1-

a) $\left\{ 9 \cdot \left(\frac{-7}{9} \right)^n \right\}$

$$\lim_{n \to \infty} \left(9 \cdot \left(\frac{-7}{9} \right)^n \right)$$

$$= 9 \cdot \lim_{n \to \infty} \left(\left(\frac{-7}{9} \right)^n \right)$$

$$= 9 \cdot 0$$

$$\boxed{= 0}$$

• Sabemos que $r = \left(-\frac{7}{9}\right)$ então pelo Teorema 2 temos que $|r| = \frac{7}{9}$, logo $\boxed{|r| < 1}$. Portanto a sequência converge, já que o limite é um numero real e o limite, ainda pelo teorema, é igual a 0.

b) $\left\{ (-1)^{n+1} \cdot \frac{n^3+3n}{e^{2n}} \right\}$

• temos que $a_n = (-1)^{n+1} \cdot \frac{n^3+3n}{e^{2n}}$

e $|a_n| = \left| \underbrace{(-1)^{n+1}}_{} \right| \cdot \left| \frac{n^3+3n}{e^{2n}} \right| = \boxed{1 \cdot \frac{n^3+3n}{e^{2n}}}$

. Daí:

$$\lim_{n \to \infty} |a_n| = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{n^3+3n}{e^{2n}} \right)$$

Lucas de Lucena Siqueira

• Usando L'Hopital:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{\frac{d}{dn}(n^3+3n)}{\frac{d}{dn}(e^{2n})} \right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{3n^2+3}{2e^{2n}} \right)$$

• Usando L'Hopital:

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\frac{d}{dn}(3n^2+3)}{\frac{d}{dn}(2e^{2n})} \right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{6n}{4e^{2n}} \right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{3n}{2e^{2n}} \right)$$

• Usando L'Hopital:

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\frac{d}{dn}(3n)}{\frac{d}{dn}(2e^{2n})} \right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{3}{4e^{2n}} \right)$$

• Avaliando os limites separadamente:

$$\lim_{n\to\infty}(3) = 3 \qquad \lim_{n\to\infty}(4e^{2n}) = \infty$$

$$\boxed{\text{Logo, } \lim_{n\to\infty} \left(\frac{3}{4e^{2n}} \right) = 0.}$$

• Então pelo Teorema 5, temos que se

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0 \text{ então } \lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

• Logo a sequência converge, pois o limite é um número real.

Lucas de Lucena Siqueira

c) $\left\{1+\operatorname{sen}(n\pi)\right\}$

- $\lim_{n\to\infty}\left(1+\operatorname{sen}(n\pi)\right) = \lim_{n\to\infty}(1) + \lim_{n\to\infty}(n\pi)$

$= 1 + \infty = \boxed{\infty}$

- Temos que o $\lim_{n\to\infty}\left(1+\operatorname{sen}(n\pi)\right) = \infty$, logo por não resultar em um número real, a sequência não converge.

- Utilizando o Teorema 1, temos que a sequência não converge.

d) $\left\{\sqrt{2n+3} - \sqrt{2n}\right\}$

- $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{2n+3} - \sqrt{2n}\right)$

- Analizando os limites individualmente:

$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{2n+3}\right) = \infty$

$\lim\left(\sqrt{2n}\right) = \infty$

- Então temos que transformar a expressão:

Lucas de Lucena Siqueira

$$\lim_{n \to \infty} \left(\left(\sqrt{2n+3} - \sqrt{2n}\right) \cdot \frac{\sqrt{2n+3} + \sqrt{2n}}{\sqrt{2n+3} + \sqrt{2n}} \right)$$

$$= \lim_{n \to \infty} \left(\frac{\sqrt{2n+3}^2 - \sqrt{2n}^2}{\sqrt{2n+3} + \sqrt{2n}} \right)$$

$\boxed{* \text{ Usando } (a-b).(a+b) = a^2 - b^2}$

$$= \lim_{n \to \infty} \left(\frac{2n+3-2n}{\sqrt{2n+3} + \sqrt{2n}} \right)$$

$$= \lim_{n \to \infty} \left(\frac{3}{\sqrt{2n+3} + \sqrt{2n}} \right)$$

$$= \lim_{n \to \infty} \left(\frac{3 . \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}}}{\sqrt{2n+3} + \sqrt{2n}} \right)$$

