Introdução ao Processamento Digital de Sinais

Equações de diferenças

Prof. Janison R. de Carvalho
(http://lattes.cnpq.br/6380279792809473)

Sistemas LTI descritos por equações de diferenças

- Uma classe importante de sistemas lineares invariantes no tempo é caracterizada por equações de diferenças lineares com coeficientes constantes:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$

- Onde:
  - $x[n]$ e $y[n]$: entrada e saída do sistema, respectivamente;
  - a_k e b_k: coeficientes da equação (constantes reais)
  - $\max(M, N)$: ordem do sistema;

Sistemas LTI descritos por equações de diferenças

- Observações acerca da equação de diferenças:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$

  - É possível implementar um sistema a equação de diferenças já que a mesma envolve dois somatórios finitos.
  - A resposta ao impulso de sistemas modelados a equação de diferenças pode ser uma sequência infinita (sistemas IIR).

Solução de equações de diferenças

- Técnicas de solução de equações de diferenças:
  - **Método analítico:** consiste em um método clássico de resolução, muito similar àquele utilizado para resolver EDOs lineares de coeficientes constantes.
  - **Método da transformada $\mathcal{Z}$:** neste método utiliza-se a transformada z para obtenção da solução no domínio z, $Y(z)$. A solução é então obtida fazendo-se $y[n] = \mathcal{Z}^{-1}\{Y(z)\}$.
  - **Método recursivo:** método utilizado para solução numérica em computadores e plataformas microcontroladas, onde a solução é obtida a partir de valores anteriores dos sinais de entrada e saída.

Solução de equações de diferenças

- Método analítico -

- O procedimento de resolução de equações de diferenças é similar ao procedimento de resolução de equações diferenciais ordinárias.
- Pode-se demonstrar que a solução de uma equação de diferenças é dada por

$$y[n] = y_c[n] + y_p[n]$$

onde:

- $y_c[n]$: é a solução complementar, obtida fazendo-se $x[n] = 0$;
- $y_p[n]$: é a solução particular ou forçada, obtida a partir da consideração da entrada $x[n]$.

Solução de equações de diferenças
- Método analítico -

- Determinação da solução complementar $y_c[n]$:
  - Considerando $x[n] = 0$, tem-se:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y_c[n-k] = 0$$

  - Para solução dessa equação, adota-se $y_c[n] = \lambda^n$.
  - Assim,

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y_c[n-k] = \sum_{k=0}^{N} a_k \lambda^{n-k}$$

$$= \lambda^{n-N}(a_N \lambda^N + a_{N-1}\lambda^{N-1} + \cdots a_1 \lambda + a_0)$$

Solução de equações de diferenças
- Método analítico -

- Determinação da solução complementar $y_c[n]$:
  - Desde que $\lambda^{n-N} \neq 0$, então:
    $$(a_N\lambda^N + a_{N-1}\lambda^{N-1} + \cdots a_1\lambda + a_0) = 0$$
  - O polinômio acima é chamado polinômio característico.
  - Raízes do polinômio característico:
    - **Caso 1:** todas raízes λ distintas

      Neste caso, obtém-se $y_c[n]$ na forma:

$$y_c[n] = \alpha_1\lambda_1^n + \alpha_2\lambda_2^n + \cdots + \alpha_N\lambda_N^n$$

Solução analítica de equações de diferenças

- Raízes do polinômio característico:
  - **Caso 2:** todas raízes λ distintas
    Neste caso, obtém-se $y_c[n]$ na forma:
    $y_c[n] = \alpha_1 \lambda^n + \alpha_2 n \lambda^n + \cdots + \alpha_N n^{N-1} \lambda^n$

  - **Caso 3:** raízes complexas conjugadas $\lambda = a \pm jb$
    Neste caso, obtém-se $y_c[n]$ na forma:
    $$y_c[n] = \rho^n(\alpha_1 \cos n\theta + \alpha_2 \sin n\theta)$$
    com:
    $$\rho = \sqrt{a^2 + b^2} \text{ e } \theta = \operatorname{arctg}\left(\frac{b}{a}\right)$$

