



CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DE MINAS GERAIS
Campus Leopoldina

ENGENHARIA DE CONTROLE E AUTOMAÇÃO

RELATÓRIO DE ATIVIDADE PRÁTICA 08
Simulação de sistemas não lineares através de métodos numéricos -
Construção de plano de fases

Lucas Daniel de Melo Borges
Lucas Guimarães da Rocha

Prof. Murillo Ferreira dos Santos, D. Eng.

Leopoldina, MG
07 de abril de 2021

1 Introdução

1.1 Elementos não lineares

Matematicamente, elementos não-lineares são elementos que, para um sinal de entrada $u(t)$, o sinal de saída $y(t)$ gerado pelo elemento não obedece ao princípio da superposição. Desta forma, não existem métodos analíticos capazes de apresentar soluções exatas para as equações de sistema que possua estes elementos [OGATA 1982].

O princípio da superposição diz que para uma entrada $u(t)$ formada pela combinação linear de n entradas $u_n(t)$, a saída $y(t)$ gerada pode ser representada por uma combinação linear das saídas $y_n(t)$ geradas individualmente por cada entrada $u_n(t)$, como apresentado nas equações 1, 2, 3 e 4.

$$u(t) = \alpha_1 u_1(t) + \dots + \alpha_n u_n(t) \quad (1)$$

$$y(t) = \alpha_1 y_1(t) + \dots + \alpha_n y_n(t) \quad (2)$$

$$u(t) \rightarrow y(t) \quad (3)$$

$$u_n(t) \rightarrow y_n(t) \quad (4)$$

Na prática, as respostas geradas por sistemas que contenham elementos não-lineares não seguem um padrão analítico e calculado. Estes sistemas são capazes de gerar respostas com formatos completamente diferentes para entradas do mesmo tipo, mas com amplitudes diferentes.

1.2 Análise de estabilidade utilizando plano de fases

Sabe-se que controle de sistemas não lineares não permite um método geral que funcione para todos os sistemas não lineares, pois as E.D.O não lineares que descrevem estes sistemas não são abrangidas por um único método geral de estudo. Dessa forma, métodos que permitem a análise satisfatória de E.D.Os não lineares atendem apenas um grupo específico destas, limitado muitas vezes por algumas características dessas não linearidades. Uma das formas de analisar e projetar um grupo particular de sistemas de controle não lineares é aplicar métodos de linearização e buscar soluções para o sistema linearizado e aproximado obtido.

Segundo [OGATA 1982] o método de análise por função descritiva já estudado anteriormente é um método que possui a limitação de sua aplicabilidade ser satisfatória apenas para sistemas com baixo grau de linearidade, portanto, limitado à sistemas de 1^a e 2^a ordem.

O método de análise utilizando plano de fases foi desmistificado por *Poicaré*, é um método que objetiva obter graficamente a solução para o conjunto de equações de primeira ordem apresentados em 5 e 6 que são lineares ou não lineares em função de x_1 e x_2 .

$$\frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, x_2) \quad (5)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = f_2(x_1, x_2) \quad (6)$$

Nota-se que x_1 e x_2 são variáveis de estado do sistema, ou seja, variáveis intrínsecas do sistema e o plano de coordenadas x_1 e x_2 é denominado de plano de fases.

A natureza de um sistema pode ser estudada diretamente pelo comportamento das suas variáveis de estado ao longo do tempo, pois esta representa a totalidade de possíveis estados do sistema. Existe uma única trajetória para as variáveis de estado respectivas a cada condição inicial, portanto, partindo de localizações iniciais diferentes e se movendo em decorrer do tempo.

O método de análise de estabilidade por plano de fases é um método útil para análise de sistemas de 2^a ordem sujeitos à condições iniciais e/ou também a sinais de entradas não periódicos como degrau, rampa ou impulso além de fornecer informações sobre a resposta temporal dos estados do sistema.

De forma gráfica são denominado ponto de equilíbrio os pontos em que uma infinidade de trajetórias se afastam ou se aproximam no gráfico que apresentam as trajetórias das variáveis de estado do sistema.