- Colocando $\sqrt{n}$ em evidencia:

$$= \lim_{n \to \infty} \left(\frac{3 . \frac{\cancel{\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}}{\cancel{\sqrt{n}}\left(\sqrt{2+\frac{3}{n}} + \sqrt{2}\right)} \right)$$

$$= \lim_{n \to \infty} \left(\frac{\frac{3}{\sqrt{n}}}{\sqrt{2+\frac{3}{n}} + \sqrt{2}} \right)$$

Lucas delucena Siqueira

2 -

Lucas de Lucena Siqueira

a) Tendo a sequência definida por $a_1 = -2$ e $a_{k+1} = \frac{2}{3} \cdot a_k$

$a_1 = -2$, $a_2 = \frac{-2^2}{3}$, $a_3 = -\frac{2^3}{3^2}$, $a_4 = \frac{-2^4}{3^3}$ assim

temos $a_n = \frac{-2^n}{3^{n-1}}$ para $n \geq 1$

• $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{-2^n}{3^{n-1}} = \lim\limits_{n \to \infty} -2 \cdot \frac{2^{n-1}}{3^{n-1}}$

$= -2 \lim\limits_{n \to \infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = -2 \cdot 0 = \boxed{0}$

2 -

b) Sabendo que $\frac{2}{3} > 0$ e $\frac{2}{3} < 1$, além de que

$a_{n+1} = \frac{2}{3} a_n, \forall n \geq 1$

$a_{n+1} - a_n = \frac{2}{3} a_n - a_n = -\frac{1}{3} a_n > 0$, já que

$a_n = \frac{-2^n}{3^{n-1}} < 0, \forall n \geq 1.$

De $a_{n+1} - a_n > 0, \forall n \geq 1$; $a_{n+1} > a_n, \forall n \geq 1$.

• Logo, conclui-se que trata-se de uma sequência crescente, logo é monotona.

3-

a) $5 + \frac{5}{3} + \frac{5}{9} + \frac{5}{27} + \cdots \frac{5}{3^{n-1}} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{3^{n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} 5 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

. Logo a sequência geométrica é $\sum_{n=1}^{\infty} a \cdot r^{n-1}$, onde $a = 5$ e $r = \frac{1}{3}$.

• Sabendo $|r| = \frac{1}{3} < 1$, a partir do Teorema 1 sabemos que a série converge e a soma é:

$$S = \frac{a}{1-r} = \frac{5}{1-\frac{1}{3}} = \frac{5}{\frac{2}{3}} = \boxed{\frac{15}{2}}$$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} 3^{-n} \cdot 2^{n+1}$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\left| \frac{3^{-(n+1)} \cdot 2^{n+1+1}}{3^{-n} \cdot 2^{n+1}} \right| \right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{3^{-n+1} \cdot \cancel{2^{n+2}}^{2}}{3^{-n} \cdot \cancel{2^{n+1}}} \right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{3^{-n-1} \cdot 2}{3^{-n}} \right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{3} \right)$$

$$= \boxed{\frac{2}{3}}$$

• Logo como o resultado do limite é menor que 1, a série converge.

Lucas de Lucena Siqueira

$$= \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3}{\sqrt{n}}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{2\,\frac{3}{n}}+\sqrt{2}\right)}$$

$$= \frac{0}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{2+\frac{3}{n}}\right)+\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{2})}$$

$$= \frac{0}{\sqrt{\lim\limits_{n\to\infty}\left(2+\frac{3}{n}\right)}+\sqrt{2}}$$

$$= \frac{0}{\sqrt{\lim\limits_{n\to\infty}(2)+\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3}{n}\right)}+\sqrt{2}}$$

$$= \frac{0}{\sqrt{2+3.\lim\left(\frac{1}{n}\right)}+\sqrt{2}}$$

$$= \frac{0}{\sqrt{2+3.0}+\sqrt{2}}$$

$$= \frac{0}{\sqrt{2}+\sqrt{2}}$$

$$\boxed{= 0}$$

• Logo sabendo que o limite é igual a 0, temos um número real, portanto a sequência converge