Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais
Campus Leopoldina

Engenharia de Controle e Automação

RELATÓRIO DE ATIVIDADE PRÁTICA 07
Análise de estabilidade de sistemas não lineares através do método da função descritiva

Lucas Daniel de Melo Borges
Lucas Guimarães da Rocha

Prof. Murillo Ferreira dos Santos, D. Eng.

Leopoldina, MG
09 de abril de 2021

Resumo

Um sistema composto por um elemento linear genérico e um elemento não-linear do tipo "liga-desliga com histerese"foi simulado a fim de estudar a existência e o comportamento de ciclos limites.

Através do experimento, foi possível levantar as características do ciclo limite apresentado pelo sistema e validar a teoria de análise de estabilidade de sistemas não-lineares.

1 Introdução

Matematicamente, elementos não-lineares são elementos que, para um sinal de entrada $u(t)$, o sinal de saída $y(t)$ gerado pelo elemento não obedece ao princípio da superposição. Desta forma, não existem métodos analíticos capazes de apresentar soluções exatas para as equações de sistema que possua estes elementos [**?**].

O princípio da superposição diz que para uma entrada $u(t)$ formada pela combinação linear de n entradas $u_n(t)$, a saída $y(t)$ gerada pode ser representada por uma combinação linear das saídas $y_n(t)$ geradas individualmente por cada entrada $u_n(t)$, como apresentado nas equações 1, 2, 3 e 4.

$$u(t) = \alpha_1 u_1(t) + ... + \alpha_n u_n(t) \tag{1}$$
$$y(t) = \alpha_1 y_1(t) + ... + \alpha_n y_n(t) \tag{2}$$

$$u(t) \rightarrow y(t) \tag{3}$$
$$u_n(t) \rightarrow y_n(t) \tag{4}$$

Na prática, as respostas geradas por sistemas que contenham elementos não-lineares não seguem um padrão analítico e calculado. Estes sistemas são capazes de gerar respostas com formatos completamente diferentes para entradas do mesmo tipo, mas com amplitudes diferentes.

1.1 Funções descritivas

Na maioria dos casos, para uma entrada $x(t) = X \sin \omega_0 t$, a resposta gerada por um elemento não-linear será não-senoidal, porém periódica com frequência igual à entrada. Sendo assim, como supracitado, é possível representar esta saída gerada através de uma Série de Fourier.

Hodiernamente, a maioria dos controladores utilizados possuem as características de um filtro passa-baixa. Um filtro passa-baixa é capaz de atenuar ruídos de sinais, o que, na prática, significa atenuar as componentes harmônicas mais altas em um sinal. Dessa forma, um controlador generalizado atenua as componentes harmônicas da saída gerada por uma não-linearidade, o que torna possível descrever esta através, apenas, de suas componentes constante e fundamental.

Portanto, dada uma entrada $x(t) = X \sin \omega_0 t$ aplicada a um elemento não-linear, a função descritiva complexa $N(X)$ deste é dada por:

$$N(X) = \frac{f_0 + f_1}{X} \varphi_1 \tag{5}$$

Onde, f_0 e f_1 são as amplitudes dos termos constante e fundamental, respectivamente, da Série de Fourier que descreve a forma de onda da saída do elemento não-linear.

1.2 Estabilidade de sistemas não-lineares

Tomemos como exemplo um sistema composto por um elemento linear $G(j\omega)$ e um elemento linear descrito por $N(X)$. Analisemos, então, o lugar geométrico das raízes (LR) de $G(j\omega)$ e de $\frac{-1}{N(X)}$. Se ambos não se cruzam no plano complexo, o sistema total é estável. Porém, se ambos se cruzam, é dito que este sistema possui um ciclo limite. Outra característica importante de se salientar é a de que um ponto no LR de $\frac{-1}{N(X)}$, se circundado pelo LR de $G(j\omega)$, tende a aumentar a amplitude de oscilação do sinal de saída. Porém, se este ponto não é circundado pelo LR de $G(j\omega)$, a amplitude do sinal de saída tende a decrescer.

Um ciclo limite genérico no ponto A é caracterizado por uma oscilação estável com amplitude X_A e frequência ω_A. Façamos um exercício simples: um leve aumento no sinal de entrada é aplicado e, se o sentido de crescimento do LR de $\frac{-1}{N(X)}$ tender a afastar o ponto A da região circundada pelo LR de $G(j\omega)$, a amplitude do sinal cairá, trazendo o ponto novamente até o ciclo limite. Por outro lado, se uma leve diminuição no sinal de entrada é aplicada, o ponto A adentrará a região circundada pelo LR de $G(j\omega)$, o que fará amplitude do sinal aumentar, trazendo novamente o ponto para o ciclo limite. Neste caso, é dito que este ciclo limite converge e, por conta disso, é um ciclo limite estável. Se a mesma análise for realizada, mas o sentido de crescimento do LR de $\frac{-1}{N(X)}$ for o inverso da primeira análise, em ambos os casos o ponto A se afastará do ciclo limite, caracterizando um ciclo limite que diverge e, portanto, é instável.

2 Objetivo

Realizar a simulação de um sistemas não-linear composto por um elemento linear acoplado a um elemento "liga-desliga com histerese"utilizando o *software* Simulink, observando o comportamento das respostas para os casos de estabilidade/instabilidade e ciclos-limites.

3 Desenvolvimento

O experimento relatado parte do sistema não-linear apresentado na figura 1, com o elemento não-linear do tipo "liga-desliga com histerese".

