EP 1 - Cálculo numérico de valores

Lucas Mafra Juliano Barros - 8993347

MAP3122 - Prof. Antoine Laurain

1 Introdução

Deseja-se estudar a representação de sistemas físicos de vibração na forma da equação do autovalor e autovetor conforme abaixo:

$$Ax = \lambda x \tag{1}$$

Para tal, elaborou-se um programa computacional para calcular os autovalores e autovetores de matrizes de ordem n utilizando o método de fatoração QR que, por sua vez, se baseia na transformação de Householder.

2 Desenvolvimento

Para desenvolvimento do programa computacional, adotou-se a linguagem Python (v3.7.0). Optou-se também por utilizar o ambiente Jupyter Notebook, que permite criar e compartilhar documentos que contém código Python, comentários e visualizações, mostrando-se adequado para o desenvolvimneto do exercício proposto.

3 Testes iniciais

A fim de estudar e validar o comportamento do algoritmo implementado, realizou-se testes para 3 diferentes matrizes:

3.1 Matriz 3x3 simétrica

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Para esse caso, temos os seguintes autovalores e autovetores (normalizados) associados:

$$\lambda_1 = -1 \qquad \lambda_2 = 2 \qquad \lambda_3 = 7$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0.707 \\ -0.707 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad v_3 = \begin{pmatrix} 0.707 \\ 0.707 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Executando o algoritmo com 100 iterações, obteve-se os seguintes resultados:

```
[[-1.  0.  0.]
 [ 0.  7.  0.]
 [ 0.  0.  2.]]
[[-0.707 -0.707  0.    ]
 [ 0.707 -0.707  0.    ]
 [ 0.     0.     1.    ]]
```

Figure 1: A primeira matriz contém os autovalores na diagonal primária. A segunda matriz representa, em cada coluna, os autovetores associados.

3.2 Matriz 3x3 assimétrica

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Dessa vez, temos os seguintes autovalores e autovetores (normalizados) associados:

$$\lambda_1 = 1 \qquad \lambda_2 = 2 \qquad \lambda_3 = 5$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0.894 \\ -0.447 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad v_3 = \begin{pmatrix} 0.894 \\ 0.447 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Executando o algoritmo com 100 iterações, obteve-se os seguintes resultados:

```
[[ 1. -0.  0.]
 [-3.  5.  0.]
 [ 0.  0.  2.]]
[[-0.447 -0.894  0.   ]
 [ 0.894 -0.447  0.   ]
 [ 0.     0.     1.   ]]
```

Figure 2: A primeira matriz contém os autovalores na diagonal primária. A segunda matriz não representa os autovetores associados pois a matriz A não é simétrica.

3.3 Matriz 2x2 assimétrica com autovalores complexos

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

Agora, temos os seguintes autovalores e autovetores complexos:

$$\lambda_1 = 1 + \sqrt{3}i \qquad \lambda_2 = 1 - \sqrt{3}i$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2}i \\ \frac{\sqrt{6}}{2} \end{pmatrix} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}i \\ \frac{\sqrt{6}}{2} \end{pmatrix}$$

Executando o algoritmo com 100 iterações, obteve-se os seguintes resultados:

```
[[ 1.6   2.8]
 [-1.2   0.4]]
[[-0.316 -0.949]
 [ 0.949 -0.316]]
```

Figure 3: Como os autovalores são complexos, o teorema proposto não é satisfeito e a matriz não converge.

3.4 Matriz 2x2 assimétrica com autovalores reais

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 0.3333 & 5 \end{bmatrix}$$

Agora, temos os seguintes autovalores e autovetores:

$$\lambda_1 = 4 + \sqrt{2} \qquad \lambda_2 = 4 - \sqrt{2}$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0.779 \\ 0.627 \end{pmatrix} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} -0.990 \\ 0.137 \end{pmatrix}$$

Executando o algoritmo com 100 iterações, obteve-se os seguintes resultados:

```
[[5.414 2.667]
 [0.    2.586]]
[[ 0.779 -0.627]
 [ 0.627  0.779]]
```

Figure 4: A primeira matriz contém os autovalores na diagonal primária. A segunda matriz não representa os autovetores associados pois a matriz A não é simétrica.

4 Tarefas computacionais

Uma vez validado o funcionamento do algoritmo que computa autovalores e autovetores, aplicou-se o algoritmo para realizar o cálculo dos autovalores e vetores da matriz representando um sistema físico massa-mola com 5 massas iguais $m = 1$ e tração $T = 1$:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Depois, aplicou-se novamente o algoritmo para uma nova matriz, dessa vez representando um sistema simétrico massa-mola composto de 7 massas:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -11 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & -11 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

