Introdução ao Processamento Digital de Sinais

Princípios

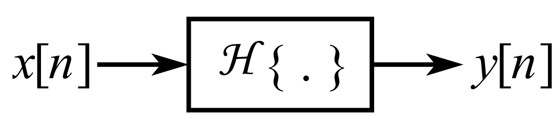
Prof. Janison R. de Carvalho
(http://lattes.cnpq.br/6380279792809473)

Sistemas de Tempo Discreto

- Um sistema de tempo discreto é definido como uma transformação ou operação que “mapeia” uma sequência de entrada $x[n]$ em uma sequência de saída $y[n]$.
- Pode-se representar matematicamente um sistema de tempo discreto por,

$$y[n] = \mathcal{H}\{x[n]\}$$

- Graficamente, pode-se representar esse sistema de tempo discreto como



Classificação de Sistemas

- Sistemas sem memória (*Memoryless Systems*)
  - Os sistemas podem ser classificados quanto à sua memória.
  - Sistemas sem memória são aqueles onde a saída no instante de tempo n depende unicamente da entrada neste mesmo instante de tempo n.
  - Matematicamente, pode-se definir a saída de um sistema sem memória como uma função da entrada dada por,

$$y[n] = f(x[n])$$

Classificação de Sistemas

- Sistemas sem memória (*Memoryless Systems*)
  - Um exemplo de sistema sem memória é o sistema que implementa o processamento dado por:
  $$y[n] = (x[n])^2$$
  - Os sistemas “atraso ideal” e “média móvel”, são sistemas com memória.

Classificação de Sistemas

- Sistemas lineares (*Linear systems*)
  - Um sistema pode ser classificado quanto à linearidade.
  - Um sistema é dito linear se ele atende simultaneamente às propriedades homogênea e associativa.

Classificação de Sistemas

- Sistemas lineares (*Linear systems*)
  - Para esta classificação, sejam consideradas duas entradas aplicadas individualmente a um sistema, $x_1[n]$ e $x_2[n]$, as quais produzem, respectivamente, as saídas $y_1[n]$ e $y_2[n]$. O sistema é dito linear se, para uma entrada dada por,

$$x[n] = \alpha_1 x_1[n] + \alpha_2 x_2[n]$$

a saída observada é dada por

$$y[n] = \alpha_1 y_1[n] + \alpha_2 y_2[n]$$

Classificação de Sistemas

- Sistemas invariantes no tempo (*Time-invariant systems*)
  - Os sistemas podem ser classificados quanto à variância no tempo.
  - Um sistema é dito invariante no tempo se um atraso temporal na sequência de entrada impõe o mesmo atraso temporal na saída do sistema.
  - Para esta classificação, considere uma entrada de um sistema, $x[n]$, e sua respectiva saída, $y[n]$. O sistema é invariante no tempo se, para qualquer n_0, a entrada deslocada $x[n-n_0]$ produz a saída deslocada $y[n-n_0]$.

Classificação de Sistemas

- Sistemas causais (*Causal systems*)
  - Os sistemas podem ser classificados quanto à causalidade.
  - Um sistema é dito causal se, para qualquer n_0 inteiro, a saída do sistema no instante $n = n_0$ depende **somente** da entrada em instantes $n \leq n_0$.
  - Um sistema causal é um sistema “não-antecipativo”.

Classificação de Sistemas

- Sistemas estáveis (*Stable Systems*)
  - Um sistema pode ser classificado quanto à estabilidade (*stability*)
  - Um sistema é dito estável no sentido BIBO se, e somente se, toda sequência de entrada de amplitude limitada produz uma sequência de saída também de amplitude limitada.
  - BIBO é a sigla para *Bounded-Input Bounded-Output*, ou seja, “entrada limitada saída limitada”

Classificação de Sistemas

- Sistemas estáveis (*Stable Systems*)
  - Uma sequência de entrada é dita limitada se existe uma constante real positiva B_x tal que
    $$|x[n]| \leq B_x < \infty, \text{ para todo valor de } n.$$
  - Se um sistema é estável, para toda entrada limitada, deve existir uma constante real positiva B_y tal que
    $$|y[n]| \leq B_y < \infty, \text{ para todo valor de } n.$$

Sistemas de Tempo Discreto

- Exercícios:

Para os 5 exemplos de sistemas de tempo discreto apresentados a seguir, realizar análise de forma a classifica-los quanto à memória, linearidade, causalidade, invariância no tempo e estabilidade.