Considerando o teorema da existência e unicidade da solução, tem-se que a solução para as equações 5 e 6 é única, não sendo aplicável apenas aos pontos que anulam ambas as funções, que são denominados de pontos críticos, pontos singulares ou pontos de equilíbrio, qualquer ponto que não seja um ponto crítico é denominado de ponto ordinário. Enquanto sistemas lineares do tipo: $a\ddot{x} + b\dot{x} + cx = 0$ possuem a origem como único ponto crítico, os sistemas não lineares podem possuir mais de um ponto crítico.

Inicialmente para a análise é considerado a origem como ponto singular, sendo necessário uma transformação de coordenadas caso a origem do sistema estudado não seja um ponto singular. Seguindo, a análise parte do estudo do comportamento das trajetórias nas proximidades dos pontos singulares, sendo $f_1(x_1, x_2)$ e $f_2(x_1, x_2)$ analíticas, pode-se realizar a expansão em série de Taylor em torno da origem e simplificando, as equações resultam em um sistema que com o emprego de artifícios matemáticos proveem a equação 7 e o seu modelo linearizado é a equação 8.

$$\ddot{x} + \dot{x} + bx = 0 \quad (7)$$

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0 \quad (8)$$

Posteriormente o comportamento das trajetórias são determinados a partir da análise das raízes obtidas da equação 8 e então tem-se 6 possíveis situações para essas raízes que implicam respectivamente em 6 classificações do ponto de equilíbrio do sistema, sendo estes:

1. Raízes complexas conjugadas com parte real negativa caracterizando o ponto de equilíbrio como foco estável.
2. Raízes complexas conjugadas com parte real positiva caracterizando o ponto de equilíbrio como foco instável.
3. Raízes reais localizadas no semiplano esquerdo do plano complexo caracterizando o ponto de equilíbrio como nó estável.

4. Raízes reais localizadas no semiplano direito do plano complexo caracterizando o ponto de equilíbrio como nó instável.
5. Raízes reais complexas conjugadas localizadas sobre o eixo imaginário do plano complexo caracterizando o ponto de equilíbrio como centro.
6. Raízes reais, sendo uma negativa e outra positiva, caracterizando o ponto de equilíbrio como ponto de sela.

Um outro comportamento existe em alguns planos de fase além das classificações citadas acima que é denominado de ciclo limite, que consiste em um caminho fechado e isolado. Um ciclo limite ainda permite 3 classificações, ciclo limite estável, instável e semi-estável. Um ciclo limite estável é aquele que as trajetórias originadas na região interna e externa convergem para um ciclo, o instável é aquele cujo as trajetórias se divergem e o semi-estável é quando em uma determinada região as trajetórias convergem e em outras elas divergem.

2 Objetivo

Realizar a simulação de sistemas não-lineares com a aplicação do algoritmo através da função *ode45* do MATLAB, um método numérico de resolução de equações diferenciais ordinárias.

3 Desenvolvimento

Primeiramente foi estudado o arquivo "Rotina08" disponibilizado pelo professor que possui como objetivo a construção do plano de fases através de um método numérico para a E.D.O apresentada na equação 9.

$$\ddot{x} + \dot{x} + |x| = 0 \quad (9)$$

Pode-se notar que para que a E.D.O apresentada na equação 9 possa ser resolvida analiticamente é necessário dividir a análise em sub-regiões devido ao termo $|x|$ da forma como é apresentado em 10.

$$\begin{cases} \ddot{x} + \dot{x} + x, & \text{se } x > 0 \\ \ddot{x} + \dot{x} - x, & \text{se } x < 0 \end{cases} \quad (10)$$