Solução de equações de diferenças

- Método analítico -

- Determinação da solução particular $y_p[n]$:
  - O procedimento para obtenção de $y_p[n]$ consiste em assumir uma expressão para esta componente no mesmo "formato" da função de entrada $x[n]$.
  - Assim, tem-se como exemplos:
    - Se $x[n] = A$, ou seja, a entrada é uma função constante, então a solução particular é também assumida como uma constante

$$y_p[n] = K$$

    - Se $x[n] = \text{sen}(\omega n)$, ou seja, a entrada é uma função Senoidal, então a solução particular é também assumida como uma função senoidal

$$y_p[n] = K_1 \, \text{sen}(\omega n) + K_2 \cos(\omega n)$$

Solução de equações de diferenças

- Método analítico -

- **Exemplo:** Determine a resposta completa do sistema modelado por

$$y[n] - 1{,}3y[n-1] + 0{,}4y[n-2] = x[n]$$

considerando uma entrada degrau unitário e as condições iniciais

$$\begin{cases} y[-1] = 0 \\ y[-2] = 0 \end{cases}$$

Solução de equações de diferenças
- Método analítico -

- Solução:
  - A solução desta equação de diferenças pode ser escrita genericamente como

$$y[n] = y_c[n] + y_p[n]$$

A solução complementar é dada por:

$$y_c[n] = \alpha_1 \lambda_1^n + \alpha_2 \lambda_2^n$$

onde λ_1 e λ_2 são as raízes da equação característica:

$$\lambda^2 - 1{,}3\lambda + 0{,}4 = 0$$

Assim,

$$\begin{cases} \lambda_1 = 0{,}8 \\ \lambda_2 = 0{,}5 \end{cases} \qquad \therefore\ y_c[n] = \alpha_1 0{,}8^n + \alpha_2 0{,}5^n$$

Solução de equações de diferenças
- Método analítico -

- Solução:
  - Dado que a entrada consiste do degrau unitário, adota-se uma constante real como solução particular,

$$y_p[n] = \beta$$

Em regime estacionário tem-se:

$$\beta - 1{,}3\beta + 0{,}4\beta = 1$$

Assim, $\beta = 10$

A solução da equação de diferenças será, portanto,

$$y[n] = \alpha_1 0{,}8^n + \alpha_2 0{,}5^n + 10$$

Solução de equações de diferenças
- Método analítico -

- Solução:
  - Considerandos as condições iniciais:

$$y[-1] = 0 \ \Rightarrow \alpha_1 0{,}8^{-1} + \alpha_2 0{,}5^{-1} + 10 = 0$$
$$y[-2] = 0 \ \Rightarrow \alpha_1 0{,}8^{-2} + \alpha_2 0{,}5^{-2} + 10 = 0$$

Assim,

$$\begin{cases} 1{,}25\alpha_1 + 2\alpha_2 = -10 \\ 1{,}5625\alpha_1 + 4\alpha_2 = -10 \end{cases}$$

Resolvendo:

$$\begin{cases} \alpha_1 = -\frac{32}{3} \\ \alpha_2 = \frac{5}{3} \end{cases} \Rightarrow \qquad \text{Solução: } y[n] = -\frac{32}{3}0{,}8^n + \frac{5}{3}0{,}5^n + 10$$

Solução de equações de diferenças

- Método da Transformada z -

- A Transformada z de uma sequência $x[n]$ é definida como:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}$$

