 8.

$$N = \frac{4M}{\pi X} \quad (6)$$

Onde $M = 1$ conforme apresentado na Figura 1, logo, têm-se:

$$N = \frac{4}{\pi X} \quad (7)$$

Portando $-\frac{1}{N}$ é:

$$N = -\frac{\pi X}{4} \quad (8)$$

Posteriormente utilizando o *software* MATLAB foi plotado o diagrama de *Nyquist* para a função $G(jw)$ do sistema e também a inversa da função descritiva, o resultado obtido pode ser observado na figura 2.

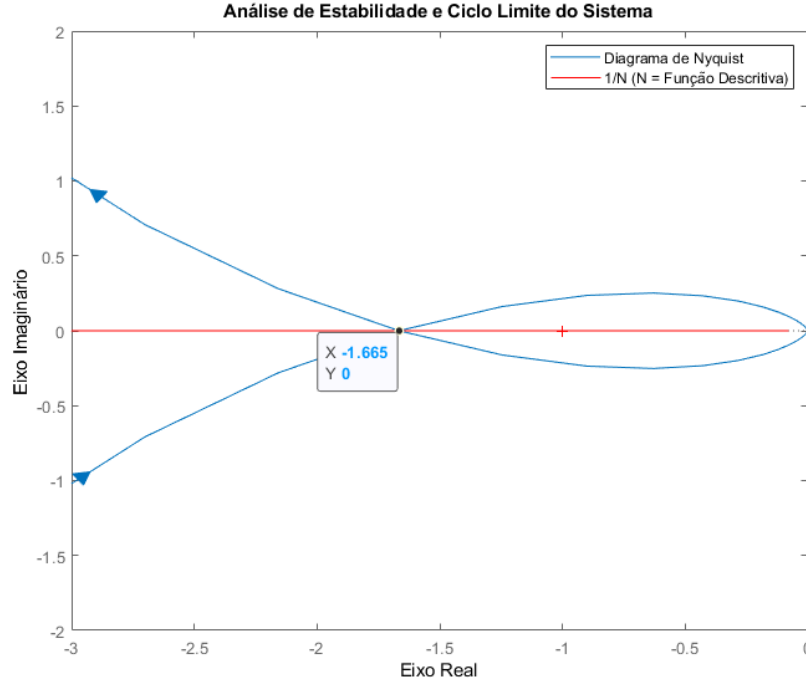


Figura 2: Análise de estabilidade do sistema de controle não linear com elemento liga-desliga

Analisando a figura 2 pode-se observar o sistema estudado é instável já que ocorre o cruzamento entre o Lugar Geométrico de $G(jw)$ determinado pelo diagrama de *Nyquist* e $-\frac{1}{N}$, portanto, há um ciclo limite no sistema. O ponto do ciclo limite é destacado na figura 2 e sabendo que as amplitudes do sinal $-1/N$ destacado em vermelho decrescem tendendo a 0 quanto mais próximo da origem e crescem tendendo a infinito quanto mais distantes da origem pode-se determinar a sua estabilidade fazendo a seguinte análise:

- Dada uma leve perturbação no ponto de operação inicial de forma a aumentar a amplitude do sinal de entrada do elemento não linear, o ponto de operação se

move para a esquerda e consequentemente como $G(jw)$ do traçado de *Nyquist* não circunda essa região, a amplitude diminui e o ponto de operação tende a voltar para o ponto de interseção.

- Dada uma leve perturbação no ponto de operação inicial de forma a diminuir a amplitude do sinal de entrada do elemento não linear, o ponto de operação se move para a direita e consequentemente como $G(jw)$ circunda essa região, a amplitude aumenta e o ponto de operação tende a voltar para o ponto de interseção.

Portanto, após as duas análises apresentadas acima pode-se concluir que o **ciclo limite é estável**.

2. **Determine a resposta do sistema para uma entrada do tipo impulso unitário (discreto). É verificado o ciclo limite? Qual a amplitude e a frequência do mesmo? O sinal de saída é senoidal ou "aproximadamente senoidal"?**

Primeiramente para obter a resposta do sistema para uma entrada do tipo impulso unitário (discreto) foi construído um diagrama de blocos apresentado na figura 3 que modela o cenário proposto através do *software* Simulink.

