UEPB	CCT – Departamento de Matemática
	Cálculo Diferencial e Integral II – Prof.: Joselma
	Aluno(a): Lucas de Lucena Siqueira
	Curso: Computação

Atividade Avaliativa (valendo 3,0)

1 –

i) Enuncie o Teste da Integral para convergência de Séries. (Pesquisar!)

ii) Use o teste da Integral para investigar a convergência da série $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-n^3}$ (ou seja, para verificar se a série converge ou diverge).

1-

I) O teste da integral é utilizado para verificar se uma série é convergente ou divergente da seguinte forma:

• Supondo a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, iremos gerar a função $F(n) = A_n$. Então aplicaremos essa função a uma integral para verificar se a mesma converge ou diverge.

Portanto:

- Caso $\int_1^{\infty} F(n)\,dn = L$, podemos afirmar que a série converge.

- Caso $\int_1^{\infty} F(n)\,dn = \infty$, podemos afirmar que a série diverge.

Exemplo de Teste da Integral:

Considerando a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$, primeiro gera-se a função $F(n) = A_n$:

$$\boxed{F(n) = \frac{1}{n^3}}$$

• Em seguida insere-se $F(n)$ na integral e soluciona ela:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{n^3}\,dn = \lim_{t\to\infty} \int_1^t n^{-3}\,dn = \lim_{t\to\infty} \left.\frac{n^{-3+1}}{-3+1}\right]_1^t = \lim_{t\to\infty} \frac{n^{-2}}{-2}$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \lim_{t\to\infty} n^{-2}\Big]_1^t = -\frac{1}{2} \cdot \lim_{t\to\infty} \frac{1}{n^2}\Big]_1^t$$

• Substituindo t e 1 no lugar de n:

$$-\frac{1}{2} \cdot \lim_{t\to\infty}\left[\frac{1}{t^2}-\frac{1}{1^2}\right] = -\frac{1}{2}\cdot[0-1] = \boxed{\frac{1}{2}}$$

• Por fim, temos que o resultado da integral é $\frac{1}{2}$, então sabendo que caso $\int_1^\infty F(n)\,dn = L$, é possível afirmar que a série converge.

ii)

ii) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-n^3}$

• Escreve-se $n^2e^{-n^3}$ como uma função:

$F(x) = x^2 e^{-x^3}$

• Aplicamos a função em uma integral para verificar a sua convergência ou divergência:

$$\int_1^{\infty} x^2 e^{-x^3} dx$$

• Caso o resultado seja L, converge, caso seja ∞, diverge.

• Por se tratar de uma integral imprópria, aplica-se o limite:

$$\lim_{a\to\infty}\left(\int_1^a x^2 e^{-x^3} dx\right)$$

• Cálculo da integral indefinida:

$\boxed{t = -x^3}$

$$\lim_{a\to\infty}\left(\int -\frac{e^t}{3}\,dt\right) = \lim_{a\to\infty}\left(-\frac{1}{3}\cdot\int e^t . dt\right) = \lim_{a\to\infty}\left(-\frac{1}{3}, e^t\right).$$

$$= \lim_{a\to\infty}\left(\frac{-e^t}{3}\right) = \lim_{a\to\infty}\left(-\frac{e^{-x^3}}{3}\right) = \boxed{\lim_{a\to\infty}\left(-\frac{1}{3e^{(x^3)}}\right)}$$

• Cálculo da integral definida:

$$\lim_{a\to\infty}\left(-\frac{1}{3e^{x^3}}\Big|_1^a\right) = \boxed{\lim_{a\to\infty}\left(-\frac{1}{3e^{x^3}}+\frac{1}{3e^{1^3}}\right)}$$

. Cálculo do limite:

$$\lim_{a\to\infty}\left(-\frac{1}{3e^{x^3}}+\frac{1}{3e}\right) = \lim_{a\to\infty}\left(-\frac{1}{3e^{(a^3)}}\right)+\lim_{a\to\infty}\left(\frac{1}{3e}\right).$$

limite de constante é a própria constante

$$= -\lim_{a\to\infty}\left(\frac{1}{3e^{a^3}}\right)+\frac{1}{3e} = -0+\frac{1}{3e} = \boxed{\frac{1}{3e}}$$

Como o denominador vai se tornar infinitamente maior que o numerador, o limite é 0.

• Como o resultado da integral gerada é igual a L, é possível afirmar que a série converge.