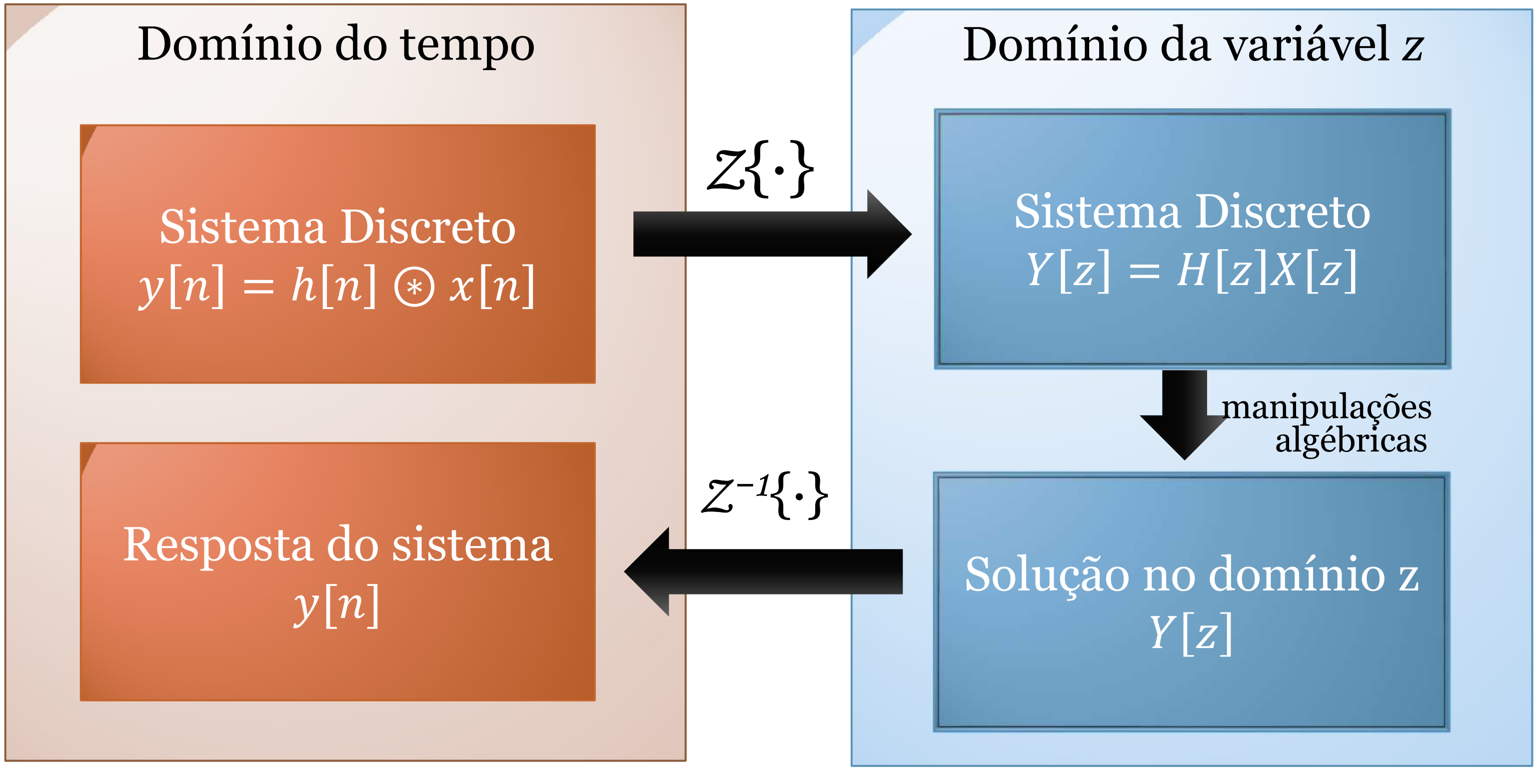
  - Observe que a função $X(z)$ é uma função contínua em termos da variável z.
  - A variável z é uma variável complexa, podendo ser escrita, portanto, como

$$z = Re(z) + jIm(z)$$

Solução de equações de diferenças

- Método da Transformada z -

- Representação esquemática:



Solução de equações de diferenças

- Método da Transformada z -

- Equação de inversão:

$$y[n] = \frac{1}{j2\pi} \oint_C Y(z) z^{n-1} dz$$

  - A aplicação desta equação de conversão é, por vezes, demasiadamente complexa.
- Métodos alternativos:
  - Método 1: Inspeção ou busca em tabela
  - Método 2: Expansão em frações parciais
  - Método 3: Expansão em série de potência ou divisão polinomial

Sistemas LTI descritos por equações de diferenças

- **Exemplo:** Determine, utilizando a abordagem da Transformada z, a resposta ao degrau unitário do sistema de tempo discreto modelado pela seguinte equação de diferenças.

$$y[n] - 1{,}3y[n-1] + 0{,}4y[n-2] = x[n]$$

- **Solução:** No exemplo anterior, demonstrou-se que a representação deste sistema no domínio da variável complexa z é dada por:

$$H(z) = \frac{1}{1 - 1{,}3z^{-1} + 0{,}4z^{-2}}$$

Solução analítica de equações de diferenças

- **Solução:** A saída do sistema, no domínio da transfomada z é dada por,

$$Y(z) = \frac{1}{1 - 1{,}3z^{-1} + 0{,}4z^{-2}} X(z)$$

Como $x[n] = \mu[n]$ então:

$$\Rightarrow X(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

Assim:

$$Y(z) = \frac{1}{1 - 1{,}3z^{-1} + 0{,}4z^{-2}} \times \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

$Y(z)$ possui 3 pólos $(0{,}5; 0{,}8\ e\ 1)$

Solução analítica de equações de diferenças

- **Solução:** Escrevendo o polinômio do denominador na forma fatorada,

$$Y(z) = \frac{1}{(1 - 0{,}8z^{-1})(1 - 0{,}5z^{-1})(1 - z^{-1})}$$

A expansão em frações parciais de $Y(z)$ resulta em:

$$Y(z) = \frac{-\frac{32}{3}}{(1 - 0{,}8z^{-1})} + \frac{\frac{5}{3}}{(1 - 0{,}5z^{-1})} + \frac{10}{(1 - z^{-1})}$$

A saída do sistema é obtida aplicando a Transformada z inversa!

