



Lucas Mesz

**Portfólio Exploratório: Efeitos da Guerra de
Atrito e Revelação da Informação**

Dissertação de Mestrado

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-graduação em Finanças do Departamento de Administração da PUC-Rio.

Orientador : Prof. Luiz Eduardo Teixeira Brandão
Co-orientador: Prof. Marco Antônio Guimarães Dias

Rio de Janeiro
Março de 2021

Lucas Mesz

Portfólio Exploratório: Efeitos da Guerra de Atrito e Revelação da Informação

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-graduação em Finanças do Departamento de Administração da PUC-Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

Prof. Luiz Eduardo Teixeira Brandão

Orientador

Departamento de Administração – PUC-Rio

Prof. Marco Antônio Guimarães Dias

Co-orientador

Departamento de Engenharia Elétrica – PUC-Rio

Prof. Paulo Roberto Gomes Brandão

Universidade Federal de Minas Gerais – UFMG

Prof. Leonardo Evangelista Lagoeiro

Universidade Federal de Ouro Preto – UFOP

Dr. Reiner Neumann

Centro de Tecnologia Mineral – CETEM/MCTI

Rio de Janeiro, 02 de Março de 2021

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

Lucas Mesz

Graduado em Geologia pela Universidade de São Paulo (2008) e graduado em Ciência Econômica pela Universidade Estadual do Rio de Janeiro (2016). Possui especialização em geofísica pela Petrobras, carreira que atua desde 2009. Trabalha em exploração de Petróleo e Gás nas bacias da Costa Brasileira.

Ficha Catalográfica

Mesz, Lucas

Portfólio Exploratório: Efeitos da Guerra de Atrito e Revelação da Informação / Lucas Mesz; orientador: Luiz Eduardo Teixeira Brandão; co-orientador: Marco Antônio Guimarães Dias. – Rio de Janeiro: PUC-Rio, Departamento de Administração, 2021.

v., 118 f: il. color. ; 30 cm

Dissertação (mestrado) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Administração .

Inclui bibliografia

1. Administração de Empresas – Teses. 2. Finanças Corporativas – Teses. 3. Opções Reais. 4. Opção de Espera. 5. Opção de Aprendizado. 6. Guerra de Atrito. 7. Portfólio Exploratório. I. Brandão, Luiz Eduardo. II. Dias, Marco Antônio Guimarães. III. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Administração . IV. Título.

CDD: 620.11

To my parents, for their support
and encouragement.

Agradecimientos

I would like to first thank my advisor ...

Then I wish to thank ...

Resumo

Mesz, Lucas; Brandão, Luiz Eduardo; Dias, Marco Antônio Guimarães. **Portfólio Exploratório: Efeitos da Guerra de Atrito e Revelação da Informação**. Rio de Janeiro, 2021. [118](#)p. Dissertação de Mestrado – Departamento de Administração , Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Opções Reais, Teoria dos Jogos e Revelação da Informação.

Palavras-chave

Opções Reais Opção de Espera Opção de Aprendizado Guerra de Atrito Portfólio Exploratório

Abstract

Mesz, Lucas; Brandão, Luiz Eduardo (Advisor); Dias, Marco Antônio Guimarães (Co-Advisor). **Exploration Portfolio: War of Attrition and Information Revelation**. Rio de Janeiro, 2021. 118p. Dissertação de mestrado – Departamento de Administração, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Real Options, Game Theory and Revelation Information Theory

Keywords

Real Options Defer Option Learning Option War of Attrition Exploration Portfolio

Sumário

1	Introdução	15
1.1	Contextualização	15
1.2	Problema de Pesquisa	16
1.3	Objetivos	17
1.3.1	Geral	17
1.3.2	Específicos	18
1.4	Justificativa	19
1.5	Contribuições	20
1.5.1	Gerencial	20
1.5.2	Teórica	20
2	Referencial Teórico	22
2.1	Opções Reais	22
2.1.1	Incerteza de Preços	24
2.1.2	Opções Reais: Recursos Minerais e Indústria de Óleo e Gás	24
2.2	Portfólio	25
2.2.1	Complementariedade, Substitutibilidade e Independência	25
2.2.2	Valor da Informação – Incerteza Técnica	26
2.3	Teoria dos Jogos	27
2.3.1	Incerteza Estratégica: Guerra de Atrito	27
2.4	Teoria das Opções e Jogos	28
2.4.1	Preempção	28
2.4.2	Informação Completa e Assimetria	28
3	Design empírico	30
3.1	Apresentação do Problema	30
3.2	Modelo Paramétrico - VPL e VME	31
3.3	Incerteza de Preços	33
3.4	Incerteza técnica - Fator de Chance	39
3.4.1	Dependência - Função Bernoulli Bivariada	44
3.5	Incerteza estratégica	48
3.6	Portfólio Exploratório	51
3.7	Modelos	53
3.7.1	Um, Dois e Três prospectos: Um bloco	53
3.7.2	Dois prospectos: um em cada bloco	54
3.7.3	Três prospectos: Carteira com 2 e Prospecto vizinho	55
4	Resultados	56
4.1	Dados de Entrada	56
4.1.1	Hiperparâmetros do Preço do Petróleo: MGB	56
4.1.2	Investimento em Desenvolvimento: Correlação com Volume Recuperável	63
4.1.3	Taxa livre de Risco	64
4.1.4	Parâmetros Exógenos	65

4.1.5	Parâmetros Endógenos	66
4.2	Modelos	66
4.2.1	Um, Dois e Três prospectos: Um bloco	67
4.2.2	Dois prospectos: um em cada bloco	77
4.2.2.1	Jogo Simétrico: Atrito à Barganha	77
4.2.2.2	Jogo Assimétrico: Atrito (?) à Barganha	90
4.2.3	Três prospectos: Carteira com 2 e Prospecto vizinho	100
5	Conclusão	108
	Referências bibliográficas	109
A	A - Portfólio Sem Risco	114
B	B - Diferenças Finitas	116

Lista de figuras

Figura 3.1	Revelação no Sexto Investimento - FC e Probabilidade	48
Figura 3.2	FC e VME condicionais	51
Figura 4.1	Preço Spot- WTI- EIA	57
Figura 4.2	Preços Futuros - WTI	58
Figura 4.3	Estrutura a Termo da Volatilidade	59
Figura 4.4	Taxa livre de Risco - Treasury 3 month	60
Figura 4.5	Retorno de Conveniência Implícito - δ	60
Figura 4.6	Estrutura a termo do Retorno de Conveniência - Média	61
Figura 4.7	Estrutura a termo do Retorno de Conveniência - $\bar{\delta}$	62
Figura 4.8	Filtro de Kalman - Estimado, Suavizado e Observado	63
Figura 4.9	Investimento em Desenvolvimento - Volume Recuperável	64
Figura 4.10	Título publico americano - 20 anos	65
Figura 4.11	Modelo Geral - Blocos Exploratórios	67
Figura 4.12	Modelo - Único Bloco	67
Figura 4.13	Opções em Petróleo - Conceitos em M. A. G. Dias (2005, Cap .27)	68
Figura 4.14	Curvas de Gatilho - DogFish	70
Figura 4.15	Opção de Explorar - DogFish	71
Figura 4.16	Métricas de Avaliação Exploratória - DogFish - $\tau = 3$ anos	71
Figura 4.17	Único Bloco - DogFish e Head	73
Figura 4.18	Gatilho do Portfólio - Head-DogFish	74
Figura 4.19	Único Bloco - DogFish e Head com Volume Maior	74
Figura 4.20	Gatilho -II - DogFish e Head com expansão de 35% de B	75
Figura 4.21	Bloco A- DogFish e Feather	76
Figura 4.22	Gatilho do Portfólio - DogFish e Feather	77
Figura 4.23	Modelo - DogFish x DogFish	78
Figura 4.24	Jogo Evolucionário Infinito - \$ 50 o barril	81
Figura 4.25	Jogo Evolucionário - Plano de Fase - Simétrico -\$ 50 o barril	81
Figura 4.26	Jogo Evolucionário Infinito - \$ 72 o barril	82
Figura 4.27	Jogo Evolucionário - Plano de Fase - Simétrico -\$ 72 o barril	82
Figura 4.28	Jogo Evolucionário Infinito - \$ 72 o barril	83
Figura 4.29	Jogo Evolucionário - Plano de Fase - Simétrico -\$ 80 o barril	83
Figura 4.30	Guerra de Atrito: DogFish x DogFish - $\rho = 60\%$	84
Figura 4.31	Detalhe - Guerra de Atrito: DogFish x DogFish - $\rho = 60\%$	84
Figura 4.32	Simulação de Monte Carlo e Gatilho	85
Figura 4.33	Histograma - Início da Guerra de Atrito	86
Figura 4.34	Equilíbrios Mapeados - Jogo Simétrico	87
Figura 4.35	Barganha Cooperativa: DogFish x DogFish - $\rho = 60\%$	88
Figura 4.36	Detalhe - Barganha: DogFish x DogFish - $\rho = 60\%$	88
Figura 4.37	Detalhe - Barganha: DogFish x DogFish - $\rho = 80\%$	89
Figura 4.38	Modelo - 2 Blocos - DogFish e Head	90

Figura 4.39	Jogo Assimétrico: Preço x Valor - DogFish e Head	91
Figura 4.40	Jogo Assimétrico: Benefício da Espera	92
Figura 4.41	Equilíbrios Mapeados - Jogo Assimétrico	93
Figura 4.42	Modelo - 2 Blocos - DogFish e Head Expandido	94
Figura 4.43	Equilíbrios Mapeados - Jogo Assimétrico - B_{Head} 15% maior	95
Figura 4.44	Equilíbrios Mapeados - Jogo Assimétrico - B_{Head} 37% maior	95
Figura 4.45	J. Assimétrico: Preço x Valor - DogFish e Head - B_{Head} 37% maior	96
Figura 4.46	Jogo Assimétrico: Benefício da Espera - B_{Head} 37% maior	96
Figura 4.47	Jogo Evolucionário - Plano de Fase - Assimétrico - \$ 70 o barril	97
Figura 4.48	Peso na Barganha: DogFish x Head - 35% maior	98
Figura 4.49	Barganha Cooperativa: DogFish x Head - 35% maior	98
Figura 4.50	Detalhe - Barganha: DogFish x Head - 35% maior	99
Figura 4.51	Modelo - 2 Blocos - A - DogFish e Feather - B Head	100
Figura 4.52	Jogo Portfólio: Preço x Valor - $\Pi(D + F)$ e $Head$	101
Figura 4.53	Benefício da Espera: $\Pi(D + F)$ e $Head$	102
Figura 4.54	Equilíbrios Mapeados - Jogo $\Pi(D + F)$ e $Head$	104
Figura 4.55	Jogo Evolucionário - Plano de Fase - Portfólio - \$ 75 o barril	104
Figura 4.56	J. Evol. - Plano de Fase - Portfólio - \$ 75- Maior Densidade	105
Figura 4.57	Peso na Barganha: DogFish -Feather- Head	106
Figura 4.58	Barganha: Preço x Valor - $\Pi(D + F)$, $Head$ e $\Pi(D + F + H)$	106
Figura 4.59	Barganha detalhe: Preço x Valor - $\Pi(D + F)$, $Head$ e $\Pi(D + F + H)$	107
Figura 4.60	Barganha detalhe: Correlação elevada - $\Pi(D + F)$, $Head$ e $\Pi(D + F + H)$	107

Lista de tabelas

Tabela 3.1	Distribuição Bivariada de Bernoulli	44
Tabela 3.2	Simulação: Bernoulli Bivariada	46
Tabela 3.3	Forma normal: Hawk and Dove	48
Tabela 3.4	Forma normal: Guerra de Atrito	49
Tabela 4.1	Resultados	63
Tabela 4.2	Parâmetros Exógenos Estimados	65
Tabela 4.3	Parâmetros Endógenos dos Prospectos	66
Tabela 4.4	Correlação dos prospectos da bacia	66
Tabela 4.5	Avaliação da oportunidade <i>DogFish</i> - $\tau=3$ anos	69
Tabela 4.6	Avaliação das oportunidades <i>stantd-alone</i> - $\tau=3$ anos	72
Tabela 4.7	Forma normal: Guerra de Atrito	78
Tabela 4.8	Forma normal: Payoffs	79
Tabela 4.9	Forma normal: Jogo Simétrico- $P=\$50$, $\rho = 60\%$, $\tau = 3$	80
Tabela 4.10	Forma normal: Jogo Simétrico - $P=\$72$, $\rho = 60\%$, $\tau = 3$	80
Tabela 4.11	Forma normal: Jogo Simétrico - $P=\$80$, $\rho = 60\%$, $\tau = 3$	80
Tabela 4.12	Intervalo no Preço do Barril- Guerra de Atrito - Jogo Simétrico	85
Tabela 4.13	Simbologia dos Quadrantes	86
Tabela 4.14	U_i - Divisão da Barganha Cooperativa - M\$	89
Tabela 4.15	Forma normal: Jogo Assimétrico - $P=\$50$, $\rho = 50\%$, $\tau = 3$	90
Tabela 4.16	Forma normal: Jogo Assimétrico - $P=\$72$, $\rho = 50\%$, $\tau = 3$	90
Tabela 4.17	Forma normal: Jogo Assimétrico - $P=\$73$, $\tau = 3$	92
Tabela 4.18	Forma normal: Jogo Assimétrico - $P=\$80$, $\tau = 3$	93
Tabela 4.19	Forma normal: Jogo Assimétrico - $P=\$85$, $\tau = 3$	93
Tabela 4.20	F. normal: J. Assimétrico - $P=\$70$, $\tau = 3$ e $B_{Head}=37\%$ maior	97
Tabela 4.21	Forma normal: Payoffs no caso de Portfólio	100
Tabela 4.22	Forma normal: $\Pi(D + F)$ e <i>Head</i> - $P=\$50$, $\tau = 3$	102
Tabela 4.23	Forma normal: $\Pi(D + F)$ e <i>Head</i> - $P=\$75$, $\tau = 3$	103
Tabela 4.24	Forma normal: $\Pi(D + F)$ e <i>Head</i> - $P=\$80$, $\tau = 3$	103
Tabela 4.25	Forma normal: $\Pi(D + F)$ e <i>Head</i> - $P=\$85$, $\tau = 3$	103
Tabela 4.26	Correlação dos prospectos - Interação do Negócio	107

My beautifull epigraph

Wassily Kandinsky, *Regards sur le passé.*

Lista de Abreviaturas

ADF – Augmented Dickey-Fuller test

ANP – Agência Nacional do Petróleo

DF – Diferenças Finitas

FC – Fator de Sucesso Geológico

MGB – Movimento Geométrico Browniano

OR – Opções Reais

RM - Reversão à Média

TJ – Teoria dos Jogos

TJ+OR – Option Games

VOI – Valor da Informação

VME – Valor Médio Esperado

VPL – Valor Presente Líquido

... – ...

1

Introdução

1.1

Contextualização

A revelação da informação pode conduzir os caminhos dos investimentos futuros de um negócio. A informação possui, além do seu custo, o valor do conhecimento para ações futuras. Esta pode ser obtida por investimentos próprios, ou a depender da legislação e regulamentação do setor, por empresas concorrentes. A segunda situação, coloca um dos agentes em posição de vantagem, pois este não paga pelo conhecimento. Contudo, a depender do portfólio, a empresa pode observar vantagens em obter os dados o quanto antes e pagar por este conteúdo, mesmo que a empresa concorrente o tenha sem custo.

Na fase exploratória de um campo de petróleo, devido às características próprias do negócio e a legislação dos órgãos reguladores, esses efeitos devem ser levados no momento da decisão de investimento. A Agência Nacional do Petróleo (ANP) exige pelo instrumento contratual assinado pela concessionária, a transmissão de todas as informações de investimentos feitos no bloco no período exploratório. Isso inclui perfuração de poços, os quais, tem o objetivo detectar a ocorrência de hidrocarboneto nas possíveis reservas. Assim, o conteúdo se torna de conhecimento público, transmitido pela ANP ou até mesmo por informe de mercado pela empresa proprietária. Caso a empresa concorrente tenha concessões na vizinhança do bloco explorado, o valor dos seus possíveis ativos se alteram, dado a maior certeza pela revelação. Por consequência, esta informação pode redefinir os investimentos exploratórios e de desenvolvimento pretendidos. Este cenário desenha uma guerra de atrito entre as empresas, buscando um ótimo entre a receita esperada postergada do portfólio e a informação revelada por investimentos próprios ou de outrem. Ademais, as receitas futuras do portfólio consideram a incerteza do preço de venda do petróleo, incerteza mais corrente nas análises de investimentos.

O objetivo do trabalho é o apreçamento do portfólio exploratório dados as incertezas descritas: preço do petróleo, incerteza técnica pela revelação da informação e guerra de atrito com empresa concorrente. O arcabouço teórico

para este estudo envolve as teorias das opções reais (OR), valor da informação (VOI), teoria dos jogos (TJ) e teoria de análise de portfólio. A exploração de petróleo, por ser um elo inicial da cadeia deste suprimento, carrega consigo todas estas incertezas nos seus projetos. Dessa forma, o dimensionamento destas incertezas no valor do ativo propiciam ao detentor melhor ação do programa de investimento.

A principal contribuição do trabalho é apresentar a diferença de apreçamento do portfólio entre métricas tradicionais, como o Valor Presente Líquido (VPL) e Valor Médio Esperado (VME), e que consideram incertezas, sejam de preços, técnicas e de outros agentes, agregando OR, VOI e TJ.

A primeira seção trata da introdução ao tema do presente estudo. Na seção (2), o referencial teórico utilizado, seguido pelo Design empírico (seção 3). A penúltima parte (seção 4) apresenta as análises e resultados e por fim a conclusão (seção 5).

1.2

Problema de Pesquisa

O sucesso de um campo de petróleo pode ter correlação com a informação advinda da perfuração de outra oportunidade exploratória. Desprezar esta sequência informacional é considerar que as oportunidades do portfólio exploratório são independentes, incompatível com o conhecimento geológico. O vínculo entre prospectos minerais é devido a mesma gênese, ou seja, a mesma origem na formação das rochas, sejam os reservatórios de hidrocarboneto, ou qualquer elemento do sistema petrolífero. Por vezes, a oportunidade exploratória de valor informacional se encontra na área vizinha proprietária de outra empresa. Assim, o valor da carteira deve alterar a depender da ação da concorrente. Ademais, a depender da expectativa de longo prazo do preço do barril de petróleo e o prazo dos contratos de concessão com a ANP, podem alterar o momento do investimento exploratório nos ativos da carteira.

As empresas trabalham com métricas tradicionais em finanças corporativas, como VPL, VME e taxa interna de retorno. Estas métricas não inserem as incertezas inerentes ao projeto e trabalham com cenários ou valor médio das variáveis. A teoria das OR considera as incertezas de preços futuros, re-colocando o ótimo do agente em momentos distintos de investimentos e por consequência, a valores tão maiores quanto o VPL. Já a TJ capta como o ótimo individual é influenciado por outros agentes. Em ambiente competitivo, como em situações de conquista de fatia de mercado e acesso a informação para investimento, desenha-se um jogo conhecido como guerra de atrito. Na fase exploratória de petróleo, a guerra de atrito ocorre na busca de informa-

ção a menor custo, para filtrar os cenários mais improváveis e readequar o investimento planejado para desenvolvimento da produção. Caso não haja cooperação entre as empresas nessa fase, um dos agentes pode ter informação sem custo, conhecido como "free-rider", caso o custo da espera para esta empresa não exceda ao valor esperado líquido pela informação. A depender da carteira das companhias, pode acontecer de nenhum dos agentes investir, aguardando a informação gratuita do concorrente. Dessa forma, para dimensionar o conhecimento pela informação adquirida, faz-se uso da teoria do VOI atrelada a teoria de análise de portfólio.

O portfólio exploratório tem características singulares. Como há dependência genética entre os ativos, há uma cadeia ótima *a priori* de investimentos, de forma sequencial, a depender da ponderação técnica do fator de sucesso geológico (FC), a correlação entre oportunidades, as dimensões e parâmetros estimados das reservas. Ter oportunidades com evolução geológica distintas na carteira exploratória é relevante, similar a diversificação de portfólio (Markowitz, 1959). Contudo, um portfólio com oportunidades no mesmo *play* geológico é estratégico, visto que a dependência leva, no caso de insucesso nos poços pioneiros, prontamente o abandono de uma sequência de oportunidades não testadas. Por outro lado, o sucesso no poço exploratório gera uma abertura de fronteira para novos ativos, similar ao investimento em P&D (Smit & Trigeorgis, 2006), que novos projetos afetam outros na carteira. O trabalho vai se debruçar nestas últimas característica do portfólio, as quais o valor da carteira são modulados e amplificados dado a correlação entre ativos.

Assim, será calculado o valor da carteira exploratória com todos os vetores de incerteza discutidos. Diferenciar entre o cálculo de um ativo exploratório (análise *stand-alone* - VPL e VME), o impacto da análise de dependência e o valor conjunto da carteira (incerteza técnica - VOI), adicionando o valor da opção de espera para esta mesma carteira (incerteza de mercado - OR) e por fim a guerra de atrito (incerteza técnica, mercado e estratégica - VOI, OR+TJ).

1.3

Objetivos

1.3.1

Geral

De um modelo mais simplista ao de maiores planos de incerteza, o valor da carteira exploratória terão diferenças nos valores de consolidação, com distintas decisões de investimento. O relevante nessa diversidade é perceber qual modelo é mais adequado a cada situação.

O modelo simples considera um valor constante de preços, por uma média de preços de longo prazo. Os outros modelos consideram os preços com incerteza e o modelo utilizado é o Movimento Geométrico Browniano (MGB). O modelo de incerteza técnica, que considera o valor da informação e opção de aprendizado, é conforme os conceitos de [M. A. G. Dias \(2004a\)](#). Esse modelo de incerteza técnica é usado tanto para considerar um portfólio como para inserir a incerteza estratégica. A incerteza estratégica segue os moldes apresentado em [M. A. Dias and Teixeira \(2009\)](#), com os conceitos de guerra de atrito em [Bishop and Cannings \(1978\)](#).

As soluções das equações diferenciais são por diferenças finitas explícitas, similar a [Haug \(2007, Cap. 8\)](#).

1.3.2 Específicos

Esta pesquisa envolve algumas teorias, que por vezes são combinadas nas bibliografia estudada. Em OR, tem muitos trabalhos com incerteza de preços como variável estocástica. Em especial, o preço do petróleo, que é facilmente agrupado em trabalhos de OR em *commodities*. São mais raros essa teoria aplicada a ambiente exploratório, contudo, os existentes têm sólida referência nesse campo.

De um modo geral, a incerteza técnica é mais considerada em projetos em desenvolvimento, sendo que na descoberta do petróleo tem uma carência ou um distanciamento da prática da indústria. A teoria pesquisada em incerteza técnica é o VOI, em especial a medida de aprendizado na variável de probabilidade de ocorrência de hidrocarboneto (FC). Com esse conceito, o valor de portfólio é distinto, definindo os ativos como super-aditivos, de caráter mais complementar que substitutivo.

A pesquisa com incerteza interacional tem um campo bem definido. A TJ é a base para essa pesquisa, mas em espacial, os estudo de TJ+OR são fonte para o trabalho. No caso estudado, o agente gera externalidade positiva ao outro e assim será diferenciado o tipo de resultado e os conceitos adotados.

Na descrição do modelo, o problema é descrito com maior detalhe, assim como as métricas VPL e VME. O modelo de incerteza de preço é formalizado e suas propriedades são exploradas. Sobre a incerteza técnica, é explicado o conceito geológico de FC e a medida de aprendizado de dependência entre ativos exploratórios. Consequentemente, como é adotada a informação do agente pela FC, apresentado a incerteza estratégica dentro do quadro de TJ, com jogos clássicos que são guias para este trabalho. Por fim, as consequências desses efeitos combinados em um portfólio, apresentando as

equações diferenciais e a soluções matemáticas que dão suporte a esta pesquisa.

Os parâmetros de entrada de mercado são estimados e os de carácter privado são propostos. Esses propostos precisam ter coerência econômica.

Basicamente, os resultados dos modelos de valoração são agrupados em: *stant-alone* ou em portfólio, com ou sem interação estratégica.

1.4

Justificativa

Modelos teóricos simples têm a função de orientar os primeiros caminhos da pesquisa. É o caso de valoração de ativos pelo método do VPL. Esta medida é vastamente ensinada na academia e aceita na indústria como principal métrica para decisão investimento.

Com a compreensão de como as variáveis afetam o valor do ativo, constroem-se modelos mais complexos e que se aproximam mais a realidade. É o caso da adoção da teoria das OR como valoração de ativos, a qual insere incerteza indexada ao tempo no fluxo de caixa, como incerteza de receita, de investimento ou quantidade. Essa teoria possibilita ao investidor, além da valoração mais próxima ao valor real do ativo, uma função de momento ótimo para investimento, algo que o modelo de VPL não fornece ¹.

Contudo, não são todas as incertezas que são indexadas ao tempo. O caso do princípio da revelação, a opção de aprendizado é em função da perfuração de poços, ou seja, a indexação do processo estocástico é em função do evento investimento exploratório, algo endógeno a cada empresa (M. A. G. Dias, 2002). O VOI é a teoria de suporte para os conceitos de investir para aprender ².

Caso aceite todos os modelos supracitados, o investidor adotar uma percepção monopolista de mercado. Comumente, quando uma empresa entra num novo mercado, acaba atraindo outras empresas que oferecem o mesmo produto e afetam negativamente as receitas esperadas (Grenadier, 2000). Assim, há o efeito de preempção e essa incerteza estratégica deve ser considerada. Por vezes, a externalidade dos agentes é positiva e um *free-rider* pode se estabelecer. A TJ é a base de estudos para este modelo ³, assim como a TJ+OR ⁴.

A complexidade de modelos tende a ser adotada mais rapidamente nas pesquisas acadêmicas comparada ao uso na indústria. Contudo, quando se

¹Como referência em OR, recomendo Dixit and Pindyck (1994) e Trigeorgis (1995). Em português, com mesma profundidade dos anteriores, M. Dias (2015b, 2015a). Como guia prático, Copeland and Antikarov (2001).

²Como referência, recomendo D. Lawrence (1999).

³Resumo sobre a TJ é apresentado em Myerson (2009)

⁴Resumo em Smit and Trigeorgis (2006) e Chevalier-Roignant, Flath, Huchzermeier, and Trigeorgis (2011)

trata de decisões de investimento e planejamento estratégico, que envolvem grande quantidade monetária em cada ação, não encontra grandes barreiras na transmissão destes conhecimentos na prática do mercado. A presente pesquisa, por extenso arsenal teórico, pretende aproximar a medida de valor ao valor real dos ativos. Assim, utiliza a intersecção destas teorias em um exemplo prático na exploração de petróleo: um bloco exploratório, com prazos definidos, prospectos correlacionados entre si e também com ativos da operadora do bloco vizinho.

1.5 **Contribuições**

1.5.1 **Gerencial**

A tomada de decisão envolve, além das informações técnicas, questões comportamentais e informação assimétrica dos gestores. Mesmo que as teorias e soluções apresentadas neste trabalho tenham caráter hiper-racional ([Teece, Pisano, & Shuen, 1997](#)), é evidente que, se for possível desenhar um modelo mais próximo aos fatores exógenos e endógenos da empresa do setor, a utilidade prática deste projeto se concebe naturalmente.

Esta dissertação tem a contribuir como ferramenta na tomada de decisão em uma carteira exploratória com concorrentes, uma realidade diária desta indústria. Apresenta como resultado o mais apropriado valor da carteira exploratória, o momento ótimo de investimento dado o estado da natureza das variáveis e a decisão ótima de qual ativo investir primeiro.

1.5.2 **Teórica**

Esta pesquisa se ocupa em apreçar uma carteira exploratória de uma empresa de petróleo, com uso da intersecção das teorias de OR, VOI, TJ e Análise de Portfólio. É relevante na análise de ativos a combinação da OR com TJ, dado o efeito de competição entre empresas ([Grenadier, 2000](#)). Assim, como para a empresa, é necessário saber os efeitos de investimentos no conhecimento dos seus ativos, suportada pela teoria do VOI ([M. A. G. Dias, 2004b](#)).