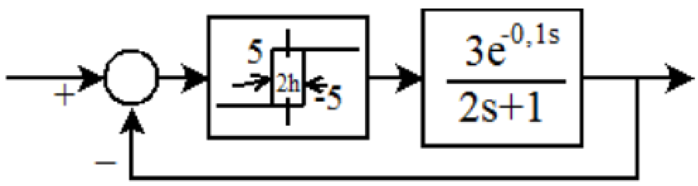

Figura 1: Sistema de controle não linear com elemento liga-desliga e histerese

Considerando o sistema apresentado na figura 1, foi proposto neste estudo os três direcionamentos apresentados abaixo:

1. **Determine a estabilidade/instabilidade do sistema. Se o sistema for instável, determine a estabilidade/instabilidade do ciclo limite.**

Primeiramente foi considerado a função descritiva N do sistema já previamente calculada na teoria que é apresentada em (6) e a partir desta foi calculado a sua inversa $-\frac{1}{N}$ cujo o desenvolvimento é apresentado nas equações 7 e 8. Também foi calculado o termo que provoca a defasagem do sinal que é apresentado em (9), esse termo é gerado pela existência da histerese considerando $h = 0,1$ de acordo com a figura 1.

$$N = \frac{4M}{\pi X} \tag{6}$$

Onde $M = 5$ conforme apresentado na figura 1, logo, têm-se:

$$N = \frac{20}{\pi X} \tag{7}$$

Portando $-\frac{1}{N}$ é:

$$N = -\frac{\pi X}{20} \tag{8}$$

$$\Theta = -\arcsin\frac{h}{X} \tag{9}$$

Posteriormente utilizando o *software* MATLAB foi plotado o diagrama de *Nyquist* para a função $G(jw)$ do sistema e também a inversa da função descritiva, o resultado obtido pode ser observado na figura 2.

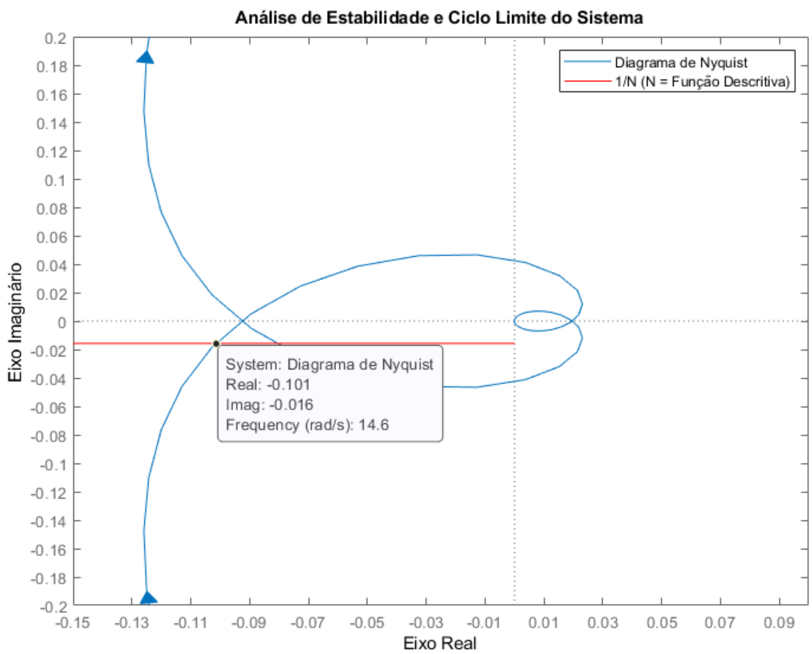

Figura 2: Análise de estabilidade do sistema de controle não linear com elemento liga-desliga mais histerese

Analisando a figura 2 pode-se observar o sistema estudado é instável já que ocorre o cruzamento entre o Lugar Geométrico de $G(jw)$ determinado pelo diagrama de *Nyquist* e $-\frac{1}{N}$, portanto, há um ciclo limite no sistema. O ponto do ciclo limite é destacado na figura 2 o outro ponto de interseção apresentado

na mesma figura é desconsiderado pois a frequência dessa parte da curva é negativa no diagrama de Nyquist, ou seja, esse LG só poder ser encontrado matematicamente pois em sistemas reais não existem sistemas com frequência negativa. Sabendo que as amplitudes do sinal $-1/N$ destacado em vermelho decrescem tendendo a 0 quanto mais próximo da origem e crescem tendendo a infinito quanto mais distantes da origem pode-se determinar a sua estabilidade fazendo a seguinte análise:
- Dada uma leve perturbação no ponto de operação inicial de forma a aumentar a amplitude do sinal de entrada do elemento não linear, o ponto de operação se move para a esquerda e consequentemente como $G(jw)$ do traçado de *Nyquist* não circunda essa região, a amplitude diminui e o ponto de operação tende a voltar para o ponto de interseção.
- Dada uma leve perturbação no ponto de operação inicial de forma a diminuir a amplitude do sinal de entrada do elemento não linear, o ponto de operação se move para a direita e consequentemente como $G(jw)$ circunda essa região, a amplitude aumenta e o ponto de operação tende a voltar para o ponto de interseção.

Portanto, após as duas análises apresentadas acima pode-se concluir que o **ciclo limite é estável**.

2. **Determine a resposta do sistema para uma entrada do tipo impulso unitário (discreto). É verificado o ciclo limite? Qual a amplitude e a frequência do mesmo?**

   Primeiramente para obter a resposta do sistema para uma entrada do tipo impulso unitário (discreto) foi construído um diagrama de blocos apresentado na figura 3 que modela o cenário proposto através do *software* Simulink.