Sistemas de Tempo Discreto

- Exemplo 1:
  - Sistema de atraso ideal (*Ideal Delay System*):

    Esse sistema promove um atraso temporal de ordem n_d.

    Matematicamente,

    $$y[n] = x[n - n_d]$$

    com n_d positivo.

    (Obs.: se n_d for negativo, então o sistema deveria deslocar a entrada para a direita, correspondendo a um avanço temporal)

Sistemas de Tempo Discreto

- Exemplo 2:
  - Sistema de Média Móvel (*Moving Average*):

    Esse sistema calcula a média de M amostras, $(\{x[n-M+1] \;\; x[n-M+2] \;\; \ldots x[n-1] \;\; x[n]\})$, de um sinal $x[n]$ para produzir a n-ésima saída do sinal $y[n]$. Matematicamente,

$$y[n] = \frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1} x[n-k]$$

Sistemas de Tempo Discreto

- Exemplo 3:
  - Sistema Acumulador (*Accumulator System*):

    Esse sistema calcula a soma da amostra atual de sua entrada, $x[n]$, com todas as amostras prévias da entrada. Matematicamente,

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$$

Sistemas de Tempo Discreto

- Exemplo 4:
  - Sistema Compressor de taxa de amostragem (*Compressor System*):

    Considerando uma constante M positiva, o sistema compressor de taxa de amostragem é definido pela relação.

    $$y[n] = x[Mn], \qquad -\infty < n < \infty$$

    Este sistema seleciona toda a M-ésima amostra de uma sequência de entrada, descartando $M - 1$ amostras entre duas amostras consecutivas selecionadas.

Sistemas de Tempo Discreto

- Exemplo 5:
  - Sistema de diferenças em avanço e em atraso (*Forward and Backward Difference Systems*):

  A diferença em avanço.

$$y[n] = x[n+1] - x[n],$$

  Diferença em atraso.

$$y[n] = x[n] - x[n-1],$$

Sistemas lineares invariantes no tempo

- Uma classe importante de sistemas de tempo discreto consiste dos sistemas lineares invariantes no tempo (*Linear Time-Invariant Systems ou LTI systems*)

- Para esta classe de sistemas, pode-se estabelecer uma equação importante para o cálculo das respostas às mais variadas entradas possíveis.

Sistemas lineares invariantes no tempo

- Considerando a entrada do sistema a sequência $x[n]$, pode-se escrever a saída como,

$$y[n] = \mathcal{H}\{x[n]\} = \mathcal{H}\left\{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\delta[n-k]\right\}$$

- Dado que o sistema é linear então:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\mathcal{H}\{\delta[n-k]\}$$

Sistemas lineares invariantes no tempo

- Observe da equação anterior que a resposta do sistema para qualquer entrada pode ser definida em termo das resposta do sistema às sequências de entrada $\delta[n-k]$ (impulsos unitários!!!).

- Definindo $h_k[n]$ como,

$$h_k[n] = \mathcal{H}\{\delta[n-k]\}$$

então,

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h_k[n]$$

Sistemas lineares invariantes no tempo

- Se o sistema é apenas linear, as sequências $\delta[n-k]$ dependem de ambos os valores de n e k.

- Dado que o sistema também é invariante no tempo, se $h[n]$ é a resposta ao impulso $\delta[n]$, então $h[n-k]$ é a resposta ao impulso $\delta[n-k]$.