Com objetivo de encontrar os pontos singulares do sistema representado por essa E.D.O foi realizado a representação em espaços de estados assumindo que $x_1 = x$ e $x_2 = \dot{x}$, com isso têm-se que $\dot{x}_1 = x_2$ e $\dot{x}_2 = \ddot{x}$. Fazendo $\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = 0$ e substituindo os valores em ambas equações têm-se $x = 0$, dessa forma, os pontos de equilíbrio encontram-se na origem. Para classificação do ponto singular sendo lineares as duas equações diferenciais respectivas as duas sub-regiões e também sendo a origem do plano de fases, é possível obter diretamente as equações características como é apresentado respectivamente em 11 e 12.

$$\lambda^2 + \lambda + 1 = 0 \quad (11)$$

$$\lambda^2 + \lambda - 1 = 0 \quad (12)$$

Analisando as equações 11 e 12 temos que suas respectivas raízes são $\lambda = -\frac{1}{2} \pm j\frac{\sqrt{3}}{2}$ e $\lambda = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$. Portanto, sendo as raízes respectivas da equação 11, complexas com parte real negativa, o ponto singular respectivo é classificado como um foco estável e sendo as raízes respectivas da equação 12, reais distintas, uma positiva e outra negativa, o ponto singular respectivo é classificado como um ponto de sela.

Foi utilizado o código disponibilizado pelo professor para construção do plano de fases do sistema com objetivo de identificar os pontos singulares através do gráfico apresentado na figura 1.

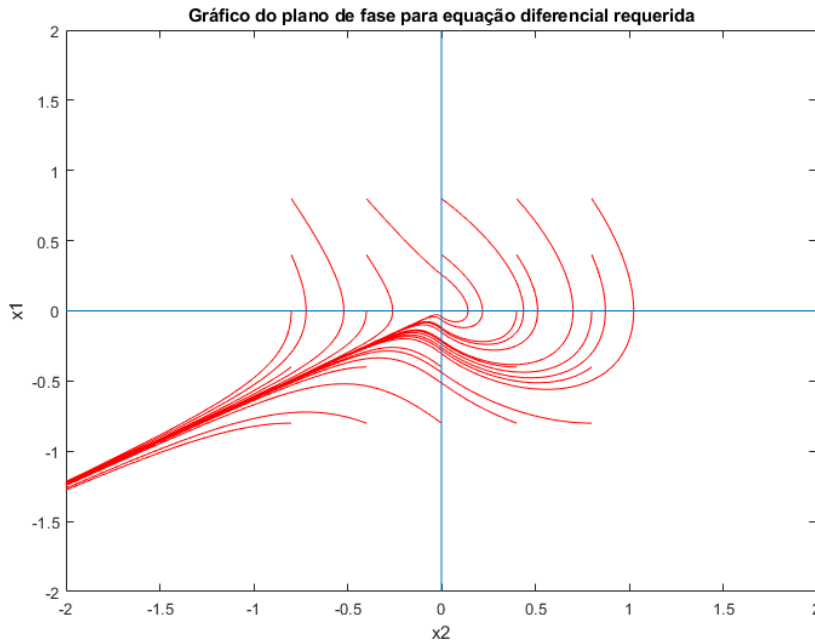


Figura 1: Plano de Fases da E.D.O 9

Analisando a figura 1 pode-se observar que para $x_1 < 0$ as trajetórias possuem um comportamento com características de ponto de sela, e para $x_1 > 0$ é um comportamento com características de foco estável pois as trajetórias convergem para a origem. Dessa forma, conclui-se que para este sistema a classificação do ponto singular irá variar entre **ponto de sela** e **foco estável** conforme os valores de x , que é coerente com os cálculos já realizados anteriormente.

3.1 Parte 1

Nessa subseção foi proposto o estudo do sistema não linear cujo o comportamento dinâmico é dado pela E.D.O apresentada na equação 13.

$$m\ddot{x} - b(1 - x^2)\dot{x} + kx = 0 \quad (13)$$

A E.D.O apresentada na equação 13 trata-se da equação de *Van der Pol* que é característica de um sistema mecânico com amortecedor não linear.