2 – Use o Teste da Razão ou Teste da Raiz para estudar a convergência ou divergência da série.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n^2} \quad \text{ou} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2}$$

(Escolher apenas uma das duas séries p/ usar o Teste)

2 - $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2}$

• Utilizando o teste da razão:

• Supondo que $\lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L$, sendo que L é um número não negativo ou infinito teremos:

- Caso $L < 1$, então $\sum a_n$ converge.
- Caso $L > 1$, então $\sum a_n$ diverge.
- Caso $L = 1$, não é possível determinar pelo teste da razão.

• Aplicando o limite:

$$\lim_{n \to \infty} \left(\left| \frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)^2}}{\frac{2^n}{n^2}} \right| \right) = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{2^{n+1} \cdot n^2}{(n+1)^2 \cdot \cancel{2^n}} \right) = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{2n^2}{(n+1)^2} \right) = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{2n^2}{n^2+2n+1} \right)$$

• colocando n^2 em evidência:

* irei manipular a fração sem o limite para facilitar o processo, logo após a simplificação voltarei com o limite.

$$\frac{2n^2}{n^2+2n+1} = \frac{2n^2}{n^2+\frac{n^2}{n^2}\cdot 2n+\frac{n^2}{n^2}} = \frac{2n^2}{n^2+n^2\cdot\frac{2\cancel{n}}{n^{\cancel{2}}}+n^2\cdot\frac{1}{n^2}}$$

$$= n^2+n^2\cdot\frac{2}{n}+n^2\cdot\frac{1}{n^2} = \boxed{n^2\cdot\left(1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}$$

• Voltando o denominador para o limite:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2\cancel{n^2}}{\cancel{n^2}\left(1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}\right) = \frac{\lim_{n\to\infty}(2)}{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}$$

$$= \frac{2}{\lim_{n\to\infty}(1)+\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{n}\right)+\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)} = \frac{2}{1+2\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right)+0}$$

$$= \frac{2}{1+2\cdot 0+0} = \frac{2}{1} = \boxed{2}$$

• Como o resultado do limite calculado é maior que 1, podemos concluir que a série <u>diverge</u>.

3 – Pesquise e defina Série de Potência, Série de Taylor e Série de Maclaurin e dê um exemplo de cada uma destas séries.

- Série de Potencia:

- Uma série de Potencia é definida como uma série infinita de termos variáveis. Dessa forma, a teoria que foi desenvolvida para as séries infinitas de termos constantes consegue ser extendida para a análise de convergencia das séries de potencias.

- Uma grande utilidade das séries de potencia é utilizar sua aplicação para encontrar aproximações de números irracionais como π ou $\sqrt{2}$ por exemplo.

- Outra grande utilidade é a de encontrar valores aproximados de integrais que não conseguimos integrar de forma analítica, como seria o caso de $\int_0^{\frac{1}{2}} e^{-t^2} dt$ ou $\int_0^1 \cos(\sqrt{x})\, dt$.

- Uma terceira utilização seria na solução de equações diferenciais, aplicação essa utilizada na engenharia elétrica.

Definição:

- Seja uma série de potências em $(x-a)$, será uma série de forma:

$$\boxed{c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \dots + c_n(x-a)^n + \dots}$$

que é representada esquematicamente como $\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n}$.

- Há um caso especial quando $a=0$, nesse caso haverá uma série de potências em x da seguinte maneira:

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_n x^n + \dots}$$

Nessa situação apenas as séries de potências $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ são analizadas, porém as séries de potência $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ tambem poderiam ser utilizadas apenas aplicando a transformação $x = \bar{x} - a$. Para encontrar os valores de x para os quais as séries de potências $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ convergem podemos considerar as séries de potencias como a seguinte função:

$$\boxed{F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n}$$

*tendo como domínio todos os valores de x para os quais a série $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ converge.

- De forma geral, as séries de potência do tipo $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ convergem apenas para $x=0$, para valores de x dentro de um intervalo especificado ou para todos os valores de x

• **Teorema 1:**

• Caso a série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} C_n X^n$ seja convergente para $X = X_1$ com $X_1 \neq 0$, ela será absolutamente convergente para todos os valores de X os quais $|x| < X_1$.

• **Teorema 2:**

Caso a série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} C_n X^n$ seja divergente para $X = X_2$, ela será divergente para todos os valores de X os quais $|x| > X_2$.

• **Teorema 3:**

• Considerando uma série $\sum_{n=0}^{\infty} C_n X^n$ uma série de potências, apenas uma das afirmações abaixo será verdadeira:

1- A série irá convergir apenas para $X = 0$.

2- A série será absolutamente convergente para todos os valores de X.