Portanto, a contribuição é preencher o campo de análise de ativos exploratórios na área de petróleo e gás ([Tourinho et al., 1979](#); [Paddock, Siegel, & Smith, 1988](#); [Hendricks & Porter, 1996](#); [Grenadier, 1999](#); [M. A. G. Dias, 2004a, 2006](#); [Jafarizadeh & Bratvold, 2015](#); [Guedes & Santos, 2016](#)). O diferencial é a

junção de todas essas teóricas com análise de portfólio, complementando ainda mais os estudos feitos até hoje.

2

Referencial Teórico

As teorias que dão suporte a esta dissertação estão apresentadas em diferentes capítulos. Pelo encadeamento do conteúdo do referencial haverá transição de conceitos de tópico em tópico, as relações e distintas óticas sobre o valor dos ativos.

Em cada teoria abordada será feito referência aos modelos de incerteza mais relevantes. No caso das opções reais, os modelos de preços serão destacados. Já em análise de portfólio, tem como centro a teoria do valor da informação e apresenta as relações com a incerteza técnica. Com a mesma lógica, em teoria dos jogos, a incerteza estratégica será realçada. Como um vínculo entre as Opções e Jogos, conhecido como *Option Games*, os conceitos de preempção e assimetria serão mais detalhados.

Como visto, o referencial tem a primeira parte sobre Opções Reais (seção 2.1), Portfólio e Valor da Informação (seção 2.2), Teoria dos Jogos (seção 2.3) e Teoria dos Jogos e Opções (seção 2.4).

2.1

Opções Reais

O método mais comum de valoração de projetos é o Fluxo de Caixa Descontado. Este considera o valor futuro esperado do fluxo de caixa descontado pela taxa ajustada ao risco. A métrica mais comum é o Valor Presente Líquido, sendo ótimo quando o valor Esperado das Receitas líquidas superam o valor do Investimento. Em projetos com grande incerteza, como em recursos minerais, os eventos extremos são mais prováveis comparados aos investimentos com menor incerteza e métodos que consideram valor médio podem distorcer a valoração. Esta preocupação motivou pesquisadores a desenvolver métricas que considerem as incertezas no fluxo de caixa combinado a ação ótima do tomador de decisão.

Neste contexto, surgiu a pesquisa em Opções Reais. O seu desenvolvimento é posterior às formulações de opções financeira (Black & Scholes, 1973).

O Investimento em ativo real pode ser visto como uma opção sem obrigatoriedade de ação do gestor, dado a incerteza no fluxo de caixa esperado e o custo afundado. O paralelo é direto à opção financeira: direito e não obrigação de ter um ativo financeiro, dado a incerteza do ativo base condicionado ao valor do preço de exercício (*strike*). Com isso, a estrutural lógica foi transposta de ativos financeiros a ativos reais, considerando as diferenças entre estes dois objetos. [Tourinho et al. \(1979\)](#) desenvolveu o primeiro modelo em opções reais, o qual um detentor de um campo de petróleo tinha o direito e não o dever de explorar, considerando as incertezas do preço da *commodity*.

- Apontar nos próximos parágrafos os trabalhos relevantes em OR para a dissertação.
- Importância da consolidação de [Dixit and Pindyck \(1994\)](#) e [Trigeorgis \(1995\)](#) para o estudo de opções reais.
- [Titman \(1985\)](#) e o valor do terreno com incerteza - Valor da Espera e Valor da Expansão.
- síntese de soluções de OR ([M. A. G. Dias, 2010](#)).
- Síntese de [Lander and Pinches \(1998\)](#). Distintos métodos de solução e as barreiras existentes na indústria para adotar esses conceitos.
- Importância do modelo de Opção Americana para gestão, tanto na espera de investimento como na expansão da produção.
- Trabalhos de [Kellogg \(2014\)](#) e [Décaire, Gilje, and Taillard \(2019\)](#) analisam poços de desenvolvimento no *shale gas* americano. Concluem que agentes agem de forma heurística em função das variáveis que são consideradas em opções reais, como tempo de espera e volatilidade de mercado.
- Parágrafo final: Importância do Valor da Espera em Exploração de Óleo e Gás, sendo a principal variável considerada o preço do petróleo.

2.1.1

Incerteza de Preços

2.1.2

Opções Reais: Recursos Minerais e Indústria de Óleo e Gás

- Primeiro trabalho em Opções Reais foi em petróleo ([Tourinho et al., 1979](#)).
- Modelo de reserva de petróleo *offshore* de [Paddock et al. \(1988\)](#) vastamente usado em recursos minerais. Modelo em recursos naturais de [M. J. Brennan and Schwartz \(1985\)](#), em especial em minério de cobre. Resultados simulados dependem da opção de parada, investimento ou abandono.
- Sistematização das incerteza na indústria de petróleo ([M. A. G. Dias, 2004b](#)). Distinção na da fase exploratória das outras.
- [Jafarizadeh and Bratvold \(2015\)](#) apresentam um modelo com opção de espera na exploração e produção de petróleo, tipo opção americana, com modelo de preços de [Schwartz and Smith \(2000\)](#) de dois fatores, e uso do método Monte Carlo com regressão de [Longstaff and Schwartz \(2001\)](#).
- [Cortazar and Schwartz \(1997\)](#) apresentam uma situação de exploração de um campo, com modelo de preço de reversão similar ao [Schwartz \(1997\)](#). A solução é feita por diferenças finitas de forma implícita.
- [Guedes and Santos \(2016\)](#) avaliam a cadeia de Exploração e Produção com modelo [Cortazar and Schwartz \(1997\)](#) pelo método *lattice* e com intervalos espaçados no tempo. Uso de binomial, trinomial, quadrinomial e hexanomial para lidar com a incerteza do preço.
- Os últimos papers tratam como um conjunto de incertezas o negócio do *upstream* de petróleo. Na fase exploratória é importante ter uma abordagem distinta entre incerteza técnica e de preços.

2.2

Portfólio

Em especial, como primeiros trabalhos sobre múltiplas opções, [Trigeorgis \(1993\)](#) apresentou as consequências das interações das diversas opções gerenciais. O resultado é interessante, já que demonstra que as opções podem ser sub-aditivas ($f(x + y) < f(x) + f(y)$). Contudo, a generalização deste postulado pode ser feita somente quando as opções são em cima de um ativo base, não para opções em diversos ativos no portfólio.

2.2.1

Complementariedade, Substitutibilidade e Independência

Os ativos no portfólio de uma empresa podem apresentar características de complementariedade, substitutibilidade e independência. O caso de independência ocorre quando os recursos e as ações gerenciais não interferem em outros projetos. Contudo, na maioria das vezes é irrealista numa empresa que possui uma variedade de projetos. Por outro lado, é a forma mais fácil e comum de avaliar ativos. Já os ativos complementares e substituíveis possuem qualidades interativas, os quais quando analisados em conjunto, podem ser sub-aditivas, ou seja, destruir valor, ou super-aditivas, adicionar valor ([Brosch, 2001](#)).

Os investimentos com atributos de substitutibilidade disputam entre si os recursos e/ou os mercados de venda e assim geram um sub-ótimo para a companhia. Este efeito em opções reais é analisado por muitos autores ([Vassolo, Anand, & Folta, 2004](#); [Brosch, 2001](#)) e é similar ao modelo de [Markowitz \(1959\)](#) de portfólio de ações. O princípio a ser adotado como ótimo é a diversificação, com ativos financeiros que possuem correlações inversamente proporcionais, podendo manter o mesmo retorno esperado com a diminuição do risco.

A complementariedade é dada quando os ativos possuem sinergia e fungibilidade ([Arora & Gambardella, 1990](#)). Dessa forma, os recursos e saberes técnicos são transmitidos de um projeto para o outro, além de ganhos em escala e escopo.

- Desenvolver e buscar mais exemplos de complementariedade, já que os projetos em Exploração de petróleo possuem esta característica.

- O valor da informação é dado pelo agrupamento das informações por investimento, sendo valiosas quando esclarecem os riscos de projetos futuros (Bratvold, Bickel, Lohne, et al., 2009).

2.2.2

Valor da Informação – Incerteza Técnica

- Caso em que a incerteza técnica é temporal (Cortazar, Schwartz, & Casassus, 2003). Limites deste modelo.
- Como a incerteza técnica é tratada na visão de Valor da Informação e a relação com Investimento Informacional. Livro do D. B. Lawrence (2012).
- Relação do dimensionamento da incerteza técnica com eventos Φ_e (investimento em informação), não com o tempo Φ_t .
- Trabalhos sobre valor da informação (Arrow, 1973; D. B. Lawrence, 1987; M. A. G. Dias, 2004a; Bratvold et al., 2009; D. B. Lawrence, 2012).
- Trabalhos sobre VOI na indústria do petróleo (Bratvold et al., 2009; M. A. G. Dias, 2002; Martinelli, Eidsvik, & Hauge, 2013; Calvette & Pacheco, 2014).
- Relação de Valor da Informação com redução da incerteza esperada (M. A. G. Dias, 2002).
- Este efeito de redução da variância é visto na prática na área de exploração de produção de petróleo (Rudolph & Goulding, 2017).

(M. A. G. Dias, 2002) Explorar mais conceitos presentes neste trabalho,

Conceitos gerais :

- Redução da incerteza
- Percentagem em redução da variância pela revelação
- Expectativa Condicional= Distribuição de Revelação é Uma Expectativa Condicional
- Princípio da Revelação - Teoria do Mecanismo (tipos=ótimo de cada agente) x Revelação da distribuição (verdade sobre a var. técnica)

- Toda revelação = Expectativa Condicional é igual a incondicional $\mathbf{E}[X|I] = \mathbf{E}[X]$
- distribuição a priori diz tudo sobre a incerteza $\mathbf{E}[X_i|\mathcal{F}_i] = \mathbf{E}[X_i]$ - toda informação está em X_i
- Revelação parcial tem relação com informação imperfeita.

Conceitos Probabilísticos:

- Revelação da informação é $R_x = E[X|I]$
- lei da expectativas iteradas: $E[R_x] = E[E[X|I]] = E[X]$
- Variância da distribuição da revelação é igual a esperada redução da variância induzida pela nova informação:
- $Var[R_x] = Var[X] - E[Var[X|I]]$
- caso de toda revelação: $E[Var[X|I]] = 0$, então $Var[R_x] = Var[X]$
- Apresentar o modelo de verossimilhança e teorema de Bayes. Muito usado em valor da informação.
- Modelo Binomial Bivariado:

2.3

Teoria dos Jogos

Descrição de Jogos e Jogos não cooperativos - preempção em modelo Stackelberg.

2.3.1

Incerteza Estratégica: Guerra de Atrito

- [J. M. Smith \(1974\)](#) - Primeiro conceito de Guerra de Atrito. Luta de animais por prêmio. Conceitos de Estratégia Evolucionária Estável (ESS). A persistência à espera é uma exponencial negativa.
- [Bishop and Cannings \(1978\)](#) tornam o modelo mais generalista sobre o custo de espera e definem melhor os limites do problema.
- [Hendricks, Weiss, and Wilson \(1988\)](#) Guerra de atrito com informação completa.

2.4

Teoria das Opções e Jogos

- [Smit and Trigeorgis \(2006\)](#) resumem diversos cenários de jogos competitivos e cooperativos, com informação imperfeita, convertido para informação incompleta (natureza joga).
- [Chevalier-Roignant et al. \(2011\)](#) agrupam os tipos de *Option Games*.
- [Huisman, Kort, et al. \(1999\)](#) apresentam os efeitos dos jogos na espera das opções. [M. A. Dias and Teixeira \(2009\)](#) melhoram o modelo, incluindo assimetria de custos.

2.4.1

Preempção

- [Grenadier \(1996\)](#) descreve a preempção em projetos imobiliários, diferente de [Titman \(1985\)](#), que somente considera o valor da espera. A competição e a demanda incerta dos imóveis provocam ação sub-ótima da construtora, até mesmo investimento em baixa de mercado.
- [Anderson, Friedman, and Oprea \(2010\)](#) Exemplos de preempção em mineração e na indústria em geral.
- [Décaire et al. \(2019\)](#) constata empiricamente, com dados de perfuração de poços no *shale gas* e séries de preço de gás local, que além dos parâmetros de volatilidade e tempo de espera afetam os agentes, algo característicos da OR, mas também o investimento de vizinhos na tomada de decisão, efeito modelado em TJ e OR+TJ.

2.4.2

Informação Completa e Assimetria

- [Grenadier \(1999\)](#) modela que ação do agente é afetada pelo sinal imperfeito dos rivais e da opção da ação de investimento deles, com caso em exploração de petróleo. Descreve o efeito cascata, fenômeno devido a sobrecarga de ação e informações dos concorrentes, atingindo o sub-ótimo para o agente.

- [Hendricks and Porter \(1996\)](#) desenham um modelo de postergação de perfuração para não passar informação a terceiros, com casos de não perfuração. Fazem análise econométrica dos poços perfurados no golfo do México.
- [M. A. G. Dias and Teixeira \(2004\)](#) modelo em exploração de petróleo com Guerra de Atrito. Considera probabilidade de cooperação.

3

Design empírico

Os modelos são caracterizados por 11 variáveis. Essa seção tem o objetivo de explicar essas variáveis, suas relações em cada modelo.

3.1

Apresentação do Problema

Endógenos:

- $B[1 : n]$ - Volume Recuperável (bbl)
- $q[1 : n]$ - Qualidade da Reserva (%)
- $FC[1 : n]$ - Fator de Chance dos prospectos (%)
- $\rho[n \times n]$ - Matriz de correlação dos prospectos (%)
- $dummy_1[1 : n]$ - Dummy de propriedade [0,1]
- I_w - Investimento no poço pioneiro (MM\$)
- I_d - Investimento em desenvolvimento - função do Volume Recuperável (MM\$)

Exógenos:

- $P(\alpha, \sigma)$ - hiperparâmetros dos Preço do petróleo (%a.a, %a.a.)
- δ - taxa de conveniência (%a.a)
- r - Taxa livre de risco (%a.a.)
- τ - Tempo do contrato de exploração - comum em todos os blocos (anos)

3.2

Modelo Paramétrico - VPL e VME

A relação linear entre Valor de projeto e preço de ativo base é considerado em alguns trabalhos (Paddock et al., 1988; Dixit & Pindyck, 1994, Cap.12,p.399). O modelo paramétrico (“Bussiness Model”) considera linear a relação do preço do petróleo com o Valor de Receitas líquido de custos operacionais em tempo presente (M. A. G. Dias, 2004b) :

$$V = qBP \quad (3-1)$$

Sendo q a qualidade econômica da reserva, B volume da Reserva e P o preço do petróleo. A qualidade econômica é um fator de desconto da reserva, com valor entre $[0,1]$. Este parâmetro sintetiza as propriedades idiossincráticas do volume recuperável da reserva, como qualidade do óleo, viscosidade, permeabilidade e capacidade de tecnológica de produção, inclusive regime fiscal. Essa equação linear é útil pois se aproxima de modelos que consideram variações de custo operacionais e é um facilitador de cálculo. Porém, em regimes como de partilha, a equação não deve ser linear, visto que a transferência para o governo é distinta na fase inicial e final de produção (M. A. G. Dias, 2002).

Diferentemente de Paddock et al. (1988), o Valor desta equação não é unitária por reserva desenvolvida. Contudo, termos multiplicativos determinísticos não alteram a dinâmica estocástica dos preços (equação 3-6), como pode ser visto na demonstração a seguir. Sendo o preço um MGB como a equação abaixo, temos:

$$\frac{dP}{P} = \alpha(P, t)dt + \sigma(P, t)dB \quad (3-2)$$

Sendo V uma função de P igual a equação (3-1), temos, $\frac{\partial V}{\partial t} = 0$; $\frac{\partial V}{\partial P} = qB$ e $\frac{\partial^2 V}{\partial P^2} = 0$. Assim, pela fórmula de Itô:

$$dV = \frac{\partial V}{\partial t}dt + \frac{\partial V}{\partial P}dP + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial P^2}d[P, P] \quad (3-3)$$

Substituindo:

$$dV = qBdP \quad (3-4)$$

$$dV = qB[\alpha(P, t)Pdt + \sigma(P, t)Pdz] \quad (3-5)$$

$$dV = \alpha(P, t)Vdt + \sigma(P, t)Vdz \quad (3-6)$$

Isso quer dizer que o projeto V possui dinâmica similar ao ativo base (P) com os mesmos hiperparâmetros, ou seja, *drift* $\alpha(P, t)$ e mesmo parâmetro de difusão $\sigma(P, t)$, como o valor unitário demonstrado por [Paddock et al. \(1988\)](#).

O Valor Médio esperado (VME) é uma medida ponderada do VPL pelo fator de chance do projeto. Essa medida de valor é amplamente aceita em projetos exploratórios ([Faúndez, Marquardt, Jara, & Guzmán, 2020](#); [Rose, 2000](#), Capítulo 3). Assim sendo, temos:

$$VME = FC(V - I_d) - I_w \quad (3-7)$$

Onde, I_d é o investimento no desenvolvimento da reserva a valor presente, em que $(V - I_d)$ é o VPL do projeto. O investimento inicial é o poço pioneiro, I_w . Esse investimento pode ser visto como o custo de obter a informação de existência de hidrocarboneto. O fator de Chance (FC) é uma variável de incerteza técnica, como apresentada na seção (3.4).

O Investimento em desenvolvimento pode ser em função do Preço do ativo base e da Reserva. Optou por modelar em função da reserva, similar a [M. A. G. Dias \(2006\)](#); [M. A. Dias and Teixeira \(2009\)](#). As justificativa de adoção desse modelo estão na seção (4.1.2).

$$I_d(B) = K_f + K_v B \quad (3-8)$$

O parâmetro de qualidade (q) pode ser definido a partir da derivação do VPL em relação a variável P , ou seja:

$$q = \frac{\partial VPL}{\partial P} \frac{1}{B} \quad (3-9)$$

Já o fator de chance (FC) é uma medida probabilística subjetiva de ocorrência de hidrocarboneto. É uma ponderação de risco ao projeto. Análise aprofundada desta variável é feita na seção (3.4).

Da mesma forma que demonstrados nas equações (3-3 a 3-3), o termo $FC \cdot V$ da equação (3-1) possui mesmo *drift* $\alpha(P, t)$ e a difusão $\sigma(P, t)$ que o preço P .

3.3

Incerteza de Preços

A variável preço é a mais importante na construção do fluxo de caixa. Devido a incertezas sobre oferta e demanda em todo o tempo (t), os preços dos produtos apresentam oscilações. Por vezes possuem uma tendência de longo prazo, podendo ser ascendente ou, por exemplo, reverter a alguma média, sendo particular para cada bem. O processo estocástico é uma forma usual de modelar ativos com esses comportamentos. Assim, o processo estocástico é uma família, ou série de sequências de variáveis aleatórias, definida num espaço de probabilidade, o qual depende do espaço amostral, a sua filtração e a probabilidade dos eventos $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$. Esse processo (S_t) é indexado a um domínio, sendo em finanças comum ativos serem indexados ao tempo (t).

O ativo S_t pode ser modelado como um processo browniano padrão (dz), que carregará a difusão das séries, uma medida de desvio σ , e com uma variação temporal de tendência, conhecido como *drift* (α). O Movimento Geométrico Browniano é o mais comum modelo em finanças. Esse modelo apresenta diversas vantagens: *ii*) aderência a muitos dados históricos de preço; *ii*) não possui probabilidade de S_t ser negativo, da mesma forma que os preços dos ativos negociados em mercado; *iii*) solução fechada da equação diferencial estocástica. Com esse modelo, [Black and Scholes \(1973\)](#) basearam para solução analítica da opções europeia de compra. O modelo MGB pode ser visto na equação (3-10)

$$dS_t = \alpha S_t dt + \sigma S_t dz \quad (3-10)$$

Essa dinâmica pode representar preços de ativos de mercado como ações

em bolsa de valores ou preço *spot* de tipos de óleo por barril, como o óleo tipo WTI . Em ações, os dividendos são pagos para o detentor e a dinâmica de preços de tendência possuem desconto do dividendo, sendo $\alpha = \mu - \delta$. Esse efeito também acontecesse em relação ao preço *spot* do óleo, mas em ativos físicos é conhecido como taxa de conveniência. A taxa de conveniência é o benefício do proprietário do produto em detê-lo, em relação ao detentor da posição comprada no mercado futuro. Esse benefício tem relação com a segurança de possuir fisicamente o minério dado risco de escassez. Essa taxa (δ) é uma variável não observada e pode ser estimada em contratos futuros.

A solução da equação diferencial (3-10) é dada pela transformação de S_t e aplicação da fórmula de Itô-Doeblin. Considere $Y(S_t) := \ln S$, então $\frac{\partial Y}{\partial S} = \frac{1}{S}$ e $\frac{\partial^2 Y}{\partial S^2} = -\frac{1}{S^2}$ e a dinâmica de Y é:

$$\begin{aligned} dY &= \frac{1}{S} dS - \frac{1}{2} \frac{1}{S^2} d[S, S](t) \\ &= (\mu - \delta) dt + \sigma dz - \frac{1}{2} \sigma^2 dt \\ &= \left(\mu - \delta - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) dt + \sigma dz \end{aligned}$$

Integrando os dois lados da equação entre t e T :

$$\ln S_T - \ln S_t = \left(\mu - \delta - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) (T - t) + \sigma z_{T-t}$$

Ou seja, sendo $z_{T-t} \sim N(0, 1)\sqrt{T-t}$, a solução de S_T dado a filtração em t é:

$$S_T = S_t e^{(\mu - \delta - \frac{1}{2} \sigma^2)(T-t) + \sigma z_{T-t}} \quad (3-11)$$

Com a solução (3-11), é possível calcular a média:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[S_T|\mathcal{F}_t] &= \mathbb{E}[S_t e^{(\mu-\delta-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)+\sigma(z_T-z_t)}|\mathcal{F}_t] \\
&= S_t e^{(\mu-\delta-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)} \mathbb{E}[e^{\sigma(z_T-z_t)}|\mathcal{F}_t] \\
&= S_t e^{(\mu-\delta-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)} \mathbb{E}[e^{\sigma z_{T-t}}] \\
&= S_t e^{(\mu-\delta-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)} e^{\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)}
\end{aligned}$$

Ou seja:

$$\mathbb{E}[S_T|\mathcal{F}_t] = S_t e^{(\mu-\delta)(T-t)} \quad (3-12)$$

Sendo a variância igual a $Var[X] = E[X^2] - E[X]^2$, vamos calcular $E[X^2]$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[S_T^2|\mathcal{F}_t] &= \mathbb{E}[S_t^2 e^{2(\mu-\delta-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)+2\sigma(z_T-z_t)}|\mathcal{F}_t] \\
&= S_t^2 e^{2(\mu-\delta-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)} \mathbb{E}[e^{2\sigma(z_T-z_t)}|\mathcal{F}_t] \\
&= S_t^2 e^{2(\mu-\delta-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)} \mathbb{E}[e^{2\sigma z_{T-t}}] \\
&= S_t^2 e^{2(\mu-\delta-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)} e^{2\sigma^2(T-t)} \\
\mathbb{E}[S_T^2|\mathcal{F}_t] &= S_t^2 e^{2(\mu-\delta+\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}
\end{aligned}$$

Assim:

$$\begin{aligned}
Var[S_T|\mathcal{F}_t] &= \mathbb{E}[S_T^2|\mathcal{F}_t] - \mathbb{E}[S_T|\mathcal{F}_t]^2 \\
&= S_t^2 e^{2(\mu-\delta)(T-t)} e^{\sigma^2(T-t)} - S_t^2 e^{2(\mu-\delta)(T-t)}
\end{aligned}$$

Portanto:

$$Var[S_T|\mathcal{F}_t] = S_t^2 e^{2(\mu-\delta)(T-t)} (e^{\sigma^2(T-t)} - 1) \quad (3-13)$$

Caso μ seja maior que δ , a média é crescente ao longo do tempo e se $t \rightarrow \infty$, a variância também tende ao infinito quando σ é diferente de zero. A propriedade da variância do MGB é desejável, já que o tempo $t + \Delta t$ é mais incerto que o tempo t . Sobre a média desse processo, diversos estudos apontam preços de equilíbrio em *commodities*, visto que os preços se acomodam por forças de demanda e oferta do produto, algo que não acontecesse nesse modelo. Dessa forma, desenvolveram modelos mais aderentes a esses tipos de ativos, como modelos com dois e três fatores com reversões de curto e/ou longo prazo

(Schwartz, 1997; Schwartz & Smith, 2000; Cortazar & Schwartz, 2003).

Caso μ seja menor que δ , temos uma média decrescente e se $t \rightarrow \infty$, a média tende para zero. Esse efeito ocorre em longo prazo (70 anos ?), tornando aceitável o modelo com essa relação para apreçamento financeiro de ativos reais. Contudo, a diferença $\mu - \delta$ não pode ser menor que $-\frac{1}{2}\sigma^2$, pois torna a variância decrescente, algo não factível. Essa conclusão pode ser obtida com a derivação em relação ao tempo da equação (3-13), igualando a zero e analisando o tempo t no ponto máximo. Caso exista a relação $\mu - \delta < -\frac{1}{2}\sigma^2$, o estudo (opções, simulação, etc) deve ser feito com horizonte de tempo até o t^* de variância máxima, evitando variância decrescente.

Para apresentação de conceitos de opções e mercado futuros, é necessário o conceito de mudança de medida. Sejam duas medidas, P em (Ω, \mathcal{F}) e Q em (Ω, \mathcal{F}) , sendo que para todo $A \in \mathcal{F}$, $P(A) = 0$ então $Q(A) = 0$, sendo absolutamente contínuas ($Q \ll P$).

Dados a hipótese de continuidade, existe uma variável aleatória não negativa ν que relaciona essas suas medidas (relaciona as densidades de probabilidade). Essa variável é conhecida como derivada Radon-Nikodyn. Em processos estocásticos, essa conversão de medida do processo é enunciada pelo teorema de Girsanov, que adota a derivada de Radon-Nikodyn.

Seja o processo estocástico em medida real (Ω, \mathcal{F}, P) apresentado pela equação abaixo:

$$dS_t = (\mu - \delta)S_t dt + \sigma S_t dz \quad (3-14)$$

define-se

$$dz^* = \theta dt + dz$$

e

$$\nu = \exp \left[-\theta z - \frac{1}{2}\theta^2 t \right]$$

Onde, dz^* é igual ao incremento de Wiener sob medida equivalente, o preço do prêmio de risco igual a $\theta = \frac{\mu - r}{\sigma}$, em que o prêmio de risco é

$\pi = \mu - r$. Dessa forma, o processo estocástico (equação 3-14), em medida martingal equivalente (Ω, \mathcal{F}, Q) é:

$$\begin{aligned} dS_t &= (\mu - \delta)S_t dt + \sigma S_t(-\theta dt + dz^*) \\ &= (\mu - \delta)S_t dt + -(\mu - r)S_t dt + \sigma S_t dz^* \end{aligned}$$

$$dS_t = (r - \delta)S_t dt + \sigma S_t dz^* \quad (3-15)$$

Ou seja, há um desconto no processo pelo prêmio de risco, sendo que esse processo, em medida neutra ao risco, tem média relacionada a taxa livre de risco (em tempo contínuo - e^{rt}), descontado o dividendo/taxa de conveniência. Sob a medida equivalente, a variância (ou matriz de covariância em caso de processo estocástico multivariado) é igual a variância sob medida real. A vantagem de trabalhar com essa medida é que o ativo S_t e qualquer derivativo desse ativo base $F(S_t)$, em medida martingal equivalente, pode ser descontado pela taxa livre de risco em análise de apreçamento de ativo. Esse artifício facilita a análise de opções, pois nesse nesse derivativo, a taxa de desconto ponderada ao risco altera ao longo do tempo e é maior em opções de compra comparada com a taxa livre de risco e menor em opções de venda.