Foi proposto a aplicação da função *ode45* para os seguintes casos abaixo:

1. Gerar os gráficos de $x(\text{posição})$ versus t e $\dot{x}(\text{velocidade})$ versus t , considerando intervalo de amostragem $T=1\text{ms}$.

- (a) $m = 1, b = 1, k = 1$, com $x(0) = 1$ e $\dot{x}(0) = 0$.
- (b) $m = 1, b = 1, k = 1$, com $x(0) = 0$ e $\dot{x}(0) = 1$.
- (c) $m = 1, b = 1, k = 1$, com $x(0) = -1$ e $\dot{x}(0) = -1$.

Na figura 2 pode-se observar ambos os gráficos $x(\text{posição})$ versus t e $\dot{x}(\text{velocidade})$ versus t .

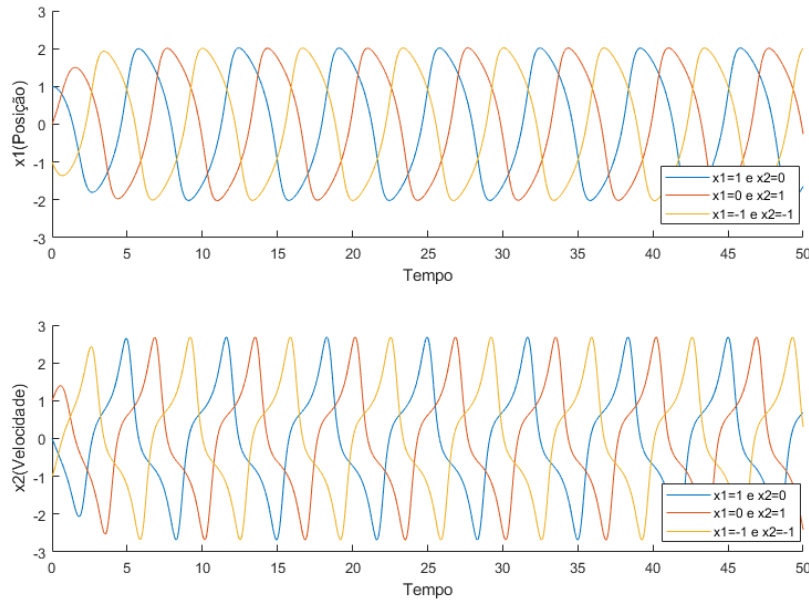


Figura 2: $x(\text{Posição})$ versus t e $\dot{x}(\text{Velocidade})$ versus t considerando as condições iniciais definidas em (a), (b) e (c)

Analisando os gráficos apresentados na figura 2 respectivos as 3 condições iniciais diferentes, referentes a (a), (b) e (c) pode-se se notar que cada trajetória parte do seu respectivo ponto inicial e todas convergem para um ciclo limite. Ao analisar essa oscilação auto-excitada, nota-se que sua frequência e amplitude são constantes, portanto, é um ciclo limite estável.

2. Gerar os gráficos de $x(\text{posição})$ versus t e $\dot{x}(\text{velocidade})$ versus t . Comente os resultados. Que mudança aconteceu com a solução devido à mudança da massa?

- (a) $m = 2, b = 1, k = 1$, com $x(0) = 1$ e $\dot{x}(0) = 0$.
- (b) $m = 2, b = 1, k = 1$, com $x(0) = 0$ e $\dot{x}(0) = 1$.
- (c) $m = 2, b = 1, k = 1$, com $x(0) = -1$ e $\dot{x}(0) = -1$.

Na figura 3 pode-se observar ambos os gráficos $x(\text{posição})$ versus t e $\dot{x}(\text{velocidade})$ versus t .

