Lógica para Computação

Aula: Lógica de Predicados (Parte I)

Prof.º Me. Paulo César Oliveira Brito

Introdução

Proposição:

$$\text{“}\underbrace{\text{O computador 4}}_{\text{Sujeito}}\ \underbrace{\text{está com defeito.”}}_{\text{Predicado}}$$

“O computador está com defeito.” (Qual?)

“x está com defeito.” (Sentença aberta)

Predicado: está com defeito.
Variável: x.

Proposição Aberta

Proposição aberta: é uma proposição que depende de uma ou mais variáveis, por exemplo:

"O quadrado de x é 81."
"O número x é primo."
"x é pai de y."
"$x + y = 2x + z$."

Proposição Aberta

Em geral, o valor lógico de uma proposição aberta depende dos valores das variáveis que nela ocorrem.

Exemplo:

“x é menor que y”

É verdadeira se os valores lógico de x e y forem 11 e 38.
Mas é falsa se os valores forem 40 e 32.

Predicados

No cálculo de predicados, trabalhamos com sentenças abertas que, a princípio, não podem ser classificadas como proposições.

Assim, fazemos a introdução de quantificadores para que os predicados (agora quantificados) possam funcionar como proposições e se apliquem as regras do cálculo proposicional.

Predicados

Dada uma proposição, o predicado será indicado com uma letra maiúscula do alfabeto latino e o sujeito com letra minúscula colocada à direita da primeira.

Exemplos:

1)Amanda é responsável pelo destaque: Ra.

2)Lucas não foi um bom profissional: ¬Pa.

3)Eles foram ao baile: Be.

Predicados

P (x): significa que a variável x tem a propriedade ou predicado P.

Dados os valores das variáveis, o predicado assume um valor lógico (F ou V).

Exemplo:

“A pessoa é alta.”

Domínio: Todas as pessoas;
Predicado: Ser alto;
P(x): x é alto;   --- representação do Predicado de x
P(Pedro): Pedro é alto.   (V ou F)

Predicados

“A pessoa é alta.”	(proposição aberta)
“**Todas** as pessoas são altas.”	(proposição quantificada)
“**Existem** pessoas altas.”	(proposição quantificada)

Quantificadores

Quantificadores são palavras/expressões que referem a quantidades tais como "todos" e "alguns" e indicam para quantos elementos do domínio um dado predicado é verdadeiro. Também pode ser definido, como operadores lógicos que, quando acrescentados aos predicados, obtemos proposições que se referem a todo um conjunto ou a uma parte dele.

- Quantificador universal;
- Quantificador existencial.

Quantificadores

Exemplos:

- 1)Todos que prestaram concurso foram contratados.
- 2)Alguns dos que prestaram concurso foram contratados.

Vocabulário e Regras de Formação

Símbolos lógicos:

- Operadores lógicos: “$\neg$”, “$\wedge$”, “$\vee$”, “$\rightarrow$”, “$\leftrightarrow$”.
- Quantificadores: “$\forall$”, “$\exists$”.
- Parênteses: “(‘ , ’)”.

Vocabulário e Regras de Formação

Símbolos não-lógicos:

- **Letras nominais:** letras minúsculas de “a” até “t”.
- **Variáveis:** letras minúsculas de “u” a “z”.
- **Letras predicativas:** letras maiúsculas: “P”, “Q”, “R” ...

Vocabulário e Regras de Formação

Exemplos:

1) Todos os homens são mortais. Sócrates é um homem. Portanto Sócrates é mortal.

$$\forall x\,(Hx \rightarrow Mx),\ Hs \vdash Ms.$$

2) Existem pessoas que não gostam de viver.

$$\exists x\,(Px \wedge \neg Vx).$$

Vocabulário e Regras de Formação

Uma fórmula atômica é uma letra predicativa seguida por zero ou mais letras nominais. (Fa) Fórmulas atômicas formadas por zero letras nominais são exatamente as letras sentenciais do cálculo proposicional. O conceito de fbf do cálculo dos predicados é definido pelas seguintes regras de formação:

Vocabulário e Regras de Formação

1. Toda fórmula atômica (Px) é uma fbf.
2. Se Px é uma fbf, então, $\neg$ Px é uma fbf.
3. Se Px e Qx são fbf, então, *(*Px $\wedge$ Qx*)*, *(*Px $\vee$ Qx*)*, *(*Px $\rightarrow$ Qx*)* e *(*Px $\leftrightarrow$ Qx*)* são fbf.
4. Se Px é uma fbf, então, também serão:

$\forall$x (Px),

$\exists$x (Px)

Quantificador Universal

Um enunciado da forma "*Todo S é P*" pode ser expresso com o uso da letra "x" para denotar uma **variável** para representar objetos individuais. Assim, expressamos o enunciado por:

Qualquer que seja x, se x é S, então x é P.

Adotamos o símbolo "∀" *para representar "qualquer que seja"* ou *"**para todo**"*.

Quantificador universal: ∀

Lê-se: "para todo", "para qualquer".

$$(\forall x)\ P(x).$$

Quantificador Universal

Esse símbolo chama-se **quantificador universal**. Em vez de escrever “x é S”, escrevemos “Sx” e, de modo análogo, o enunciado se torna:

$$\forall \boldsymbol{x}\ (\boldsymbol{Sx} \rightarrow \boldsymbol{Px}).$$

Quantificador Universal

Exemplos:

“Todo gato é mamífero.”

Para todo x, se x for um gato, então x é mamífero.

Predicados:
G(x): x é gato.
M(x): x é mamífero.

$$(\forall x)\ G(x) \rightarrow M(x).$$

Quantificador Universal

Exemplos:

"Todo bytes têm oito bits."

Para todo x, se x for um byte, então x tem oito bits.

$$(\forall x)\ byte(x) \rightarrow oito\_bits(x).$$

Quantificador Existencial

Já enunciados da forma “algum S é P” necessitam de um **quantificador existencial** denotado pelo símbolo “ $\exists$ ”, que pode significar: *“algum”, “existe”, “para algum”.* Assim, *“algum*
S é P” é expresso como $\exists$ ***x (Sx ∧ Px).***
Uma proposição do tipo “algum S não é P”, nessa notação, fica:

$$\exists x\,(Sx \land \neg Px).$$

Quantificador Existencial: **$\exists$**

Lê-se: “existe um”; “existe algum”;

“há pelo menos um”; “para algum”.

$$(\exists x)P(x).$$

Quantificador Existencial

Exemplos:

1)“Existe algum político honesto”.

Ou seja,

Para pelo menos um x, x é um político e x é honesto.

Ou ainda,

$$(\exists\ x)\ (\text{Político}(x)\ \wedge\ \text{Honesto}(x)).$$