3- Há um número $R > 0$ o qual a série será absolutamente convergente para todos os valores de X para os quais $|x| < R$ e a série será divergente para todos os valores de X para os quais $|x| > R$.

$$\boxed{\text{Exemplo de Série de Potência: } \sum_{n=0}^{\infty} n!\, x^n}$$

Série de Taylor:

• Considerando uma função $F(x)=\sum_{n=0}^{\infty} C_n X^n = C_0 + C_1 X + C_2 X^2 + \dots + C_n X^n + \dots$ com um raio de convergência $R>0$, tendo em mente o teorema da existência de derivadas de séries de potências para o intervalo $(-R,R)$ sabemos que $F(x)$ terá várias derivadas. Logo $F(x)$ é infinitamente derivável no intervalo $(-R,R)$. Sabendo disso, algumas das derivadas da série apresentada acima são:

$$F^{i}(x) = C_1 + 2C_2X + 3C_3X^2 + 4C_4X^3 + \dots + nC_nX^{n-1} + \dots$$

$$F^{ii}(x) = 2C_2 + 2.3\,C_3X + 3.4\,C_4X^2 + \dots + n(n-1)C_nX^{n-2} + \dots$$

$$\vdots$$

• Logo é possível determinar que irão existir infinitas derivadas.

- Em $X=0$, podemos dizer que as relações acima assumem a seguinte forma:

$$\boxed{F(0) = C_0 \; ; \; F^{i}(0) = C_1 \; ; \; F^{ii}(0) = 2C_2 \implies C_0 = F(0) \; ; \; C_1 = F^{i}(0) \; ; \; C_2 = \frac{F^{ii}(0)}{2!}}$$

• Assim é possível generalizar e chegar até uma relação para C_n:

$$\boxed{C_n = \frac{F^{(n)}(0)}{n!}}$$

. . Logo, $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \dots + c_n x^n + \dots$

Irá assumir a seguinte forma:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = f(0)x + f^{i}(0)x + \frac{f^{ii}(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{iii}(0)}{3!}x^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

. O que seria exatamente a série de potências de Maclaurin.

. A série apresentada acima pode ser generalizada em $(x-a)$. Logo considerando $f(x)$ como:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \dots + c_n(x-a)^n + \dots$$

. Caso o raio de convergência dessa série seja $R>0$, $f(x)$ será infinitamente derivável no intervalo $(a-R, a+R)$. Sendo assim as derivadas da série apresentada acima seriam:

$$f^{i}(x) = c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + 4c_4(x-a)^3 + \dots + n\,c_n(x-a)^{n-1} + \dots$$
$$f^{ii}(x) = 2c_2 + 2.3\,c_3(x-a) + 3.4\,c_4(x-a)^2 + \dots + n(n-1)c_n(x-a)^{n-2} + \dots$$

. Então para $x=a$, as relações acima irão assumir a seguinte forma;

$f(a) = c_0 \Rightarrow c_0 = f(a)$

$f^{i}(a) = c_1 \Rightarrow c_1 = f^{1}(a)$

$f^{ii}(a) = 2c_2 \Rightarrow c_2 = \dfrac{f^{iii}(a)}{2!}$

• Então é possível generalizar e encontrar a seguinte expressão para c_n:

$$\boxed{c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}}$$

• Portanto, $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + \dots + c_n(x-a)^n + \dots$, vai ~~assim assumsea~~ assumir a seguinte forma:

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n}$$

• Essa série de potências representada acima é a chamada série de potências de Taylor.

Exemplo de série de Taylor:

• Considerando $f(x) = \operatorname{sen} x$ em a, sabendo também que a forma geral da série de Taylor é: $f(x) = \operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$, teremos:

$$\boxed{\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} a + \cos a (x-a) - \operatorname{sen} a \frac{(x-a)^2}{2!} - \cos a \frac{(x-a)^3}{3!} + \operatorname{sen} a \frac{(x-a)^4}{4!} + \dots}$$

Série de Maclaurin:

- Na série de Maclaurin há um forte baseamento da série de Taylor que define que:

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n}$$

- Mas a série de Maclaurin é nada mais que a série de Taylor ao redor de $x=0$, ou seja:

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^2.}$$

Exemplo de série de Maclaurin:

- Considerando $f(x) = e^x$ e sabendo que a forma geral da série de Maclaurin é $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^2$, teremos:

$$\boxed{f(x) = e^x \Rightarrow f^{(n)}(x) = e^x \Rightarrow f^n(0) = e^0 = 1}$$

- Então pela relação acima, é apresentado que todas as derivadas são iguais a e^x, além de que essas derivadas quando $x=0$ serão 1. Teremos por fim:

$$\boxed{f(x) = e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}}$$