Lógica para Computação

Aula: Argumento (Parte II)

Prof.º Me. Paulo César Oliveira Brito

Regras não-hipotéticas de inferência

O cálculo proposicional fornece um sistema de regras de inferência que são capazes de gerar todas as formas de argumento válidas expressáveis na linguagem do cálculo proposicional e somente as formas válidas.

As regras de inferência geram as formas de argumento numa série de etapas simples e precisas de raciocínio, chamada de derivação ou prova. Cada etapa, numa derivação, é uma instância de uma das regras.

Regras não-hipotéticas de inferência

Existem dez regras básicas de inferência: uma regra de introdução e uma de eliminação para cada um dos cinco operadores lógicos.

- Numa regra de eliminação do operador, ele ocorre como operador principal numa das premissas, mas não na conclusão.
- Numa regra de introdução, sucede o contrário.

Regras não-hipotéticas de inferência

No processo de derivação ou prova, as linhas são numeradas na primeira coluna, as proposições são apresentadas na coluna do meio e a justificativa da prova ocorre na coluna à direita.

Na coluna justificativa, utilizam-se:

- P para designar que se trata de uma premissa;
- O nome simbólico da regra quando uma conclusão ocorre na linha pela aplicação de uma regra. As premissas de uma regra aplicada são referenciadas pelos números das linhas onde elas se encontram e precedem o nome da regra, separado por vírgulas.

Regras não-hipotéticas de inferência

A seguir, as regras básicas não-hipotéticas de inferência são apresentadas, juntamente com exemplos de argumentos válidos e a sua prova.

A justificativa para mostrar que cada uma dessas regras é um argumento válido consiste em mostrar que a condicional associada a cada uma delas é uma tautologia.

Modus Ponens (MP) ou Eliminação do Condicional (→ E)

Modus Ponens (MP) ou Eliminação do Condicional (→E): De um condicional e seu antecedente, podemos inferir o seu consequente.

Exemplo:

$P, P \rightarrow Q \vdash Q$

Prova:

Linha	Proposição	Justificativa
1	P	P(premissa)
2	$P \rightarrow Q$	P(premissa)
3	Q	1,2 MP (ou 1,2→E)

Modus Ponens (MP) ou Eliminação do Condicional ($\rightarrow$ E)

Exemplo:

$C, S \rightarrow A, C \rightarrow S \vdash A$

Prova:

Linha	Proposição	Justificativa
1	C	P(premissa)
2	$S \rightarrow A$	P(premissa)
3	$C \rightarrow S$	P(premissa)
4	S	1,3 MP
5	A	2,4 MP

Modus Ponens (MP) ou Eliminação do Condicional ($\rightarrow$ E)

Exemplo:

$\neg P \rightarrow (Q \rightarrow R), \neg P, Q \vdash R$

Prova:

Linha	Proposição	Justificativa
1	$\neg P \rightarrow (Q \rightarrow R)$	P(premissa)
2	$\neg P$	P(premissa)
3	Q	P(premissa)
4	$Q \rightarrow R$	1,2 MP
5	R	3,4 MP

Eliminação de Negação (¬ E)

A regra da eliminação da negação afirma que duas negações consecutivas se cancelam, de forma similar à regra algébrica de multiplicação de dois negativos: (-).(-)=(+).

Exemplo:

$\neg\neg\neg P \vdash \neg P$

Prova:

Linha	Proposição	Justificativa
1	$\neg\neg\neg P$	P(premissa)
2	$\neg P$	1 ¬E

Eliminação de Negação (¬ E)

Exemplo:

$\neg P \rightarrow \neg\neg Q, \neg\neg\neg P \vdash Q$

Prova:

Linha	Proposição	Justificativa
1	$\neg P \rightarrow \neg\neg Q$	P(premissa)
2	$\neg\neg\neg P$	P(premissa)
3	$\neg P$	2 ¬E
4	$\neg\neg Q$	1,3 MP
5	Q	4 ¬E

Introdução de Conjunção ($\wedge$ I)

De duas φ e ψ podemos inferir a conjunção entre elas, isto é, $\varphi \wedge \psi$.