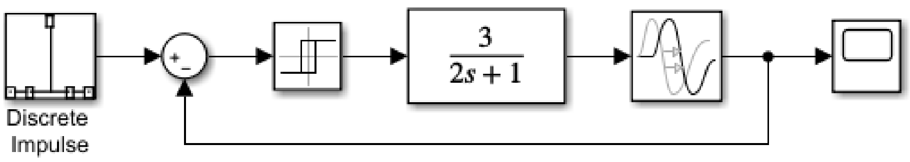

Figura 3: Diagrama de blocos para Simulação do sistema estudado a uma entrada impulso unitário

A resposta obtida através do diagrama apresentado na 3 é apresentada na figura 4.

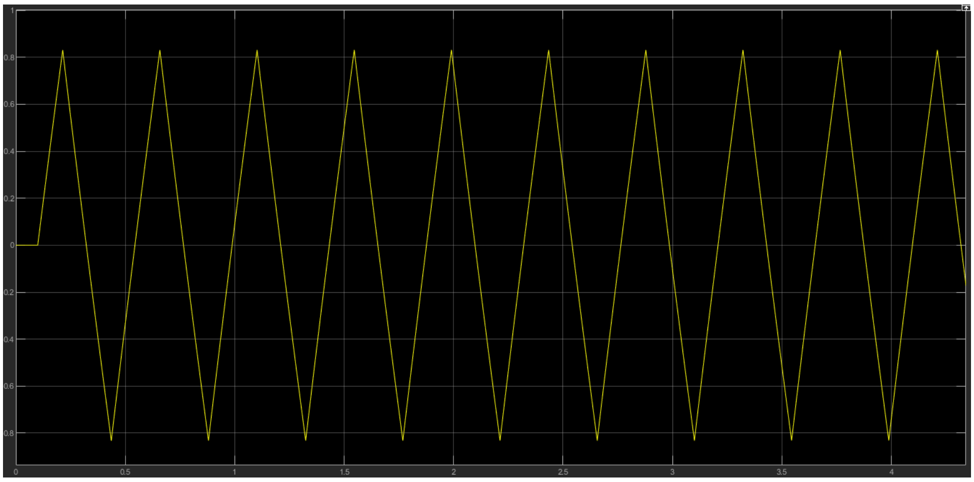

Figura 4: Resposta do sistema estudado a uma entrada impulso unitário

Ao observar a figura 4 pode-se notar que de fato o sistema é instável pois existe um ciclo-limite, e que este converge para um ponto de uma oscilação estável, ou seja, com frequência e amplitude constantes e formato aproximadamente senoidal.

Na figura 5 é apresentado qual é a amplitude mensurada do sinal de resposta ao impulso.

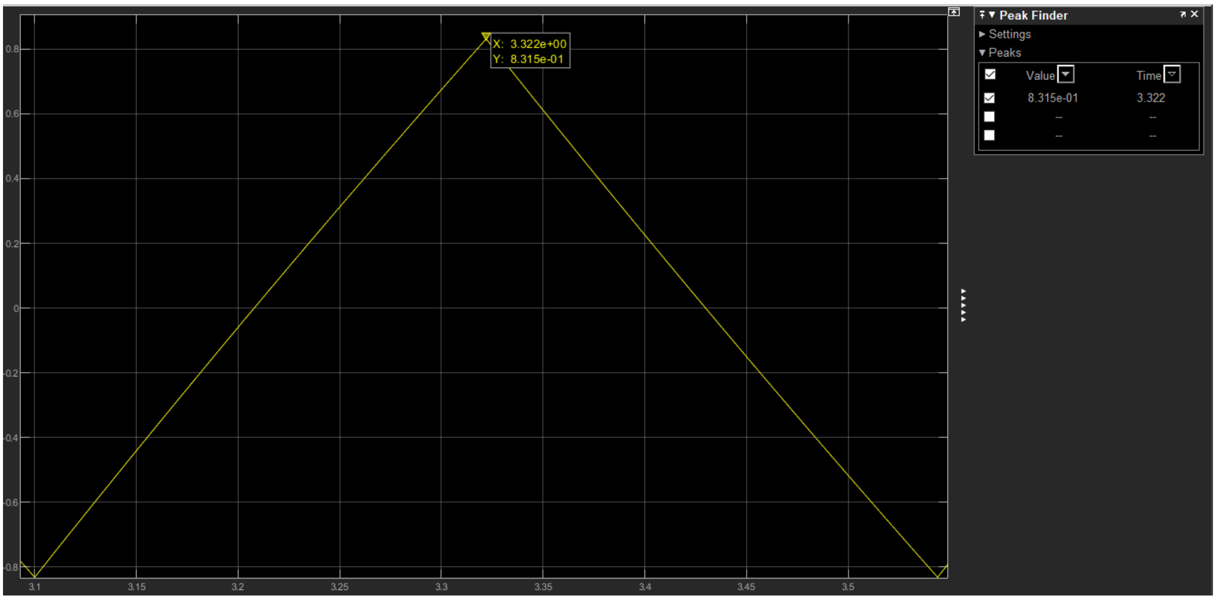

Figura 5: Medição da amplitude do ciclo-limite na resposta do sistema estudado para uma entrada impulso unitário

A figura 5 destaca o valor de amplitude do ciclo-limite de 0, 8315.

Na figura 6 é apresentado qual é o período mensurado do ciclo-limite existente no sinal de resposta ao impulso.