Solução analítica de equações de diferenças

- **Solução:**

$$y[n] = \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{-\frac{32}{3}}{(1-0{,}8z^{-1})} + \frac{\frac{5}{3}}{(1-0{,}5z^{-1})} + \frac{10}{(1-z^{-1})}\right\}$$

$$y[n] = -\frac{32}{3}\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{1}{(1-0{,}8z^{-1})}\right\} + \frac{5}{3}\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{1}{(1-0{,}5z^{-1})}\right\} + 10\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{1}{(1-z^{-1})}\right\}$$

Através da tabela de pares de transformadas:

$$y[n] = -\frac{32}{3}0{,}8^n + \frac{5}{3}0{,}5^n + 10$$

Obs.: compare este resultado com o resultado obtido anteriormente

Solução de equações de diferenças

- Método Recursivo -

- O método recursivo é utilizado em implementações em dispositivos microcontrolados. Repetindo a forma geral,

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$

  - A saída do sistema pode ser calculada de forma recursiva, isolando-se $y[n]$:

$$y[n] = -\sum_{k=1}^{N} \frac{a_k}{a_0} y[n-k] + \sum_{k=0}^{M} \frac{b_k}{a_0} x[n-k]$$

$$\therefore\ y[n] = -\frac{a_1}{a_0} y[n-1] - \frac{a_2}{a_0} y[n-2] - \cdots - \frac{a_N}{a_0} y[n-N] +$$
$$+ \frac{b_0}{a_0} x[n] + \frac{b_1}{a_0} x[n-1] + \cdots + \frac{b_M}{a_0} x[n-M]$$

Comparação de resultados

- **Exemplo:** para o exemplo anterior, será considerada solução RECURSIVA, para comparação de resultados.
  - **Solução recursiva:** Isolando $y[n]$:

$$y[n] = x[n] + 1{,}3y[n-1] - 0{,}4y[n-2]$$

com as condições iniciais:

$$y[-1] = 0 \text{ e } y[-2] = 0$$

O cálculo da resposta será realizado para $n = 0$ até $n = 4$.

Comparação de resultados

- **Solução recursiva:**

$$y[n] = x[n] + 1{,}3y[n-1] - 0{,}4y[n-2]$$

- $n = 0$:

$y[0] = x[0] + 1{,}3y[-1] - 0{,}4y[-2] = 1 + 1{,}3 \cdot 0 - 0{,}4 \cdot 0 = 1$

- $n = 1$:

$y[1] = x[1] + 1{,}3y[0] - 0{,}4y[-1] = 1 + 1{,}3 \cdot 1 - 0{,}4 \cdot 0 = 2{,}3$

- $n = 2$:

$y[2] = x[2] + 1{,}3y[1] - 0{,}4y[0] = 1 + 1{,}3 \cdot 2{,}3 - 0{,}4 \cdot 1 = 3{,}59$

- $n = 3$:

$y[3] = x[3] + 1{,}3y[2] - 0{,}4y[1] = 1 + 1{,}3 \cdot 3{,}59 - 0{,}4 \cdot 2{,}3 = 4{,}747$

- $n = 4$:

$y[4] = x[4] + 1{,}3y[3] - 0{,}4y[2] = 1 + 1{,}3 \cdot 4{,}747 - 0{,}4 \cdot 3{,}59 =$
$= 5{,}7351$

…

Comparação de resultados

- **Solução analítica para $0 \leq n \leq 4$:**

$$y[n] = -\frac{32}{3}0{,}8^n + \frac{5}{3}0{,}5^n + 10$$

- $n = 0$: $y[0] = -\frac{32}{3}0{,}8^0 + \frac{5}{3}0{,}5^0 + 10 = 1$
- $n = 1$: $y[1] = -\frac{32}{3}0{,}8^1 + \frac{5}{3}0{,}5^1 + 10 = 2{,}3$
- $n = 2$: $y[2] = -\frac{32}{3}0{,}8^2 + \frac{5}{3}0{,}5^2 + 10 = 3{,}59$
- $n = 3$: $y[3] = -\frac{32}{3}0{,}8^3 + \frac{5}{3}0{,}5^3 + 10 = 4{,}747$
- $n = 4$: $y[4] = -\frac{32}{3}0{,}8^4 + \frac{5}{3}0{,}5^4 + 10 = 5{,}7351$

…

Comparação de resultados

Comparação:

No cálculo apresentado nos dois slides anteriores, observa-se que as soluções são equivalentes. Os gráficos dessas soluções são apresentados ao lado para comparação, de $n = 0$ até $n = 40$.