- Desta forma, pode-se rescrever a resposta $y[n]$ como,

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k]$$

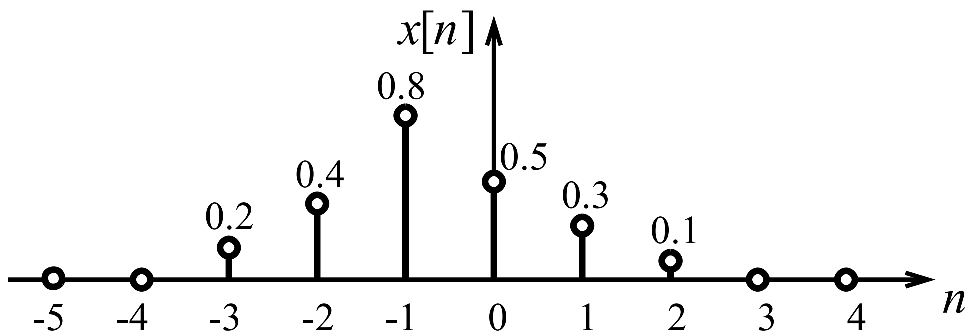
Sistemas lineares invariantes no tempo

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k]$$

- Analisando a equação obtida pode-se concluir:
  - Um sistema de tempo discreto linear e invariante no tempo é **completamente** caracterizado pela sua resposta ao impulso $h[n]$. Isto é, conhecida a reposta ao impulso de um dado sistema, pode-se calcular sua resposta, $y[n]$, para qualquer sequência de entrada, $x[n]$, calculando-se o somatório da expressão acima.
  - Esta equação é conhecida como "SOMA DE CONVOLUÇÃO"!

Sistemas lineares invariantes no tempo

- A obtenção da equação anterior pode ser facilmente visualizada a partir do exemplo abaixo.
    - Considere a sequência da figura.



    - A sequência $x[n]$ é *finita* (tem valores não nulos apenas entre $n = -3$ e $n = 2$), dada por:

$$x[n] = \{0.2 \quad 0.4 \quad 0.8 \quad \underset{\uparrow}{0.5} \quad 0.3 \quad 0.1\}$$

Sistemas lineares invariantes no tempo

- Equivalentemente, pode-se escrever $x[n]$ como:

$$x[n] = 0.2\delta[n+3] + 0.4\delta[n+2] + 0.8\delta[n+1] + \cdots$$
$$\cdots + 0.5\delta[n] + 0.3\delta[n-1] + 0.1\delta[n-2]$$

Considerando a sequência $x[n]$ a entrada de um sistema, a resposta deste sistema será dada por

$$\begin{aligned} y[n] &= \mathcal{H}\{x[n]\} \\ &= \mathcal{H}\{0.2\delta[n+3] + 0.4\delta[n+2] + .8\delta[n+1] + \cdots \\ &\qquad \cdots + 0.5\delta[n] + 0.3\delta[n-1] + 0.1\delta[n-2]\} \end{aligned}$$

Sistemas lineares invariantes no tempo

- Se o sistema é linear,

$$\mathcal{H}\{\alpha_1 x[n]\} = \alpha_1 \mathcal{H}\{x[n]\}$$

- Assim, reescrevendo a saída:

$$\begin{aligned} y[n] = \ & 0.2\mathcal{H}\{\delta[n+3]\} + 0.4\mathcal{H}\{\delta[n+2]\} + \cdots \\ & \cdots + 0.8\mathcal{H}\{\delta[n+1]\} + 0.5\mathcal{H}\{\delta[n]\} + \cdots \\ & \cdots + 0.3\mathcal{H}\{\delta[n-1]\} + 0.1\mathcal{H}\{\delta[n-2]\} \end{aligned}$$

Sistemas lineares invariantes no tempo

- Definindo como $h[n] = \mathcal{H}\{\delta[n]\}$ a resposta do sistema ao impulso unitário, se o sistema é invariante no tempo, então,

$$h[n-k] = \mathcal{H}\{\delta[n-k]\}$$

- Assim, pode-se obter, finalmente,

$$y[n] = 0.2h[n+3] + 0.4h[n+2] + 0.8h[n+1] + \cdots$$
$$\cdots + 0.5h[n] + 0.3h[n-1] + 0.1h[n-2]$$

Sistemas lineares invariantes no tempo

- Diante do exemplo apresentado, pode-se generalizar a equação que permite calcular a saída de um sistema LTI, cuja reposta ao impulso é dada por $h[n]$, para uma entrada arbitrária $x[n]$, como,

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k]$$

que é a equação obtida anteriormente definida como soma de convolução.