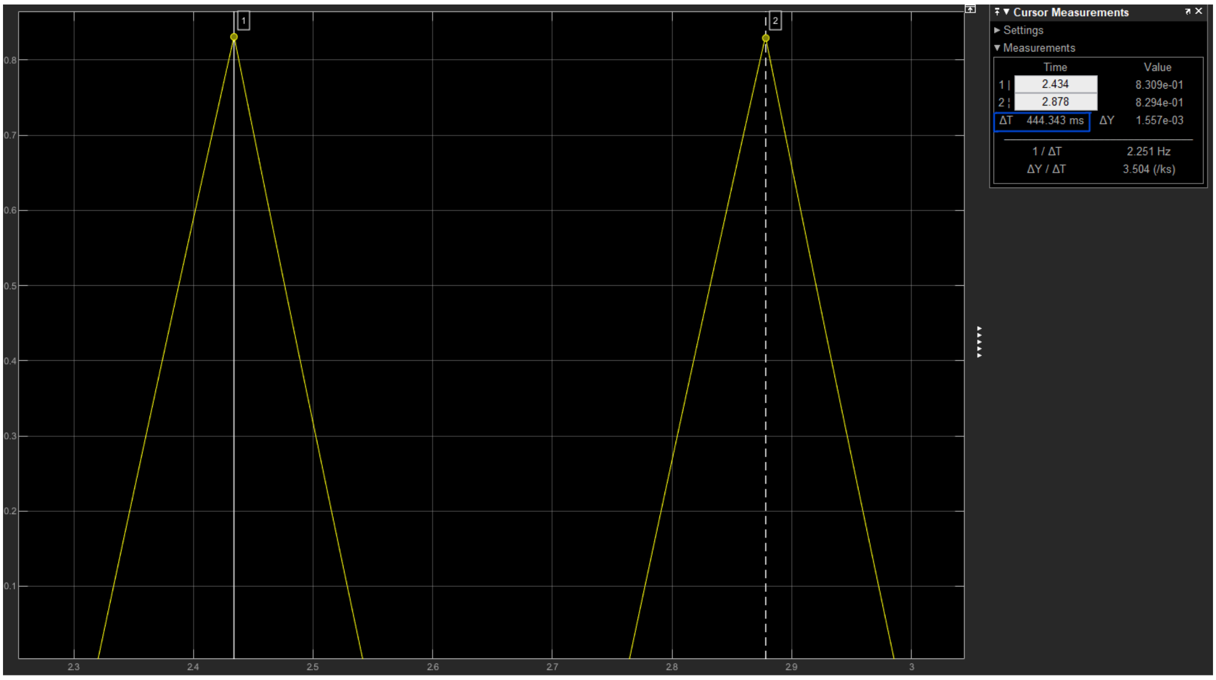

Figura 6: Medição do período de oscilação do ciclo-limite na resposta do sistema estudado para uma entrada impulso unitário

A figura 6 destaca em azul o valor do período de oscilação do ciclo limite de $T = 444,343ms$, e em 11, 11 e 12 é obtido a frequência em Hz respectiva a este período.

$$f = \frac{1}{T} \tag{10}$$
$$f = \frac{1}{444,343ms} \tag{11}$$
$$f = 2,2505Hz \tag{12}$$

3. **Determine a resposta do sistema para uma entrada do tipo degrau unitário. O sistema se estabiliza? Comente o resultado.**

Assim como na resposta ao impulso, para obter a resposta do sistema para uma entrada do tipo degrau unitário foi construído um diagrama de blocos, o qual é apresentado na figura 7, que modela o cenário proposto através do *software* Simulink.

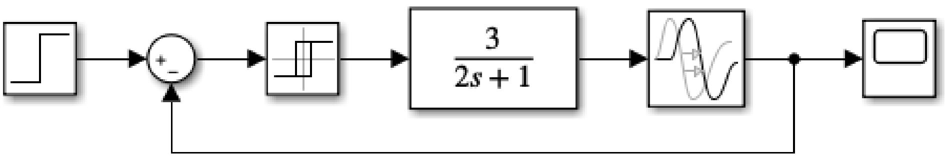

Figura 7: Diagrama de blocos para Simulação do sistema estudado a uma entrada degrau unitário

A resposta obtida através do diagrama apresentado na figura 7 é apresentada na figura 8.

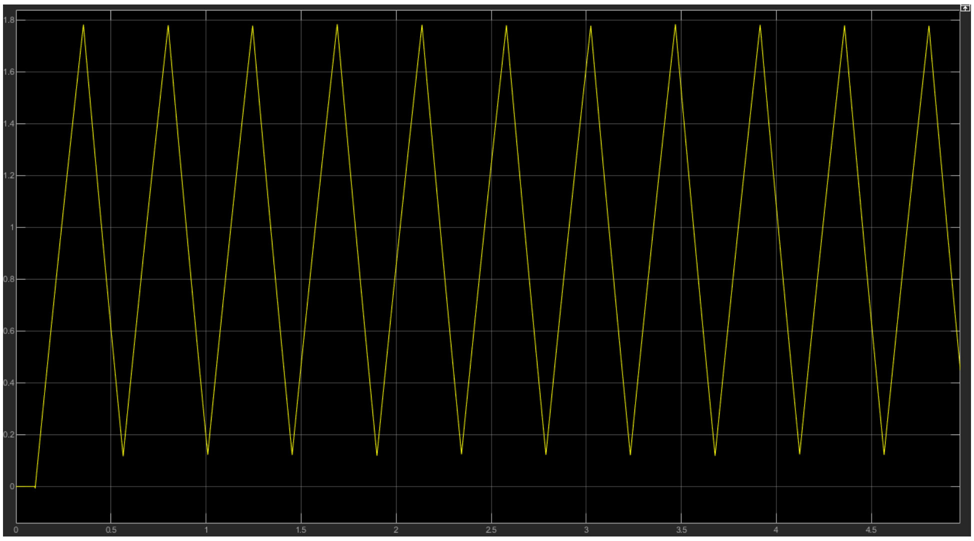

Figura 8: Resposta do sistema estudado a uma entrada degrau unitário

A partir da figura 8, observa-se, da mesma forma que na resposta ao impulso, que o sistema apresenta um ciclo limite e que este converge para um ponto de oscilação estável, ou seja, com frequência e amplitude constantes e forma de onda aproximadamente senoidal.
A figura 9 e a figura 10 detalham, respectivamente, as medições gráficas da amplitude e período de oscilação da forma de onda de saída.