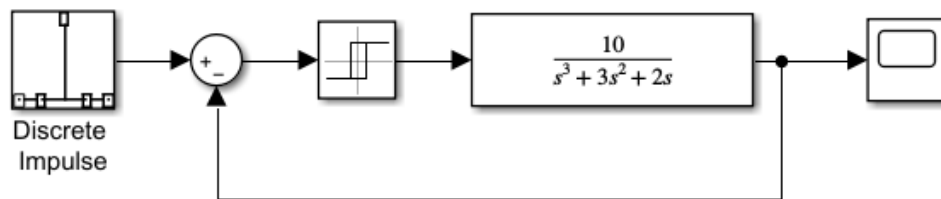


Figura 3: Diagrama de blocos para Simulação do sistema estudado a uma entrada impulso unitário

A resposta obtida através do diagrama apresentado na 3 é apresentada na figura 4.

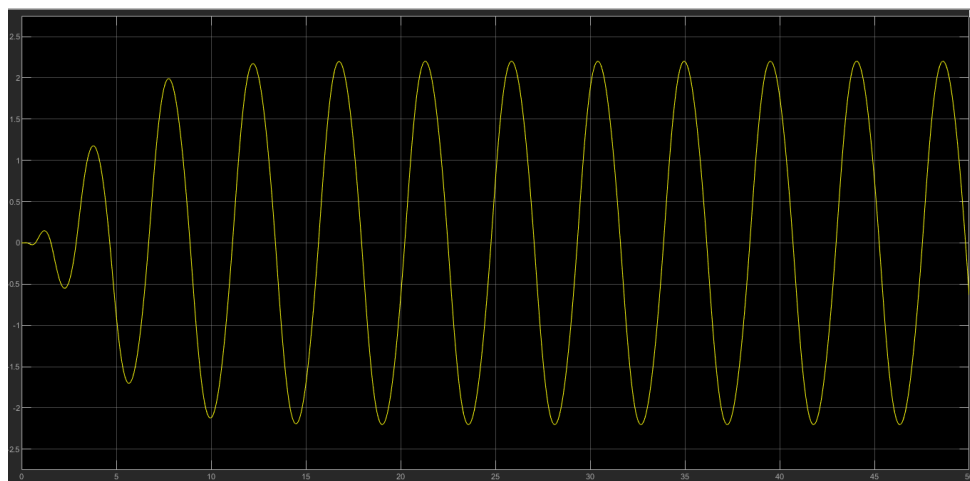


Figura 4: Resposta do sistema estudado a uma entrada impulso unitário

Ao observar a figura 4 pode-se notar que de fato o sistema é instável pois existe um ciclo limite, e que este ciclo limite converge para um ponto de uma oscilação

estável, ou seja, com frequência e amplitude constantes e formato aproximadamente senoidal.

Na figura 5 é apresentado qual é a amplitude mensurada do sinal de resposta ao impulso.

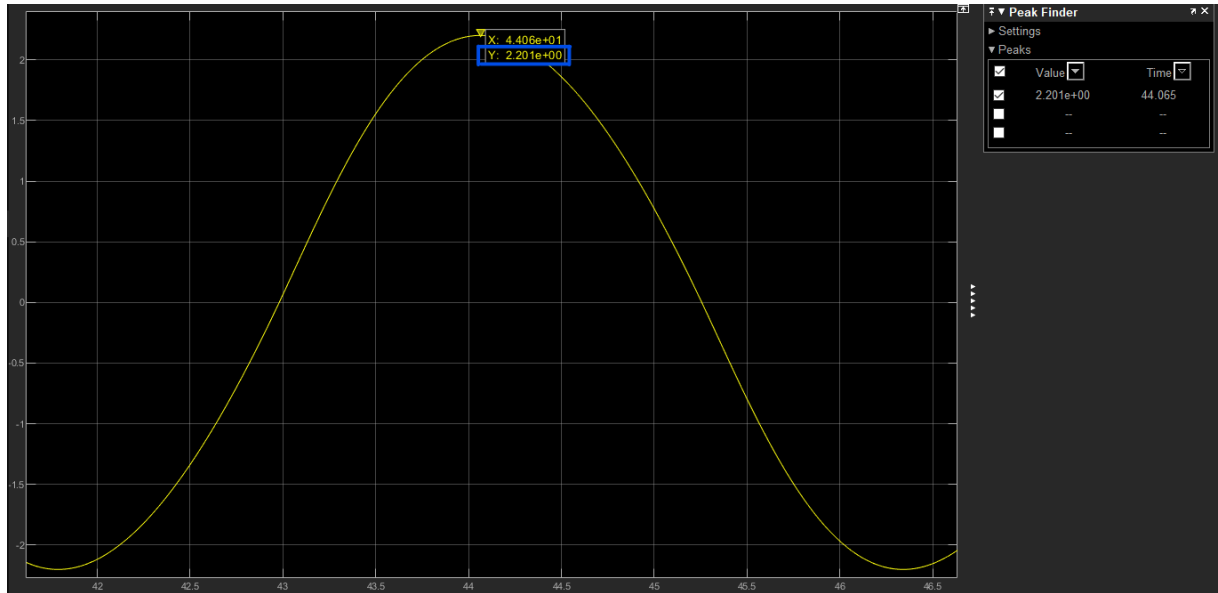


Figura 5: Medição da amplitude do ciclo limite na resposta do sistema estudado para uma entrada impulso unitário

A figura 5 destaca em azul o valor de amplitude do ciclo limite de 2,201.