Isso quer dizer que a esperança do ativo base (ou seu derivativo) sob medida equivalente martingal (Q) , descontado pela taxa livre de risco ($D_{T,t} = e^{-r(T-t)}$) é martingal ($D_t \mathbb{E}^Q[S_T | \mathcal{F}_t] = S_t$). Esse raciocínio vale para opções. Seja uma opção de compra com strike K e vencimento em T , em um tempo t , a opção vale:

$$\begin{aligned} c_t &= e^{-r(T-t)} \mathbb{E}^Q[c_T | \mathcal{F}_t] \\ &= e^{-r(T-t)} \mathbb{E}^Q[(S_T - K)^+ | \mathcal{F}_t] \end{aligned} \quad (3-16)$$

Sendo a simbologia $(.)^+$ a função máximo entre o resultado e zero.

O estudo dos preços futuros é importante para a estimação dos parâmetros do modelo do preço *spot*. No caso de *commodity*, o mercado futuro é bem desenvolvido e há diversos contratos com diferentes vencimentos de um mesmo ativo físico. A estimativa do preço *spot* é necessária em muitas *commodities*, visto que o que é negociado em mercado são os contratos futuros, não o ativo de entrega imediata. Essa é a realidade do óleo tipo *Brent* ou *WTI*. Isso quer

dizer que o preço do *spot* é desconhecido e estimado pelo mercado futuro e o preço *spot* é relevante para o apreçamento da opção real.

A estrutura a termo dos preços futuros no tempo t é definida como a esperança em medida martingal do preço do ativo base (*spot*) na data do término do contrato (T), dada a filtração (informações) em t . Sendo a dinâmica de preço *spot* igual a equação diferencial estocástica (3-14), o mesmo processo em medida martingal será igual a equação (3-15), temos a estrutura do preço futuro igual a equação (3-17), com resolução bem parecida com a equação (3-12):

$$F_{t,T} = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [S_T | \mathcal{F}_t] = S_t e^{(r-\delta)(T-t)} \quad (3-17)$$

Nesse modelo, o preço futuro é crescente caso $r - \delta > 0$ em relação ao aumento de $T - t$ e decrescente caso $r - \delta < 0$. Como a taxa livre de risco e a taxa de conveniência são parâmetros constantes, o modelo não capta a variação da estrutura a termo de *contango* para *backwardation*, ou vice e versa.

Como em Gibson and Schwartz (1990), considerando a taxa livre de risco constante, por diferentes contratos futuros com diferença de m meses, pode-se extrair, em termos anuais, a taxa de conveniência implícita (δ), segundo a fórmula a seguir:

$$\delta = r + \frac{12}{m} \ln \left[\frac{F_{t,T+m}}{F_{t,T}} \right] \quad (3-18)$$

A dinâmica de difusão do preço futuro pode ser obtida pela fórmula de Itô-Doeblin. Sendo $\frac{\partial F}{\partial t} = -(r - \delta)F$, $\frac{\partial F}{\partial S} = e^{(r-\delta)(T-t)} = \frac{F}{S}$ e $\frac{\partial^2 F}{\partial S^2} = 0$, temos:

$$\begin{aligned} dF &= -(r - c)Fdt + \frac{F}{S}dS \\ &= -(r - c)Fdt + \frac{F}{S}[(r - c)Sdt + \sigma Sd\tilde{z}] \\ &= -(r - c)Fdt + (r - c)Fdt + \sigma Fd\tilde{z} \\ \frac{dF}{F} &= \sigma d\tilde{z} \end{aligned} \quad (3-19)$$

Por isometria de Itô $(\mathbb{E}[(\int_t^T \sigma(u)dz_u)^2] = \mathbb{E}[\int_t^T \sigma^2(u)du])$, a variância de $\frac{dF}{F}$ é igual a $\sigma^2 dt$, portanto a volatilidade do retorno futuro $[\frac{1}{dt} Var[\frac{dF}{F}]]^{1/2}$

é igual a σ . Isso quer dizer que a estrutura a termo da volatilidade é independente do prazo do vencimento do contrato ($T - t$), constante e igual a volatilidade do preço *spot*. Empiricamente, nos contratos futuros nota-se uma diminuição da volatilidade com o aumento do prazo do contrato. Por essa razão, foi desenvolvido modelos mais complexos como de dois e três fatores, tentando captar também esse efeito dos preços (Schwartz, 1997; Schwartz & Smith, 2000; Cortazar & Schwartz, 2003).

O Modelo MGB é um modelo de um fator (S) e pode ser estimado pelo filtro de Kalman. Trata-se de um método recursivo de modelos gaussianos, com equações na forma de espaço-estado, de previsão e estimação de variáveis não observáveis. As equações de estado (3-20) e transição (3-21) são apresentadas, segundo Harvey (1990, Cap. 3):

$$y_t = Z_t \alpha_t + d_t + \epsilon_t \quad (3-20)$$

$$\alpha_t = T_t \alpha_{t-1} + c_t + R_t \eta_t \quad (3-21)$$

O modelo de forma discreta do MGB, na forma espaço-estado:

$$\ln F_{t+\Delta t} = [1] \ln S_{t+\Delta t} + (r - \delta) \tau + \epsilon_t \quad (3-22)$$

$$\ln S_{t+\Delta t} = [1] \ln S_t + (\mu - \delta - 0.5\sigma^2) \Delta t + \eta_t \quad (3-23)$$

Sendo Δt a discretização dos contratos futuros, τ o vencimento do contrato da variável medida, $\mathbb{E}[\epsilon_t] = 0$ e $Var[\epsilon_t] = H_t$, $\mathbb{E}[\eta_t] = 0$ e $Var[\eta_t] = Q_t$. A matriz H_t precisa ser estimada, que é em função do número n de contratos de entrada $F_{1:n}$ - $H_{t[n \times n]}$. Já $Var[\eta_t]$, no caso de um modelo MGB, é igual a $\sigma^2 \Delta t$.

3.4

Incerteza técnica - Fator de Chance

Das variáveis descritas nas equações (3-1 e 3-7), a qualidade econômica (q), volume recuperável (B) e fator de Chance (FC) são essencialmente características endógenas, dependentes de análise técnica e dos eventos de investimentos em conhecimento e produção. Elas se diferenciam dos preços P , justamente pois o processo estocástico é indexado por eventos (por exemplo, investimento) já os preços são indexados de forma contínua com o tempo. Agora, os investimentos (I_w e I_d) são dependentes dos fatores de qualidade

econômica e volume estimado de hidrocarboneto, mas também das oscilações de preços dos insumos.

Os limites de atuação da atividade exploratória podem ser expandidos, mas a função principal é encontrar reservas. Assim sendo, o parâmetro volume recuperável após a perfuração do poço pioneiro continua incerto e somente essa incerteza é reduzida com os poços de delimitação. Este trabalho considera que os investimentos de delimitação estão agregados em I_d . Ademais, o volume recuperável B é um parâmetro médio estimado e não alterado após o poço exploratório. Evidente que no caso de insucesso do poço exploratório, a revelação de informação demonstra a inexistência de reserva de petróleo, contudo não é necessário alterar a variável B , somente zerar o fator de chance (FC).

As considerações acima sobre o volume recuperável valem também para a qualidade econômica da reserva. Esse parâmetro, uma simplificação e sumarização de outros parâmetros pertencentes ao fluxo de caixa, como característica do reservatório (permo-porosidade), taxa de desconto e risco-país, não são mitigados ou reduzidos com a campanha exploratória. Muitos dos parâmetros endógenos só são compreendidos no investimento da produção.

A incerteza técnica exploratória é representada na variável fator de chance geológico (FC). O FC é uma medida de probabilidade subjetiva comum em exploração de recursos minerais, em especial na indústria de petróleo. Num modelo que considera outros jogadores, o Fator de Chance pode servir para representar os efeitos do investimento alheio em seu portfólio. Dessa forma, nesse caso, o fator de chance também é usado para a incerteza estratégica. Esse assunto será explorado na seção (3.5).

O Fator de chance é composto pela interseção das probabilidades independentes do sistema petrolífero. O sistema petrolífero pode ser definido de diversas maneiras, mas é normalmente expresso pelos seguintes fatores:

- Reservatório (R)
- Trapa (T)
 - Selo
 - Estrutura
- Geração (G)

- Migração (M)
- Sincronismo (S)

Reservatório - considera-se reservatório um espaço poroso e permeável que pode conter hidrocarboneto. A proposição da probabilidade subjetiva sobre a presença de reservatório vem do entendimento do sistema deposicional na formação da rocha e as alterações ao longo do tempo geológico. Além do sistema deposicional, um componente importante na análise da existência de reservatório é o soterramento. Devido ao aumento de pressão e temperatura pela carga litostática, a rocha reservatório começa a sofrer processo diagenético, e quanto maior o soterramento, menor o espaço poroso. Isso depende do tipo de depósito e das rochas na vizinhança (rochas encaixantes), relevantes na cimentação do espaço poroso. Casos: Marlim e Roncador são reservatórios arenitos turbidíticos e o Pré-Sal são microbialitos.

Trapa - Sem o trapeamento, o hidrocarboneto não se acumula. A compreensão da probabilidade subjetiva de trapa vêm do entendimento dos especialistas em relação ao Selo e a Estrutura. O fator Selo refere a rocha encaixante, que normalmente são folhelhos. É importante que essa rocha seja pouco friável e resista em manter armazenado o hidrocarboneto na rocha reservatório. A estrutura é parte importante no trapeamento, sendo curvatura espacial (concavidade) necessária para o acúmulo. Ainda que haja contatos laterais estratigráficos, sempre há componentes estruturais na determinação da reserva. No fator estrutural, atenção dos especialistas vão das falhas geológicas e dobramento, regime de esforços regionais para qualificar melhor o trapeamento. Novamente, a componente soterramento é importante para trapas. Essencialmente no selo, pois quanto menos soterrada a rocha encaixante, menos resistente é o selo e conseqüentemente pior é a trapa.

Geradora - para haver reservatório de hidrocarboneto deve haver rochas geradoras. Algumas rochas tem maior potencial gerador que outras. Essencialmente, trabalha-se com folhelhos que possuem grande quantidade de matéria orgânica. A concentração de matéria orgânica pode ter relação com eventos globais de subsistência de bacias ou eustasia, ou eventos locais da bacia estudada. Esta diferenciação entre global e local é essencial para o potencial na avaliação subjetiva da probabilidade de geração. Ademais, o soterramento também é um fator importante para a rocha geradora. Também tem a ver com a carga litostática sobre a rocha geradora, pois a geração e expulsão do hidrocarboneto da rocha geradora dependem da história de pressão e temperatura dessa rocha.

Migração - Esse parâmetro relaciona dois pontos no espaço, conexão entre a possível rocha geradora com a possível rocha reservatório. Estuda-se a possíveis rotas de caminhos do hidrocarboneto da rocha geradora até a acumulação. Para isso, faz-se o mapeamento de falhas, evolução estrutural da bacia, possíveis níveis carreadores e mapas de geopressão para identificar regiões mais prováveis de expulsão do fluido.

Sincronismo envolve a história geológica dos elementos do sistema petrolífero. Esse fator se relaciona com a compreensão total da formação da bacia onde se pretende prospectar. Assim, não adianta ter boa rocha reservatório formada após ao momento máximo de expulsão do hidrocarboneto da rocha geradora, ou por exemplo, a formação da trapa do reservatório ser após o máximo de geração.

Para cada fator descrito, os técnicos ponderam de 0 a 1 (Rose, 2001, p.37). Na consolidação do Fator de Chance geológico, não há valores extremos, pois se o FC é zero, não há oportunidade exploratória e se for igual a 1, não é exploração. Observa-se pela descrição do sistema petrolífero que os componentes não são totalmente independentes (Stabell et al., 2000), contudo, para não tornar tão complexo o exercício, decide relevar essa questão.

A equação de fator de chance geológico é apresentada abaixo.

$$FC = prob(R) \cdot prob(T) \cdot prob(G) \cdot prob(M) \cdot prob(S)$$

Além do FC geológico, a indústria do petróleo considera o fator de chance recuperável, comercial e econômico (Rose, 2001, p. 23-24). Esses fatores de chance carregam a incerteza dos parâmetro q e B e P . O fator de chance recuperável agrupa incerteza em relação a permo-porosidade, a qualidade do óleo, técnicas de exploração, representados no parâmetro q , além da própria delimitação do campo, derivado do parâmetro B . Só é possível reduzir essa incerteza com investimento em conhecimento dado especificidades de cada projeto, como teste de longa duração, sísmica 4D, tecnologia para recuperação e outros. Já sobre o fator de chance comercial, envolve incerteza de economicidade, sendo relacionado principalmente com o tamanho da reserva B e incerteza de preços P . Este trabalho não pretende adotar esses conceitos de fatores de chance, visto que separam a incerteza da variável estocástica, ou seja, esses fatores de chance agregam incertezas advindas das variáveis P , q e B . Em especial, o fator de chance comercial agrega características da estocasticidade dos preços. Pelo método de valoração de Opções Reais,

variáveis de mercado possuem prêmio de risco. Devido a isso, com o ajuste da probabilidade pela medida martingal equivalente, é possível descontar a tempo presente esse ativo ou qualquer derivativo deste ativo base pela taxa livre de risco, sem uso da taxa ajustada ao risco. Dessa forma, é conflituoso adotar metodologia de fator de chance comercial-econômico, já que o prêmio de risco já foi determinado e descontado do processo estocástico dos preços. Questões relacionadas ao tema fator de chance são encontrados em [Murtha et al. \(1995\)](#) e fator de chance e opções reais em [M. A. G. Dias \(2005, p. 272\)](#).

Essa avaliação é feita para cada oportunidade exploratória. Em um mesmo bloco exploratório, podem haver diversas oportunidades com características semelhantes. Algo que não é comum na indústria, mas é intuitivo na consolidação do portfólio exploratório pelo corpo técnico, é a correlação (ρ) entre as oportunidades. Essa análise deve ser feita dois a dois, correspondendo portanto $\binom{n}{2}$ avaliações, em que $n \geq 2$, sendo n o número de oportunidades do portfólio. Estimativas de correlação de 100% são improváveis, pois cada oportunidade possui uma idiossincrasia na acumulação do bem mineral, além de impossíveis matematicamente em situação de probabilidade distintas, tanto o FC, quanto os fatores de risco independentes. Contudo, correlação 0% é possível, já que a evolução geológica da bacia pode colocar oportunidades próximas em regimes hidráulicos distintos. Correlações negativas não são consideradas neste trabalho, ainda que matematicamente sejam possíveis.

[Murtha et al. \(1995\)](#) trata dependência em um único poço exploratório de diversas zonas potenciais. Esse conceito se equivale a dependência de diferentes prospectos no caso de sobreposição, em particular, sobreposições de objetivos com o mesmo potencial exploratório na zona de maior confiança de ocorrência. Os casos se igualam na hipótese de sobreposição do P90 dos objetivos.

A situação descrita também será modelada, no caso de 3 prospectos, sendo dois objetivos com sobreposição das áreas de P90 (seções [3.7.1](#) e [4.2.1](#)). Em todos os outros exemplos simulados, os prospectos não se sobrepõem. A diferença na valoração é a existência de otimização sequencial pela escolha gerencial (escolha ótima) de perfuração dado a incerteza dos preços. No caso de sobreposição, não há escolha ótima sequencial, pois um prospecto necessariamente será perfurado antes do outro. Por outro lado, o custo de perfuração cai. Assim, coloca-se algumas questões: será que o valor esperado otimizado com perfuração sequencial pode ser maior que no caso com redução

de custo, no caso de 1 poço para dois prospectos sem possibilidade de parar o poço? E caso haja a possibilidade de parar o poço, evitando o segundo objetivo/prospecto?

3.4.1

Dependência - Função Bernoulli Bivariada

Só existe dois possíveis resultados na perfuração de um poço exploratório de petróleo: sucesso ou insucesso. Por esta razão, a distribuição binária de Bernoulli é útil. Como o valor da informação é o valor dado um investimento prévio, ou seja, a probabilidade de ocorrência dado ocorrência de outro evento, a função Bernoulli é bivariada.

Sejam dois prospectos: X e Y, com respectivos fatores de chance (FC_X e FC_Y). O sucesso será definido como ocorrência do valor 1 e o insucesso como valor 0. A probabilidade de X ser sucesso e Y também ser sucesso é FC_{11} ($= P(X = 1, Y = 1)$). Já a probabilidade de X ser fracasso e Y também ser fracasso é FC_{00} ($= P(X = 0, Y = 0)$). As outras interseções podem ser vista na tabela (3.1).

		X		
		1	0	
Y	1	FC_{11}	FC_{01}	
	0	FC_{10}	FC_{00}	FC_Y
		FC_X		

Tabela 3.1: Distribuição Bivariada de Bernoulli

O objetivo é apresentar a correlação ρ_{XY} e as probabilidades condicionais $P(Y = 1|X = 1)$ e $P(Y = 1|X = 0)$. Uma melhor leitura dessas probabilidades é: dado que X foi sucesso, qual é o fator de chance de Y e dado que X foi fracasso, qual é o fator de chance de Y? Essas probabilidades condicionais representam o aprendizado dado o investimento em X.

A esperança matemática é calculada por $\mathbb{E}[Z] = \sum_i z_i f(z_i)$, assim, para a variável X, temos:

$$\mathbb{E}[X] = 1 \cdot FC_{11} + 1 \cdot FC_{10} + 0 \cdot FC_{01} + 0 \cdot FC_{00}$$

$$\mathbb{E}[X] = FC_{11} + FC_{10} = FC_X$$

$$Var[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$$

$$\mathbb{E}[X^2] = 1^2 \cdot FC_{11} + 1^2 \cdot FC_{10} + 0^2 \cdot FC_{01} + 0^2 \cdot FC_{00}$$

$$\mathbb{E}[X^2] = FC_{11} + FC_{10} = FC_X = \mathbb{E}[X]$$

$$Var[X] = FC_X - FC_X^2 = FC_X(1 - FC_X)$$

$$\sigma_X = \sqrt{FC_X(1 - FC_X)}$$

De forma bem similar a X , os momentos da variável Y são:

$$\mathbb{E}[Y] = 1 \cdot FC_{11} + 1 \cdot FC_{01} + 0 \cdot FC_{10} + 0 \cdot FC_{00}$$

$$\mathbb{E}[Y] = FC_{11} + FC_{01} = FC_Y$$

$$\mathbb{E}[Y^2] = FC_{11} + FC_{01} = FC_Y = \mathbb{E}[Y]$$

$$Var[Y] = FC_Y - FC_Y^2 = FC_Y(1 - FC_Y)$$

$$\sigma_Y = \sqrt{FC_Y(1 - FC_Y)}$$

Para calcular a correlação, é necessária a covariância. Assim, temos:

$$Cov(X, Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$$

$$\mathbb{E}[XY] = (1 \cdot 1) \cdot FC_{11} + (1 \cdot 0) \cdot FC_{10} + (0 \cdot 1) \cdot FC_{01} + (0 \cdot 0) \cdot FC_{00} = FC_{11}$$

$$Cov(X, Y) = FC_{11} - FC_X FC_Y$$

Assim, a correlação é:

$$\rho_{XY} = \frac{Cov(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{FC_{11} - FC_X FC_Y}{\sqrt{FC_X(1 - FC_X)FC_Y(1 - FC_Y)}} \quad (3-24)$$

Pela probabilidade condicional, sabemos que:

$$FC_{11} = P(X = 1, Y = 1) = P(Y = 1|X = 1)P(X = 1) = P(Y = 1|X = 1)FC_X$$

Substituindo a última equação em (3-24), temos:

$$P(Y = 1|X = 1) = FC_Y + \frac{\sqrt{FC_X(1 - FC_X)FC_Y(1 - FC_Y)}}{FC_X} \rho_{XY} \quad (3-25)$$

Para obter a probabilidade condicional $P(Y = 1|X = 0)$, deve-se lembrar que $FC_Y = FC_{11} + FC_{01}$ e

$$FC_{01} = P(X = 0, Y = 1) = P(Y = 1|X = 0)P(X = 0) = P(Y = 1|X = 0)(1 - FC_X)$$

Substituindo em FC_{11} na equação (3-24), temos:

$$P(Y = 1|X = 0) = FC_Y - \frac{\sqrt{FC_X(1 - FC_X)FC_Y(1 - FC_Y)}}{1 - FC_X} \rho_{XY} \quad (3-26)$$

Em Dias and Calvette (2017); M. A. G. Dias (2004a) e Joe (1997, p. 210), apresentam os limites pela inequação Fréchet, em FC_{11} e ρ_{XY} :

$$\max[0, FC_X + FC_Y - 1] \leq FC_{11} \leq \min[FC_X, FC_Y]$$

Contudo, a preocupação com limites devem ser da equipe de técnicos. Na prática, deve-se estimar a correlação por uma avaliação subjetiva e verificar se pertence ou não aos limites. Caso não esteja, deve rever tanto os fatores de chance, quanto a correlação.

Pode-se fazer um estudo desta medida de aprendizado. Propõe um exemplo simples, onde há 6 oportunidades de investimentos, em que o Fator de Chance (incondicionais) de todas é 30% e a correlação dois a dois é 50%. O método de cálculo é similar ao binomial não recombinação. Verifica-se na tabela (3.2), com a informação *a priori*, que a média não se altera e aumenta o desvio padrão do fator de chance a cada investimento. Inserindo no contexto de VME, o FC dispersa, assim como o *payoff* da última oportunidade. Esse efeito de manutenção da média e aumento da variância, em estratégia sequencial é notado por Murtha et al. (1995) e Smith and Thompson (2008).

Investimentos	Média	Desvio Padrão	Cenários
1	0,3	0,0	1
2	0,3	0,23	2
3	0,3	0,30	4
4	0,3	0,35	8
5	0,3	0,38	16
6	0,3	0,40	32

Tabela 3.2: Simulação: Bernoulli Bivariada

Essas médias em cada evento de investimento podem ser explicadas pela lei da estatística iteradas. Sendo X o primeiro poço e Y o segundo poço, além do sucesso ser 1 e fracasso 0, a média incondicional de Y:

$$\mathbb{E}[Y] = 1 \cdot FC_Y + 0 \cdot (1 - FC_Y) = 1 \cdot 30\% + 0 \cdot 70\% = 30\%$$

Média condicional de Y dado X=1, sendo $(FC_Y|X = 1)$ pela equação (3-25):

$$\mathbb{E}[Y|X = 1] = FC_X \cdot [1 \cdot (FC_Y|X = 1) + 0 \cdot (1 - FC_Y|X = 1)]$$

Média condicional de Y dado X=0, sendo $(FC_Y|X = 0)$ pela equação (3-26):

$$\mathbb{E}[Y|X = 0] = (1 - FC_X) \cdot [1 \cdot (FC_Y|X = 0) + 0 \cdot (1 - FC_Y|X = 0)]$$

Média incondicional das médias condicionais:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\mathbb{E}[Y|X]] &= FC_X \cdot [1 \cdot (FC_Y|X = 1) + 0 \cdot (1 - FC_Y|X = 1)] + \\ &\quad (1 - FC_X) \cdot [1 \cdot (FC_Y|X = 0) + 0 \cdot (1 - FC_Y|X = 0)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\mathbb{E}[Y|X]] &= 30\% \cdot [1 \cdot 65\% + 0 \cdot 35\%] + 70\% \cdot [1 \cdot 15\% + 0 \cdot 85\%] \\ &= 30\% \cdot 65\% + 70\% \cdot 15\% = 30\% \end{aligned}$$

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[Y|X]] = \mathbb{E}[Y]$$

Em casos em que as variáveis aleatórias são permutáveis ($FC_X = FC_Y$), o cálculo condicional (equações 3-25 e 3-26) pode ser simplificado:

$$P(Y = 1|X = 1) = FC + (1 - FC)\rho$$

$$P(Y|X = 0) = FC(1 - \rho)$$

A figura (3.1) apresenta uma análise *a priori* da distribuição de revelação dado cinco investimentos. Como muita informação seria revelada até esse evento, expondo 32 possíveis cenários para o investimento 6, nota-se a distribuição de fatores de chance para o sexto prospecto praticamente degenerado, concentrando FC próximos de zero e de 100%. Nessa etapa de investimento numa bacia, após cinco poços perfurados, não se deve ter muita dúvida geológica de existência ou não de hidrocarboneto. Isso é o efeito das informações

reveladas pelos poços exploratórios de 1 a 5. Um gestor, a partir das informações neste estado, decidiria investir em um prospecto que tivesse, por exemplo, probabilidade de sucesso acima de 60%. Essa decisão pode ser em função de um critério ótimo, ou seja, estados da natureza em que o VME é maior que zero. Esse é o princípio da formulação da opção de aprendizado. Ademais, a perfuração de certos poços antes de outros podem apresentar informações mais valiosas, obtendo uma sequência ótima de perfuração. Acrescenta-se a esse problema a oscilação dos preços, podendo afetar a ordem da sequência ótima, ou até mesmo sugerir aguardar e não investir, algo extremamente comum em exploração. E caso essa informação, a revelação da informação seja feita por um *free-rider*, vindo do investimento de um vizinho?

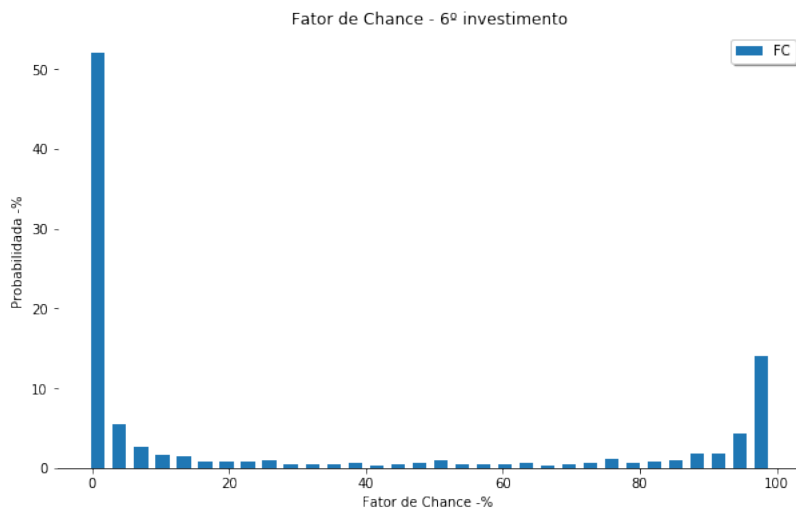


Figura 3.1: Revelação no Sexto Investimento - FC e Probabilidade

3.5

Incerteza estratégica

		Player 2	
		q	$1 - q$
Player 1	p	Hawk	Dove
	$1 - p$	Dove	
		$\frac{v+i}{2} ; \frac{v+i}{2}$	$v ; 0$
		$0 ; v$	$\frac{v}{2} + d ; \frac{v}{2} + d$

Tabela 3.3: Forma normal: Hawk and Dove

$$U[1|2 = H(q)] = p \left(\frac{v+i}{2} \right) + (1-p)0 = p \left(\frac{v+i}{2} \right)$$

$$U[1|2 = D(1-q)] = pv + (1-p) \left(\frac{v}{2} + d \right)$$

$$\begin{aligned}
U[1] &= qU[1|2 = H(q)] + (1 - q)U[1|2 = D(1 - q)] \\
&= qp \left(\frac{v + i}{2} \right) + (1 - q) \left[pv + (1 - p) \left(\frac{v}{2} + d \right) \right]
\end{aligned}$$

A maximização da utilidade de U_1 é dado por:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial U[1]}{\partial p} &= 0 \\
q \left(\frac{v + i}{2} \right) + (1 - q) \left[v - \left(\frac{v}{2} + d \right) \right] &= 0 \\
q(v + i) + (1 - q)(v - 2d) &= 0 \\
q(v + i) + (q - 1)(2d - v) &= 0 \\
q(v + i + 2d - v) &= 2d - v \\
q &= \frac{2d - v}{i + 2d}
\end{aligned}$$

Como se trata de um jogo simétrico:

$$p = q = \frac{2d - v}{i + 2d} \quad (3-27)$$

		Jogador 2	
		q	$1 - q$
		Investe	Espera
Jogador 1	p	Investe	$S_1; S_2$
	$1 - p$	Espera	$F_1; L_2$
			$L_1; F_2$
			$W_1; W_2$

Tabela 3.4: Forma normal: Guerra de Atrito

Com o mesmo desenvolvimento do jogo *Hawk and Dove*, temos a probabilidade em estratégia mista:

$$q = \frac{L_1 - W_1}{F_1 - S_1 + L_1 - W_1} \quad (3-28)$$

$$p = \frac{L_2 - W_2}{F_2 - S_2 + L_2 - W_2} \quad (3-29)$$

Em jogo simétrico, $p = q$.