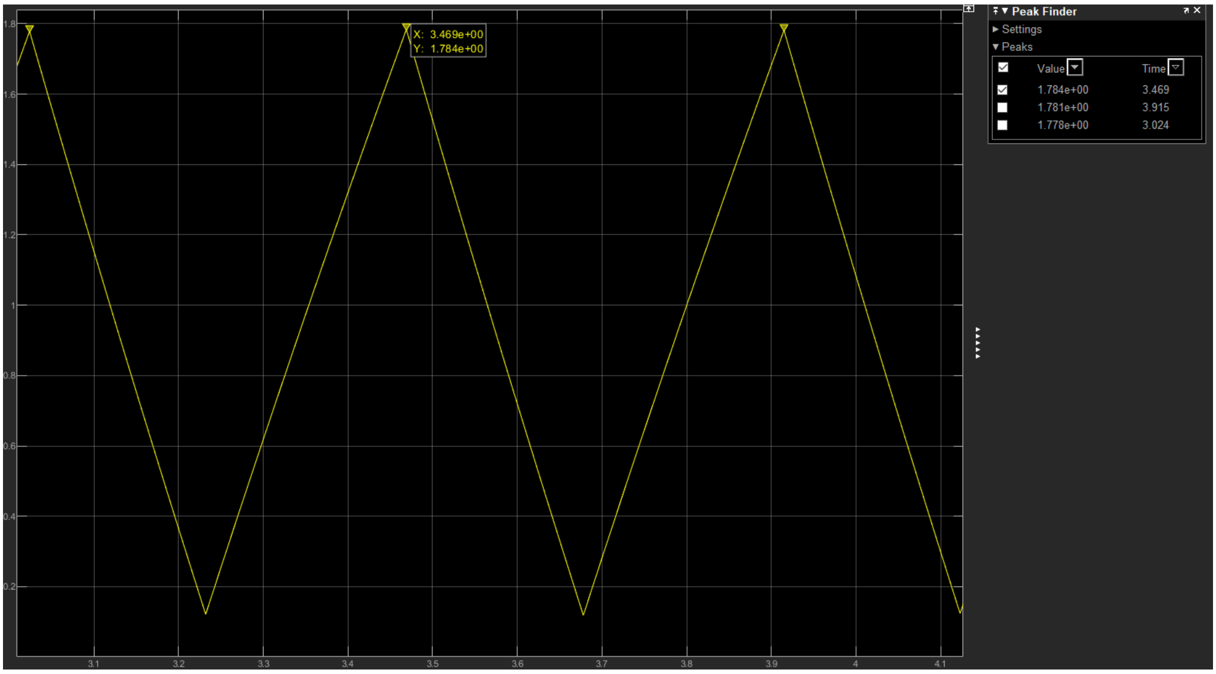

Figura 9: Medição da amplitude do ciclo-limite na resposta do sistema estudado para uma entrada degrau unitário

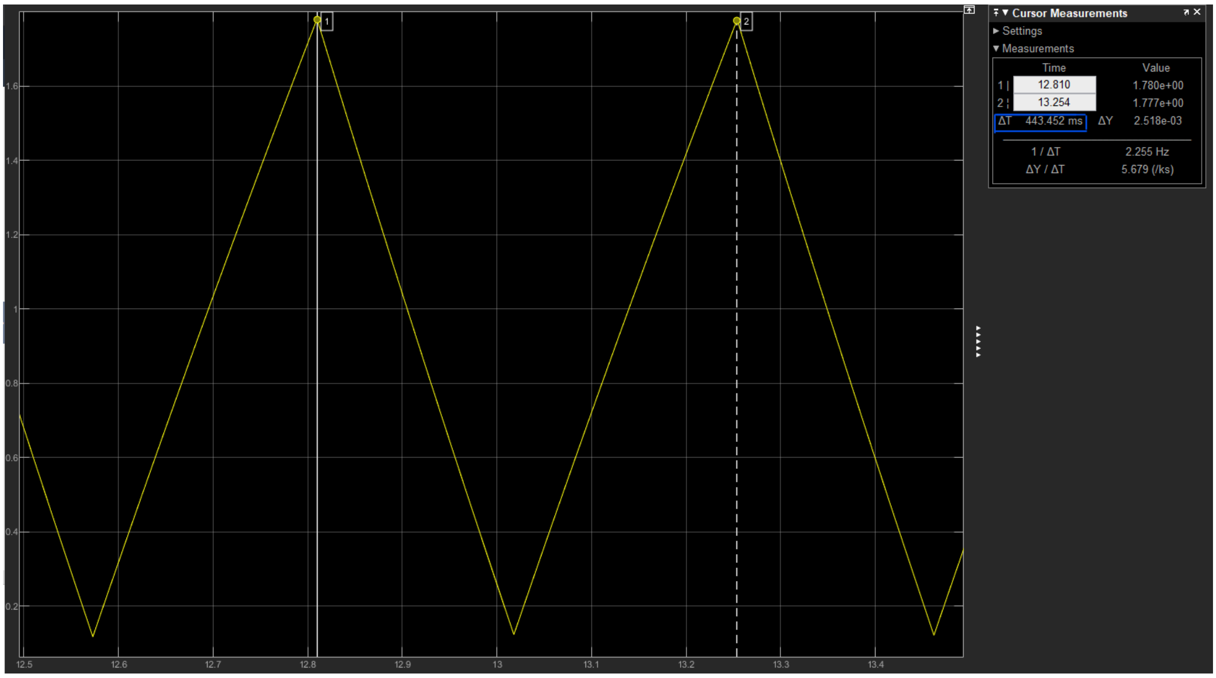

Figura 10: Medição do período de oscilação do ciclo-limite na resposta do sistema estudado para uma entrada degrau unitário