Sistemas lineares invariantes no tempo

Pode-se reescrever a equação de cálculo de reposta de um sistema de tempo discreto LTI na forma,

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k] = x[n] \circledast h[n]$$

onde o operador $\circledast$ representa a operação de convolução das sequências $x[n]$ e $h[n]$.

Sistemas lineares invariantes no tempo

- Propriedades de sistemas lineares invariantes no tempo
  - 1. Propriedade Comutativa

$$x[n] \circledast h[n] = h[n] \circledast x[n]$$

  - 2. Propriedade Associativa

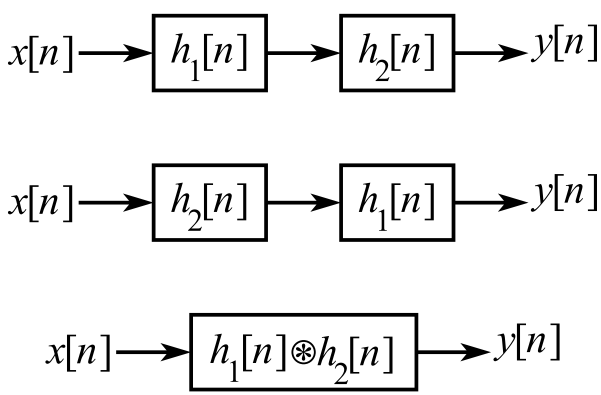
$$(h_1[n] \circledast x[n]) \circledast h_2[n] = h_1[n] \circledast (x[n] \circledast h_2[n])$$

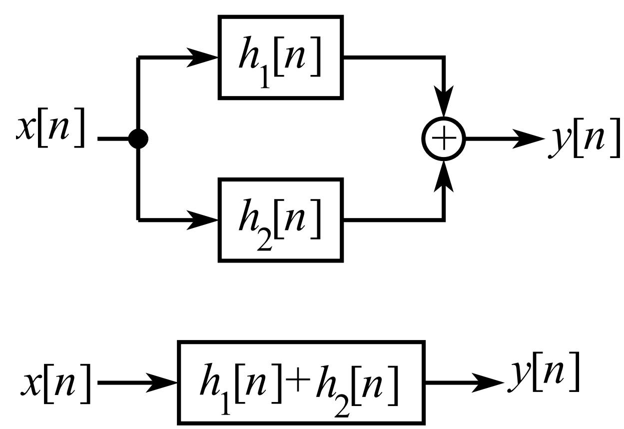
  - 3. Propriedade Distributiva

$$(x_1[n] + x_2[n]) \circledast h[n] = x_1[n] \circledast h[n] + x_2[n] \circledast h[n]$$

Sistemas lineares invariantes no tempo

- Propriedades de sistemas lineares invariantes no tempo
  - 4. Conexão Cascata
  - 5. Conexão Paralela





$$y[n] = (h_1[n] \circledast h_2[n]) \circledast x[n]$$

$$y[n] = (h_1[n] + h_2[n]) \circledast x[n]$$

Sistemas lineares invariantes no tempo

- Propriedades de sistemas lineares invariantes no tempo
  - 6. Estabilidade:
    - Em termos da sua resposta ao impulso unitário, um sistema é estável se

$$S = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| < \infty$$

  - 7. Causalidade:
    - Em termos da sua resposta ao impulso unitário, um sistema é causal se,

$$h[n] = 0, n < 0$$

Sistemas lineares invariantes no tempo

- Exemplo 1:

Determine a resposta ao impulso dos sistema de média móvel.