Jogo de guerra de atrito simétrico, evolucionário e infinito, temos a equação de replicador dinâmico:

$$A = \begin{pmatrix} S & L \\ F & W \end{pmatrix} \quad (3-30)$$

$$f = Ax \quad (3-31)$$

$$\phi = fx \quad (3-32)$$

$$\frac{dx}{dt} = x(f - \phi) \quad (3-33)$$

Em jogos assimétricos, o replicador dinâmico é um sistema de equações:

$$\frac{dx}{dt} = x(1-x)(fa_x - fb_x) \quad (3-34)$$

$$\frac{dy}{dt} = y(1-y)(fb_y - fa_y) \quad (3-35)$$

Sendo, no caso estudado:

$$fa_x = yS_1 + (1-y)L_1 \quad (3-36)$$

$$fb_x = yF_1 + (1-y)W_1 \quad (3-37)$$

$$fa_y = xS_2 + (1-x)L_2 \quad (3-38)$$

$$fb_y = xF_2 + (1-x)W_2 \quad (3-39)$$

Busca-se a derivação igual a zero, em que a probabilidade ou fração (x e ou y) da população não tem incentivos a desvios. Nessas últimas equações (3-36 até 3-39), caso volte a ser simétrico ($S_1 = S_2$, $F_1 = F_2$, $L_1 = L_2$ e $W_1 = W_2$), replica-se a equação (3-33)

Barganha cooperativa - Solução de Nash para barganha - Peso:

$$w_i = \frac{1}{2} + \frac{(d_i - d_j)}{2B} \quad (3-40)$$

$$w_i = 1 - w_j \quad (3-41)$$

Sendo o par (d_i, d_j) o ponto de discordância e o B a unitização dos ativos. Em caso simétrico, as coordenadas de discordância dos dois jogadores são iguais, assim $w_i = w_j = 50\%$. O ponto de discordância ocorre caso cada

empresa decida perfurar sem buscar informações. No caso assimétrico, temos $d_i = VME_i(P, t) = L_i(P, t) \neq d_j = VME_j(P, t) = L_j(P, t)$. Dado um dado t do contrato, a discordância não será um ponto (w_i, w_j) , mas sim um vetor, já que a variável preço pode assumir qualquer valor positivo ($P \in \mathbf{R}_+$).

3.6

Portfólio Exploratório

O portfólio exploratório (π) pode ser composto no mínimo por um prospecto. Os ativos são consolidados na carteira pela ponderação do risco geológico, simbolizado pelo FC, de acordo com as formulações da seção (3.2).

– Um ativo na carteira:

$$- \pi = VME_1$$

– 2 ativos independentes na carteira:

$$- \pi_{1,2} = VME_1 + VME_2$$

$$- \pi_{1,2} = \pi_{2,1}$$

– n ativos independentes na carteira:

$$- \pi_n = \sum_{i=1}^n VME_n$$

A soma de ativos independentes na carteira independem da ordem. Para ativos correlacionados, a equipe técnica estima os Fatores de chance incondicionais, e na consolidação do portfólio é necessário calcular os fatores de chance condicionais, assim como apresentados na seção (3.4). Por consequência, o Valor Monetário Esperado também é condicional. A figura (3.2) apresenta um dos exemplos de portfólio para dois ativos.

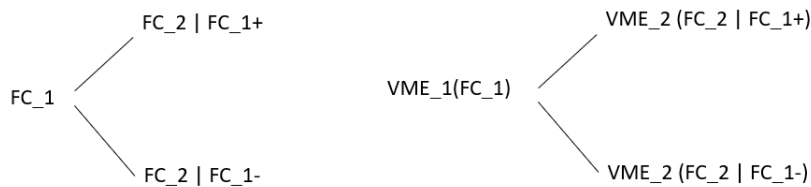


Figura 3.2: FC e VME condicionais

– 2 ativos dependentes na carteira:

- $\pi_{12} = VME_1 + FC_1[Max(0; VME_2^+)] + (1 - FC_1)[Max(0; VME_2^-)]$
- $\pi_{12} \neq \pi_{21}$

Como pode ser visto, a ordem de perfuração importa em portfólios com ativos correlacionados, já que $P(FC_1|FC_2^+)$ pode ser diferente de $P(FC_2|FC_1^+)$. Agora, com três ativos dependentes na carteira, temos:

$$\begin{aligned} \pi_{123} = & EMV_1 \\ & + CF_1 \left\{ Max[0; EMV_2^+ + CF_2^+(Max(0; EMV_3^{++})) + (1 - CF_2^+)(Max(0; EMV_3^{+-}))] \right\} \\ & + (1 - CF_1) \left\{ Max[0; EMV_2^- + CF_2^-(Max(0; EMV_3^{-+})) + (1 - CF_2^-)(Max(0; EMV_3^{--}))] \right\} \end{aligned}$$

Sendo as probabilidade condicionais:

$$CF_2^+ = CF_{2|1}$$

$$CF_2^- = CF_{2|\bar{1}}$$

E a barra ($\bar{1}$) significa insucesso da oportunidade 1.

$$- \pi_{123} \neq \pi_{132} \neq \pi_{213} \neq \pi_{231} \neq \pi_{312} \neq \pi_{321}$$

- Portfólio dependente e independente:

$$- \pi_{Total} = \pi_{dependente} + \pi_{independente}$$

- Portfólio com 2 ativos e ativo vizinho i :

$$\begin{aligned} \pi_{12|i} = & CF_i \left\{ Max[0; EMV_1^+ + CF_1^+(Max(0; EMV_2^{++})) + (1 - CF_1^+)(Max(0; EMV_2^{+-}))] \right\} \\ & + (1 - CF_i) \left\{ Max[0; EMV_1^- + CF_1^-(Max(0; EMV_2^{-+})) + (1 - CF_1^-)(Max(0; EMV_2^{--}))] \right\} \end{aligned}$$

$$- \pi_{12|i} \neq \pi_{21|i}$$

Estudo de otimização de carteira pode ser feita sem o valor da espera, como as apresentadas nesta seção. Contudo, sabe-se que o valor da espera é importante em análise de portfólio. São raras as decisões de "agora ou nunca". Elas acontecem no vencimento do prazo exploratório ou quando preços do petróleo estão elevados. Ademais, análise considerando o valor da espera, apresenta o momento ótimo de exercício dado a incerteza dos preços, que não necessariamente é imediato e a ordem ótima de investimento do portfólio caso exercício. Considera-se também, no modelo de valor de espera, ativos correlatos de bloco vizinho que podem afetar o preço e o exercício da prospecção exploratória. Essas ideias serão apresentadas na seção (3.7).

3.7

Modelos

3.7.1

Um, Dois e Três prospectos: Um bloco

O ativo exploratório (E) pode ser visto como um derivativo do ativo base P . Como o ativo base P é estocástico, e por não arbitragem similar a [Black and Scholes \(1973\)](#) pelo método de portfólio sem risco (Apêndice A), chega-se na equação diferencial abaixo:

$$\frac{\partial E}{\partial t} + (r - \delta) \frac{\partial E}{\partial P} P + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 E}{\partial P^2} \sigma^2 P^2 = rE \quad (3-42)$$

Com as seguintes condições de contorno:

- Caso $P = 0$, $E(0, t) = 0$
- Caso $t = T$, $E(P, T) = \max(-I_w + CF \cdot VPL, 0)$
- Caso $P = P^*$, $E(P^*, T) = -I_w + FC \cdot VPL(P^*)$
- Caso $P = P^*$, $\frac{\partial E(P^*, t)}{\partial P} = CF \cdot \frac{\partial VPL}{\partial P}$

Sendo σ e δ a volatilidade e a taxa de conveniência do ativo base P .

O Ativo de investimento de exploração do hidrocarboneto (R) pode ser compreendido pela equação diferencial abaixo:

$$\frac{\partial R}{\partial t} + (r - \delta) \frac{\partial R}{\partial P} P + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 R}{\partial P^2} \sigma^2 P^2 = rR \quad (3-43)$$

Condições de contorno, sendo as duas últimas conhecidos como condições de continuidade e suavidade ([Dixit & Pindyck, 1994](#), Capítulo 4, p.119):

- Caso $P = 0$, $R(0, t) = 0$
- Caso $t = T$, $R(P, T) = \max(VPL, 0)$
- Caso $P = P^*$, $R(P^*, T) = VPL(P^*)$
- Caso $P = P^*$, $\frac{\partial R(P^*, t)}{\partial P} = \frac{\partial VPL}{\partial P}$

O investidor pode fazer a análise de decisão a partir de $R(P, t)$, mais sabidamente que VPL, já que VPL é somente condição terminal da equação diferencial. No caso de um ativo exploratório, e se não considerar a opção exploratória da equação (3-42), pode analisar nos moldes da equação de Valor

Médio Esperado, mas agora sendo o VME uma função de preço e tempo de vencimento do contrato - $VME(P, t)$.

$$VME(P, t) = -I_W + FC_i \cdot R_i(P, t) \quad (3-44)$$

Da mesma forma que o ativo exploratório, o portfólio (Π) pode ser visto como um derivativo do ativo base P . Como o ativo base P é estocástico, pelo método de portfólio sem risco, determina-se a equação abaixo:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial t} + (r - \delta) \frac{\partial \Pi}{\partial P} P + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial P^2} \sigma^2 P^2 = r \Pi \quad (3-45)$$

E com as condições de Contorno:

- Caso $P = 0$, $\Pi(0, t) = 0$
- Caso $t = T$, $\Pi(P, T) = \max(\pi, 0)$
- Caso $P = P^*$, $\Pi(P^*, T) = \pi(P^*)$
- Caso $P = P^*$, $\frac{\partial \Pi(P^*, t)}{\partial P} = \frac{\partial \pi(P^*)}{\partial P}$

Pelas mesmas razões apontadas entre $R(P, t)$ e VPL, o portfólio é melhor analisado em $\Pi(P, t)$ que em $\pi(P)$, justamente pois o último é somente condição terminal do primeiro.

3.7.2

Dois prospectos: um em cada bloco

A empresa líder L_i irá perfurar antes da informação da concorrente, portanto é igual a equação $VME(P, t)$ (equação 3-44):

$$L_i(P, t) = -I_W + FC_i \cdot R_i(P, t) \quad (3-46)$$

Já o Seguidor, terá informação fornecida pelo o líder e o seu prospecto terá outro valor. Sendo que o valor do ativo para o Seguidor será uma ponderação da opção de explorar (equação 3-42):

$$F_i(P, t) = \mathbb{E}[E_i(P, t)|j] = FC_j \cdot E_i(P, t, FC_{i|j}^+) + (1 - FC_j) \cdot E_i(P, t, FC_{i|j}^-) \quad (3-47)$$

Em que $FC_{i|j}^+$ e $FC_{i|j}^-$ são funções de FC_i , FC_j e ρ , apresentados em detalhes na seção (3.4), em especial na seção (3.4.1).

3.7.3

Três prospectos: Carteira com 2 e Prospecto vizinho

4

Resultados

4.1

Dados de Entrada

4.1.1

Hiperparâmetros do Preço do Petróleo: MGB

As bases de dados da [US Energy Information Administration](#), [IMF](#) e [FRED](#) apresentam séries históricas do preço *spot* dos óleos tipo *Brent* e *WTI*. Essas informações são trabalhadas por essas agências (bancos, organizações), sendo estimativas do preço *spot*, médias e coletâneas de informações de organizações que pesquisam o preço à vista. O preço à vista não é negociado em bolsa e sim os contratos futuros ([CME Group](#)). Normalmente, o que é apresentado em painéis como [Trading Economics](#), [Oil Price](#), [Bloomberg](#) e outros são os contratos com vencimento em um mês, uma *proxy* razoável do preço à vista. Ciente disso, como uma estimativa inicial dos parâmetros, será trabalhado a série [US Energy Information Administration](#) do óleo tipo *WTI*. Após essa análise, será feito um estudo com alguns contratos futuros para estimativa dos hiperparâmetros do preço *spot*.

Os dados da [US Energy Information Administration](#) são semanais e janelados no intervalo de 1996-2016 (figura 4.1). O teste *Dickey- Fuller* Aumentado (ADF) foi aplicado nessa série histórica. Não é possível rejeitar a hipótese nula (H_0) de normalidade da primeira diferença dos preços dado ao p-valor de 0.21149. Isso quer dizer que não é possível rejeitar o MGB para este intervalo. Notando as feições estilizadas da série, além de saltos referente a crise de 2008, a tendência de crescimento exponencial dos preços é um bom indicativo de não rejeição do modelo MGB.

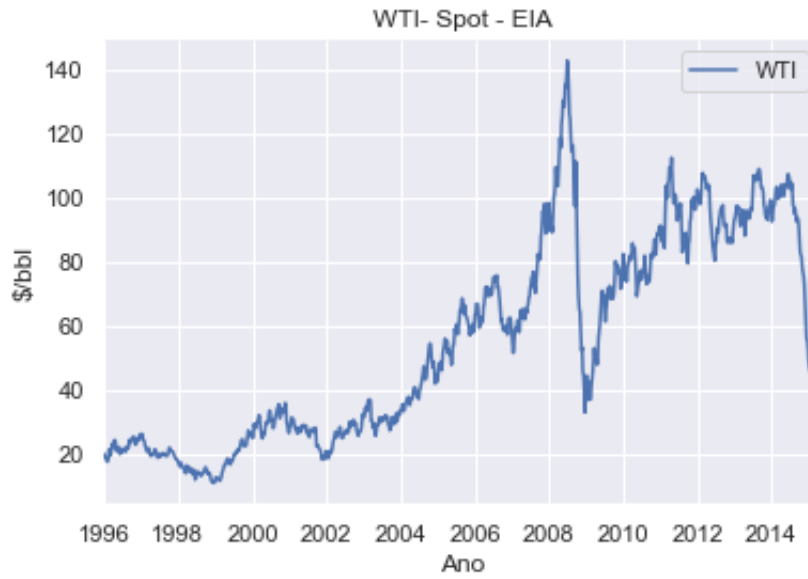


Figura 4.1: Preço Spot- WTI- EIA

Nesse caso, em um modelo igual a equação (3-10), o retorno é estacionário em que erro estimado é uma normal, ou seja, $\epsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$, sendo σ^2 :

$$\sigma^2 = \text{Var} [\ln(S_{t-1}/S_t)] \quad (4-1)$$

e o *drift* α é

$$\alpha = \mathbb{E}[\ln(S_{t-1}/S_t)] + \frac{1}{2}\sigma^2 \quad (4-2)$$

Aplicando essas equações nessa série temporal, $\sigma = 31.15\%$ e $\alpha = 10.43\%$ ao ano.

Os 20 contratos futuros são do óleo tipo *WTI*, entre os períodos de 1996-2016, com informações semanais, de vencimento *CL1* a *CL20*, possíveis de ser acessados em [quandl](#). Os dados trabalhados já estão tratados, sem informações faltantes e *short-squeeze*. A figura (4.2) apresenta 2 contratos, *CL1* e *CL20*.

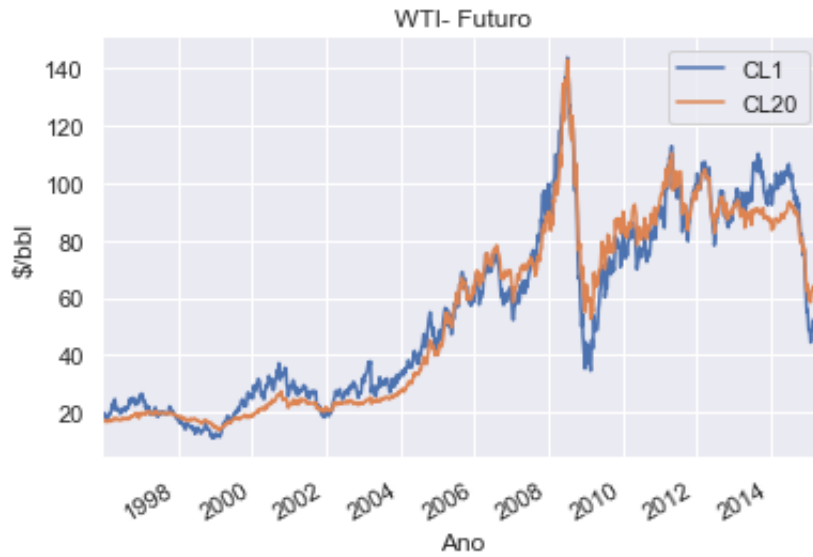


Figura 4.2: Preços Futuros - WTI

Note a diferença de estocasticidade entre as duas séries, sendo a série mais curta com maior volatilidade. Ademais, a série mais longa ($CL20$), na maior parte do tempo, é mais barata que a série de um mês. Essa feição é típica de *backwardation* e em poucos momentos a série $CL20$ é mais cara que a série $CL1$, efeito conhecido como *contango*. Como visto na seção (3.3) e na demonstração da equação (3-17), em modelo em que o *spot* segue um MGB, a característica crescente ou decrescente da estrutura a termo do preço futuro só depende da relação $r - \delta$. Modelos como de dois ou mais fatores tentam captar essas variações temporais na estrutura a termo dos preços (Schwartz, 1997).

A figura (4.2) mostra a estrutura a termo da volatilidade, demonstrando uma queda na volatilidade com o aumento dos prazos. Como visto na seção (3.3) e na demonstração da equação (3-19), a estrutura a termo da volatilidade em um modelo MGB para o preço *spot* não varia em relação ao vencimento do contrato e é igual a volatilidade do preço *spot*. Para captar esse decréscimo da volatilidade com o aumento do prazo, foram desenvolvidos outros modelos, como de um fator com reversão à média dos logaritmos dos preços e de dois e três fatores desse mesmo artigo, todos presentes em Schwartz (1997).

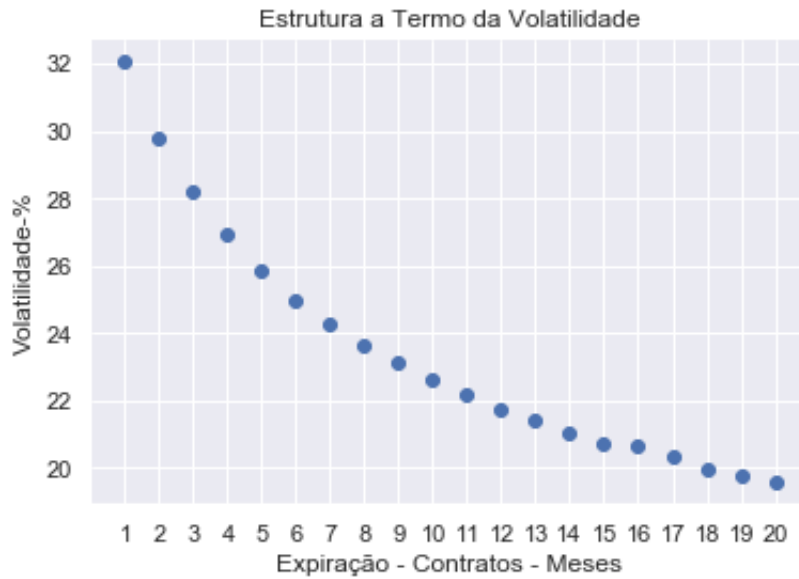


Figura 4.3: Estrutura a Termo da Volatilidade

Considerando o contrato *CL1* como *proxy* do preço spot, foi aplicado o teste Dickey- Fuller Aumentado de normalidade (ADF) para essa série. Não é possível rejeitar a hipótese nula (H_0) de normalidade da primeira diferença dos preços dado ao p-valor de 0.2207. Aplicando as equações (4-1 e 4-2), obtêm $\sigma = 32.07\%$ e $\alpha = 9.14\%$, resultados bem próximos da estimativa com a série histórica *spot* da [US Energy Information Administration](#).

Na seção (3.3), pelas equações (3-17 e 3-18), caso a taxa livre de risco seja constante, é possível obter a taxa de conveniência implícita ([Gibson & Schwartz, 1990](#)). Os dados de taxa de juros de curto prazo são acessíveis em [quandl](#), aplicativo vinculado ao FRED. Trata-se de 3 meses *Treasury-Constant-Maturity* não dessazonalizada e em porcentagem, diária, desde 1981, janelado entre 1996 e 2015 (figura 4.4).



Figura 4.4: Taxa livre de Risco - Treasury 3 month

Nota-se uma instabilidade dos juros americanos nas décadas de noventa e anos 2000. O intuito não é gerar um modelo estocástico para taxa de juros, somente estudar os momentos, sendo a média igual a 2.4056% e o desvio padrão de 2.21%. Com o valor médio de r , aplicou-se a equação (3-18) para os contratos $CL1$ e $CL2$, que pode ser visto na figura (4.5).

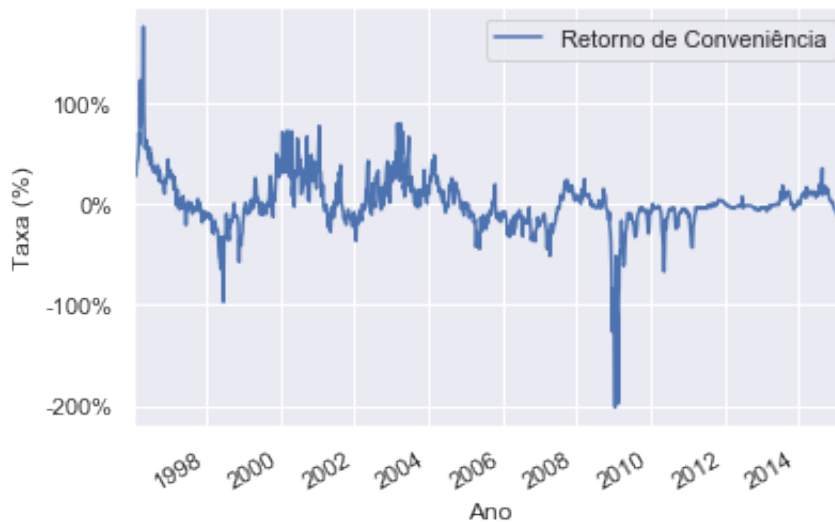


Figura 4.5: Retorno de Conveniência Implícito - δ

A série da taxa de conveniência implícita mostra feições estilizadas de processo estocástico. Três características chamam atenção desta série temporal: alta volatilidade, efeito de reversão para valores próximo de zero e

forte reversão para este valor. Neste intervalo, possui valor máximo de 176%, mínimo de -201.6%, média de 0.76% e desvio padrão de 26.8%.

Usando o primeiro contrato como a aproximação do *spot*, é possível, a partir da média das séries do retorno de conveniência implícito, montar a estrutura a termo do desse retorno. A figura (4.6) apresenta a estrutura a termo com a média das séries. Nota-se um aumento da taxa média como aumento do contrato, estabilizando em torno de 4.88%.

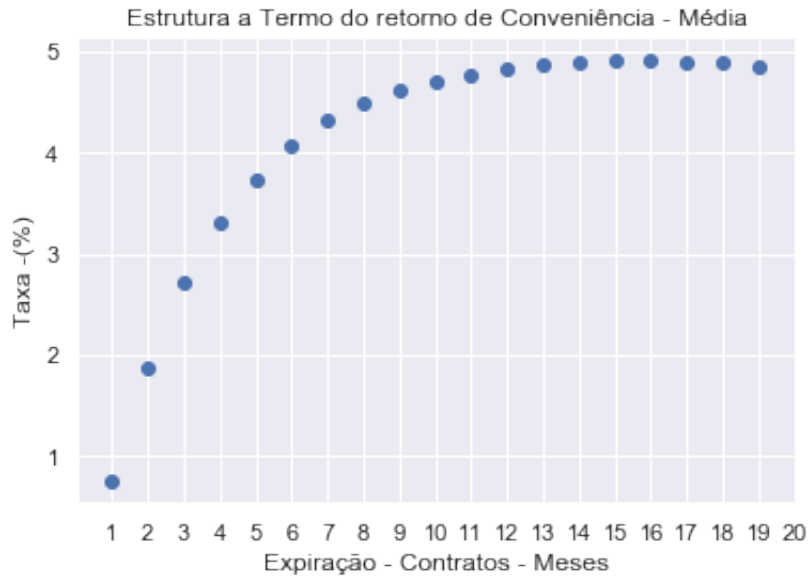


Figura 4.6: Estrutura a termo do Retorno de Conveniência - Média

Projetos na área de óleo e gás são de longo prazo. No modelo MGB, a taxa de conveniência (*carry*) é uma medida relevante, contudo, medidas de curto prazo interferem pouco nas decisões de investimentos. Portanto, na implementação de um modelo de OR, é importante considerar o retorno de conveniência de longo prazo, não a taxa instantânea.

O retorno de conveniência da figura (4.5) pode ser modelado como processo estocástico de reversão a média de Ornstein Uhlenbeck, com parâmetro de velocidade de reversão κ , média de longo prazo $\bar{\delta}$, como pode ser visto na equação (4-3) e a discretização da equação (4-4).

$$d\delta_t = \kappa(\bar{\delta} - \delta)dt + \sigma dz_t \quad (4-3)$$

$$\delta_t - \delta_{t-1} = a + b\delta_{t-1} + \epsilon_t \quad \epsilon_t \sim \mathbf{N}(0, \sigma_\epsilon^2) \quad (4-4)$$

Sendo $\kappa\bar{\delta}dt$ referente ao coeficiente (a) da aproximação, $-\kappa dt$ o coeficiente (b) e termo browniano associado ao ε_t da regressão. Dessa forma, os hiperparâmetros do modelo são, sendo $\Delta t=1/52$:

$$\kappa = -b/\Delta t$$

$$\bar{\delta} = a/-b$$

$$\sigma = \sigma_\varepsilon/\sqrt{\Delta t}$$

O parâmetro $\bar{\delta}$ representa a reversão de longo prazo. Dessa forma, é possível montar a estrutura a termo com esse parâmetro, mais rigoroso que o uso da média, como utilizado na figura (4.6). A figura (4.7) apresenta essa estrutura a termo do retorno de conveniência. Nota-se que a série é assintótica em valores próximos de $\bar{\delta}= 3.80\%$.

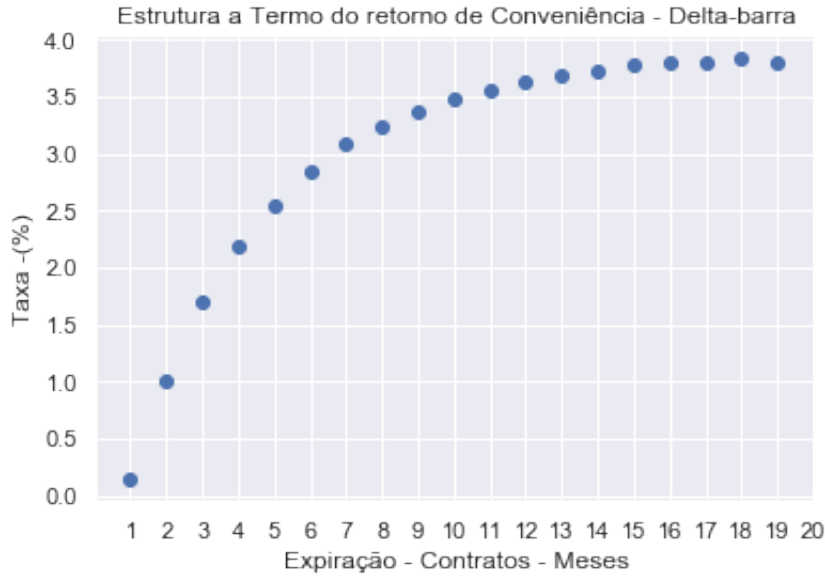


Figura 4.7: Estrutura a termo do Retorno de Conveniência - $\bar{\delta}$

Com os contratos futuros, é possível estimar pelo filtro de Kalman os hiperparâmetros do preço à vista. O Modelo MGB foi apresentado na forma espaço estado na seção (3.3), equações (3-21 e 3-20). Como o Modelo MGB não capta bem os efeitos de volatilidade e preços ao longo dos contratos, decidiu utilizar somente três contratos, sendo os mais próximos do preço à vista ($CL1, CL2$ e $CL3$). A aplicação seguiu [Shumway and Stoffer \(2017, Cap. 7\)](#).