Analisando a medição da figura 9, obtém-se o valor de $0,832$ para a amplitude de oscilação da forma de onda que possui um valor médio igual a 1 devido a entrada degrau. Da mesma forma, analisando a 10, obtém-se um período $T = 443,450ms$ e, por consequência, uma frequência de $f = 2,255Hz$. Nota-se que os valores de amplitude e frequência obtidas nas respostas ao impulso e ao degrau são os mesmos (salvo com margem de erro mínima), a única diferença é que o sinal em resposta ao degrau está deslocado de 1 em sua amplitude devido a entrada degrau unitário.

3.1 Refazendo as simulações para $h = 0$

As simulações relatadas acima foram realizadas novamente nas mesmas condições, com exceção do valor da defasagem do sinal, que foi reduzido a $h = 0$. A resposta deste sistema a uma entrada do tipo impulso unitário é apresentada na figura 11.

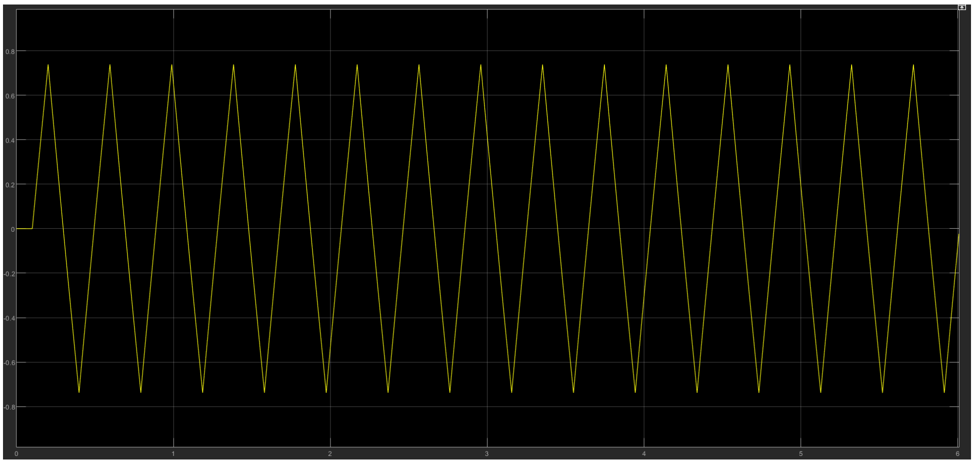

Figura 11: Resposta do sistema estudado a uma entrada impulso unitário para $h = 0$

Analisando a figura 11 observa-se que o sistema apresenta um ciclo-limite estável, com amplitude e frequência constantes no tempo. As figuras 12 e 13 apresentam as medições da amplitude e do período, respectivamente, deste ciclo-limite.

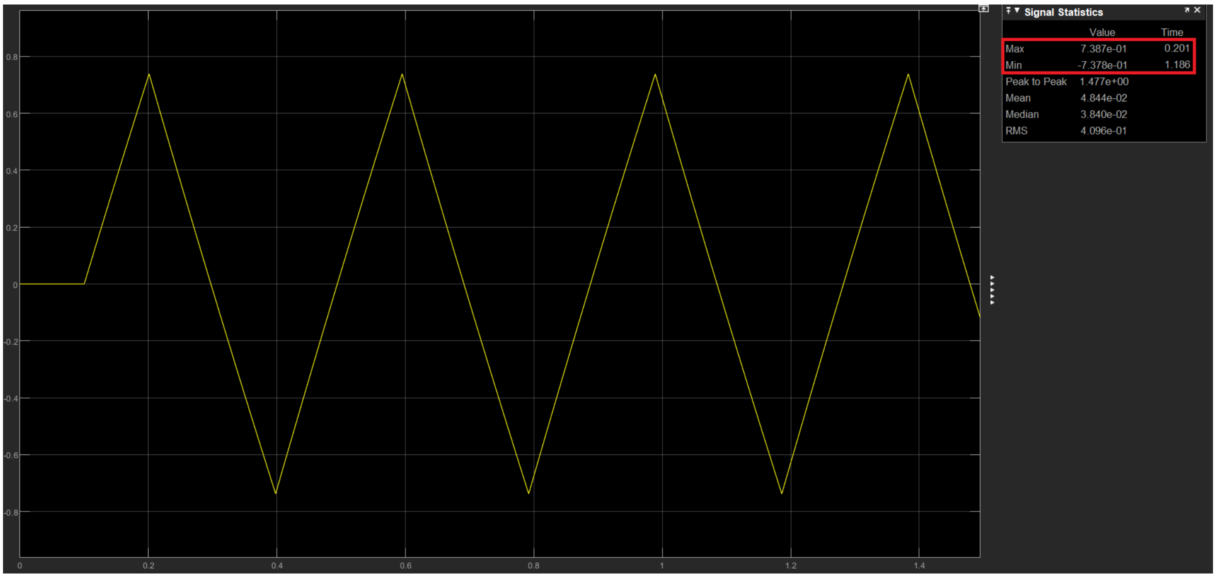

Figura 12: Medição da amplitude do ciclo limite na resposta do sistema estudado para uma entrada impulso unitário para $h = 0$