5 Resultados

Para o sistema de 5 massas, foram obtidos os autovalores e autovetores abaixo:

$$\lambda_1 = -1 \qquad \lambda_2 = -2 \qquad \lambda_3 = -3 \qquad \lambda_4 = -3.732 \qquad \lambda_5 = -0.268$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} -0.5 \\ -0.5 \\ 0 \\ 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix} v_2 = \begin{pmatrix} 0.577 \\ 0 \\ -0.577 \\ 0 \\ 0.578 \end{pmatrix} v_3 = \begin{pmatrix} 0.5 \\ -0.5 \\ 0 \\ 0.5 \\ -0.5 \end{pmatrix} v_4 = \begin{pmatrix} -0.289 \\ 0.5 \\ -0.577 \\ 0.5 \\ -0.289 \end{pmatrix} v_5 = \begin{pmatrix} 0.289 \\ 0.5 \\ 0.577 \\ 0.5 \\ 0.289 \end{pmatrix}$$

É interessante notar que para a matriz 5x5 o número de passos necessários para o algoritmo convergir é significantemente maior. Além disso, percebe-se que como A é simétrica, o algoritmo é capaz de aproximar os autovetores corretamente. Com uma configuração assimétrica de massas e, consequentemente, fazendo a matriz A assimétrica, o algoritmo não é capaz de aproximar os autovetores da matriz.

```
[[-1.     0.    -0.     0.     0.   ]
 [ 0.    -2.     0.    -0.    -0.   ]
 [-0.     0.    -3.    -0.    -0.   ]
 [ 0.    -0.    -0.    -3.732  0.   ]
 [-0.    -0.    -0.    -0.    -0.268]]
[[-0.5    0.577  0.5   -0.289  0.289]
 [-0.5   -0.    -0.5    0.5    0.5  ]
 [ 0.    -0.577 -0.    -0.577  0.577]
 [ 0.5    0.     0.5    0.5    0.5  ]
 [ 0.5    0.578 -0.5   -0.289  0.289]]
```

Figure 5: Output do algoritmo para a matriz representando o sistema massa-mola com 5 massas

Para o sistema de 7 massas, foram obtidos os autovalores e autovetores abaixo:

$$\lambda_1 = -0.603 \;\; \lambda_2 = -1.476 \;\; \lambda_3 = -2.272$$
$$\lambda_4 = -2.785 \;\; \lambda_5 = -3.648 \;\; \lambda_6 = -21.053 \;\; \lambda_7 = -0.164$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} -0.299 \\ -0.417 \\ -0.404 \\ -0.027 \\ 0.366 \\ 0.538 \\ 0.386 \end{pmatrix} \; v_2 = \begin{pmatrix} 0.352 \\ 0.185 \\ 0.141 \\ -0.507 \\ 0.406 \\ 0.294 \\ 0.56 \end{pmatrix} \; v_3 = \begin{pmatrix} 0.792 \\ -0.215 \\ -0.267 \\ -0.178 \\ 0.315 \\ 0.093 \\ -0.341 \end{pmatrix} \; v_4 = \begin{pmatrix} -0.322 \\ 0.253 \\ 0.24 \\ -0.557 \\ 0.197 \\ 0.402 \\ -0.513 \end{pmatrix}$$

$$
\mathrm{v}_5 = \begin{pmatrix} 0.06 \\ -0.099 \\ -0.079 \\ 0.411 \\ -0.599 \\ 0.575 \\ -0.349 \end{pmatrix} \quad v_6 = \begin{pmatrix} 0.037 \\ -0.706 \\ 0.706 \\ -0.037 \\ 0.002 \\ 0. \\ 0. \end{pmatrix} \quad v_7 = \begin{pmatrix} 0.227 \\ 0.416 \\ 0.428 \\ 0.479 \\ 0.451 \\ 0.35 \\ 0.19 \end{pmatrix}
$$

Para a matrix 7x7, o número de passos necessários para o algoritmo convergir foi muito maior (em torno de 10k passos), demorando alguns segundos para realizar todos os cálculos.

```
[[ -0.603  -0.      0.     -0.     -0.     -0.     -0.   ]
 [  0.     -1.476  -0.     -0.     -0.     -0.      0.   ]
 [  0.     -0.     -2.272   0.     -0.     -0.     -0.   ]
 [  0.     -0.      0.     -2.785   0.      0.      0.   ]
 [  0.     -0.     -0.     -0.     -3.648   0.     -0.   ]
 [  0.      0.      0.     -0.     -0.    -21.053  -0.   ]
 [  0.      0.      0.      0.      0.     -0.     -0.164]]
[[-0.299  0.352  0.792 -0.322  0.06   0.037 -0.227]
 [-0.417  0.185 -0.215  0.253 -0.099 -0.706 -0.416]
 [-0.404  0.141 -0.267  0.24  -0.079  0.706 -0.428]
 [-0.027 -0.507 -0.178 -0.557  0.411 -0.037 -0.479]
 [ 0.366 -0.406  0.315  0.197 -0.599  0.002 -0.451]
 [ 0.538  0.294  0.093  0.402  0.575 -0.    -0.35 ]
 [ 0.386  0.56  -0.341 -0.513 -0.349  0.    -0.19 ]]
```

Figure 6: Output do algoritmo para a matriz representando o sistema massa-mola com 7 massas