A volatilidade é o único hiperparâmetro significativo, já que os outros tem estatística t menor que 1.96, dado 5% de significância. A volatilidade estimada é próxima ao preço *spot* de [US Energy Information Administration](#)

Parâmetros	Estimativa	teste-t
σ	0.2981	47.960
μ	0.1287	0.0006
r	0.0867	0.0004
δ	0.0846	0.0004

Tabela 4.1: Resultados

e da aproximação do contrato $CL1$ ao preço à vista. A figura (4.8) apresenta o dado estimado (azul), da suavizado (preto) e o observado $CL1$ (vermelho)

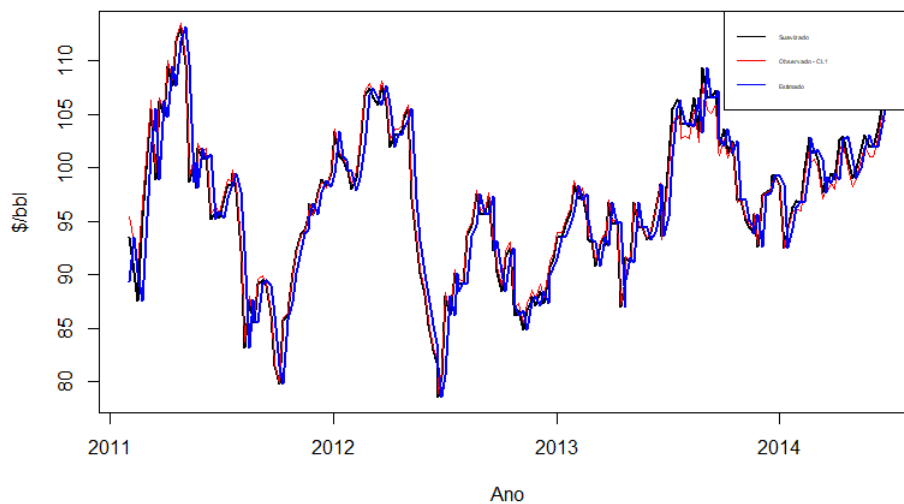


Figura 4.8: Filtro de Kalman - Estimado, Suavizado e Observado

4.1.2

Investimento em Desenvolvimento: Correlação com Volume Recuperável

O investimento em desenvolvimento (Id) é uma variável que depende de componentes endógenos ao projeto e de mercado. OS preços dos insumos, como aço e tubulações, são relevantes para a construção de módulos, tanto *FPSO* quando estruturas menores como *subsea tie-back*. A oferta e demanda de módulos também afeta o preço dessas estruturas, e esse efeito com correlação com mercado de óleo e gás, evidentemente expresso nos preços *spot* do barril de petróleo. Fatores locais são relevantes para o investimento na produção. A lâmina d'água determina se a plataforma é fixa, semisubmersível, flutuante e implica em distintas ordens de investimento. As características do hidrocarboneto também determinam, em caso extremos, em campos que predomina gás possui investimento distinto comparado a campos que possui

predominantemente óleo. Considerando todos os parâmetros descritos constantes, o fator interno que é dominante na terminação do valor de investimento é o volume recuperável do ativo (B). Dessa forma, pela equação (3-8), foi estimado a correlação dessas duas grandezas.

As informações analisadas sobre investimento foram obtidas em [IHS Markit](#).

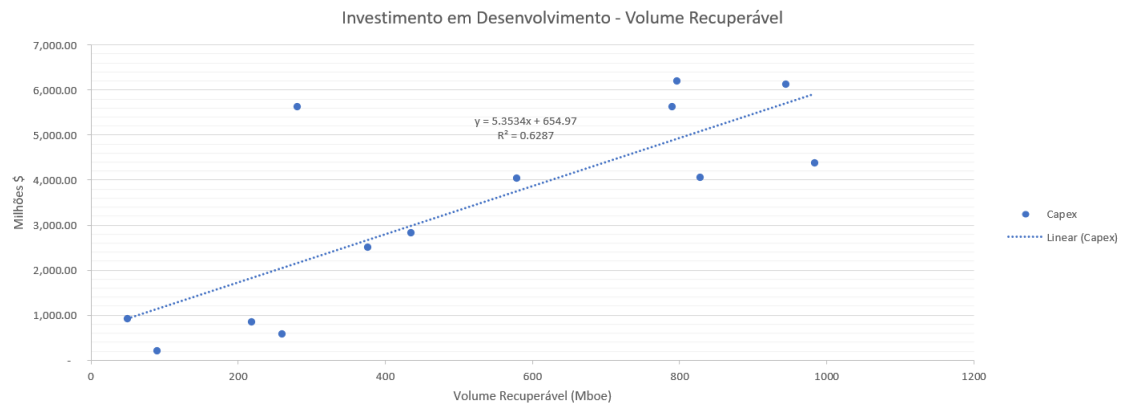


Figura 4.9: Investimento em Desenvolvimento - Volume Recuperável

$$I_d(B) = 650 + 5.35B \quad (R^2 = 0.628) \quad (4-5)$$

4.1.3

Taxa livre de Risco

Como projetos em opções reais são de longo prazo, o interessante é analisar séries históricas de título público de longo prazo. A taxa do título público americano com vencimento de 20 anos pode ser encontrada em [FRED](#). A figura (4.10) apresenta a taxa entre desde o ano de 1994. Como o dado do preço do mercado futuro é limitado até o ano de 2016, a análise da taxa livre de risco também será limitada nesta data.



Figura 4.10: Título publico americano - 20 anos

Essa análise é simplesmente a média em um período. Determinou que seria um período não maior que dez anos, já que a opção de espera é de 3 anos. Por essa razão, decidiu escolher uma janela de entre 2010 e 2016. A média é igual a 3.02%

4.1.4 Parâmetros Exógenos

A tabela (4.2) consolida os parâmetros exógenos estimados, com valores arredondados. Esse serão entrada para o cálculo das opções.

r (%)	δ (%)	σ (%)
3.00	3.80	30.00

Tabela 4.2: Parâmetros Exógenos Estimados

Na seção (3.3) discuti sobre as qualidades do MGB, essencialmente sobre as equações (3-12 3-13). No caso do movimento sob medida martingal (equação 3-15), as propriedades ótimas em relação a variância ocorrem quando $r - \delta > -\frac{1}{2}\sigma^2$. Com os hiperparâmetros da tabela (4.2), essa relação se mantém ($-0.008 > -0.0450$), ou seja, a variância é monotônica e crescente. Já a média do processo estocástico sob medida Q é decrescente, visto que $r < \delta$. Tendo um valor inicial de $S_0 = \$50$, com esses parâmetros da tabela, a esperança sob medida martingal em 3 anos é \$48.81 ($\mathbb{E}^Q[S_T] = S_0 e^{(r-\delta)T}$)

4.1.5

Parâmetros Endógenos

Os parâmetros endógenos são relacionados as prospectos existentes nos dois blocos exploratórios.

Denominação	Propriedade	B (mbbl)	q (%)	FC (%)	I_w (M\$)
<i>DogFish</i>	0	620	20.00	30.00	80.00
<i>Feather</i>	0	310	21.00	25.00	60.00
<i>Head</i>	1	950	18.00	20.00	80.00

Tabela 4.3: Parâmetros Endógenos dos Prospectos

Os blocos possuem somente três prospectos: *DogFish*, *Feather* e *Head*, sendo os dois últimos pertencentes a um bloco. Os prospectos *Feather* e *Head* fazem parte do portfólio da empresa 1, assim como o prospecto *DogFish* é a única oportunidade do bloco da empresa 0.

Método para obter q pelo fluxo de caixa.

Incluir análise da seção 4.1.2

Todos os prospectos tem correlação dois a dois. Como temos três prospectos, teremos 3 correlações $\binom{3}{2}$.

ρ	DogFish	Feather	Head
DogFish	1	—	—
Feather	0.6	1	—
Head	0.5	0.6	1

Tabela 4.4: Correlação dos prospectos da bacia

4.2

Modelos

O modelo geral da figura (4.11) é o final que se pretende modelar. Até lá vamos explorar diversas combinações, algumas possíveis, outras somente para compreender o problema e facilitar o desenvolvimento do texto.

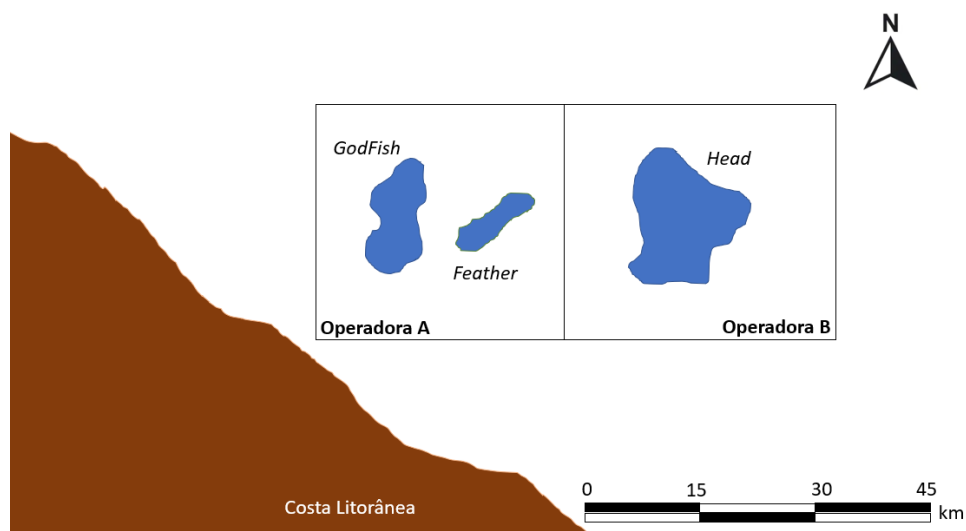


Figura 4.11: Modelo Geral - Blocos Exploratórios

4.2.1

Um, Dois e Três prospectos: Um bloco

Nessa seção serão apresentados as soluções das três oportunidades, considerando de forma independente os prospectos e de forma conjunta. Na apresentação dos prospectos de forma independente (*stand-alone*), a primeira oportunidade será analisada de forma mais minuciosa, detalhando as opções existentes. Nas demais, serão apresentadas somente os resultados.

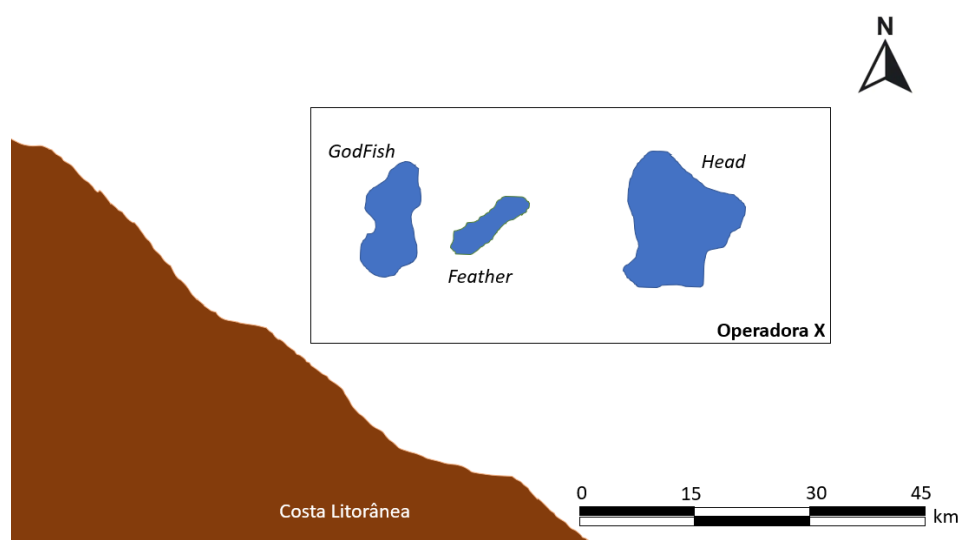


Figura 4.12: Modelo - Único Bloco

Os parâmetros dos prospectos são os da seção (4.1.5) e os parâmetros

exógenos da seção (4.1.4), incluindo o preço do barril no tempo inicial de \$50 e contrato exploratório de 3 anos.

Em todos os ativos e avaliações, foi aplicado uma taxa de desconto ao modelo paramétrico (V) e o investimento em desenvolvimento. Isso é devido ao prazo de aproximadamente dois anos para começar a produção. Após a tomada de decisão de investir, nesse período de dois anos, o agente perde valor em uma taxa δ por ter a decisão e não poder produzir em relação a fração que gera valor no projeto e um desconto com taxa r pelo capital aplicado que ainda não produz. Portanto, para o V , foi aplicado o desconto de $e^{-2\delta}$ e para I_d , o desconto de e^{-2r} .

Para cada oportunidade, o investidor tem em mãos duas opções encadeadas: a opção de explorar e a opção de investir (figura 4.13). Parte da hipótese do operador ignorar a opção de explorar. É uma condição remota, como se o investidor não tivesse dúvidas exploratórias. Essa situação pode acontecer, caso uma outra empresa já tenha feito exploração, ainda haja prazo até o término do contrato exploratório e o investidor tem a opção de investir ou não na extração do recurso $R(P, t)$. Nesse contorno, a equação diferencial a ser solucionada é a equação (3-43).

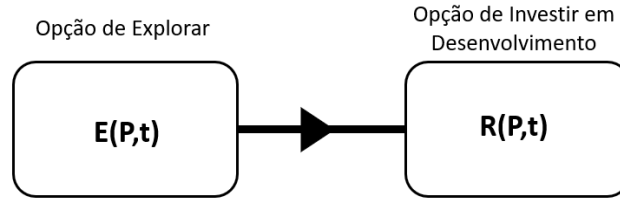


Figura 4.13: Opções em Petróleo - Conceitos em M. A. G. Dias (2005, Cap .27)

Como nos exemplos dessa dissertação há risco exploratório (FC), a malha de soluções $R(P, t)$ deve ser multiplicada pelo fator de chance, líquido do poço exploratório I_w , como na equação (3-44). Foi denominado $VME(P, t)$ a opção de investir na produção dado o risco exploratório e seu investimento. O risco exploratório e o investimento do poço pioneiro não é considerado na equação diferencial e sim posteriormente. Comparando ao $VME(P)$, o $VME(P, t)$ é mais completo, visto que essas métricas são iguais somente na condição terminal e somente se $VPL > 0$.

Já a opção de explorar $E(P, t)$ considera nas condições de contorno o risco e o investimento exploratório, ou seja, na maximização das condições

terminais o projeto riscado deve ser maior que o custo do poço pioneiro (equação 3-42). Trata-se, no vencimento, a maximização do $VME(P, t)$. Por essa razão, a opção de explorar nunca é menor que zero. Ademais, o gatilho de investir em exploração é mais alto que o gatilho do preço de investir no projeto $R(P, t)$. Isso quer dizer que a opção de explorar tem característica mais conservadora que o $VME(P)$ e $VME(P, t)$. Isso é representado no valor adicionado pela espera na avaliação. Na tabela (4.5), os resultados da oportunidade exploratória *DogFish* foi consolidada por essas diversas métrica no início do contrato.

<i>DogFish</i>	M\$	%
VME(P)	523.08	-
VME(P,t)	558.23	6.72
E(P,t)	581.28	11.13

Tabela 4.5: Avaliação da oportunidade *DogFish* - $\tau=3$ anos

O valor da opção de explorar é 11.13% acima do $VME(P)$. Esse valor acrescido é devido a espera, ou seja, a decisão de não investir. Mesmo que tenha um $VME(P)$ positivo e alto, o investimento em exploração não está dentro do dinheiro. Só estaria, no início do contrato, caso o preço do barril estivesse acima de \$69.62 (figura 4.14). Esse valor de preço define o gatilho de investimento exploratório no momento inicial do contrato. O gatilho é uma função implícita da opção americana e é em função das variáveis de estado Preço e tempo. É possível notar que é uma função decrescente com o tempo, sendo que no vencimento é o valor do preço do petróleo que faz com que o $VME(P)$ seja igual a zero, ou seja, o "*break-even*" do VME. Nota-se, com esse exemplo, a superioridade da curva de gatilho ao *break-even*, visto que o gatilho é uma função e *break-even* é um ponto no espaço preço tempo. A curva de gatilho, também conhecida como fronteira ótima, é contínua, mas o serrilhado da figura (4.14) é devido ao método numérico de solução. Contudo, a descontinuidade pode acontecer no vencimento, caso $r > \delta$ (M. Dias, 2015a, Capítulo 20, p. 259). Com a subida do σ do ativo base, da relação $r - \delta$ e τ , a curva de gatilho também se eleva, e por consequência o prêmio por esperar.

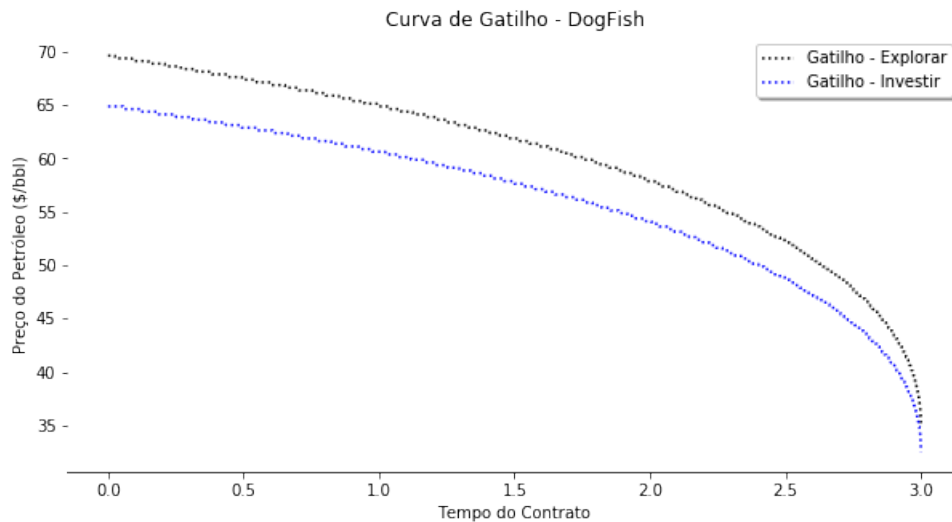


Figura 4.14: Curvas de Gatilho - DogFish

Nota-se que a curva de gatilho de explorar está acima de investir. Portanto, considerar o gatilho de explorar já inclui a opção de investir, visto que a opção de explorar antecede à opção de investir em desenvolvimento e que essa última já está *deep-in-the-money*.

Na figura (4.15) é apresentada a opção de explorar em dois momentos, no vencimento e no início do contrato. Note que a opção é convexa, maior ou igual a zero e no vencimento a opção é a maximização da função $VME(P)$. Na opção americana, verifica-se em todo instante de tempo se o valor intrínseco é maior que o valor de não exercer. Com o preço de \$50 o barril, a opção de explorar é viva, pois \$ 581.28 milhões é maior que \$ 523.08 milhões. Ou seja, deve-se aguardar para investir em exploração. Nesse gráfico pode-se extrair o gatilho do momento inicial do contrato. Isso ocorre quando a opção toca suavemente na função $VME(P)$, sendo $VME(P)$ o valor intrínseco da opção. Essas condições de contorno são exploradas em [Dixit and Pindyck \(1994, Capítulo 4, p.119\)](#).

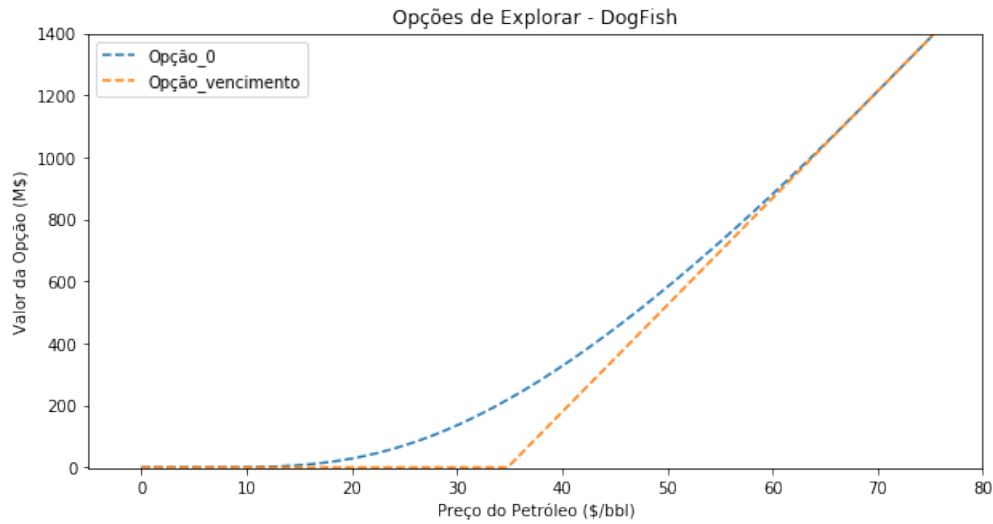
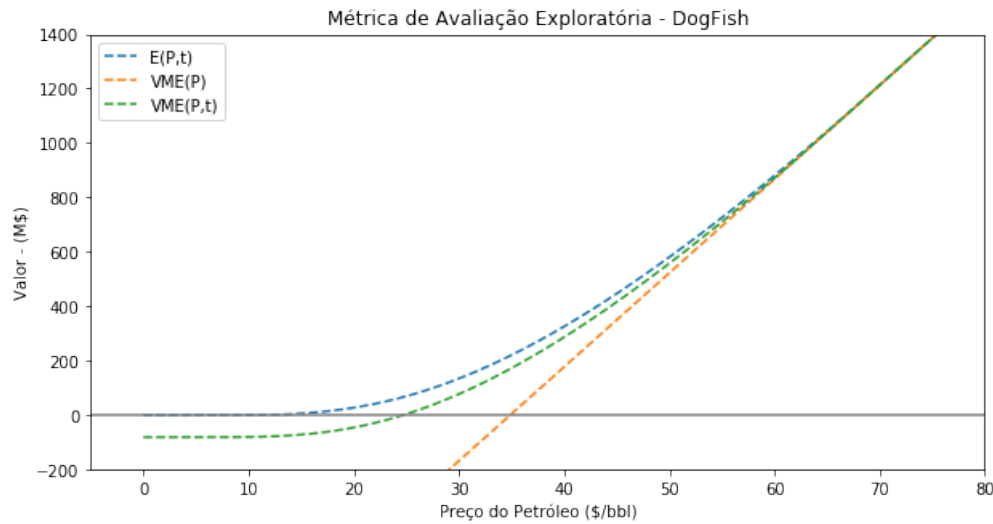


Figura 4.15: Opção de Explorar - DogFish

Segundo a tabela (4.5), o valor do $VME(P, t)$ é 6.72% acima do $VME(P)$. Esse valor acima vem do prêmio da esperar da opção de investir no desenvolvimento da reserva $R(P, t)$. A função $VME(P, t)$, no tempo inicial do contrato pode ser vista na figura (4.16), em conjunto com a opção de explorar e o $VME(P)$.

Figura 4.16: Métricas de Avaliação Exploratória - DogFish - $\tau = 3$ anos

O mínimo da função $VME(P, t)$ é o investimento do poço exploratório (\$ 80 milhões). A opção de explorar é igual ao $VME(P, t)$ a partir do gatilho da opção de explorar, ou seja, a partir de \$69.62 o barril em $t = 0$. Acima desse preço do barril, as três funções possuem o mesmo valor.

Em suma, $VME(P)$ e $VPL(P)$ são medidas estáticas, que não consideram o prazo do contrato. A métrica $VME(P, t)$ não considera a opção de explorar, mas considera a opção de investir. Essa métrica é mais adequada que $VME(P)$. A opção de explorar $E(P, t)$ já inclui a opção de investir $R(P, t)$, visto que o seu gatilho de explorar é superior ao gatilho de investir. A métrica $E(P, t)$ é adequada a exploração de petróleo, já que considera o risco na formulação do derivativo.

Métrica	<i>DogFish</i>		<i>Feather</i>		<i>Head</i>	
	\$M	%	\$M	%	\$M	%
$VME(P)$	523.08	-	150.68	-	425.12	-
$VME(P, t)$	558.23	6.72	182.23	20.94	471.13	10.82
$E(P, t)$	581.28	11.13	206.14	36.81	497.71	17.08
	\$/bbl		\$/bbl		\$/bbl	
P^*	64.875	-	72.125	-	68.125	-
P^{**}	69.625	-	79.875	-	73.125	-

Tabela 4.6: Avaliação das oportunidades *stand-alone* - $\tau=3$ anos

A oportunidade *Feather* tem 36.81% de valor de espera em relação ao exercício imediato ($VME(P)$), *Head* 17.08% e *DogFish* 11.13%. Por essa razão, *DogFish* está mais próxima do dinheiro e por consequência, tem o gatilho exploratório menor (P^{**}). Com a mesma justificativa, dado ao prêmio de espera alto da oportunidade *Feather*, o gatilho exploratório é o mais elevado. O gatilho de investir em desenvolvimento (P^*) não é tão analisado nessa etapa pois ainda há risco envolvido e investimentos de exploração não atribuído no cálculo. Podemos notar que em todos os casos, o gatilho de investir em desenvolvimento é menor que o gatilho de explorar

O estudo *stand-alone* é o primeiro passo para compreender a economicidade de um bloco exploratório. Nas seções (3.6 e 3.7.1) foi apresentado a importância do estudo conjunto de um portfólio exploratório, devido a correlação dos prospectos. Esses próximos passos seguirão [Dias and Calvette \(2017\)](#). O trabalho analisa um portfólio exploratório com dois e três ativos, usando o método binomial. Aqui será apresentado soluções usando o método de diferenças finitas explícitas (Apêndice B). Os caso apresentados a seguir serão situações hipotéticas para melhor analisar os exemplos no caso de incerteza estratégica.

Imaginem uma situação hipotética em que a oportunidade *Feather* fosse reavaliada pelo grupo técnico, sendo considerada sem probabilidade de sucesso,

eliminando-a da carteira. É raro, mas é possível acontecer, por exemplo, caso identifiquem por interpretação sísmica que não se trata de reservatório. Essa situação (figura 4.17) é usada no modelo de barganha cooperativa da seção (4.2.2.2).

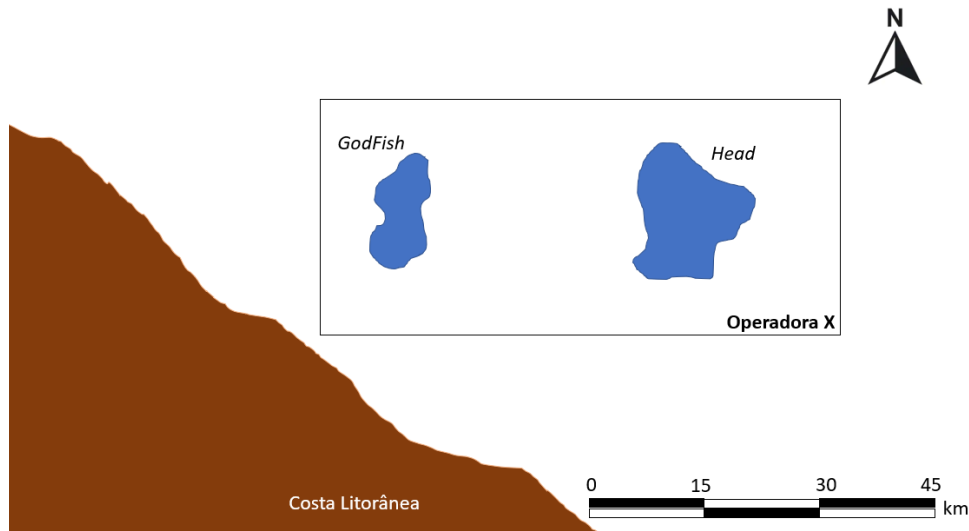


Figura 4.17: Único Bloco - DogFish e Head

O valor de portfólio deve ser tanto quanto a soma das opções de explorar ou maior. Comparando com a tabela (4.6), a soma das opções de explorar os ativos *dogFish* e *Head* é igual a \$ 1078.99 milhões. O valor do portfólio ($\Pi_{Head+dogfish}$) é igual a \$ 1092.98 Milhões. A diferença de \$ 14 milhões é devido a vantagem da dependência entre ativos. O portfólio ganha um outro momento de exploração e portanto, um novo gatilho. O gatilho do portfólio é \$ 71.5 dólares o barril.