Na figura 6 é apresentado qual é o período mensurado do ciclo limite existente no sinal de resposta ao impulso.

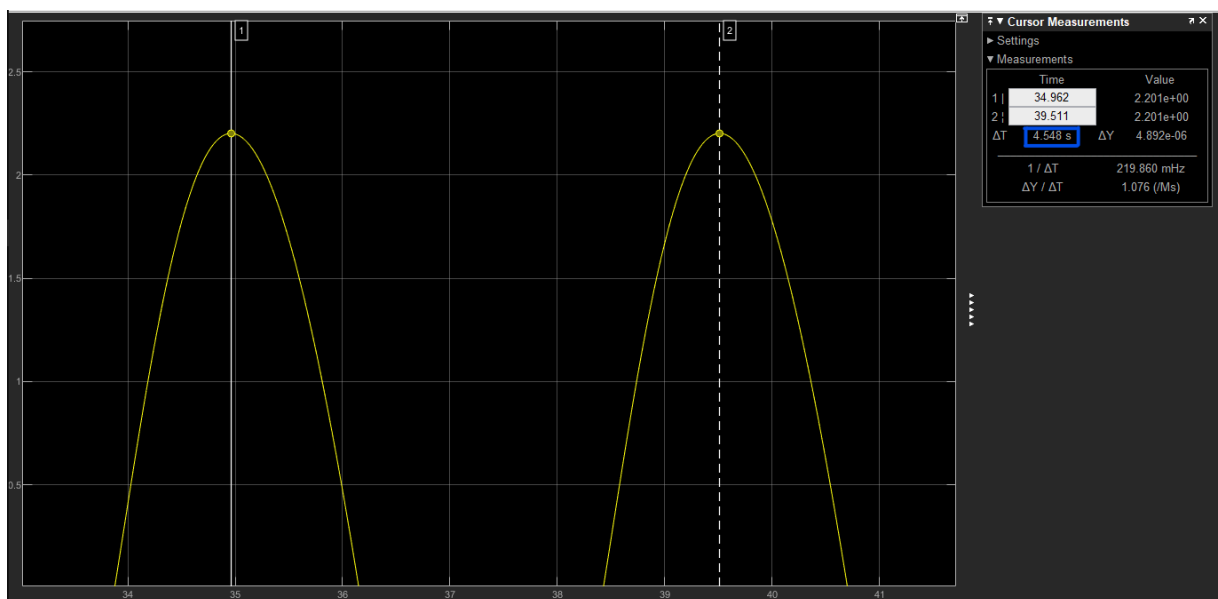


Figura 6: Medição do período de oscilação do ciclo limite na resposta do sistema estudado para uma entrada impulso unitário

A figura 6 destaca em azul o valor do período de oscilação do ciclo limite de $T = 4,548s$, e em 10, 13 e 11 é obtido a frequência em Hz respectiva a este período.

$$f = \frac{1}{T} \quad (9)$$

$$f = \frac{1}{4,548} \quad (10)$$

$$f = 0,2198Hz \quad (11)$$

Posteriormente, com objetivo de comparar o estudo teórico com os resultados obtidos pelo Simulink, foi realizado a obtenção da amplitude de oscilação do ciclo limite igualando o valor $-1,665$ do ponto de interseção apresentado na figura 2 com a função descritiva inversa, o desenvolvimento e o resultado são apresentados em (13), (14) e (15).

$$-\frac{1}{N} = -1,665 \quad (12)$$

$$\frac{\pi X}{4} = 1,665 \quad (13)$$

$$X = \frac{4 * 1,665}{\pi} \quad (14)$$

$$X = 2,1199 \quad (15)$$

Comparando o valor obtido em (15) e o valor apresentado na figura 5, é possível comprovar que a teoria está coerente com o experimento, pois o valor calculado é próximo do simulado, apresentando um erro de aproximadamente 3,83%.

3. Determine a resposta do sistema para uma entrada do tipo degrau unitário. O sistema se estabiliza? Comente o resultado.

Assim como na resposta ao impulso, para obter a resposta do sistema para uma entrada do tipo degrau unitário foi construído um diagrama de blocos, o qual é apresentado na figura 7, que modela o cenário proposto através do *software* Simulink.

