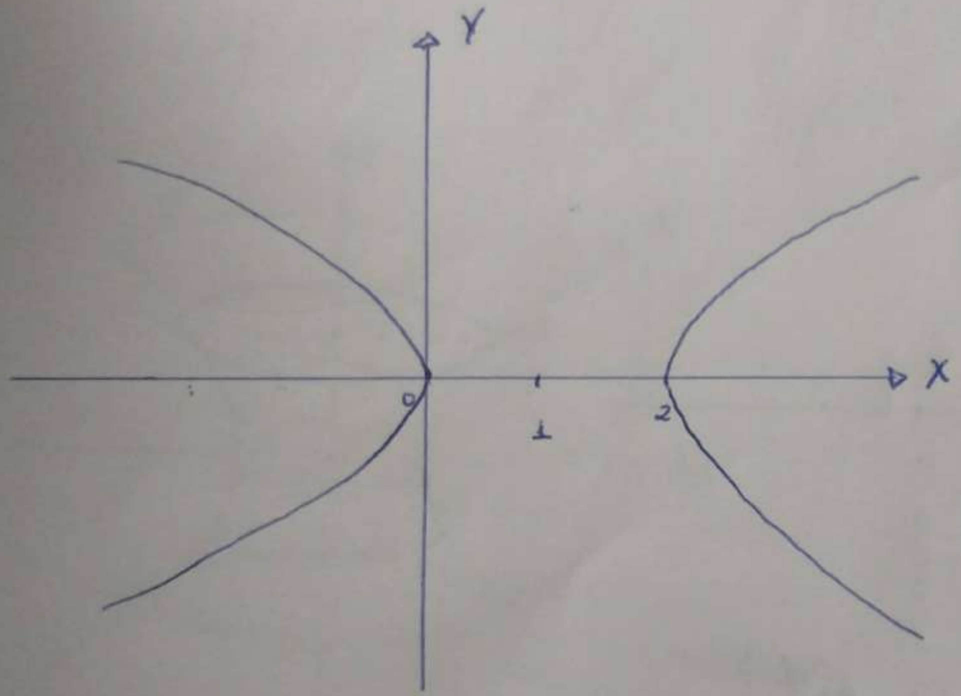
① $f(x,y) = x^2 - 2x - y^2$

$f(x,y) \Rightarrow x^2 - 2x - y^2 = 0$

$f(x,y) \Rightarrow y^2 = -2x + x^2 \equiv y^2 = x^2 - 2x$

hiperboloide, que em projeção apresenta uma hipérbole de centro (1,0).

Projeção



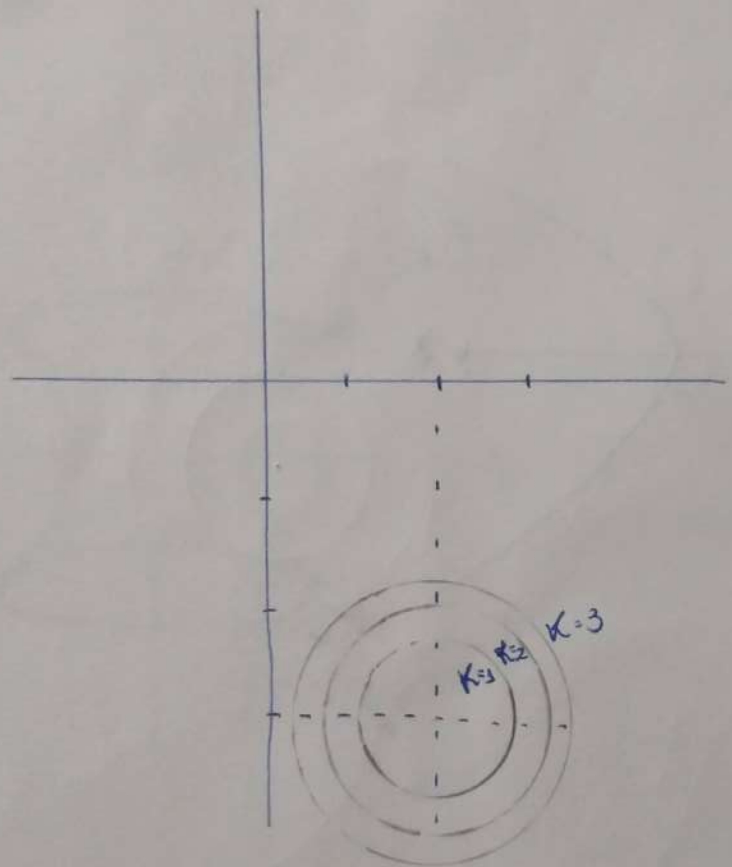
② $f(x,y) = k$

$(x-2)^2+(y+3)^2 = k$

Como $(x-2)^2+(y+3)^2 \geq 0$ temos que k também será maior ou igual a zero, logo $k \geq 0$.