A figura (4.18) apresenta a curva de gatilho do portfólio. No tempo presente, o valor do gatilho do portfólio é \$ 71.50 dólares, entre os gatilhos de explorar das duas oportunidades *stand-alone*. Diferentemente do gatilho de uma oportunidade, agora existe um ótimo o qual define a oportunidade de perfurar primeiro, ou seja, qual sequência ótima dado as informações *a priori*. As cores simbolizam a preferência, sendo uma dominância da perfuração da oportunidade *DogFish* primeiro. Contudo, numa análise do valor da espera, da primeira e segunda sequência ótima, acima do gatilho, não há diferença significativa de valor na perfuração da oportunidade *DogFish* antes ou depois da oportunidade *Head*. Diferenças significativas entre perfurar *Dogfish* primeiro ocorrem somente próximo ao vencimento, entre os preços de \$ 35 e \$ 41 o barril. Essa indiferença em preços altos é importante na prioridade de perfuração no jogo de barganha cooperativa.

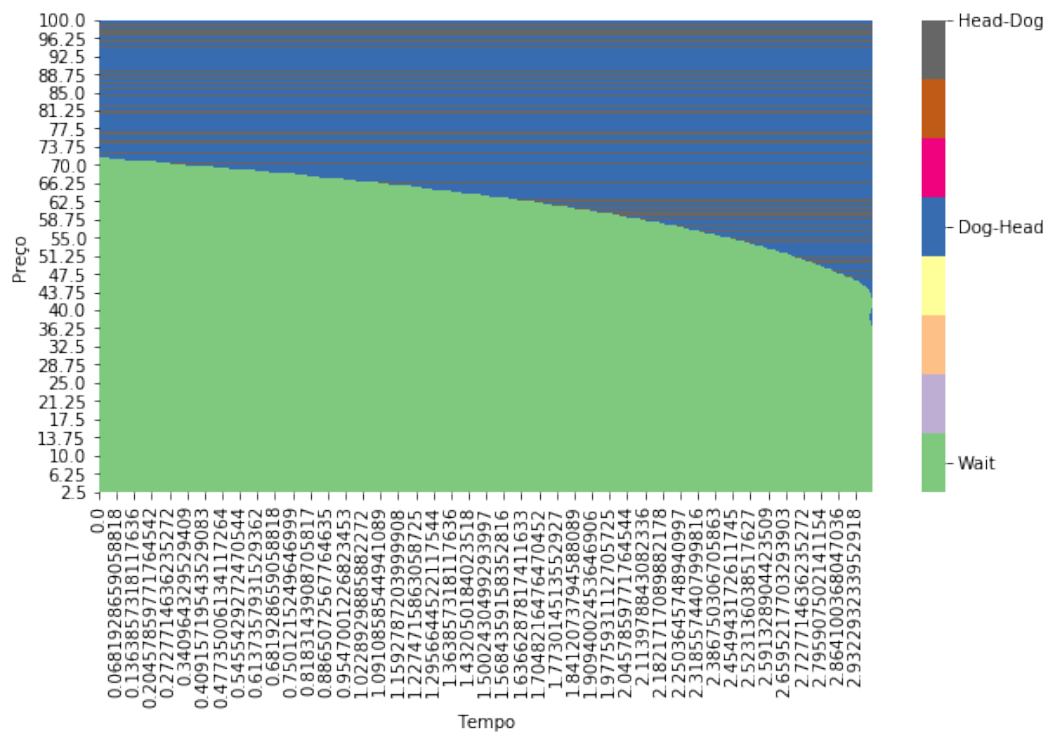


Figura 4.18: Gatilho do Portfólio - Head-DogFish

Pode acontecer do operador alterar o volume esperado recuperável. Esse modelo é relevante na seção (4.2.2.2).

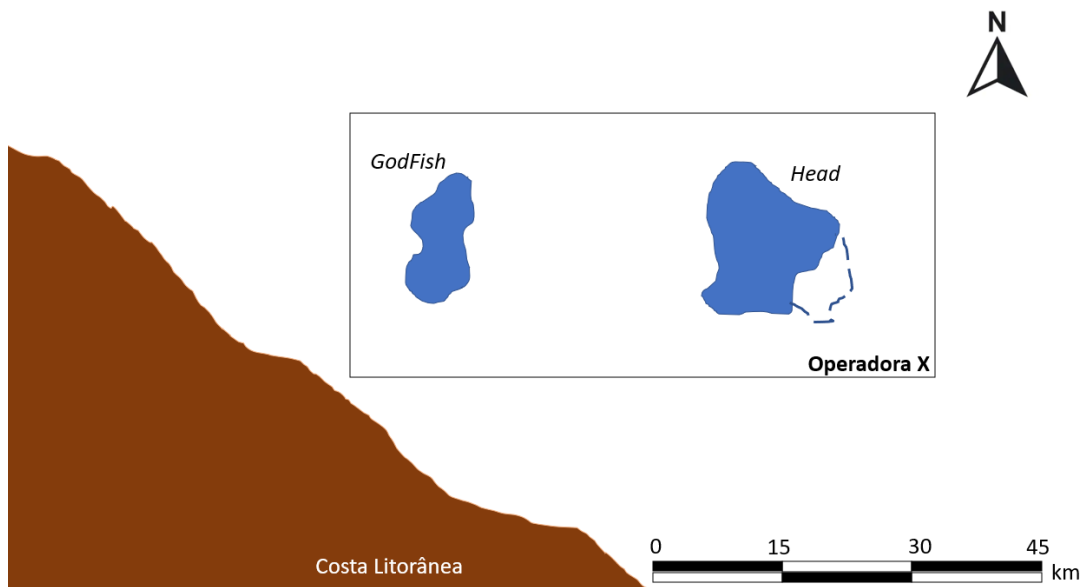


Figura 4.19: Único Bloco - DogFish e Head com Volume Maior

Caso eleve 35% de B da oportunidade *Head*, o portfólio é avaliado em \$ 1334.70 milhões, sendo a soma das opções de explorar *dogFish* e o expandido

de *Head* é \$ 1318.06 milhões. Novamente, a diferença de \$ 16 Milhões é devido ao efeito de portfólio. O gatilho no tempo inicial do contrato reduz, indo para \$ 69.75 o barril. Isso representa que o portfólio é mais atraente para exercício imediato com o aumento da reserva. A área de exercício de preferência para perfuração inicial da oportunidade *Head* próximo do vencimento diminuiu, agora entre \$ 35 e \$38 dólares o barril. A diferença entre o primeiro e o segundo portfólio, no vencimento é marcante. Se o barril estiver em \$ 36 dólares, o portfólio com a primeira perfuração sendo a oportunidade *DogFish* vale \$ 115.738 milhões, visto que a perfuração do primeiro poço em *Head* vale ao portfólio \$ 95.872 milhões. A diferença de \$ 19.866 milhões é a informação incremental que a oportunidade *DogFish* passa, comparado a perfuração anterior do prospecto *Head*. Porém, assim como no caso original (figura 4.17), para valores altos do preço do petróleo, o investidor é indiferente entre qual ativo irá perfurar antes. Essa indecisão é relevante para a barganha cooperativa.

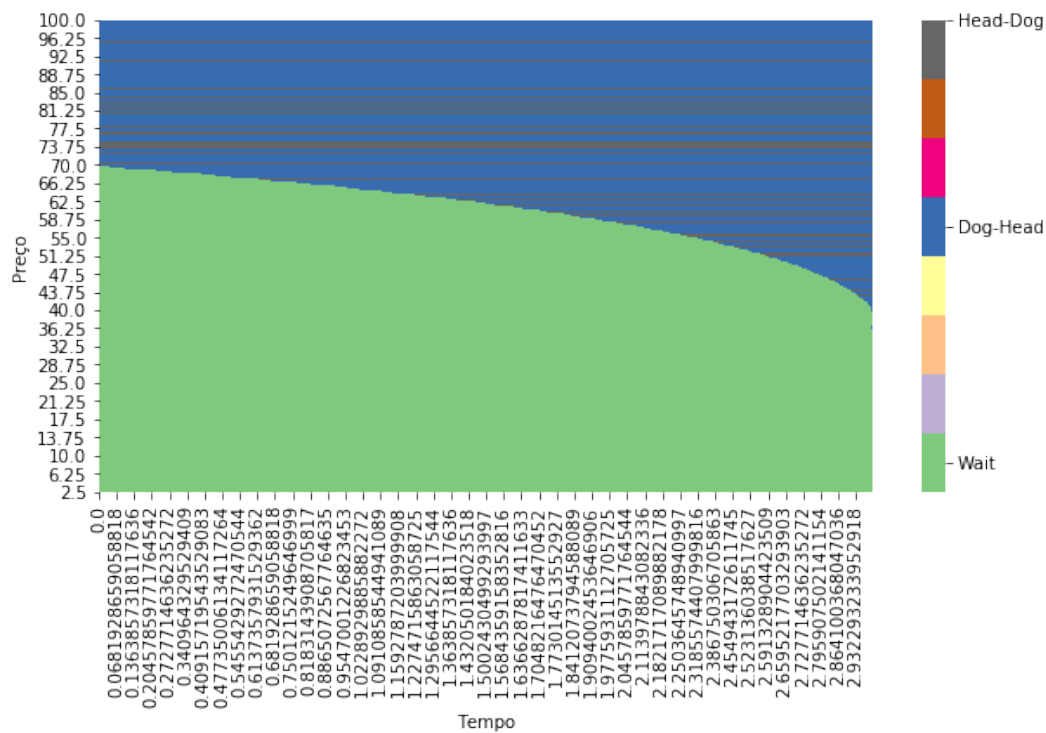


Figura 4.20: Gatilho -II - DogFish e Head com expansão de 35% de B

O bloco operado pela empresa A é o portfólio *DogFish* e *Feather*, como pode ser visto na figura (4.21).

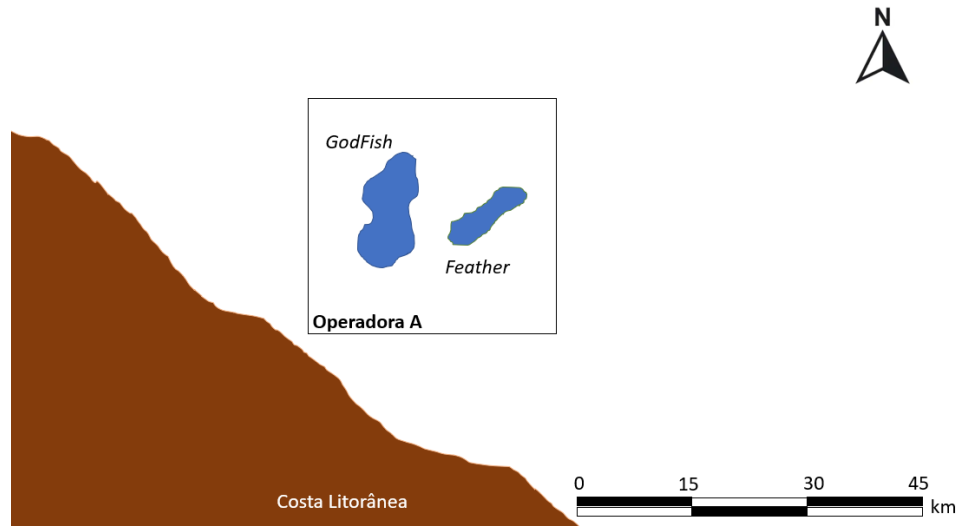


Figura 4.21: Bloco A- DogFish e Feather

O valor do portfólio ($\Pi_{dogFish+Feather}$) é 796.60, maior que a soma das oportunidade avaliadas separadamente ($=787.42$). O excedente de 9.18 milhões de dólares é devido a correlação entre as oportunidades. A figura (4.22) apresenta a curva de gatilho do portfólio *dogFish* e *Head*. O gatilho no início do contrato é \$ 73.25 o barril, entre os dois gatilhos *stand-alone* (tabela 4.6). Como nos outros casos, com preços acima da espera, os valores da perfuração *DogFish* como primeira oportunidade é similar à perfuração antes da oportunidade *Feather*. Exceção, no intervalo \$ 35 e 48 barril, próximo do vencimento, em que é preferível perfurar a oportunidade *DogFish*.

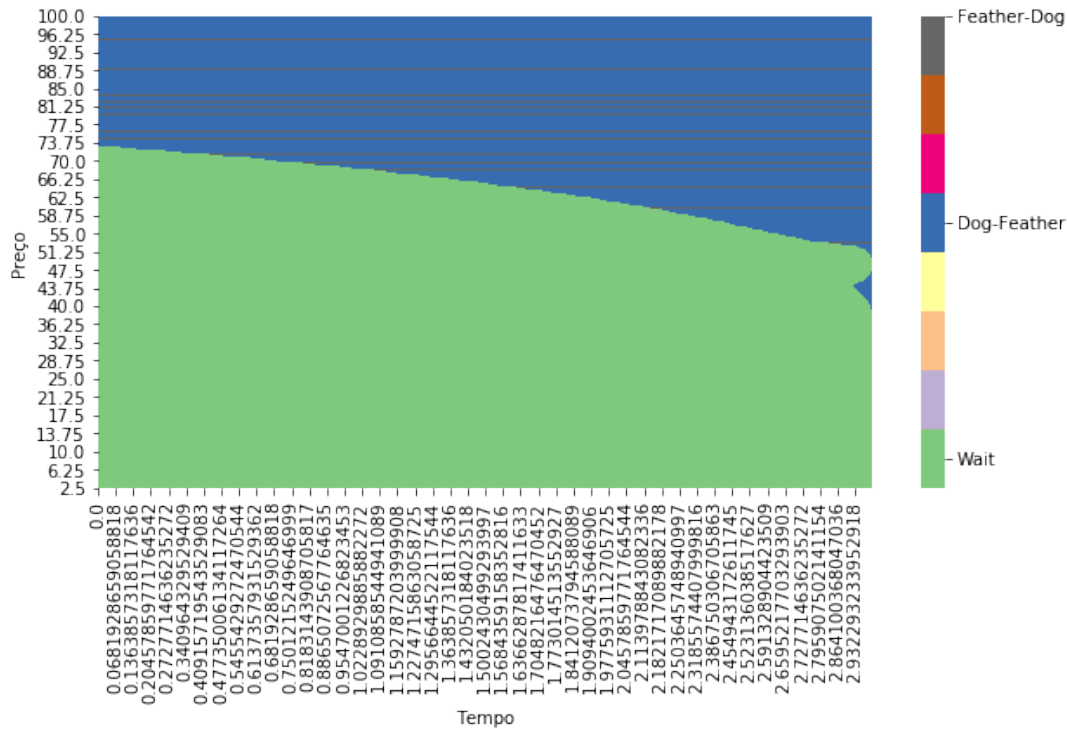


Figura 4.22: Gatilho do Portfólio - DogFish e Feather

A figura (4.12) apresenta um portfólio com três oportunidades. Também é o caso de unitização pela barganha cooperativa no estudo da seção (4.2.3).

A tabela xx sintetiza todos os resultados.

4.2.2

Dois prospectos: um em cada bloco

Os resultados dessa seção reproduzem os desenvolvimento de [M. A. Dias and Teixeira \(2009\)](#), adequados aos prospectos apresentados na seção (4.1.5) e os parâmetros exógenos da seção (4.1.4), incluindo o preço do barril no tempo inicial de \$50. A situação foi simplificada para compreender melhor o problema e em etapas adiante o exemplo vai sendo modificado até chegar ao modelo original das figuras (4.11 ou 4.51) e tabelas (4.3 e 4.4)

4.2.2.1

Jogo Simétrico: Atrito à Barganha

O modelo contempla dois blocos exploratórios, adquiridos no mesmo leilão por companhias distintas, com prazo de três anos (τ) e sem compromisso de poço exploratório, vizinhos um ao outro. Cada bloco tem somente um prospecto, com características iguais a oportunidade *DogFish* (figura 4.23). Os

dois agentes precificam o investimento da produção com a mesma equação (4-5). O jogo é de informação completa e simétrico, pois os dois agentes possuem ativos diferentes, mas com as mesmas características geológicas e de produção. Contudo, a correlação dos prospectos é diferente de 100%, sendo a princípio ρ igual a 60%.

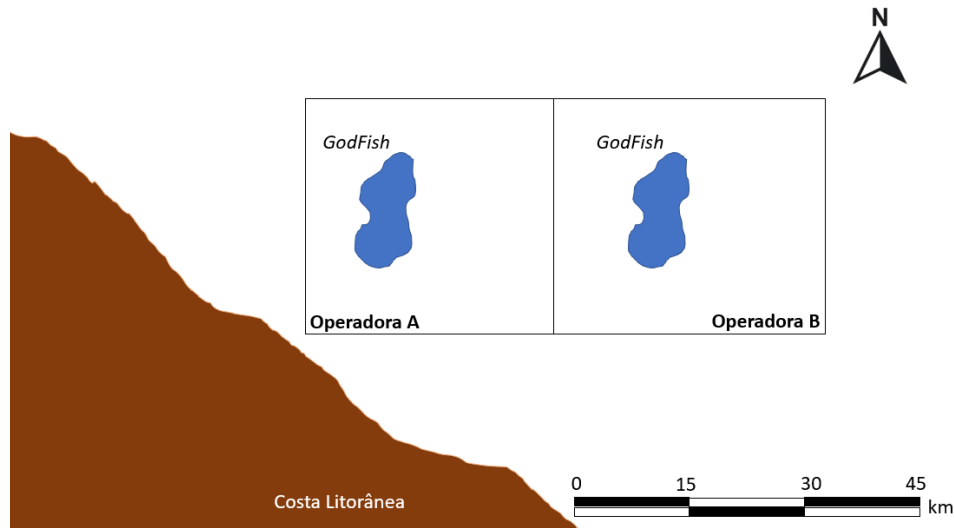


Figura 4.23: Modelo - DogFish x DogFish

O jogo envolve somente dois jogadores e o conjunto de estratégias é $s_{i,-i} = \{esperar, esperar\}; \{esperar, investir\}; \{investir, esperar\}$ e $\{investir, investir\}$. Nesse jogo, há uma variável incerta no tempo, então o equilíbrio se dá em jogo com equilíbrio Markoviano.

		Jogador 2	
		Investe	Espera
Jogador 1	Investe	$S_1; S_2$	$L_1; F_2$
	Espera	$F_1; L_2$	$W_1; W_2$

Tabela 4.7: Forma normal: Guerra de Atrito

O equilíbrio de Markov é um equilíbrio perfeito de subjogos (ENPS), sendo em função do estado corrente, que apresenta a propriedade de Markov.

O equilíbrio em estratégia pura $\{W_1, W_2\}$ ocorre quando os dois jogadores não tem interesse em perfurar devido a baixa de preço do petróleo ($< P^{**}$) ou caso esteja acima do preço de gatilho da opção de esperar ($> P^{**}$), o custo de espera é muito baixo. Na primeira situação, a espera é devido ao valor de espera da opção de explorar $E_i(P, 0)$. Quando se ultrapassa o gatilho, pode haver interesse do jogador continuar esperando, mas devido a obtenção de

informação pela perfuração do outro jogador. O custo pode ser calculado pelo valor perdido pelo ativo não produzido. No caso, foi calculado uma perda mensal de valor, ou seja, $c_i(P^{**}, 0) = VME_i(P^{**}, 0)(1 - e^{-r/12})$. Como se trata de um jogo simétrico, $W_i = W_1 = W_2$

O caso de equilíbrio $\{S_1; S_2\}$ se dá devido ao exercício imediato dos jogadores. Isso acontece em situações de preços muito elevados. É necessário que o preço ultrapasse o preço de gatilho da opção exploratória (P^{**}) e fique acima do preço que delimita a guerra de atrito entre os jogadores (P^s). Esse limite é quando o jogador desconsidera o valor da informação da perfuração pelo outro jogador. Como se trata de um jogo simétrico, $VM E_1(P, 0) = VM E_2(P, 0) = S_i$.

As estratégias puras de equilíbrio $\{F_1; L_2\}$ e $\{L_1; F_2\}$ ocorrem simultaneamente devido a simetria do jogo. O Líder (L_i) é a empresa que não aguarda a informação do próximo, portanto possui *payoff* igual ao $VM E_i(P, 0)$. Já a ação F_i é o valor do jogado que aguarda a informação, ou seja, igual a equação (3-47).

Em um jogo simétrico e de informação completa, quando há dois equilíbrios puros sempre há um equilíbrio em estratégia mista. Neste caso de equilíbrio $\{F_1; L_2\}$ e $\{L_1; F_2\}$, utiliza o conceito de equilíbrio evolucionariamente estável. Esse conceito ajuda a escolher o equilíbrio de longo prazo. Nesse caso, o único equilíbrio em estratégia evolucionariamente estável (EEE) é o equilíbrio em estratégia mista. É nessa situação, de indecisão, é que ocorre a Guerra de Atrito, que pode perdurar enquanto os preços correntes não alterarem ou não saírem do intervalo que este equilíbrio misto ocorre.

		Jogador 2	
		Investe	Espera
Jogador 1	Investe	$VM E_1 ; VM E_2$	$VM E_1 ; E_{2 1}$
	Espera	$E_{1 2} ; VM E_2$	$E_1 - c_1 ; E_2 - c_2$

Tabela 4.8: Forma normal: Payoffs

As melhores respostas serão sublinhadas em todos os jogos (exemplo na tabela 4.9). Como esse primeiro jogo analisado é com o preço corrente, alguns prêmios já foram apresentados na seção de estudo sem incerteza estratégica (seção 4.2.1) e tabela 4.5). Para o preço de petróleo igual a 50 dólares o barril, a ação esperar é dominante para qualquer jogador. Essa espera é em função ao seu próprio ativo, sem o aguardo da externalidade positiva da perfuração do poço vizinho.

		Jogador 2	
		Investe	Espera
Jogador 1	Investe	558.23 ; 558.23	558.23 ; <u>583.37</u>
	Espera	<u>583.37</u> ; 558.23	<u>581.28</u> ; <u>581.28</u>

Tabela 4.9: Forma normal: Jogo Simétrico- $P=\$50$, $\rho = 60\%$, $\tau = 3$

Se o preço subir acima do gatilho exploratório de P^{**} de \$ 69.62 o barril, o equilíbrio do jogo muda. Com preço a 72 dólares o barril, temos dois equilíbrios puros de Nash e um equilíbrio misto. As probabilidades do equilíbrio misto são em função do *payoff* (equações 3-28 ou 3-29), sendo que neste caso, o jogador i tem 81.42% de investir e 18.58% de esperar. Em jogos simétrico, a utilidade esperada em equilíbrio misto para cada jogador é sempre igual, sendo neste caso $U_i(a, -a) = 1281.59$ M\$. O prêmio é igual a um dos prêmios de equilíbrio em estratégia pura, sendo espera ou investimento. Em jogos Evolucionários, o único equilíbrio estável neste tipo de jogo se dá na estratégia mista, visto que os degenerados $\{F_1; L_2\}$ e $\{L_1; F_2\}$ são instáveis, pois têm *payoffs* distintos para cada jogador. É neste contexto de estratégia mista, nas probabilidades de aguardar e perfurar é que ocorre a guerra de atrito.

		Jogador 2	
		Investe	Espera
Jogador 1	Investe	1281.59 ; 1281.59	<u>1281.59</u> ; <u>1282.32</u>
	Espera	<u>1282.32</u> ; <u>1281.59</u>	1278.39 ; 1278.39

Tabela 4.10: Forma normal: Jogo Simétrico - $P=\$72$, $\rho = 60\%$, $\tau = 3$

Nesse jogo, no tempo zero, o intervalo de Guerra de atrito é até o preço \$ 76.25 o barril (P^s). É o ponto no espaço preço do barril e *payoff* que o prêmio de ser seguidor é igual ao de ser líder. A seguir, é apresentado o jogo em que o barril está em \$80 no tempo presente:

		Jogador 2	
		Investe	Espera
Jogador 1	Investe	<u>1557.41</u> ; <u>1557.41</u>	<u>1557.41</u> ; <u>1557.41</u>
	Espera	<u>1557.41</u> ; <u>1557.41</u>	1553.52 ; 1553.52

Tabela 4.11: Forma normal: Jogo Simétrico - $P=\$80$, $\rho = 60\%$, $\tau = 3$

Se o outro jogador tem ação de investir, o jogador é indiferente entre investir e esperar. Isso quer dizer que a espera não traz nova informação. Caso o outro jogador espera, o jogador prefere investir. Assim, não são críveis as estratégias $\{investir, esperar\}$ e $\{esperar, investir\}$ e o equilíbrio se dá em ações simultâneas de perfuração $\{investir, investir\}$.

Com o uso da teoria dos jogos evolucionários, é possível selecionar o equilíbrio estável. As equações usadas (3-30, 3-32 e 3-32), solução por integração das equações diferenciais.

Jogo Evolucionário infinito em \$ 50 dólares (tabela 4.9). Rapidamente estabiliza e degenera para ação de Esperar.

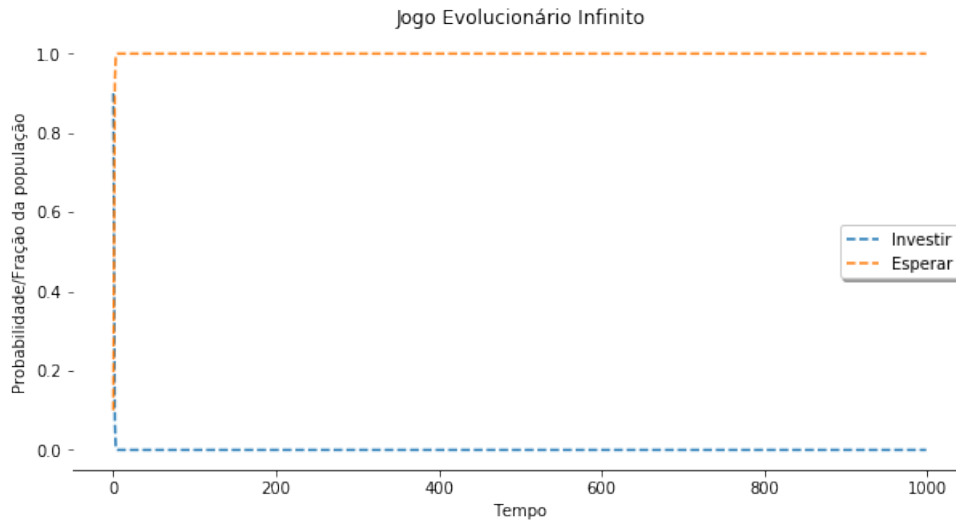


Figura 4.24: Jogo Evolucionário Infinito - \$ 50 o barril

Plano de Fase.

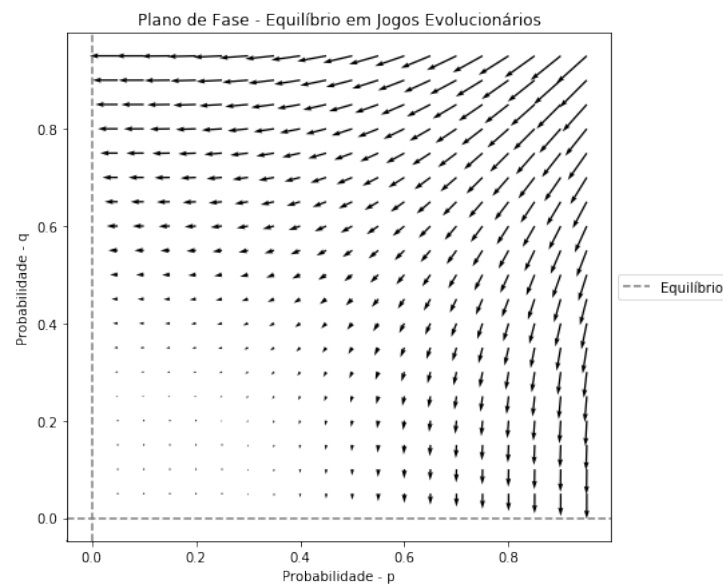


Figura 4.25: Jogo Evolucionário - Plano de Fase - Simétrico -\$ 50 o barril

Jogo Evolucionário infinito em \$ 72 dólares (tabela 4.10). O jogo estabiliza em frações de 81.42% em investir e 18.58% em esperar (figura 4.26),

probabilidades do equilíbrio em estratégias mistas. Como não estamos em jogos cooperativos, em que uma porcentagem de vezes se espera e outra investe, preços a este nível se configuram um impasse, uma Guerra de Atrito.