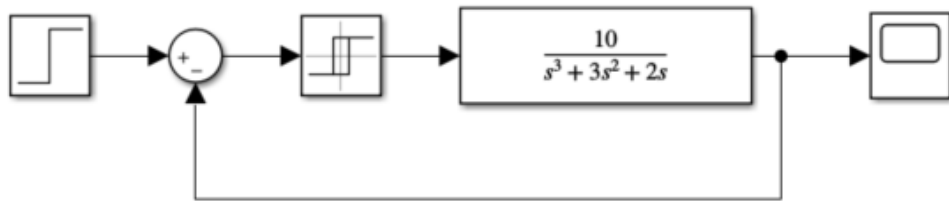


Figura 7: Diagrama de blocos para Simulação do sistema estudado a uma entrada degrau unitário

A resposta obtida através do diagrama apresentado na figura 7 é apresentada na figura 8.

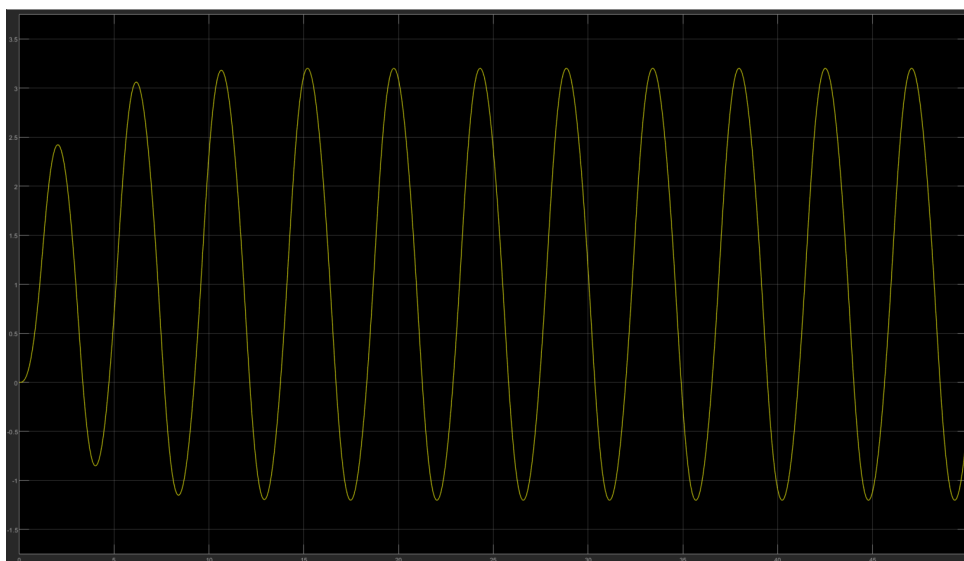


Figura 8: Resposta do sistema estudado a uma entrada degrau unitário

A partir da figura 8, observa-se, da mesma forma que na resposta ao impulso, que o sistema apresenta um ciclo limite e que este converge para um ponto de oscilação estável, ou seja, com frequência e amplitude constantes e forma de onda aproximadamente senoidal.

A figura 9 e a figura 10 detalham, respectivamente, as medições gráficas da amplitude e período de oscilação da forma de onda de saída.