Sabendo disso, todas as curvas de nível de $f(x,y)$ são circunferências de centro $(2,-3)$ e de raio $= \sqrt{k}$

Exemplos:



P/ $k=1 \Rightarrow (x-2)+(y+3) = \sqrt{1}$

$(x-2)+(y+3) = 1$

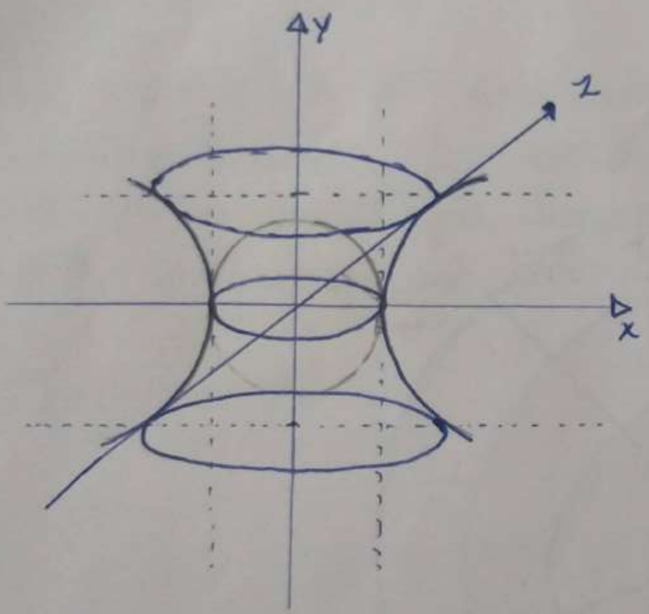
③ $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2$

$x^2 + y^2 - z^2 = 1 \quad (K = 1)$

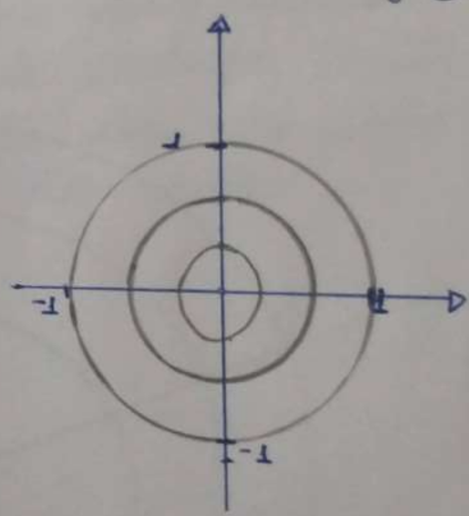
• $z = T \rightarrow x^2 + y^2 = 1 + T^2 \rightarrow \dfrac{x^2}{1+T^2} + \dfrac{y^2}{1+T^2} = 1$

• $y = T \rightarrow x^2 - z^2 = 1 - T^2 \rightarrow \dfrac{x^2}{1+T^2} - \dfrac{z^2}{1+T^2} = 1$

• $x = T \rightarrow y^2 - z^2 = 1 - T^2 \rightarrow \dfrac{y^2}{1+T^2} - \dfrac{z^2}{1+T^2} = 1$