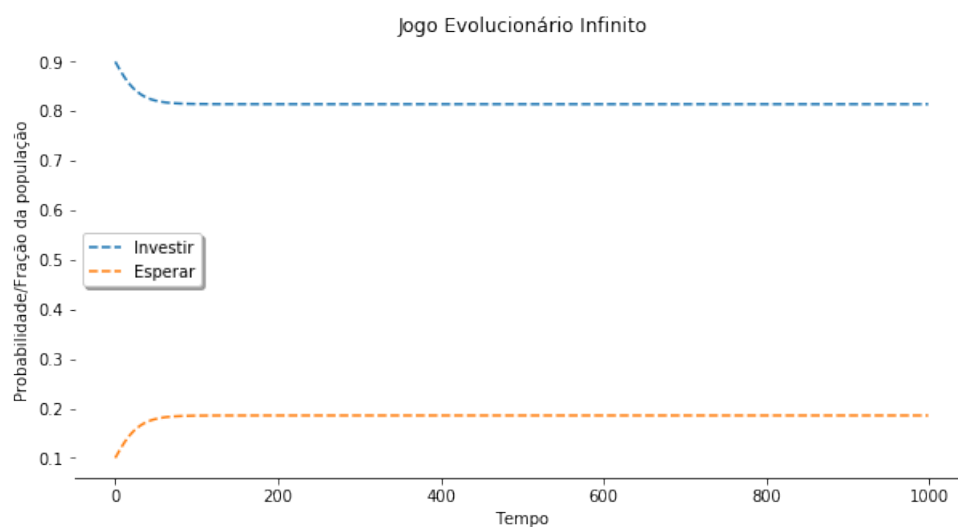


Figura 4.26: Jogo Evolucionário Infinito - \$ 72 o barril

Plano de Fase. Adensamento da malha

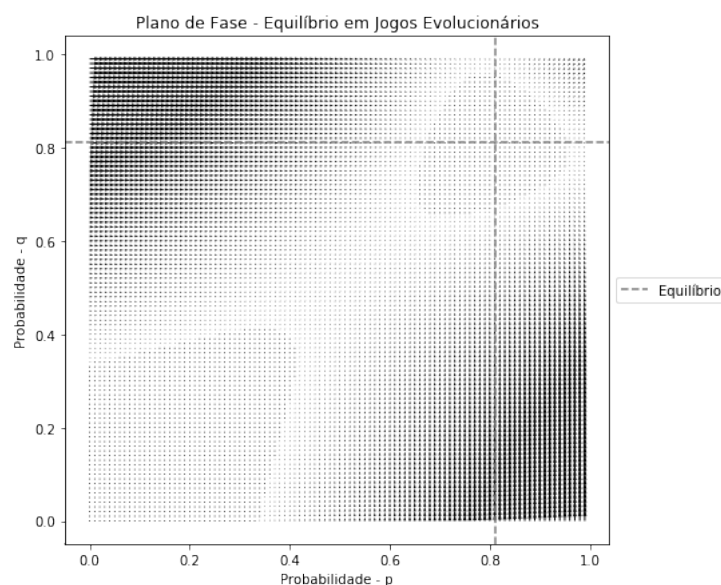


Figura 4.27: Jogo Evolucionário - Plano de Fase - Simétrico - \$ 72 o barril

Jogo Evolucionário infinito em \$ 80 dólares (tabela 4.11). Estabiliza na ação degenerada em investir (figura 4.28).

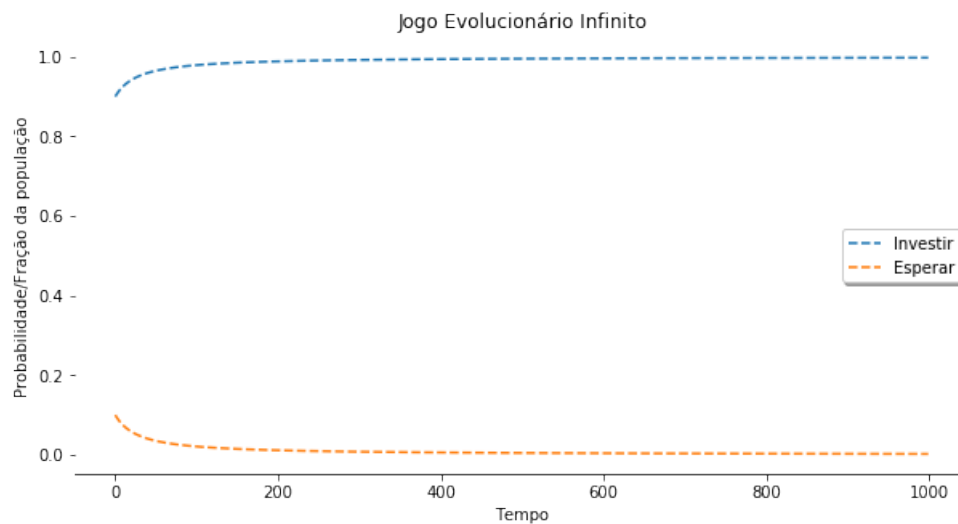


Figura 4.28: Jogo Evolucionário Infinito - \$ 72 o barril

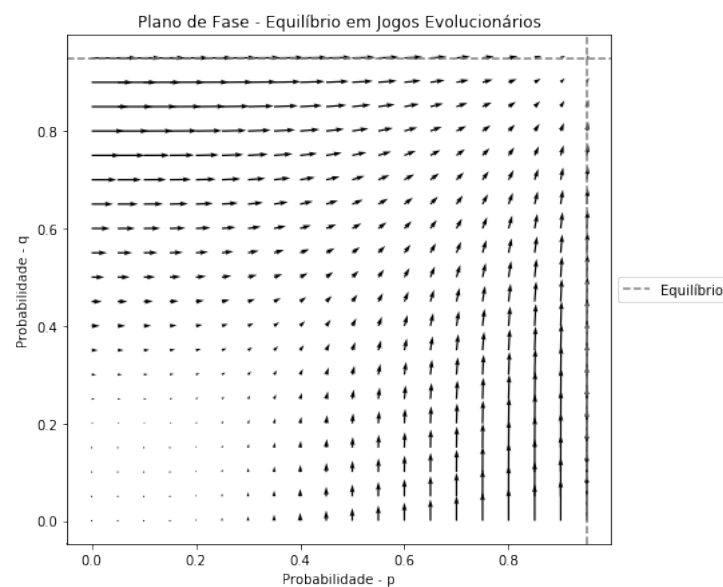


Figura 4.29: Jogo Evolucionário - Plano de Fase - Simétrico -\$ 80 o barril

A figura (4.30) apresenta o prêmio do Líder e do Seguidor. Nas condições exógenas dados a variável estocástica e endógenas, pelos ativos envolvidos, o intervalo de guerra de atrito é entre \$69.62 e 76.25 (linhas verticais).

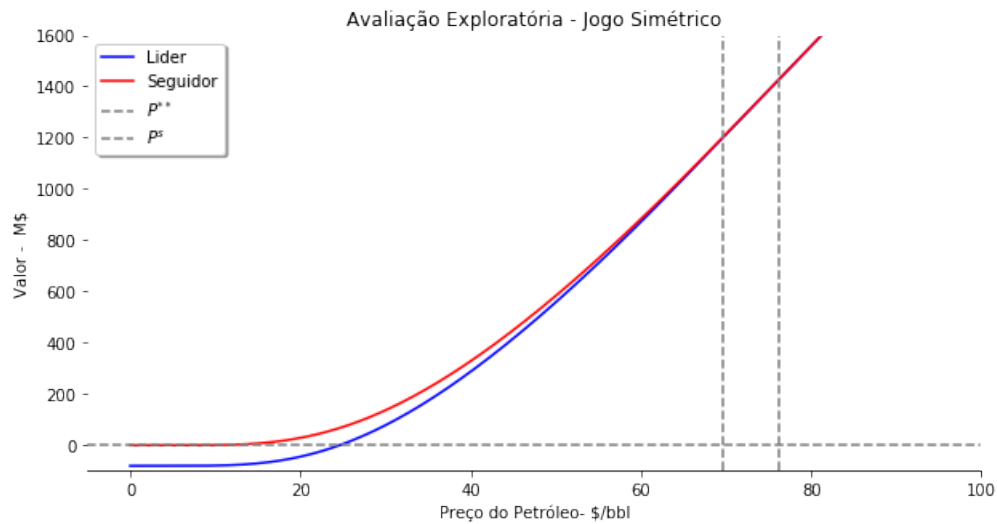


Figura 4.30: Guerra de Atrito: DogFish x DogFish - $\rho = 60\%$

No detalhe da figura (4.31), quando há a sobreposição efetiva do prêmio do seguidor e do líder apresenta o limite da guerra de atrito e o gatilho da perfuração simultânea (P^s).

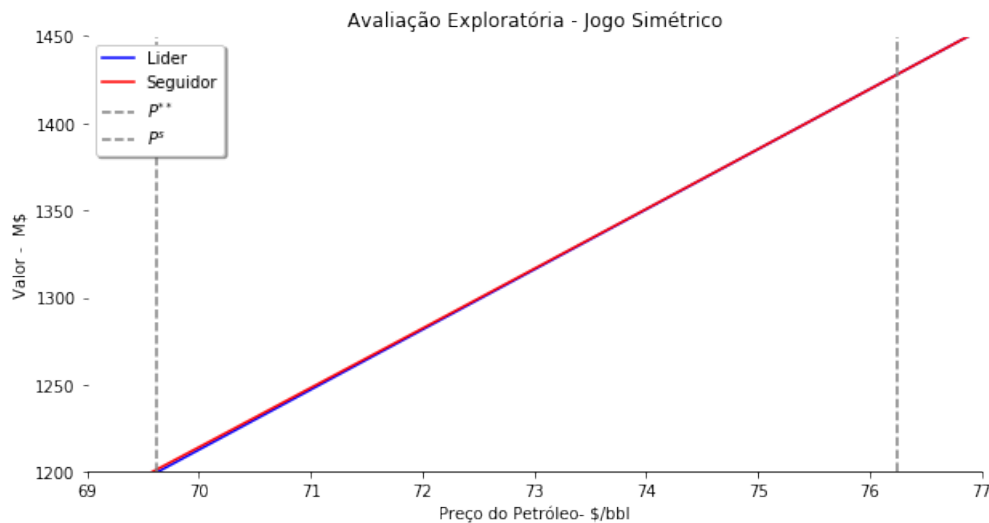


Figura 4.31: Detalhe - Guerra de Atrito: DogFish x DogFish - $\rho = 60\%$

O limite inferior depende do gatilho exploratório. O superior tem relação com o prêmio da informação. Esse limite superior pode diminuir ou aumentar, dado a correlação entre os prospectos (tabela 4.12).

E quando essa guerra de atrito pode começar? Como se trata de um processo estocástico, não é possível saber *a priori* o momento exato que o preço do petróleo vai atingir a curva de gatilho. Pode começar muito próximo do início do contrato, ou nunca acontecer, visto que o preço da *commodity*

ρ	30%	60%	80%
Intervalo]69.63, 71.5]]69.63, 76.25]]69.63, 87.50]

Tabela 4.12: Intervalo no Preço do Barril- Guerra de Atrito - Jogo Simétrico

pode ficar sempre abaixo da curva. Para ter uma estimativa, é necessário fazer simulação de Monte Carlo. Como entrada da simulação, é necessária a curva de gatilho da opção de explorar (figura 4.14), a discretização temporal da solução por diferenças finitas, equação de simulação do processo MGB (similar a equação 3-11), parâmetro exógenos para diferenças finitas (tabela 4.2). Como a simulação é em medida real, é necessário o *drift* do processo, adotando α igual a 9% (estimado em seção 4.1).

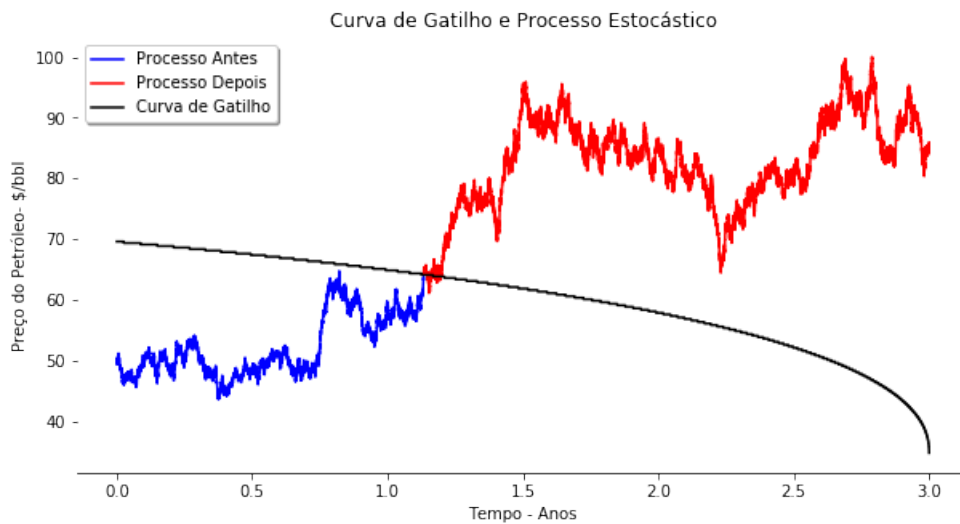


Figura 4.32: Simulação de Monte Carlo e Gatilho

A figura (4.32) apresenta uma possível simulação de um caminho. Veja que quando o processo atinge a curva de gatilho, o processo altera a cor. Nesse processo, a primeira chega ocorreu no tempo 1.13 ano. Foram feitas 10000 simulações (figura 4.33). A esperança matemática do MGB em medida real no prazo de três anos é \$ 65.498 o barril (equação 3-12). A média das 10000 simulações no vencimento do contrato é \$ 65.613 o barril, bem próximo da esperança matemática.

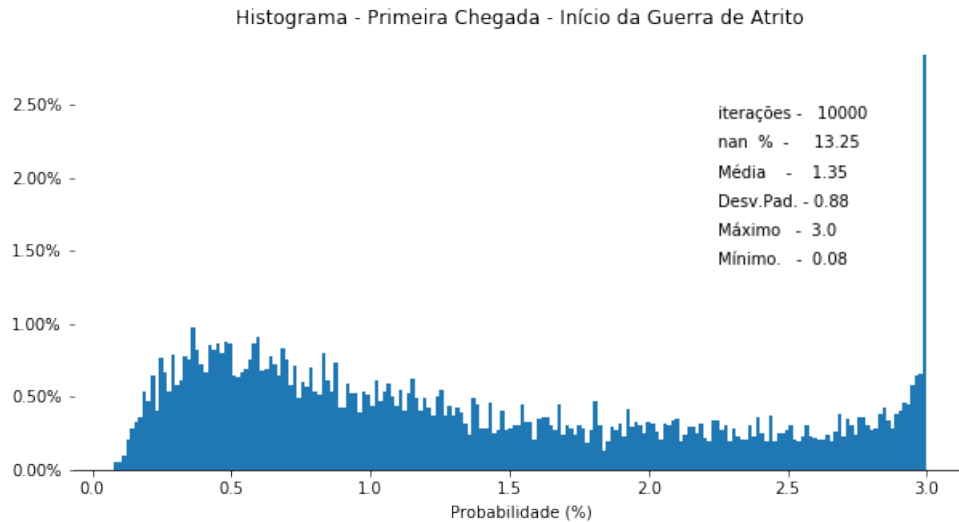


Figura 4.33: Histograma - Início da Guerra de Atrito

O tempo médio para início da guerra de atrito é de 1 ano e 4 meses. Na figura (4.33), nota-se grande dispersão dos eventos, com desvio padrão de dez meses. A probabilidade de não perfurar o prospecto é de 13.25%, independente da guerra de atrito, já que essa porcentagem representa os caminhos que não atingiram a curva de gatilho. A probabilidade de começar a guerra de atrito antes do primeiro ano é de 38.88%. Contudo, a probabilidade de espera o prospecto valorizar e começar a guerra de atrito nos últimos 6 meses de contrato é 13.8%. Isso pode colocar a decisão de investimento nos últimos momentos do contrato. Também, nota-se que há classes mais representativas próximo ao vencimento. Isso é devido a forte inclinação da curva de gatilho no término do contrato.

Pode-se observar os equilíbrios do jogo em relação a variável estocástica no tempo presente. Segundo a tabela (4.13), o conjunto de estratégias degeneradas $\{Investe, Investe\}$ será representado na figura (4.34) com o valor 1, assim como $\{Investe, Espera\}$, $\{Espera, Investe\}$ e $\{Espera, Espera\}$ serão com os números, 2, 3 e 4. Números entre 1 e 2 representam estratégias mistas entre Investir e Esperar, sendo portanto o intervalo de Guerra de Atrito.

		Jogador 2	
		Investe	Espera
Jogador 1	Investe	1	2
	Espera	3	4

Tabela 4.13: Simbologia dos Quadrantes

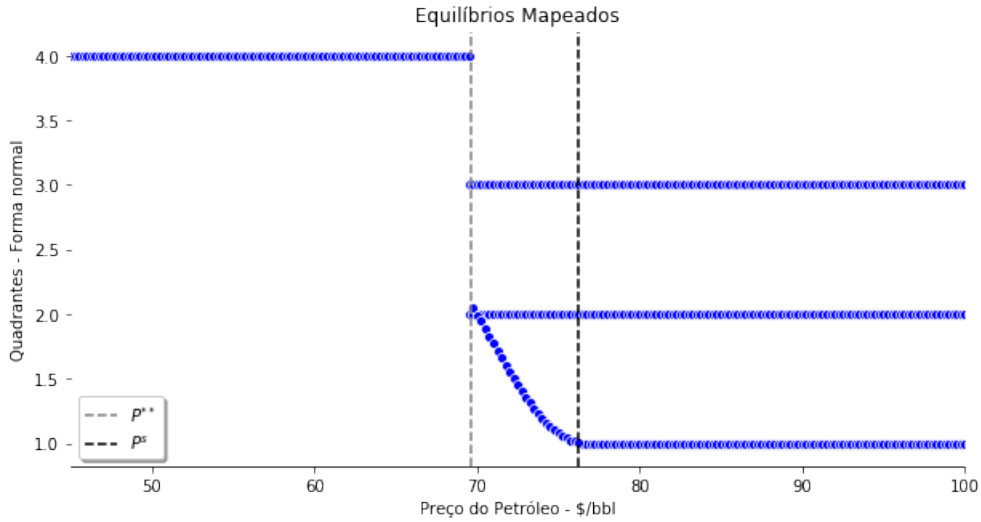


Figura 4.34: Equilíbrios Mapeados - Jogo Simétrico

As estratégias puras de espera é equilíbrio em preços baixos, até o gatilho. Após o gatilho, há duas estratégias puras F_i, S_i e uma estratégia mista como equilíbrio de Nash. As probabilidades são maiores para espera, e com a elevação do preço, as probabilidades dos dois jogadores são maiores para investir. Esse equilíbrio misto é o único equilíbrio estável populacional, que suporta pequenas oscilações e ainda se mantém como estratégia. Quando se ultrapassa o gatilho simultâneo, três equilíbrios são notados, contudo o equilíbrio crível é a perfuração simultânea.

Em situações de impasse por guerra de atrito, pode haver incentivos para alterar o tipo de jogo. Diferente da guerra de atrito, a barganha cooperativa é um jogo na busca de um ganha-ganha. Parte do princípio de uma análise de portfólio e a divisão deste portfólio (tabela 4.14). No caso, como o jogo é simétrico, a divisão é 50% (figuras 4.35 e 4.36). As negociações poderiam começar a partir de \$ 21.25 dólares do barril, já que abaixo desse valor a parte que cabe a cada jogador é zero. Contudo, deve-se comparar com o ótimo de cada jogador no jogo de guerra de atrito. Na situação de preço inicial, o valor do prêmio seria \$ 570.80 milhões (comparar com o jogo da tabela 4.9), abaixo do equilíbrio $=\{espera, espera\}$. Em \$ 72 dólares o barril, preço que está contido no intervalo de guerra de atrito, o valor para cada jogador ficaria \$ 1281.95 milhões, melhor que a ação de investir do equilíbrios $\{F_1, L_2\}$ e $\{L_1, F_2\}$ (comparar com tabela 4.10), mas pior que a espera. Em \$ 80 dólares, o valor da barganha seria \$ 1557.411, igual ao investimento, sendo desnecessária a negociação (comparar com tabela 4.11). Ou seja, com um ganho marginal pela negociação, pode haver um intervalo contendo o intervalo de preços do impasse e a divisão pela barganha seja preterida ao atrito.

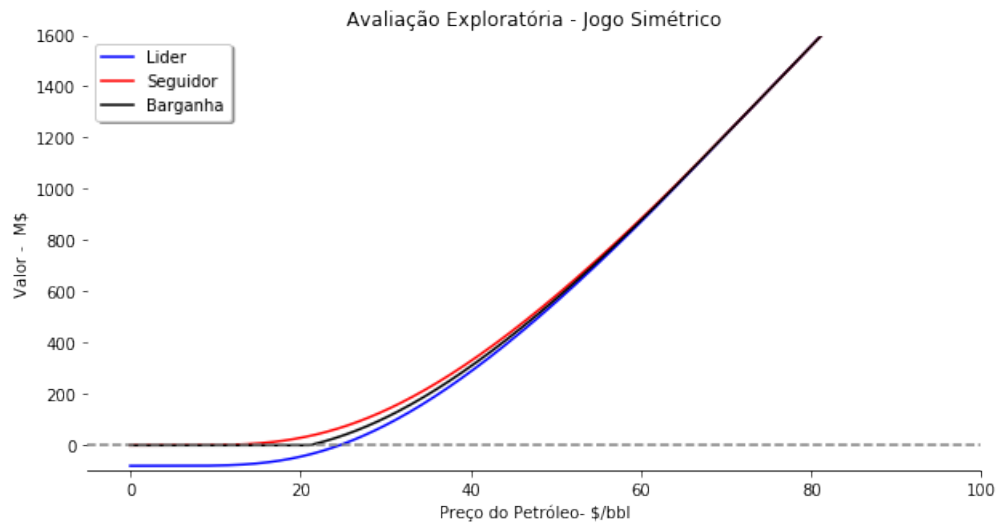


Figura 4.35: Barganha Cooperativa: DogFish x DogFish - $\rho = 60\%$

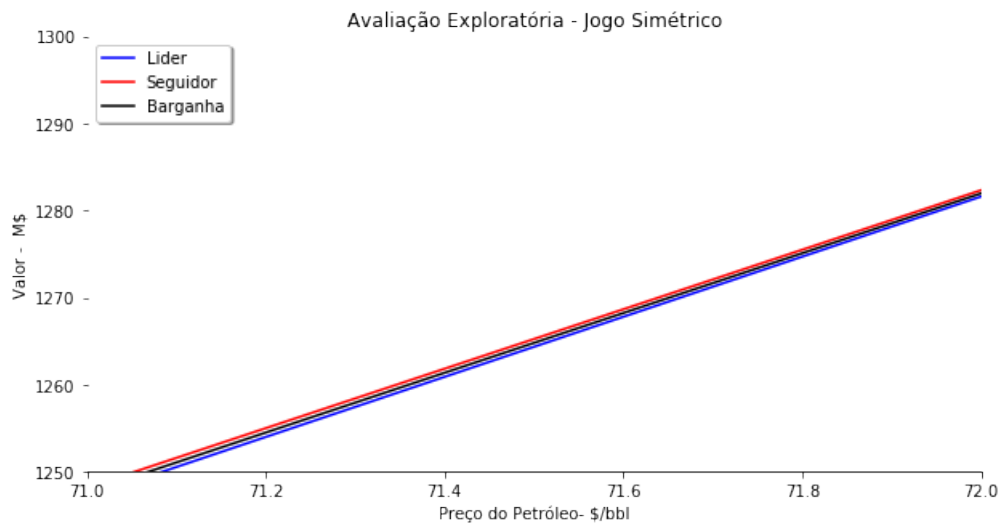


Figura 4.36: Detalhe - Barganha: DogFish x DogFish - $\rho = 60\%$

Como definido em seções anteriores, a informação obtida pelo sucesso ou fracasso do poço é pública. Informações privadas revelam tanto quando ou mais informações que o conhecimento geral. Neste trabalho, a revelação da informação é através da variável ρ . Com a negociação e interação cooperativa entre os dois jogadores, a correlação dos dois prospectos pode ser positivamente reavaliada. Ainda que a variável ρ trate da variável sistema petrolífero das duas oportunidades com alteração da variável FC , as melhorias nas outras variáveis (q, B, Id), poderiam advir de um projeto conjunto. É comum a otimização, incorporação de conhecimentos de outros projetos das operadoras, redesenhos de projetos em *cluster*, quando se há parcerias. Isso quer dizer

que em ambiente cooperativo tende a revelar a informação privada dos agentes.

Para facilitar o exercício de revelação de informação privada, foi elevado o ρ para 80% dado a interação dos agentes em ambiente de negociação. Comparando com a situação de guerra de atrito, no início do contrato, com barril a \$50 (tabela 4.9), o *payoff* da barganha é 572.67 milhões de dólares, ainda pior que o equilíbrio $\{espera, espera\}$. Em \$ 72 o barril (tabela 4.10), a utilidade da barganha é \$ 1283.65 milhões, *payoff* melhor que a estratégias mista e puras. Em \$ 80 o barril (4.11) as condições de negociação ainda são preferidas, visto que o valor esperado da utilidade para cada jogador é \$ 1557.91 M, melhor que a estratégia pura de simultânea de investir(=\$ 1557.41 M).

$P(\$/bbl)$	B_i		
	50	72	80
$\rho = 60\%$	570.80	1281.95	1557.41
$\rho = 80\%$	572.67	1283.65	1557.91

Tabela 4.14: U_i - Divisão da Barganha Cooperativa - M\$

Na figura (4.37), é possível notar o detalhe da utilidade superior da barganha em relação as utilidades do Líder e do Seguidor. O intervalo contínuo de cooperação em que é melhor cooperar que qualquer outra ação é de \$ 66.25 até 88 o barril. Esse intervalo contém o intervalo da $[P^{**}, P^s]$ ($[69.63, 76.25]$), sendo viável a substituição do jogo de guerra de atrito pela barganha cooperativa.