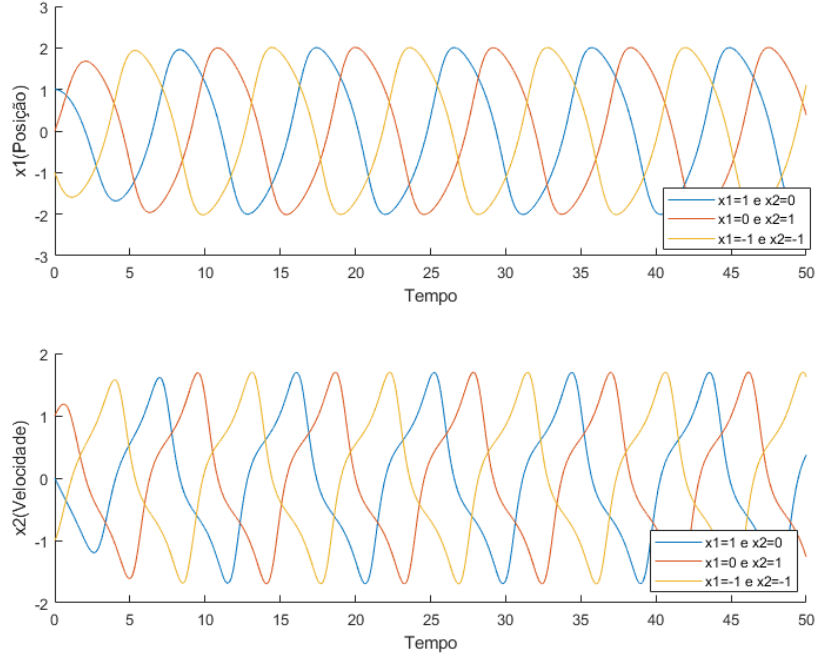


Figura 3: x (Posição) versus t e \dot{x} (Velocidade) versus t considerando as condições iniciais definidas em (a), (b) e (c)

Analisando os gráficos apresentados na figura 3 respectivos as 3 condições iniciais diferentes, referentes a (a), (b) e (c) pode-se notar que analogamente ao que acontece na **1ª Análise** cada trajetória parte do seu respectivo ponto inicial e todas convergem para um ciclo limite. Ao analisar essa oscilação auto-excitada, nota-se que sua frequência e amplitude são constantes, portanto, é um ciclo limite estável.

Comparando os gráficos 2 e 3 nota-se que para um mesmo tempo de simulação de 50s a amplitude e a frequência da oscilação auto-sustentada diminuíram ao aumentar a constante que define a massa do sistema de $m = 1$ na **1ª análise** para $m = 2$ na **2ª análise**. Isso ocorre pois a equação 13 representa um sistema massa, mola e amortecedor, e o termo que representa o comportamento de amortecimento na equação assume valores negativos para valores pequenos de x , portanto, adicionado energia ao sistema e para maiores valores de x este mesmo termo resultará em valores positivos, portanto, absorvendo energia do sistema.

3.2 Parte 2

Nessa subseção foi proposto o estudo do sistema não linear cujo o comportamento dinâmico é dado pela E.D.O apresentada na equação 14.

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx + k'x^3 = 0 \quad (14)$$

A E.D.O apresentada na equação 14 trata-se da equação de *Duffing* que é característica de um sistema mecânico com uma não linearidade presente no elemento mola.

Foi proposto a aplicação da função *ode45* para os seguintes casos abaixo:

1. Gerar os gráficos de x (posição) versus t e \dot{x} (velocidade) versus t , considerando intervalo de amostragem $T=1\text{ms}$.

(a) $m = 4$, $b = 1$, $k = 5$, $k' = 0.2$ com $x(0) = -2.7$ e $\dot{x}(0) = 0$.

Na figura 4 pode-se observar ambos os gráficos x (posição) versus t e \dot{x} (velocidade) versus t .