- A resposta ao impulso é obtida fazendo-se

$$x[n] = \delta[n]$$

Assim, considerando-se também $y[n] = h[n]$ (resposta ao impulso unitário), tem-se:

$$h[n] = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} \delta[n-k]$$

Sistemas lineares invariantes no tempo

- Exemplo 1:
  - Para resolução, a equação de resposta

$$h[n] = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} \delta[n-k]$$

deve ser avaliada em três intervalos:
    - Intervalo 1 ($-\infty < n < 0$): Neste intervalo, $n - k < 0$ para todo n e, portanto, $\delta[n-k] = 0$. Logo, $h[n] = 0$.
    - Intervalo 2 ($0 \leq n \leq M - 1$): Neste intervalo, para cada valor de n ocorrerá um único impulso quando $n = k$. Logo, $h[n] = 1/M$.
    - Intervalo 3 ($M - 1 < n < \infty$): Neste intervalo, $n - k > 0$ para todo n e, portanto, $\delta[n-k] = 0$. Logo, $h[n] = 0$.

Sistemas lineares invariantes no tempo

- Exemplo 1:
  - Assim, para o sistema de média móvel, cuja relação entrada-saída é dada por,

$$y[n] = \frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1} x[n-k]$$

a resposta ao impulso é dada por

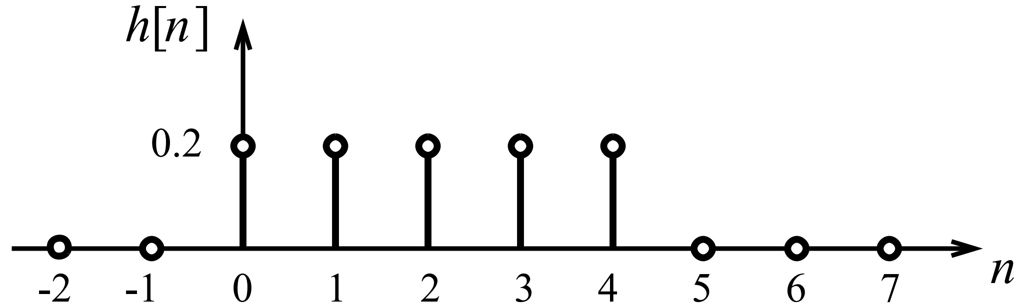
$$h[n] = \begin{cases} \frac{1}{M}, & \text{se } 0 \leq n \leq M-1 \\ 0, \text{se } n < 0 \text{ ou } n > M-1 \end{cases}$$

Sistemas lineares invariantes no tempo

- Exemplo 1:
  - Considerando um sistema de média móvel de ordem $M = 5$, tem-se a resposta ao impulso dada por,

$$h[n] = \begin{cases} \frac{1}{5}, & \text{se } 0 \leq n \leq 4 \\ 0, \text{se } n < 0 \text{ ou } n > 4 \end{cases}$$

Representação gráfica com $M = 5$:



Sistemas lineares invariantes no tempo

- Exemplo 2:

Determine a resposta ao impulso dos sistema acumulador.

- A resposta ao impulso é obtida fazendo-se

$$x[n] = \delta[n]$$

Assim, considerando-se também $y[n] = h[n]$ (resposta ao impulso unitário), tem-se:

$$h[n] = \frac{1}{M} \sum_{k=-\infty}^{n} \delta[k]$$

Sistemas lineares invariantes no tempo

- Exemplo 2:
  - Para resolução, a equação de resposta

$$h[n] = \frac{1}{M} \sum_{k=-\infty}^{n} \delta[k]$$

deve ser avaliada em dois intervalos distintos:

- Intervalo 1 ($-\infty < n < 0$): Neste intervalo, $k < 0$ para todo n e, portanto, $\delta[k] = 0$. Logo, $h[n] = 0$.
- Intervalo 2 ($0 \leq n \leq \infty$): Neste intervalo, para cada valor de n ocorrerá um único impulso quando $k = 0$. Logo, $h[n] = 1$.