Exemplo:

$P, Q \vdash P \wedge Q$

Prova:

Linha	Proposição	Justificativa
1	P	P(premissa)
2	Q	P(premissa)
3	$P \wedge Q$	1, 2 $\wedge$ I

Introdução de Conjunção ($\wedge$ I)

Exemplo:

P, Q, R $\vdash$ $(P \wedge Q) \wedge R$

Prova:

Linha	Proposição	Justificativa
1	P	P(premissa)
2	Q	P(premissa)
3	R	P(premissa)
4	$P \wedge Q$	1,2 $\wedge$I
5	$(P \wedge Q) \wedge R$	3,4 $\wedge$I

Introdução de Conjunção (∧ I)

Exemplo:

P, (P∧Q)→R, ¬¬Q ⊢ R

Prova:

Linha	Proposição	Justificativa
1	P	P(premissa)
2	(P∧Q)→R	P(premissa)
3	¬¬Q	P(premissa)
4	Q	3 ¬E
5	P∧Q	1,4 ∧I
6	R	2,5 MP

Introdução de Conjunção ($\wedge$ I)

Exemplo:

$(P \wedge Q) \rightarrow (R \wedge S), P, \neg\neg Q \vdash R \wedge S$

Prova:

Linha	Proposição	Justificativa
1	$(P \wedge Q) \rightarrow (R \wedge S)$	P(premissa)
2	P	P(premissa)
3	$\neg\neg Q$	P(premissa)
4	Q	3 $\neg$E
5	$P \wedge Q$	2,4 $\wedge$I
6	$R \wedge S$	1,5 MP

Eliminação de Conjunção (∧E)

De uma conjunção φ ∧ ψ podemos inferir φ ou ψ.

Exemplo:

$P \wedge \neg\neg Q \vdash Q$

Prova:

Linha	Proposição	Justificativa
1	$P \wedge \neg\neg Q$	P(premissa)
2	$\neg\neg Q$	1 ∧ E
3	Q	2 ¬ E

Eliminação de Conjunção ($\wedge$E)

Exemplo:

$P \wedge \neg\neg Q \vdash P \wedge Q$

Prova:

Linha	Proposição	Justificativa
1	$P \wedge \neg\neg Q$	P(premissa)
2	P	1 $\wedge$ E
3	$\neg\neg Q$	1 $\wedge$ E
4	Q	3 $\neg$ E
5	$P \wedge Q$	2,4 $\wedge$ I

Eliminação de Conjunção ($\wedge$E)

Exemplo:

$P \wedge Q \vdash Q \wedge P$

Prova:

Linha	Proposição	Justificativa
1	$P \wedge Q$	P(premissa)
2	P	1 $\wedge$ E
3	Q	1 $\wedge$ E
4	$Q \wedge P$	2,3 $\wedge$ I

Eliminação de Conjunção ($\wedge$E)

Exemplo:

$P \rightarrow (Q \wedge R), P \vdash P \wedge Q$

Prova:

Linha	Proposição	Justificativa
1	$P \rightarrow (Q \wedge R)$	P(premissa)
2	P	P(premissa)
3	$Q \wedge R$	1,2 MP
4	Q	3 $\wedge$ E
5	$P \wedge Q$	2,4 $\wedge$ I

Eliminação de Conjunção (∧E)

Exemplo:

$P \rightarrow Q,\ R \rightarrow S,\ P \land R \vdash Q \land S$

Prova:

Linha	Proposição	Justificativa
1	$P \rightarrow Q$	P(premissa)
2	$R \rightarrow S$	P(premissa)
3	$P \land R$	P(premissa)
4	P	3 ∧E
5	Q	1,4 MP
6	R	3 ∧E
7	S	2,6 MP
8	$Q \land S$	5,7 ∧I

Introdução da Disjunção (v I)

De φ podemos inferir φ∧ψ onde ψ é uma fbf qualquer.