Projeção



④ $\underbrace{f(x,y,z)}_{w} = \sqrt{x^2+y^2+z^2} = k \qquad f: \mathbb{R}^3$

$k = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \Rightarrow k \geq 0$

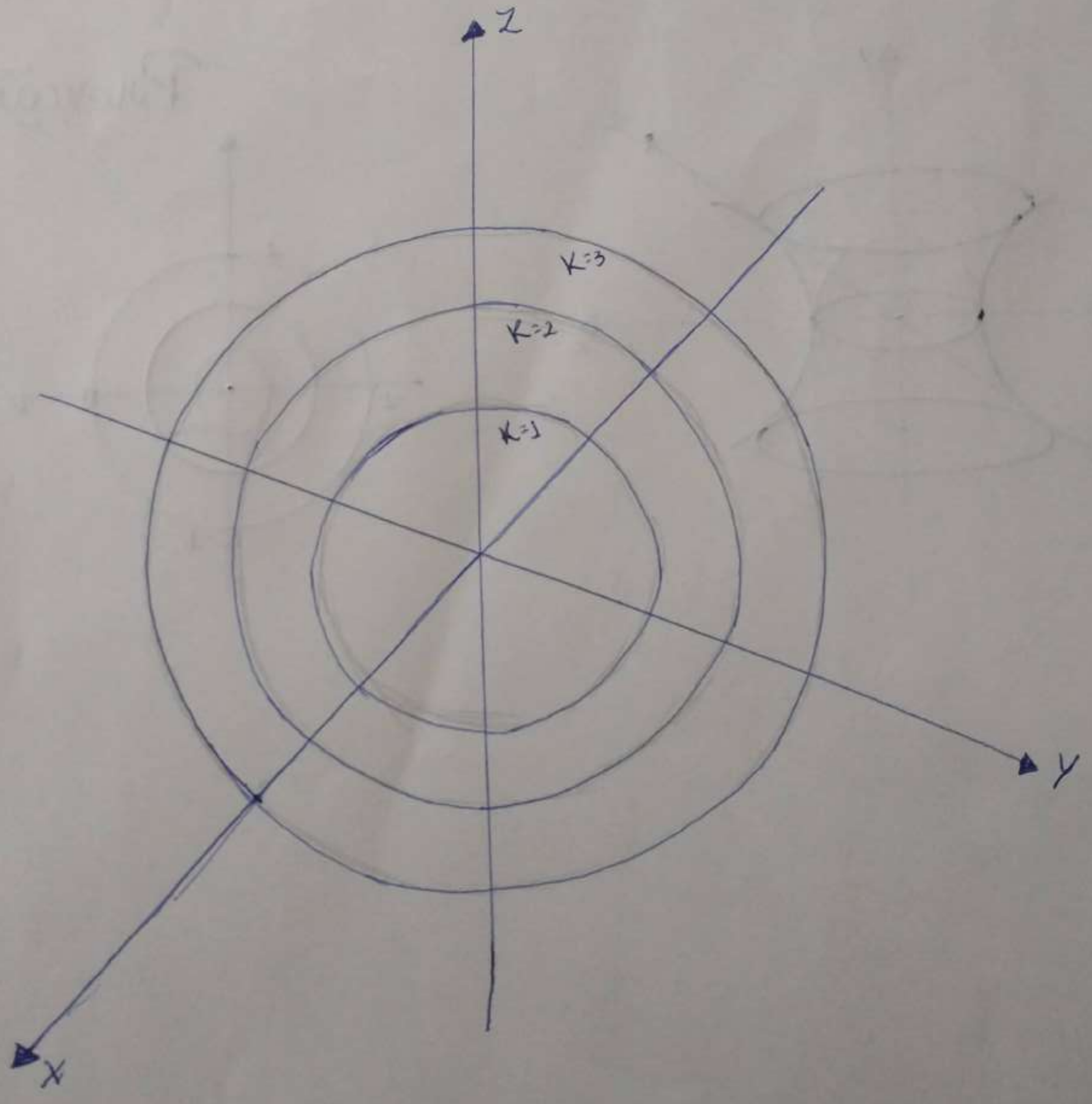
$x^2+y^2+z^2 = k^2$

Exemplos:

$k = 1 \Rightarrow x^2+y^2+z^2 = 1$

$k = 2 \Rightarrow x^2+y^2+z^2 = 4$

$k = 3 \Rightarrow x^2+y^2+z^2 = 9$



⑤ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^4-y^4}{x^2+y^2}$

Para mostrar que tal limite não existe, basta tomar duas formas distintas de se chegar ao ponto $(0,0)$

P/ $y=0$.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4-y^4}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(x,0)} \frac{x^4-y^4}{x^2+y^2} = \frac{x^4}{x^2} = x^2$$

P/ $x=0$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4-y^4}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,y)} \frac{x^4-y^4}{x^2+y^2} = \frac{-y^4}{y^2} = -y^2$$

Já que $x^2 \neq -y^2$ concluímos que dois caminhos distintos levando levando ao mesmo ponto produzem limites diferentes e como o limite de uma função deve ser único quando existe, conclui-se que tal limite não existe.