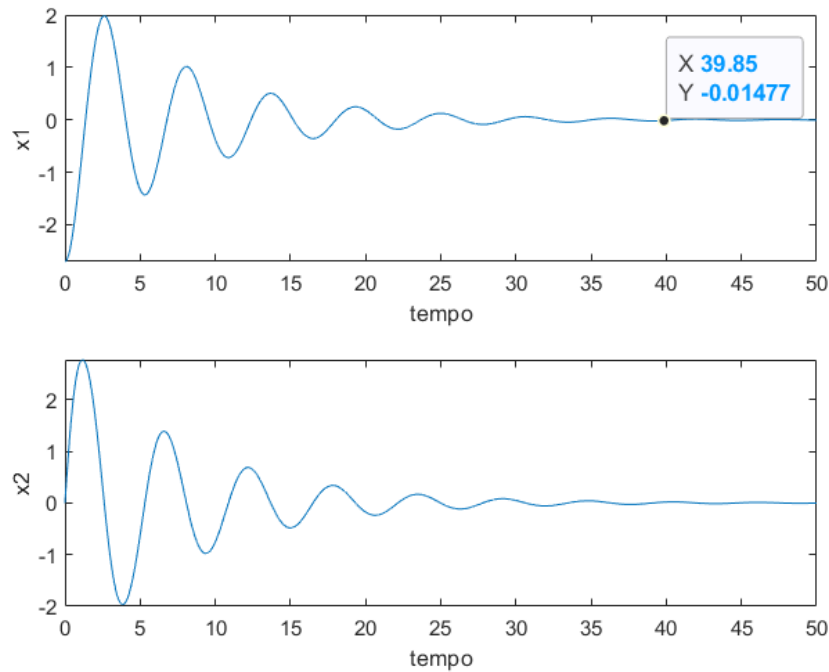


Figura 4: x (Posição) versus t e \dot{x} (Velocidade) versus t considerando as condições iniciais definidas em (a)

Analisando os gráficos apresentados na figura 4, que se referem às condições iniciais propostas em (a), notam-se oscilações subamortecidas tanto para x quanto para \dot{x} , caracterizando o sistema modelado pela equação 14 com as condições iniciais da 1ª análise como estável.

2. Gerar os gráficos de x (posição) versus t e \dot{x} (velocidade) versus t , considerando intervalo de amostragem $T=1\text{ms}$.

(a) $m = 4$, $b = 1$, $k = 5$, $k' = -0.5$ com $x(0) = 2.3$ e $\dot{x}(0) = -1$.

Na figura 5 pode-se observar ambos os gráficos x (posição) versus t e \dot{x} (velocidade) versus t .

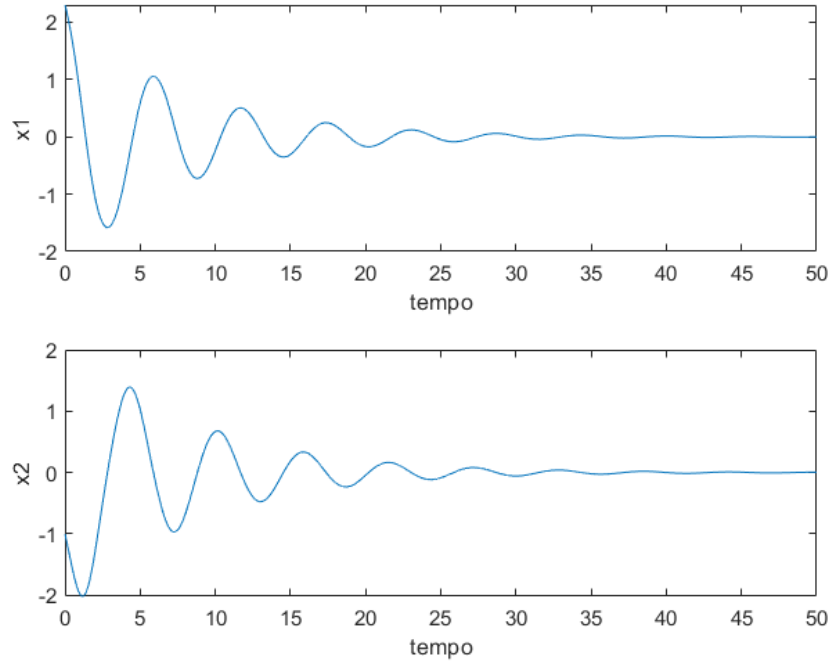


Figura 5: x (Posição) versus t e \dot{x} (Velocidade) versus t considerando as condições iniciais definidas em (a)

Analisando os gráficos apresentados na figura 5, que se referem às condições iniciais propostas em (a), notam-se oscilações subamortecidas tanto para x quanto para \dot{x} , caracterizando o sistema modelado pela equação 14 com as condições iniciais da 2ª análise como estável.