Sistemas lineares invariantes no tempo

- Exemplo 2:
  - Assim, para o sistema de média móvel, cuja relação entrada-saída é dada por,

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$$

a resposta ao impulso é dada por

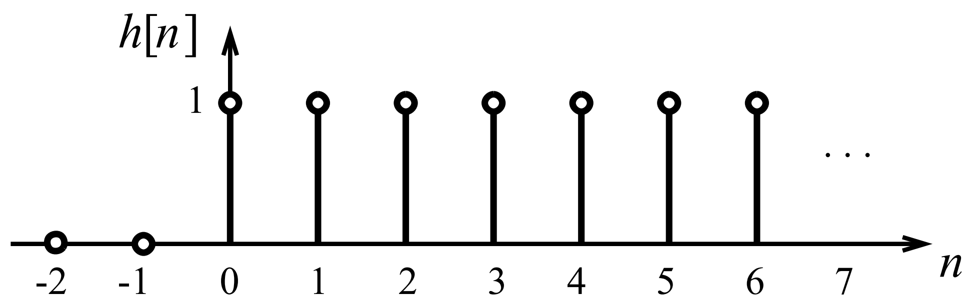
$$h[n] = \begin{cases} 1, & \text{se } n \geq 0 \\ 0, & \text{se } n < 0 \end{cases}$$

Sistemas lineares invariantes no tempo

- Exemplo 2:
  - Da análise da sequência obtida, dada por

$$h[n] = \begin{cases} 1, & \text{se } n \geq 0 \\ 0, & \text{se } n < 0 \end{cases},$$

observa-se, portanto, que a resposta ao impulso unitário do sistema acumulador é o degrau unitário!



Sistemas lineares invariantes no tempo

- Exemplo 3:

A partir das respostas ao impulso dos sistemas média móvel e acumulador, classifique esses sistemas quanto à estabilidade e à causalidade.

  - Obs.: As conclusões obtidas neste exemplo devem ser equivalentes às conclusões dos exercícios sugeridos nos slides anteriores

Sistemas lineares invariantes no tempo

- Exemplo 3:
  - Estabilidade:
    - Sistema de média móvel

$$S = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] = \sum_{n=0}^{M-1} \frac{1}{M} = 1 < \infty$$

(Sistema ESTÁVEL!)

    - Sistema acumulador:

$$S = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] = \sum_{n=0}^{\infty} 1 = \infty$$

(Sistema INSTÁVEL!)

Sistemas lineares invariantes no tempo

- Exemplo 3:
  - Causalidade:
    - Sistema de média móvel

$$h[n] = 0, \text{quando } n < 0$$

(Sistema CAUSAL!)

    - Sistema acumulador:

$$h[n] = 0, \text{quando } n < 0$$

(Sistema CAUSAL!)

Classificação de Sistemas

- Uma outra forma de classificar sistemas pode ser definida após a definição de resposta ao impulso.
- Considerando a resposta ao impulso de um sistema ele será do tipo:
  - FIR (*Finite impulse Response*) quando a sua resposta ao impulso for uma sequência finita, ou seja, quando ele apresentar valores não nulos de $h[n]$ apenas para um número finito de amostras.
  - IIR (*Infinite impulse Response*) quando a sua resposta ao impulso for uma sequência infinita, ou seja, quando ele apresentar valores não nulos de $h[n]$ para um número infinito de amostras.

Classificação de Sistemas

- Da análise do Exemplo 3, resta claro que:
  - O sistema de média móvel é um sistema do tipo FIR, ou seja, de resposta ao impulso finita.
  - O sistema acumulador é um sistema do tipo IIR, ou seja, de resposta ao impulso infinita.
  - Analisando a condição de estabilidade,

$$S = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| < \infty,$$

  pode-se verificar:
    - Sistemas do tipo FIR são sempre estáveis, haja vista que o somatório é de um número finito de termos finitos.
    - Sistemas do tipo IIR podem ser estáveis ou instáveis.