(6) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} \dfrac{xy-y}{x^2-x+2xy-2y} = \lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} \dfrac{y(x-1)}{x(x-1)+2y(x-1)}$

$= \lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} \dfrac{y\cancel{(x-1)}}{(x+2y)\cancel{(x-1)}} = \lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} \dfrac{y}{x+2y} = \dfrac{2}{1+2\cdot 2} = \dfrac{2}{1+4} = \boxed{\dfrac{2}{5}}$

Assim,

$\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} \dfrac{xy-y}{x^2-x+2xy-2y} = \dfrac{2}{5}.$

⑦ Mostrar que o limite não existe.

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{xy-2x-y+2}{x^2+y^2-2x-4y+5} = \lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{x(y-2)-1(y-2)}{x^2-2x+1-\cancel{1}+y^2-4y+4-\cancel{4}+\cancel{5}}$$

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{(x-1)(y-2)}{(x-1)^2+(y-2)^2}$$

Se (x,y) se aproxima de $(1,2)$ pela reta $y=2$, temos:

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ y=2}} \frac{(x-1)(y-2)}{(x-1)^2+(y-2)^2} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(2-2)}{(x-1)^2+(2-2)^2} = \lim_{x\to 1} \frac{0}{(x-1)^2} = \lim_{x\to 1} 0 = \boxed{0}$$

Se (x,y) se aproxima de $(1,2)$ através dos pontos da reta $y-2=x-1$, ou seja, $y=x+1$, temos:

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ y=x+1}} \frac{(x-1)(y-2)}{(x-1)^2+(y-2)^2} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+1-2)}{(x-1)+(x+1-2)^2} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x-1)}{(x-1)^2+(x-1)^2} =$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{\cancel{(x-1)^2}}{2\cancel{(x-1)^2}} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{2} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

Como os limites, por dois caminhos diferentes divergem ao se ~~ap~~ aproximarem do mesmo ponto, implica então na afirmação de que o limite não existe.

(8) Mostrar que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{3xy}{5x^4+2y^4}$ não existe.

P/ $x=0$

$$\lim_{y\to 0} \frac{3\cdot 0\cdot y}{5\cdot 0^4+2y^4} = 0$$

P/ $x=y^3$

$$\lim_{y\to 0} \frac{3y^3y}{5(y^3)^4+2y^4} = \lim_{y\to 0} \frac{3y^4}{5y^{12}+2y^4} = \lim_{y\to 0} \frac{3\cancel{y^4}}{\cancel{y^4}(5y^3+2)}$$

$$= \lim_{y\to 0} \frac{3}{5y^3+2} = \frac{3}{2}$$

Como os resultados divergem, o $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{3xy}{5x^4+2y^4}$ não existe

(9)

a. $f(x,y) = \frac{x^2}{y-1}$

Movendo os termos que contém y para o outro lado é realizado a subtração ~~em~~ ambos os lados.

$$f(x,y) - \frac{x^2}{y-1} = 0$$

Agora multiplicamos por $\frac{y-1}{y-1} \Rightarrow \frac{f(x,y)\cdot(y-1)}{(y-1)} - \frac{x^2}{y-1} = 0$

Realizando a associação que tenham um denominador comum

$$\frac{f(x,y)\,(y-1)\,x^2}{y-1} = 0$$

Simplificando o numerador

$$\frac{f(x,y)\cdot y + f(x,y)\cdot -1 - x^2}{(y-1)} = 0$$

Movendo -1 para a esquerda de $f(x,y)$

$$\frac{f(x,y)\,y - f(x,y) - x^2}{y-1} = 0$$

Reordenando os fatores

$$\frac{y\,f(x,y) - f(x,y) - x^2}{y-1} = 0$$

Assim, o domínio da expressão são todos os reais exceto onde a expressão for indefinida. No caso em questão, apenas o número 1 faria parte desta restrição, quando presente na variável y. Logo.

