

Lógica para Computação

COMPUTAÇÃO - UEPB - 2021.1

Prof. Me. Paulo César O. Brito

Tabela verdade

H	G	$\neg H$	$H \vee G$	$H \wedge G$	$H \rightarrow G$	$H \leftrightarrow G$
T	T	F	T	T	T	T
T	F	F	T	F	F	F
F	T	T	T	F	T	F
F	F	T	F	F	T	T

Propriedades semânticas da Lógica Proposicional

Propriedades semânticas

As propriedades semânticas relacionam os resultados das interpretações das fórmulas. São relações obtidas no mundo semântico, mas a partir de fórmulas do mundo sintático.

Tautologia



tautologia

substantivo feminino

1. GRAMÁTICA

uso de palavras diferentes para expressar uma mesma ideia; redundância.

2. LÓGICA

proposição analítica que permanece sempre verdadeira, uma vez que o atributo é uma repetição do sujeito (p.ex. *o sal é salgado*).

Definição inicial de um conjunto de propriedades semânticas

- Uma fórmula H é uma tautologia ou é válida se e somente se para toda interpretação I , $I[H] = T$.
- Uma fórmula H é factível ou satisfatível se e somente se existe pelo menos uma interpretação I , tal que $I[H] = T$.
- Uma fórmula H é contraditória se e somente se para toda interpretação I , $I[H] = F$.

Definição inicial de um conjunto de propriedades semânticas

- Dadas duas fórmulas H e G , H implica G se e somente se para toda interpretação I , se $I[H] = T$ então $I[G] = T$.
- Dadas duas fórmulas H e G , H equivale a G se e somente se para toda interpretação I , $I[H] = I[G]$.
- Dada uma fórmula H e uma interpretação I , então I satisfaz H se $I[H] = T$.

Exemplo(tautologia)

A fórmula $H = P \vee \neg P$ é uma tautologia. Observe que para toda interpretação I , $I[H] = T$ pois

$$I[H] = T \Leftrightarrow I[P \vee \neg P] = T$$

$$\Leftrightarrow I[P] = T \text{ ou } I[\neg P] = T$$

$$\Leftrightarrow I[P] = T \text{ ou } I[P] = F$$

Como I é uma função binária tal que $I[P]$ pertence a $\{T, F\}$, então $I[P] = T$ ou $I[P] = F$. Portanto, a afirmação $I[P] = T$ e/ou $I[P] = F$ é verdadeira. Logo, $I[H] = T$.

Exemplo(satisfatibilidade)

A fórmula $H = (P \vee Q)$ é satisfatível. Neste caso, há interpretações que interpretam H como verdadeira e interpretações que interpretam H como falsa. Considere I e J duas interpretações tais que:

$$I[P] = T, I[Q] = F, \implies H = T$$

$$J[P] = F, J[Q] = F. \implies H = F$$

Logo, $I[H] = T$ e $J[H] = F$

Exemplo(contradição)

A fórmula $H = (P \wedge \neg P)$ é contraditória. Suponha que exista uma interpretação I tal que $I[H] = T$. Mas,

$$I[H] = T \quad \Leftrightarrow \quad I[P \wedge \neg P] = T$$

$$\Leftrightarrow I[P] = T \text{ e } I[\neg P] = T$$

$$\Leftrightarrow I[P] = T \text{ e } I[P] = F \quad \Rightarrow \quad F$$

Como a interpretação I é uma função binária, para a conjunção ocorre apenas uma das possibilidades: $I[P] = T$ ou $I[P] = F$.

Logo a afirmação $I[P] = T$ e $I[P] = F$ é uma informação falsa. Portanto, é falso que $I[H] = T$. Logo, $I[H] = F$.

Relações entre as Propriedades Semânticas

Relações entre as propriedades semânticas

As propriedades semânticas das fórmulas estão relacionadas entre si. Já foi dito, por exemplo, que a validade é o oposto da contradição. Vamos demonstrar um conjunto de resultados sobre estas relações.

Proposição(validade e contradição)

Dada uma fórmula H , então H é válida $\Leftrightarrow \neg H$ é contraditória.

H é válida \Leftrightarrow para toda interpretação I , $I[H] = T$

\Leftrightarrow para toda interpretação I , $I[\neg H] = F$

$\Leftrightarrow \neg H$ é contraditória.

Portanto, H é válida $\Leftrightarrow \neg H$ é contraditória.

Proposição(validade e factibilidade)

Dada uma fórmula H , H é uma tautologia $\Rightarrow H$ é satisfatível.

H é uma tautologia \Leftrightarrow para toda interpretação I , $I[H] = T$

\Rightarrow existe interpretação I , $I[H] = T$

Devido a esse fato, H é uma tautologia $\Rightarrow H$ é satisfatível.

Proposição(validade e contradição)

Dada uma fórmula H , então:

- a) H é uma tautologia $\Leftrightarrow \neg H$ é contraditória
- b) $\neg H$ não é satisfatível $\Leftrightarrow \neg H$ é contraditória

Demonstração

item a) H é uma tautologia \Leftrightarrow para toda interpretação I , $I[H] = T$

\Leftrightarrow para toda interpretação I , $I[\neg H] = F$

$\Leftrightarrow \neg H$ é contraditória

Demonstração

item b) $\neg H$ não é satisfatível $\Leftrightarrow \neg H$ é contraditória

Já foi demonstrado que H é uma tautologia $\Leftrightarrow \neg H$ não é satisfatível

Conforme o item a), H é uma tautologia $\Leftrightarrow \neg H$ é contraditória

Logo, a partir das equivalências acima, é possível concluir que

$\neg H$ não é satisfatível $\Leftrightarrow \neg H$ é contraditória