3.3 Parte 3

Na parte 3 dessa prática foi proposto para todos os itens (a) das Partes 1 e 2 desta prática, gerar gráficos de x_2 versus x_1 (serão 4 gráficos), classificando os pontos singulares quanto ao seu formato, assim como pelas raízes com condições iniciais nulas e também comentar os resultados obtidos.

1. ^a Parte - 1ª Análise - (a)

Na figura 6 pode-se observar o comportamento das respectivas variáveis de estado x_2 versus x_1 .

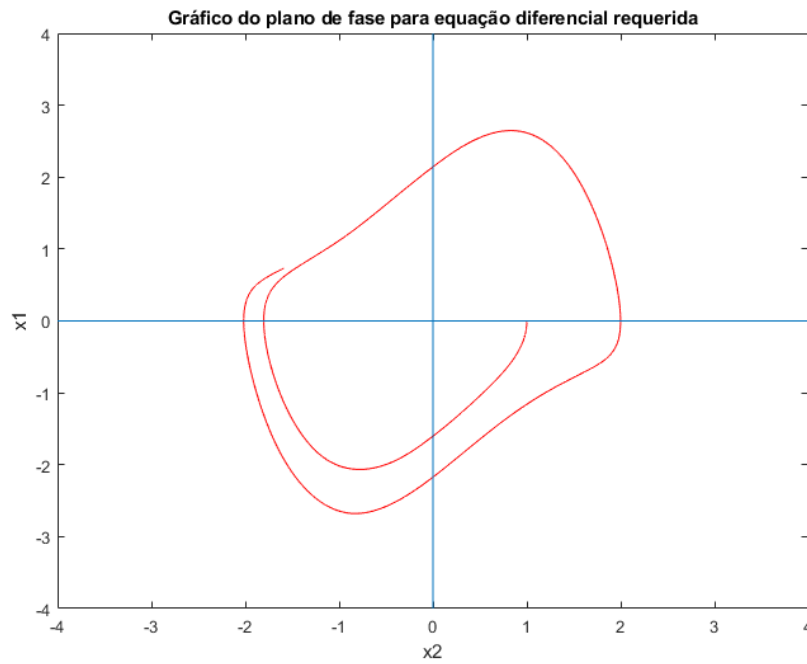


Figura 6: Variáveis de estado x_2 versus x_1 - equação 13

Ao analisar a figura 6 pode-se notar que o formato desse ponto singular caracteriza um foco estável, onde as raízes são complexas e conjugadas com parte real no semi-plano esquerdo.

1. ^a Parte - 2^a Análise - (a)