Intervalo $(-\infty, \infty)$

$\{x,y;\ x,y \in \mathbb{R} \mid y \neq 1\}$

(9) b. $f(x,y) = \ln(25 - x^2 - y^2)$

$25 - x^2 - y^2 > 0$

$-x^2 - y^2 > 25 \quad \cdot(-1)$

$x^2 + y^2 > 25$

$D(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ; x^2 + y^2 > 25\}$

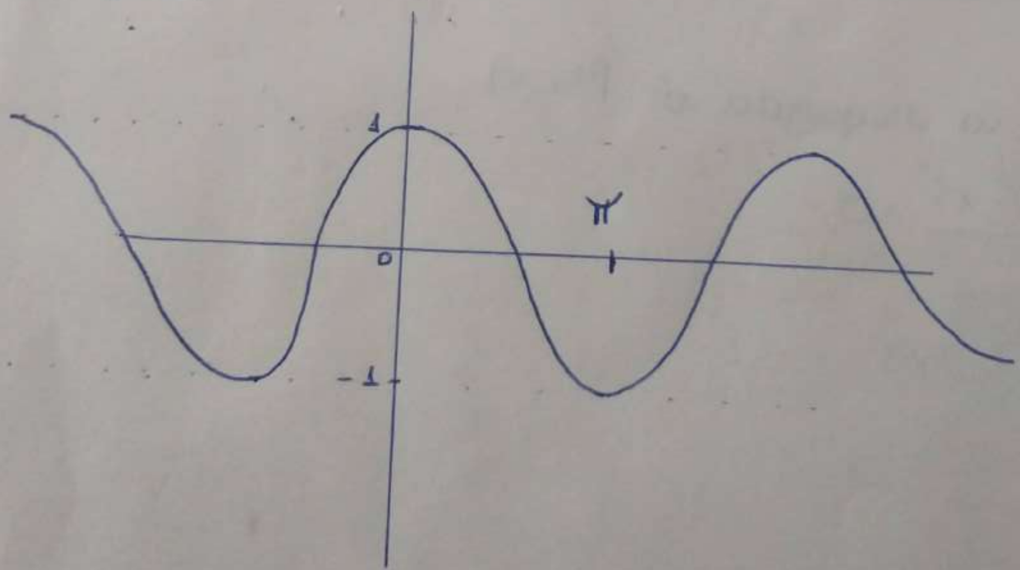
c. $f(x,y) = \arccos(x+y)$

$z = f(x,y) = \arccos(x+y) \rightarrow \cos z = x + y$

Domínio

$\{(x,y) \mid -1 \leq x + 1 \geq 1\}$ Alcance $[0, \pi]$

Gráfico



(09) d. $f(x,y) = e^{1-xy}$

Sabendo que o domínio de e^x são todos ~~os~~ os reais em um intervalo aberto de $-\infty$ a $+\infty$, então

$D(f): \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / -\infty \leq xy \leq +\infty\}$

09

e) $f(x) = \sqrt{x} \cdot e^{\sqrt{1-y^2}}$

$x > 0$

$1 - y^2 > 0$

$y^2 > 1$

$y > \sqrt{1}$

$D(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x > 0,\ y > \sqrt{1}\}$

(10) Se $f(x,y) = x^2+2y$, $g(t) = e^t$ e $h(t) = t^2-3t$, determine $h(f(x,y))$

De fato, $f(x,y)$ for contínua em (x_0,y_0) obtemos que $\lim f(x,y) = f(x_0,y_0)$ e como $h(f(x,y))$ é contínua em $(x,y) \to (x_0,y_0)$

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} h(f(x,y)) = h(\lim f(x,y))$$

$$= h(f(x_0,y_0) = f(x_0,y_0)$$

Como $f(x,y) = x^2+2y$ e $h(f(x,y)) = t^2-3t$, pela demonstração vamos calcular os limites laterais

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = x^2+2y = h(f(x,y))$$
$$0^2+2\cdot 0$$
$$0+0=0$$

$$\lim h(f(x,y)) = ht$$
$$f(t)=0 = t^2-3t$$
$$0^2-3\cdot 0$$
$$0-0=0$$

Logo, a composição $f(x,y) = h(f(x,y))$ é contínua pois seus limites laterais são iguais

(11) $f(x,y,z) = 2x + ye^z$; $g(t) = t^2$; $h(t) = \operatorname{sen} t$

$f(g(t), h(t))$

Conhecendo f, g e h, temos:

$f(g.(t), h(t)) = (2g(t)t, h(t)t + ye^z)$

$= f(g(t)t, h(t)) = f(g(t)(t), h(t(t)))$

onde $f = 2x + ye^z$

$\rightarrow 2g(t)^2, h(t)^2 + ye^z = f(g(t), h(t))$

12.