Exemplo:

P, (P∨Q)→R ⊢ R

Prova:

Linha	Proposição	Justificativa
1	P	P(premissa)
2	(P∨Q)→R	P(premissa)
3	P∨Q	1 ∨ I
4	R	2,3 MP

Introdução da Disjunção (v I)

Exemplo:

$P \vdash (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$

Prova:

Linha	Proposição	Justificativa
1	P	P(premissa)
2	$P \vee Q$	1 $\vee$ I
3	$P \vee R$	1 $\vee$ I
4	$(P \vee Q) \wedge (P \vee R)$	2,3 $\wedge$ I

Eliminação da Disjunção (v E)

É o argumento fornecido por $\varphi \lor \psi, \varphi \rightarrow \chi, \psi \rightarrow \chi \vdash \chi$.

Exemplo:

$S \lor D, S \rightarrow F, D \rightarrow F \vdash F$

Prova:

Linha	Proposição	Justificativa
1	$S \lor D$	P(premissa)
2	$S \rightarrow F$	P(premissa)
3	$D \rightarrow F$	P(premissa)
4	F	1,2,3 $\lor$ E

Eliminação da Disjunção (v E)

Exemplo:

$(A \rightarrow B) \land (C \rightarrow B), \neg\neg(A \lor C) \vdash B$

Prova:

Linha	Proposição	Justificativa
1	$(A \rightarrow B) \land (C \rightarrow B)$	P(premissa)
2	$\neg\neg(A \lor C)$	P(premissa)
3	$A \lor C$	2¬E
4	$A \rightarrow B$	1 ∧ E
5	$C \rightarrow B$	1 ∧ E
6	B	3,4,5 ∨ E

Introdução do Bicondicional ($\leftrightarrow$ I)

No caso do bicondicional, os enunciados da forma $\varphi \leftrightarrow \psi$ são equivalentes aos enunciados da forma $(\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)$. Em vista dessa equivalência, as regras de introdução e eliminação para o bicondicional funcionam como $\wedge$I e $\wedge$E.

É o argumento dado por $\varphi \rightarrow \psi, \psi \rightarrow \varphi \vdash \varphi \leftrightarrow \psi$.

Introdução do Bicondicional ($\leftrightarrow$ I)

Exemplo:

$P \rightarrow Q, (P \rightarrow Q) \rightarrow (Q \rightarrow P) \vdash P \leftrightarrow Q$

Prova:

Linha	Proposição	Justificativa
1	$P \rightarrow Q$	P(premissa)
2	$(P \rightarrow Q) \rightarrow (Q \rightarrow P)$	P(premissa)
3	$Q \rightarrow P$	1, 2 MP
4	$P \leftrightarrow Q$	1,3 $\leftrightarrow$ I

Introdução do Bicondicional ($\leftrightarrow$ I)

Exemplo:

$(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P) \vdash P \leftrightarrow Q$

Prova:

Linha	Proposição	Justificativa
1	$(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$	P(premissa)
2	$P \rightarrow Q$	1 $\wedge$E
3	$Q \rightarrow P$	1 $\wedge$E
4	$P \leftrightarrow Q$	2,3 $\leftrightarrow$I

Eliminação do Bicondicional (↔E)

É o argumento dado por $\varphi \leftrightarrow \psi \vdash \varphi \rightarrow \psi$ ou $\varphi \leftrightarrow \psi \vdash \psi \rightarrow \varphi$.

Exemplo:

$P \leftrightarrow Q \vdash (P \rightarrow Q) \land (Q \rightarrow P)$

Prova:

Linha	Proposição	Justificativa
1	$P \leftrightarrow Q$	P(premissa)
2	$P \rightarrow Q$	1 ↔E
3	$Q \rightarrow P$	1 ↔E
4	$(P \rightarrow Q) \land (Q \rightarrow P)$	2,3 ∧I

Eliminação do Bicondicional (↔E)

Exemplo:

F ↔ (S∨D), S ⊢F

Prova:

Linha	Proposição	Justificativa
1	F ↔ (S∨D)	P(premissa)
2	S	P(premissa)
3	(S∨D)→F	1 ↔E
4	S∨D	2 ∨I
5	F	3,4 MP