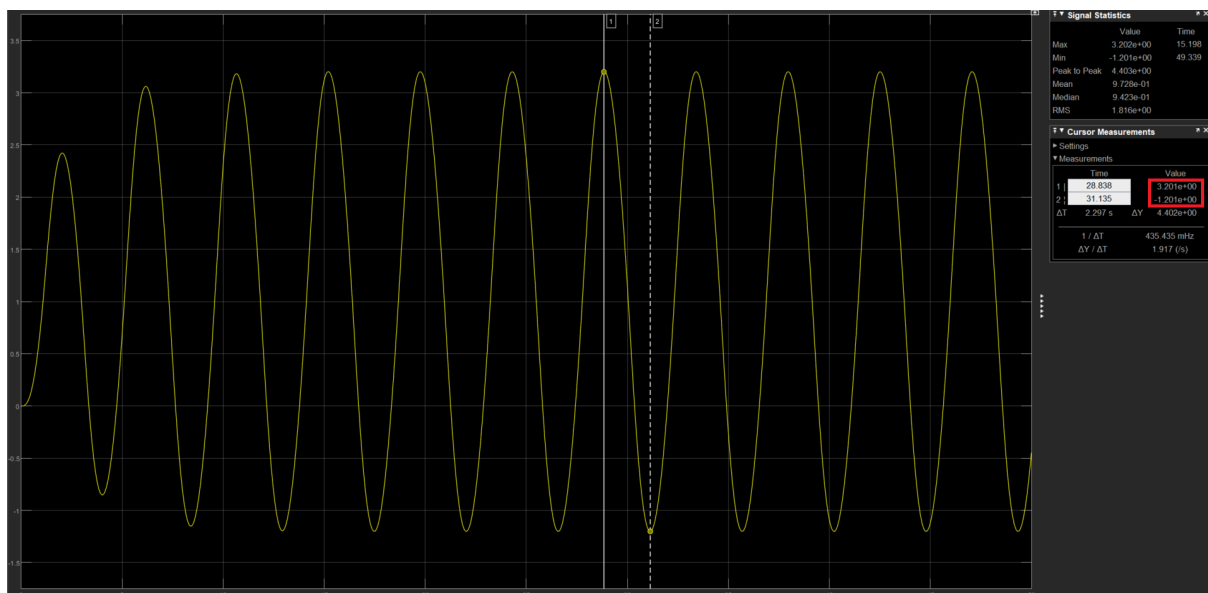


Figura 9: Medição da amplitude do ciclo limite na resposta do sistema estudado para uma entrada degrau unitário

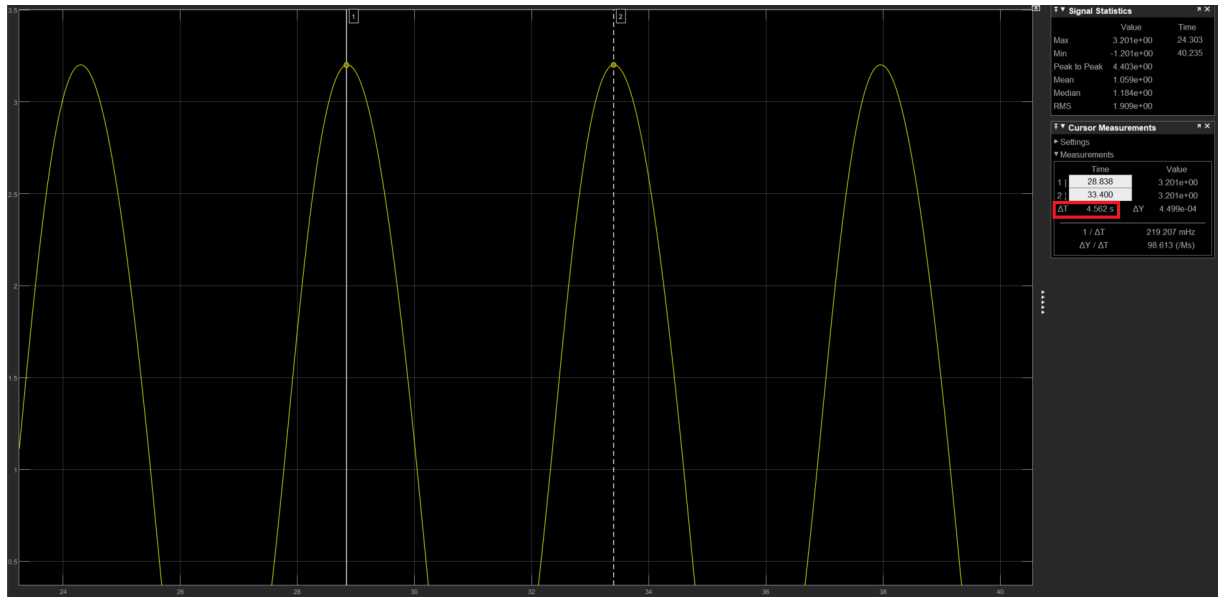


Figura 10: Medição do período de oscilação do ciclo limite na resposta do sistema estudado para uma entrada degrau unitário

Analisando a medição da figura 9, obtém-se o valor de 2,201 para a amplitude da forma de onda que possui um valor médio igual a 1. Da mesma forma, analisando a 10, obtém-se um período $T = 4,562s$ e, por consequência, uma frequência de $f = 0,2192Hz$. Nota-se que os valores de amplitude e frequência obtidas nas respostas ao impulso e ao degrau são os mesmos (salvo com margem de erro mínima).

4 Considerações Finais

A partir do estudo relatado foi possível verificar o comportamento de sistemas não-lineares quanto à sua estabilidade e a existência de ciclos limites. Foi possível observar a relação entre as respostas ao impulso e ao degrau para um mesmo ciclo limite, comprovando que o ciclo limite mantém suas características fundamentais de amplitude e frequência e validando a teoria de análise de estabilidade de sistemas não-lineares.