a) $f(s,t) = \frac{t}{s} - \frac{s}{t}$

$f(x) = 0 \quad x = 1$

$0 = 2m + 7 - 8$

$0 = 2m - 1$

$m = 1/2$

$f(s,t) = \frac{t}{s} - \frac{s}{t}$

$\frac{\partial f}{\partial s} = \frac{\cancel{s \cdot (t)'}^{0} - t \cdot (s)'}{s^2} - \left[\frac{t(s)' - \cancel{s(t)'}^{0}}{t^2}\right]$

$\frac{\partial f}{\partial s} = \frac{0 - t^2}{s^2} - \frac{t}{t^2}$

$\boxed{\frac{\partial f}{\partial s} = \frac{-t}{s^2} - \frac{1}{t}}$

$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{s(t)' - t(s)'}{s^2} - \left[\frac{\cancel{t(s)'}^{0} - s(t)'}{t^2}\right]$

$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{s - 0}{s^2} + \frac{s}{t^2}$

$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{s}{s^2} + \frac{s}{t^2} \rightarrow \boxed{\frac{1}{s} + \frac{s}{t^2}}$

12.

b) $f(x,y) = xe^y + y\,\text{sen}\,x$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = e^y + y\cos(x)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = xe^y + \text{sen}(x)\cdot 1$$

c) $f(x,y) = e^x \cdot \ln(xy)$ <u>Parcial (x)</u>

$$f(x) = \frac{\partial}{\partial x}\left(e^x \cdot \ln(yx)\right) \rightarrow f(x) = \frac{\partial}{\partial x} e^x \ln yx + e^x \cdot \frac{\partial}{\partial x}(\ln(yx))$$

$$\rightarrow f(x) = e^x \cdot \ln(yx) + e^x \frac{1}{yx}\cdot y \rightarrow f(x) = e^x(\ln(x) + \ln(y)) + e^x \frac{1}{x}$$

$$\rightarrow f(x) = e^x(\ln(x) + \ln(y)) + \frac{e^x}{x} \rightarrow f(x) = e^x\ln(x) + e^x\ln(y) + \frac{e^x}{x}$$

$$\rightarrow \underline{f(x) = e^x\ln(x) + e^x\ln(y) + \frac{e^x}{x}} \;//$$

$$f(y) = e^x \cdot \frac{\partial}{\partial y}(\ln(y)) \cdot \frac{\partial}{\partial y}(xy)$$ <u>Parcial (y)</u>

$$\rightarrow f(y) = e^x \frac{1}{y}\cdot x \rightarrow f(y) = e^x \cdot \frac{1}{xy}\cdot x \rightarrow f(y) = e^x \cdot \frac{1}{y}$$

$$\rightarrow f(y) = \frac{e^x}{y}$$

$$\rightarrow \underline{f(y) = \frac{e^x}{y}} \;//$$

(12) d).

$$f(t,v) = \ln\left(\frac{t+v}{t-v}\right)$$

$$g = \frac{t+v}{t-v}$$

$$\frac{d}{dt}(f(g)) = \frac{d}{dg}(f(g)) \cdot \frac{d}{dt}(g)$$

$$\frac{d}{dg}(\ln(g)) \cdot \frac{d}{dt}\left(\frac{t+v}{t-v}\right)$$

$$\frac{1}{g} \cdot \frac{d}{dt}\left(\frac{t+v}{t-v}\right)$$

$$\frac{1}{g} \cdot \frac{(t-v)-(t+v)}{(t-v)^2}$$

$$\frac{1}{\frac{t+v}{t-v}} \cdot \frac{(t-v)(t+v)}{(t-v)^2} = \frac{-2v}{t^2-v^2}$$

$$g = \frac{t+v}{t-v}$$

$$\frac{d}{dv}(f(g)) = \frac{d}{dg}(f(g)) \cdot \frac{d}{dv}(g)$$

$$\frac{d}{dg}(\ln(g)) \cdot \frac{d}{dv}\left(\frac{t+v}{t-v}\right)$$

$$\frac{1}{g} \cdot \frac{d}{dv}\left(\frac{t+v}{t-v}\right)$$

$$\frac{1}{g} \cdot \frac{(t-v)+(t+v)\cdot(-1)}{(t-v)^2}$$

$$\frac{1}{\frac{t+v}{t-v}} \cdot \frac{(t-v)-(t+v)\cdot(-1)}{(t-v)^2} = \frac{2t}{t^2-v^2}$$