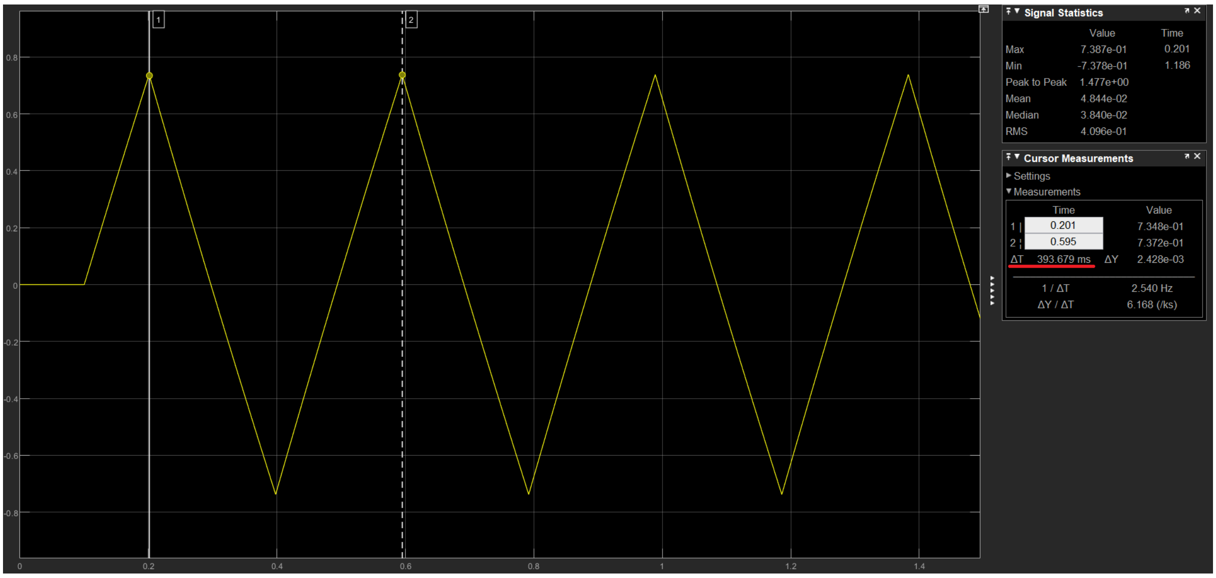

Figura 13: Medição do período do ciclo limite na resposta do sistema estudado para uma entrada impulso unitário para $h = 0$

A partir da figura 12 e da 13, observa-se que a amplitude de oscilação do ciclo-limite é igual a $0,738$, enquanto a frequência é de $2,54Hz$, calculada a partir da medição do período.

Continuando o experimento, a resposta deste sistema a uma entrada do tipo degrau unitário é apresentada na figura 14.

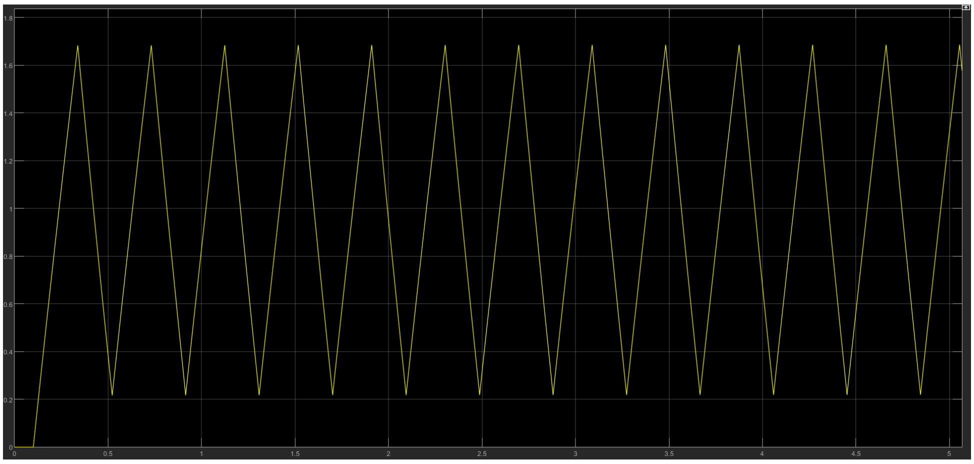

Figura 14: Resposta do sistema estudado a uma entrada degrau unitário para $h = 0$

Da mesma forma que para uma entrada do tipo impulso unitário, para o degrau unitário o sistema também apresenta um ciclo-limite estável, com amplitude e frequência constantes. Novamente foram realizadas medições para estes parâmetros, que são apresentados, respectivamente, nas figuras 15 e 16.