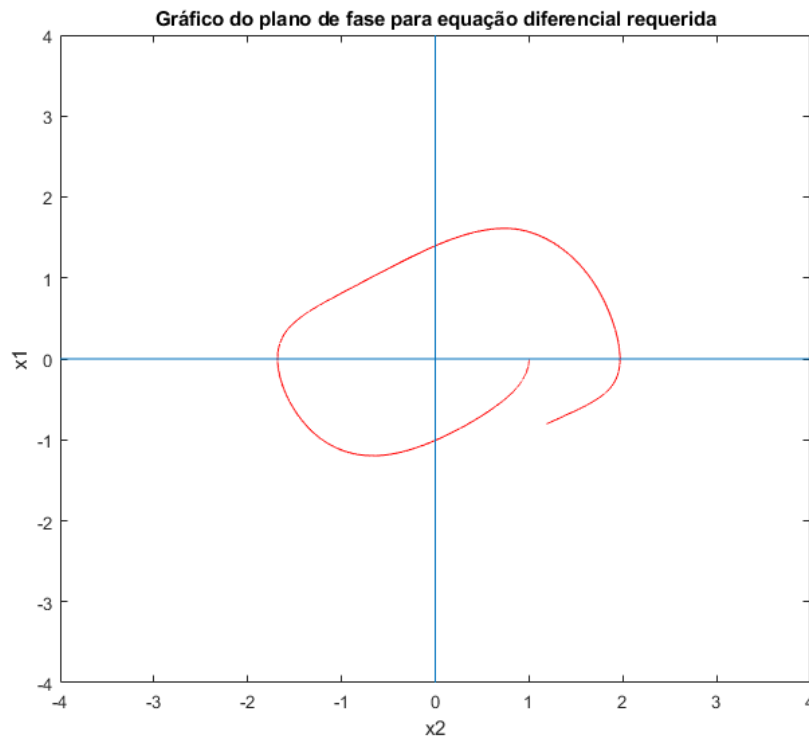


Figura 7: Variáveis de estado x_2 versus x_1 - equação 13

Ao analisar a figura 7 pode-se notar que o formato desse ponto singular caracteriza um foco estável, onde as raízes são complexas e conjugadas com parte real no semi-plano esquerdo.

2.ª Parte - 1ª Análise - (a)



Figura 8: Variáveis de estado x_2 versus x_1 - equação 14

Ao analisar a figura 7 pode-se notar que o formato desse ponto singular caracteriza um foco estável, onde as raízes são complexas e conjugadas com parte real no semi-plano esquerdo.

2. ^a **Parte - 2^a Análise - (a)**

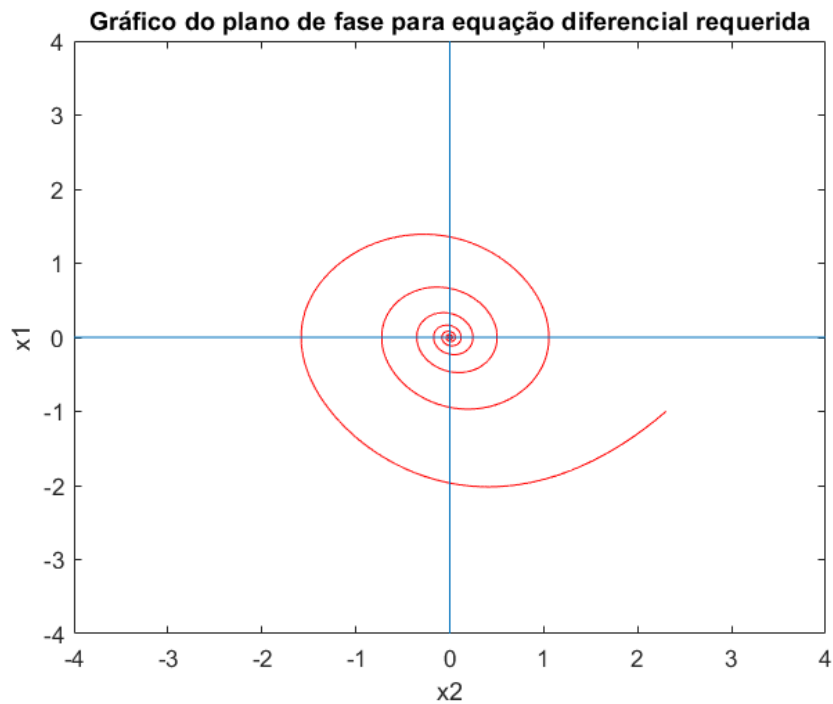


Figura 9: Variáveis de estado x_2 versus x_1 - equação 14

Ao analisar a figura 9 pode-se notar que o formato desse ponto singular caracteriza um foco estável, onde as raízes são complexas e conjugadas com parte real no semi-plano esquerdo.

4 Considerações Finais

Referências

[OGATA 1982] OGATA, K. *Engenharia de Controle Moderno. 1ª Edição*. [S.l.: s.n.], 1982.