(12) e) $f(u,w) = \arctan\left(\frac{u}{w}\right)$

$g = \frac{u}{w}$

$\frac{d}{dg}(\arctan(g)) \cdot \frac{d}{du}\left(\frac{u}{w}\right)$

$\frac{1}{1+g^2} \cdot \frac{d}{du}\left(\frac{u}{w}\right)$

$\frac{1}{1+\left(\frac{u}{w}\right)^2} \cdot \frac{1}{w}$

$= \frac{w}{w^2+u^2}$

$g = \frac{u}{w}$

$\frac{d}{dg} = (\arctan(g)) \cdot \frac{d}{dw}\left(\frac{u}{w}\right)$

$\frac{1}{1+g^2} \cdot \frac{d}{dw}\left(\frac{u}{w}\right)$

$\frac{1}{1+g^2} \cdot \left(-u \cdot \frac{1}{w^2}\right)$

$\frac{1}{1+\left(\frac{u}{w}\right)^2} \cdot \left(-u \cdot \frac{1}{w^2}\right)$

$= \frac{u}{w^2+u^2}$

(13) $S(w,h) = 2w^{0,4}h^{0,7}$, $w = 70$ e $h = 1,8$

$$\frac{\partial s}{\partial w} = \frac{\partial(2w^{0,4}h^{0,7})}{\partial w} = 2h^{0,7}\frac{\partial(w^{0,4})}{\partial w} = 2h^{0,7}(0,4)(w^{-0,6})$$

$$\frac{\partial s}{\partial w} = (70, 1,8) = (0,8)\cdot(1,8)^{0,7}\cdot(70)^{-0,6} = \frac{(0,8)(1,8)^{0,7}}{(70)^{0,6}} = 0,094$$

$$\frac{\partial s}{\partial h} = \frac{\partial(2w^{0,4}h^{0,7})}{\partial h} = 2w^{0,4}\cdot\frac{\partial(h^{0,7})}{\partial h}$$

$$\frac{\partial s}{\partial h} = 2w^{0,4}\cdot 0,7h^{-0,3} = \frac{1,4w^{0,4}}{h^{0,3}}$$

$$\frac{\partial s}{\partial h} = (70, 1,8) = \frac{(1,4)(70)^{0,4}}{(1,8)^{0,3}} = 6,421$$

Interpretação da derivada em relação a w: Sendo S a área de superfície do corpo de um ser humano, podemos interpretar o resultado obtido como sendo a taxa de variação, ou seja, o quanto a área da superfície do corpo humano varia com o peso a partir dos 70Kg variando e altura constante de 1,8m. Com isso, temos uma variação da superfície de 0,094 Kg/m. S(70,1,8) implica em

Interpretação da derivada em relação a h: Sendo S a área da superfície do corpo de um ser humano, podemos interpretar o resultado obtido da variação de S(70,1,8) como a taxa de variação, ou seja, o quanto a área da superfície do corpo humano varia com a altura a partir de 1,8 m variando e o peso constante de 70Kg. Com isso, temos uma variação da superfície de 6,421 m/Kg

(14) a. TAXA DE VARIAÇÃO

$$\frac{d}{dr}(\pi r^2 h)$$

Usando a propriedade comutativa

$$\frac{d}{dr}(\pi h r^2)$$

Usando a regra de derivação

$$\pi h \cdot \frac{d}{dr}(r^2)$$

Usando $\frac{d}{dx}(x^n) = n \cdot x^{n-1}$, temos:

$$\frac{d}{dr}(r^2) = 2r^{2-1} = 2r$$

$$\pi h \cdot 2r$$

usando a propriedade comutativa, temos:

$$\underline{2\pi h r}$$

Como sendo a taxa de variação.