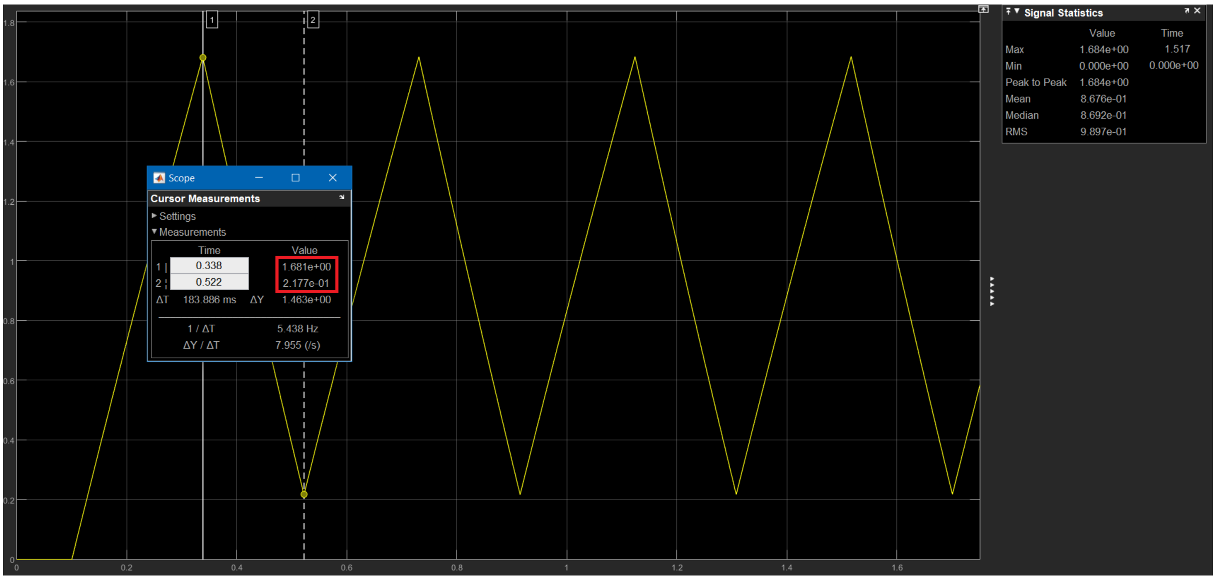

Figura 15: Medição da amplitude do ciclo limite na resposta do sistema estudado para uma entrada degrau unitário para $h = 0$

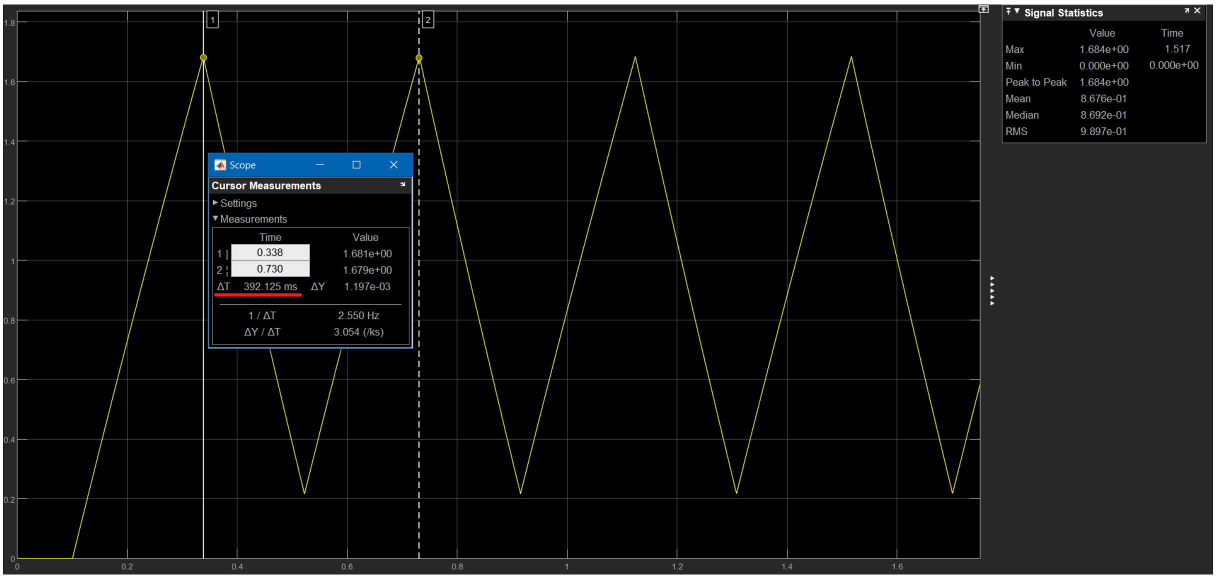

Figura 16: Medição do período do ciclo limite na resposta do sistema estudado para uma entrada degrau unitário para $h = 0$

Como visto nas primeiras simulações relatadas, observa-se, a partir da figura 15, que a amplitude de oscilação do ciclo-limite se mantém, mesmo alterando o tipo de excitação do sistema, pois o valor obtido foi de $0,732$, muito próximo ao apresentado na resposta ao impulso unitário. Porém, desta vez a forma de onda se encontra deslocada, apresentando valor médio igual a 1 (devido à entrada do tipo degrau unitário). A partir da figura 16 observa-se que a frequência, novamente calculada a partir da medição do período, é de $2,55Hz$, também apresentando valor muito próximo ao obtido na resposta ao impulso unitário.

Comparando os resultados obtidos nas simulações para $h = 0,1$ e $h = 0$, observa-se que ambos apresentaram ciclos-limites estáveis. Porém, como as características do sistema são diferentes (mais especificamente o valor de h), isto se reflete nas características dos ciclos-limites, representadas pela amplitude e a frequência dos mesmos, que apresentam valores diferentes para valores diferentes de h.

4 Considerações Finais

A partir do estudo relatado foi possível verificar o comportamento de sistemas não-lineares quanto à sua estabilidade e a existência de ciclos limites. Mais especificamente, foi possível estudar um elemento do tipo "liga-desliga com histerese"e observar a relação entre as respostas ao impulso e ao degrau para um mesmo ciclo limite, comprovando que o ciclo limite mantém suas características fundamentais de amplitude e frequência, bem como estudar a variação destas características em função da variação das características do elemento não-linear (no caso o valor da defasagem h para o elemento estudado), sendo possível validar a teoria de análise de estabilidade de sistemas não-lineares.