(14) b. A taxa de variação instantânea é dada pela derivada, daí

$$\frac{\partial V}{\partial h}(r,h) = \lim_{t \to 0} \frac{V(r,h+t)-V(r,h)}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{\pi r^2(h+t)-\pi r^2 h}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{\cancel{\pi r^2 h} + \pi r^2 t - \cancel{\pi r^2 h}}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{\pi r^2 \cancel{t}}{\cancel{t}}$$

$$= \lim_{t \to 0} \pi r^2$$

$$= \pi r^2$$

(14) c. $\frac{\partial v}{\partial r} = \pi \cdot 2rh$

$\frac{\partial v}{\partial r} = \pi \cdot 2 \cdot 6 \cdot 4$

$\frac{\partial v}{\partial r} = 48\pi.$

d) $\frac{\partial v}{\partial r} = \pi r^2 \cdot 1$

$\frac{\partial v}{\partial r} = \pi \cdot 8^2 \cdot 1$

$\frac{\partial v}{\partial r} = \pi \cdot 64 \cdot 1$

$\frac{\partial v}{\partial r} = 64\pi.$

15. A lei dos Gases ideais

$$PV = RnT$$

$$\frac{\partial V}{\partial T} \cdot \frac{\partial T}{\partial P} \cdot \frac{\partial P}{\partial V} = -1$$

Ⓘ $\frac{\partial V}{\partial T}(PV - KnT) = 1 - 0 = 1$

Sabendo que T é constante, vale 0 e V é variável, vale 1.

Ⓘⓘ $\frac{\partial T}{\partial P}(PV - KnT) = 0 - 1 = -1$

P é constante, Logo vale 0

T é variável, Logo vale 1.

Ⓘⓘⓘ $\frac{\partial P}{\partial V}(PV - KnT) = 1 - 0 = 1$

V e P são variáveis, valem 1

T é constante, vale 0

Logo: $\frac{\partial V}{\partial T} \cdot \frac{\partial T}{\partial P} \cdot \frac{\partial P}{\partial V} = 1 \cdot (-1) \cdot 1 = 1$

(16) $u_x = v_y$ и $u_y = -v_x$

a) $\begin{cases} u(x,y) = x^2 - y^2 \\ v(x,y) = 2xy \end{cases}$;

$U_x = V_y$

$U = x^2 - y^2$

$U_x = 2x - 2y$

$V = 2xy$

$V_y = 2y$

$U_x \neq V_y$

$2x - 2y \neq 2y$

$U_y = -V_x$

$U = x^2 - y^2$

$U_y = 2x - 2y$

$V = 2xy$

$V_x = 2y$

$U_y \neq V_x$

$2x - 2y \neq 2y$

b) $\begin{cases} U(x,y) = \dfrac{y}{x^2+y^2} \\ V(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2} \end{cases}$;

$U_x = V_y$

$U = \dfrac{y}{x^2+y^2}$

$U_x = \dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$

$V = \dfrac{x}{x^2+y^2}$

$V_y = \dfrac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}$

$U_x = V_y$

$\dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} \neq \dfrac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}$

$U_y = -V_x$

$U = \dfrac{y}{x^2+y^2}$

$U_y = \dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$

$V = \dfrac{x}{x^2+y^2}$

$V_x = \dfrac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}$

$U_y = -V_x$

$\dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} = \left[\dfrac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}\right] \cdot (-1)$

16.

c) $\begin{cases} U(x,y) = e^x \cos y \\ V(x,y) = e^x \operatorname{sen} y \end{cases}$

$U_x = V_y$

$U = e^x \cos y$

$\underline{U_x = e^x \cos y}$

$V = e^x \cos y$

$\underline{V_y = e^x \cos y}$

$U_x = V_y$

$e^x \cos y = e^x \cos y$

$U_y = -V_x$

$U = e^x \cos y$

$\underline{U_y = -e^x \cdot \operatorname{sen} y}$

$V = e^x \operatorname{sen} y$

$V_x = e^x \operatorname{sen} y$

$U_y = -V_x$

$-e^x \operatorname{sen} y = -(e^x \operatorname{sen} y)$

d) $\begin{cases} U(x,y) = \cos x \cosh y \\ V(x,y) = \operatorname{sen} x \operatorname{senh} y \end{cases}$

$U_x = V_y$

$U = \cos x \cdot \cosh y$

$U_x = \underline{-\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y}$

$V = \operatorname{sen} x \cosh y$

$\underline{V_y = \cos x \cosh y}$

$U_x = V_y$

$-\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y \neq \cos x \cosh y$

$U_y = -V_x$

$U = \cos x \cosh y$

$\underline{U_y = -\operatorname{sen} x \operatorname{senh} y}$

$V = \operatorname{sen} x \operatorname{senh} y$

$\underline{V_x = \operatorname{sen} x \operatorname{senh} y}$

$U_y = -V_x$

$-\operatorname{sen} x \operatorname{senh} y = -(\operatorname{sen} x \operatorname{senh} y)$