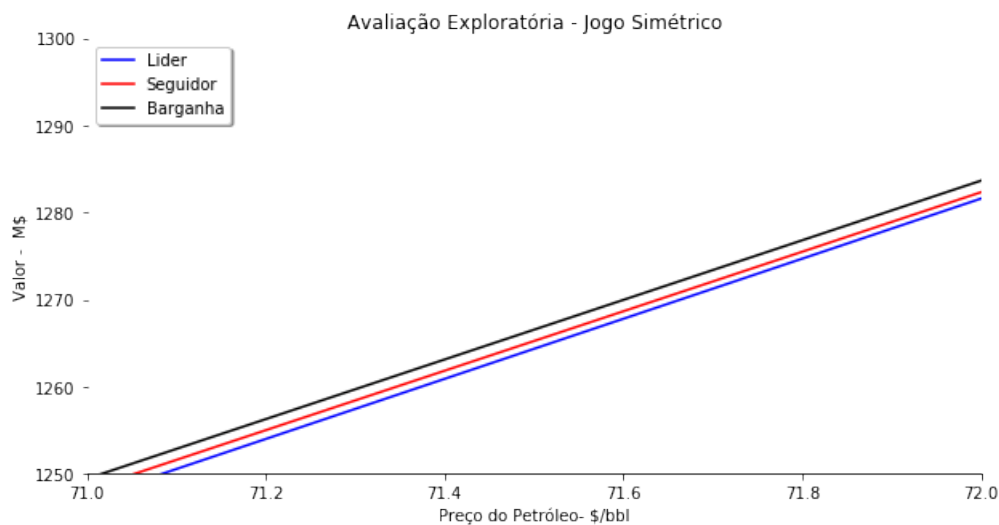


Figura 4.37: Detalhe - Barganha: DogFish x DogFish - $\rho = 80\%$

4.2.2.2

Jogo Assimétrico: Atrito (?) à Barganha

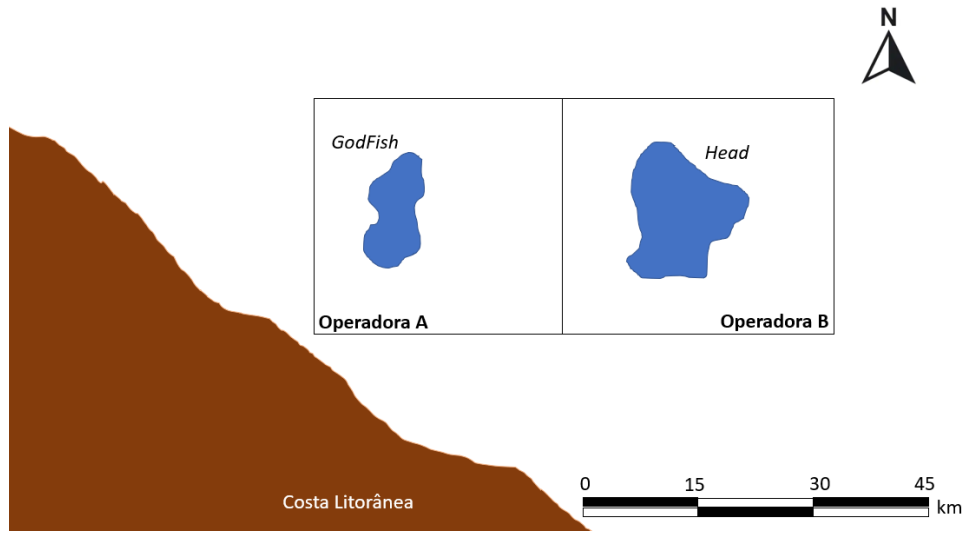


Figura 4.38: Modelo - 2 Blocos - DogFish e Head

Intervalos interessantes para estudo no tempo presente ($\tau = 3$):

- $[0; 69.62[- [0; P^{**}(D)[$
- $[69.62; 72.25[- [P^{**}(D); P^s(D)[$
- $[72.25; 73.12[- [P^s(D); P^{**}(H)[$
- $[73.12; 82.25[- [P^{**}(H); P^s(H)[$
- $[82.25; \infty[- [P^s(H); \infty[$

		J2- Head	
		Investe	Espera
J1 - DogFish	Investe	558.23 ; 471.13	558.23 ; <u>500.48</u>
	Espera	<u>582.19</u> ; 471.13	<u>581.28</u> ; <u>497.72</u>

Tabela 4.15: Forma normal: Jogo Assimétrico - $P=\$50$, $\rho = 50\%$, $\tau = 3$

		J2- Head	
		Investe	Espera
J1 - DogFish	Investe	1281.59 ; 1122.46	<u>1281.59</u> ; <u>1125.43</u>
	Espera	<u>1281.61</u> ; 1122.46	1278.39 ; <u>1122.63</u>

Tabela 4.16: Forma normal: Jogo Assimétrico - $P=\$72$, $\rho = 50\%$, $\tau = 3$

Acima do gatilho da oportunidade *DogFish*, a espera é dominante em relação ao investimento para o jogador 2, diferentemente na situação simétrica

(4.10). Ou seja, logo depois do gatilho, o Jogador 1 exerce sua opção e perfura a oportunidade *DogFish*.

Em jogos assimétricos, o equilíbrio se dá pelo diferencial entre os prêmios da opção (tabela 4.6), ou seja, quão longe do dinheiro o ativo está. E por consequência ocorre devido ao gatilho e o custo, visto que o custo tem relação com o valor intrínseco ($VME(P, t)$) e o gatilho da opção de explorar. Ou seja, a empresa que tiver o gatilho mais baixo, vai perfurar e a empresa que tem o gatilho mais alto, vai esperar a informação gratuita. Não tem a ver com o valor do ativo ou do portfólio em si, já que *DogFish* tem valor maior que *Head*, mas quão atrativo é para empresa investir no projeto naquele momento ou esperar o futuro.

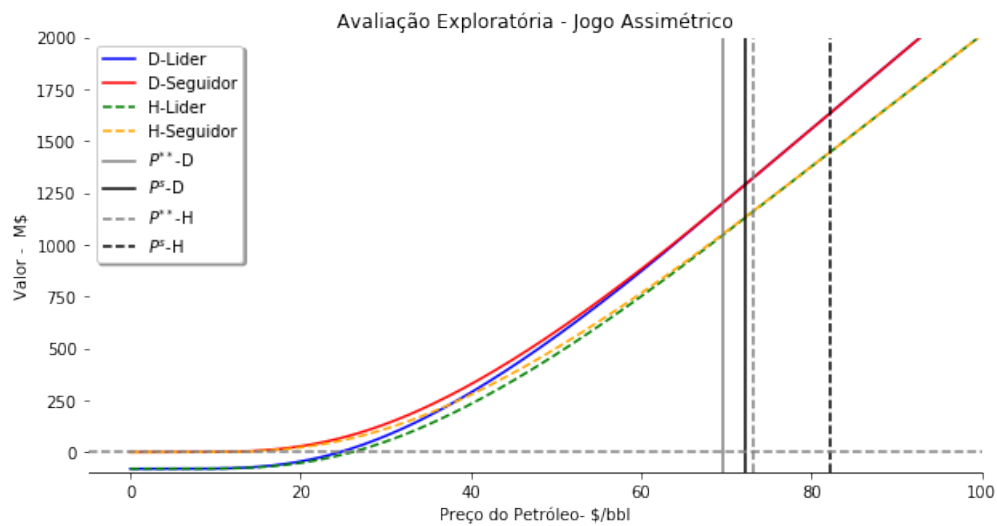


Figura 4.39: Jogo Assimétrico: Preço x Valor - DogFish e Head

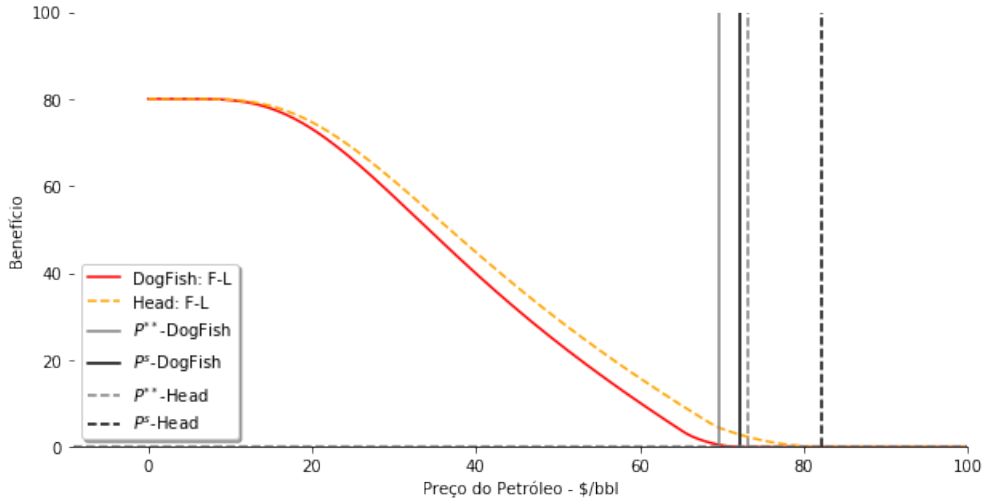


Figura 4.40: Jogo Assimétrico: Benefício da Espera

		<i>J2- Head</i>	
		Investe	Espera
<i>J1 - DogFish</i>	Investe	<u>1316.07</u> ; 1154.16	<u>1316.07</u> ; <u>1156.58</u>
	Espera	<u>1316.07</u> ; <u>1154.16</u>	1312.78 ; <u>1154.16</u>

Tabela 4.17: Forma normal: Jogo Assimétrico - $P=\$73$, $\tau = 3$

Interessante o caso em \$73 dólares o barril, em que possui dois equilíbrio de Nash puros, podendo haver um equilíbrio de Nash misto e portanto, uma guerra de atrito. Contudo, para o Jogador 2, a ação Esperar é dominante em relação a ação investir, ou seja, a estratégia $\{Esperar; Investir\}$ não é equilíbrio. Ademais, ação Investir para o jogador 1 domina em relação a ação de esperar. Isso quer dizer que só há um equilíbrio de Nash, sendo o jogador 1 investir em *DogFish* e o jogador 2 aguardar a informação e perfurar no momento ótimo.

A dominância da ação esperar para o jogador 2 acontece, pois não há custo na espera para esse jogador dado que o preço corrente está abaixo do gatilho exploratório de \$ 73.125 o barril (tabela 4.6). Contudo, o preço corrente está num valor muito próximo, sendo $VME_2(P, t) \sim E_2(P, t)$, levando os *payoffs* serem iguais $L_2 = W_2$ independente da ação do jogador 1.

A dominância da ação investir para o jogador 1 acontece, pois está acima do seu gatilho exploratório, ou seja, há custo de espera. Dado ao custo, o *payoff* W_1 fica abaixo de qualquer outro *payoff* e pelo gatilho. Contudo, como está acima do gatilho simultâneo ($P^s(D)$), leva a opção com informações valer tanto quando o exercício $VME_1(P, t) \sim E_1(P, t)|2$, ou seja, $S_1 = L_1 = F_1$.

Assim o jogador 1 escolhe a ação investir independente da ação do jogador 2.

		J2- Head	
		Investe	Espera
J1 - DogFish	Investe	<u>1557.41</u> ; 1376.04	<u>1557.41</u> ; <u>1376.23</u>
	Espera	<u>1557.41</u> ; <u>1376.04</u>	1553.52 ; 1372.60

Tabela 4.18: Forma normal: Jogo Assimétrico - $P=\$80$, $\tau = 3$

Na tabela (4.18), com esse valor do preço do petróleo, a informação acrescenta pouco ao jogador (\$ 190 mil = 1376.23-1376.04) e nada ao jogador 1. Isso acontece pois estamos próximo do gatilho de jogo simultâneo para o jogador 2 e acima do gatilho simultâneo do jogador 1. Similar ao jogo em preço de 73 dólares o barril (tabela 4.17), a estratégia $\{Espera, Investe\}$ não é equilíbrio, pois para o jogador 1, a ação investe domina de forma fraca a ação espera. Contudo, a ação espera não é dominante para o jogador 2. Isso ocorre pois 80 é acima do gatilho exploratório e gera um custo para esperar ao investidor 2.

		J2- Head	
		Investe	Espera
J1 - DogFish	Investe	<u>1729.80</u> ; <u>1534.52</u>	<u>1729.80</u> ; <u>1534.52</u>
	Espera	<u>1729.80</u> ; <u>1534.52</u>	1725.48 ; 1530.69

Tabela 4.19: Forma normal: Jogo Assimétrico - $P=\$85$, $\tau = 3$

No jogo com preço de 85 dólares o barril (tabela 4.19) indica três equilíbrios, mas somente a estratégia $\{Investe, Investe\}$ é equilíbrio de Nash, pois para os jogadores 1 e 2 a ação investe domina a ação espera.

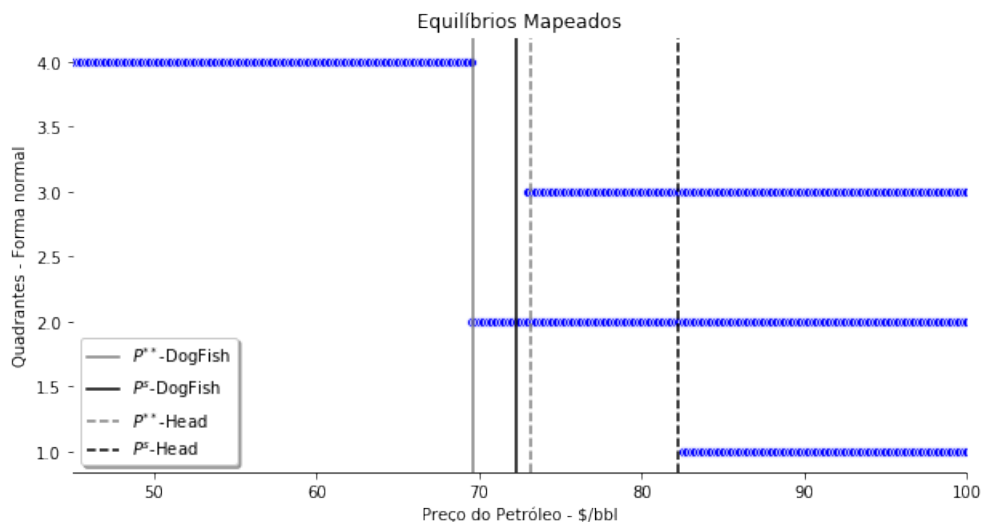


Figura 4.41: Equilíbrios Mapeados - Jogo Assimétrico

Como no jogo simétrico (figura 4.34), os equilíbrios podem ser mapeados preço a preço (figura 4.34). Com o mesmo critério da tabela (4.13), De preços baixos até $P^{**}(D)$, o equilíbrio é a estratégia $\{Espera, Espera\}$. Como discutido, após esse preço, estratégia dominante é $\{Investe, Espera\}$ até o gatilho simultâneo do jogador 2 $P^s(H)$. Preços maiores o equilíbrio se dá em estratégia $\{Investe, Investe\}$. Diferente do jogo simétrico, não há equilíbrio em estratégia mista, portanto, em jogo assimétrico de informação completa não há guerra de atrito.

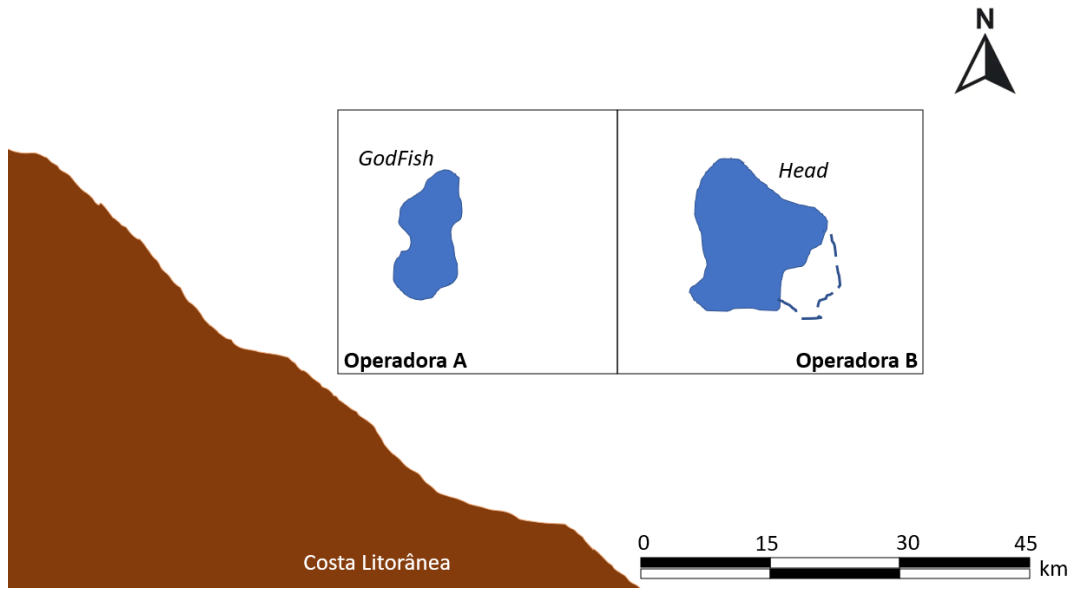


Figura 4.42: Modelo - 2 Blocos - DogFish e Head Expandido

Caso a esperança do volume recuperável da oportunidade *Head* eleve em torno de 15%, com valor médio de $B=1100$ milhões de barris. A figura (4.43) mostra os equilíbrios mapeados. Comparando com a figura (4.41), o gatilho exploratório da oportunidade *Head* alterou ($P^{**}(H)$), preço agora entre o gatilho de explorar e o gatilho simultâneo da oportunidade *DogFish* $[P^{**}(D), P^s(D)]$. Note que por essa mudança, nessa janela de preços ($[P^{**}(H), P^s(D)]$), os jogadores tem estratégia mista entre as ações de investir e esperar, ocorrendo guerra de atrito. Preços maiores, a estratégia dominante é $\{Investe, Espera\}$ sendo que depois do gatilho simultâneo da oportunidade *Head*, o equilíbrio de Nash é $\{Investe, Investe\}$

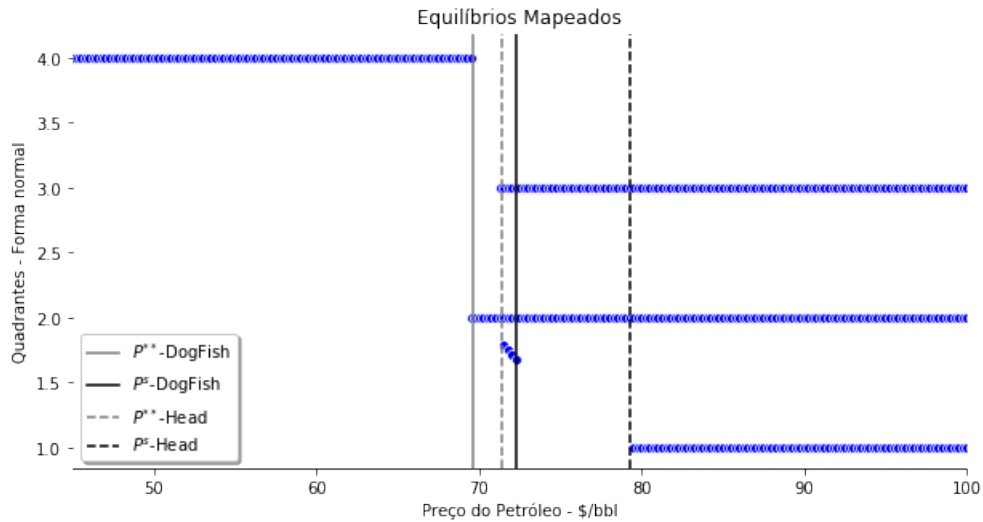


Figura 4.43: Equilíbrios Mapeados - Jogo Assimétrico - B_{Head} 15% maior

Caso a reserva estimada da oportunidade *Head* seja 37% do valor estimado *a priori* ($B_{Head} = 1310$ milhões de barris), há uma sobreposição dos gatilhos exploratórios das duas oportunidades (figura 4.44). Com a mudança de reserva, também altera o preço do gatilho simultâneo $P^s(H)$, contudo ainda é mais elevado que o gatilho simultâneo do prospecto *DogFish*. A reserva de *Head* em que o gatilho exploratório é igual ao gatilho exploratório de *DogFish* é a que gera a mesma razão Valor Investimento da oportunidade *DogFish*.

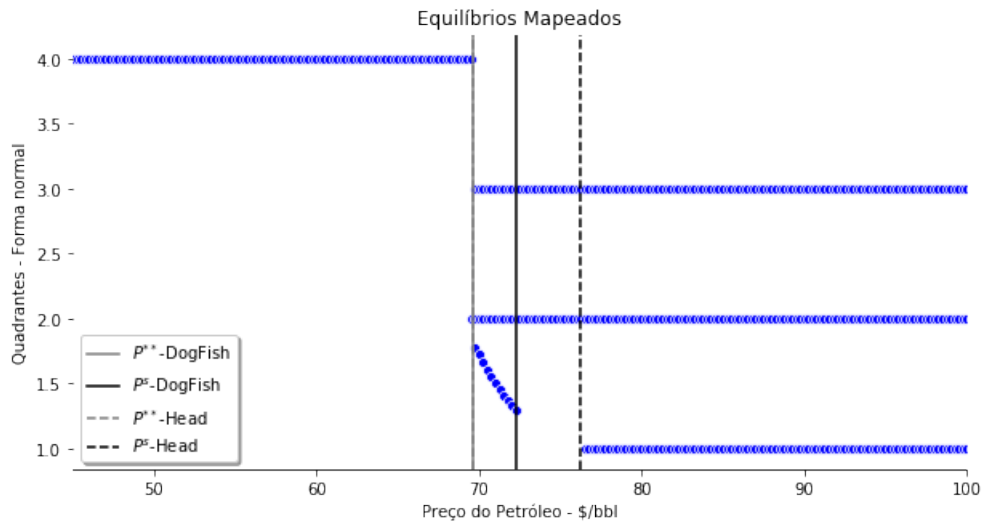


Figura 4.44: Equilíbrios Mapeados - Jogo Assimétrico - B_{Head} 37% maior

Note que esse cenário coloca o ativo *Head* com valoração acima do ativo *DogFish* (figuras 4.45 e 4.39).

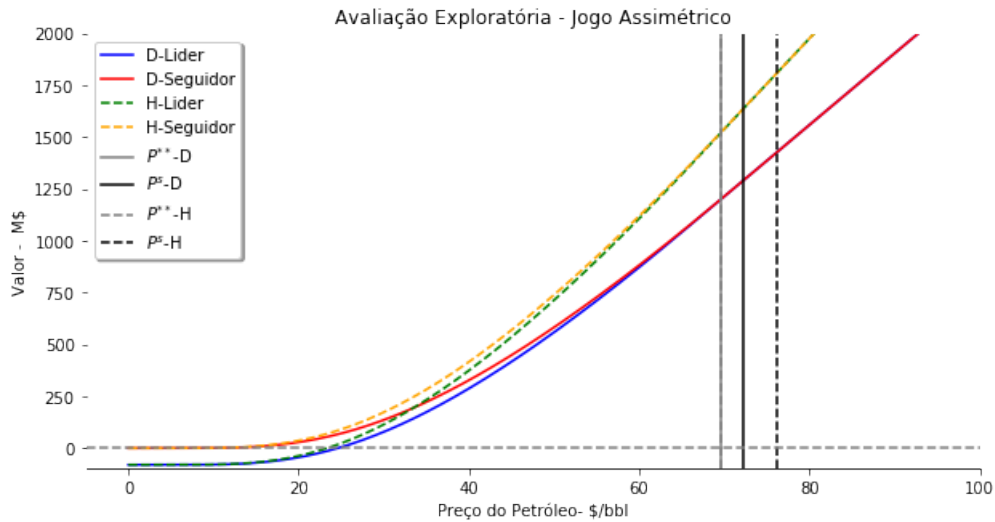


Figura 4.45: J. Assimétrico: Preço x Valor - DogFish e Head - B_{Head} 37% maior

Contudo, a análise de benefício continua similar, somente com menor diferença entre os prêmios da espera (figura 4.46), ainda se diferenciado em preços maiores (figura 4.40).

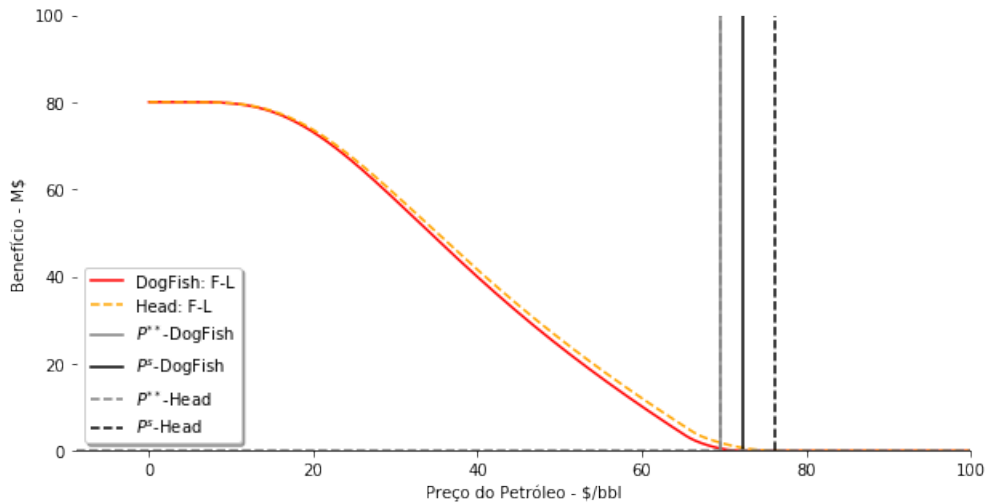


Figura 4.46: Jogo Assimétrico: Benefício da Espera - B_{Head} 37% maior

No jogo da tabela (4.20), temos três equilíbrios de Nash, dois degenerados $=\{Investe, Espera\}$, $\{Espera, Investe\}$ e um de estratégia mista, com probabilidades para *DogFish* de investir com probabilidade de 69.89% e *Head* de investir com probabilidade de 88.08%. A Utilidade para o jogador 1 é 1212.64 e para o jogador 2 é 1537.1. A utilidade não é simétrica entre eles, podendo provocar um distúrbio e levar para ações degeneradas. A guerra de atrito pode haver, mas o equilíbrio misto em jogo assimétrico não é estável em termos de jogos evolucionários.

		J2- <i>Head</i>	
		Investe	Espera
J1 - <i>DogFish</i>	Investe	1212.64 ; 1537.10	<u>1212.64</u> ; <u>1538.75</u>
	Espera	<u>1213.05</u> ; <u>1537.10</u>	1209.61 ; 1533.27

Tabela 4.20: F. normal: J. Assimétrico - $P=\$70$, $\tau = 3$ e $B_{Head} = 37\%$ maior

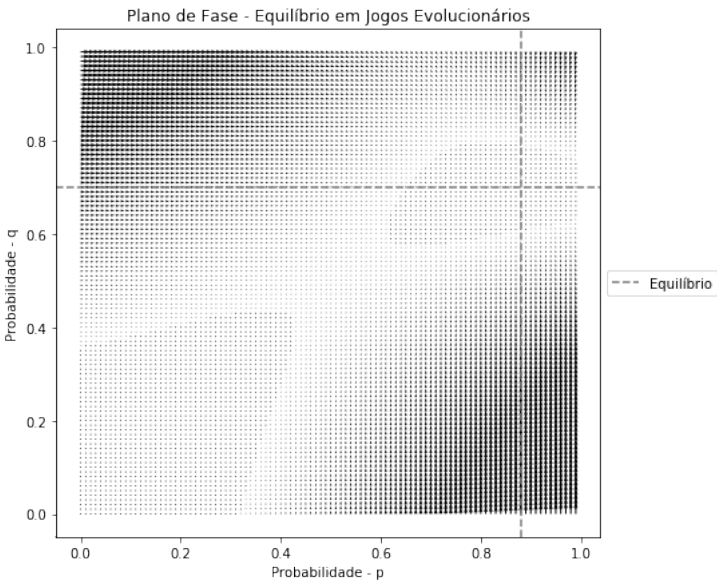


Figura 4.47: Jogo Evolucionário - Plano de Fase - Assimétrico - \$ 70 o barril

Com a possibilidade de se configurar uma guerra de atrito, os operadores podem procurar um ambiente de negociação. Como apresentado na seção (4.2.1), na há grande diferença entre um portfólio com perfuração antes do prospecto *DogFish*, somente próximo do vencimento (figura 4.20), caso preços do petróleo esteja entre 34 e 37 dólares o barril.

Em ativos simétricos, como no caso da seção (4.2.2.1), intuitivamente a divisão é 50% da barganha para cada jogador. Na solução de Nash na barganha cooperativa, o peso da divisão do prêmio é dado pela diferença no ponto de discordância de cada jogador, normalizado pelo dobro do prêmio a ser repartido, adicionado 50% a essa razão. Como cada jogador tem o mesmo ponto de discordância, já que tem o mesmo ativo, resta 50% do prêmio para cada operador.

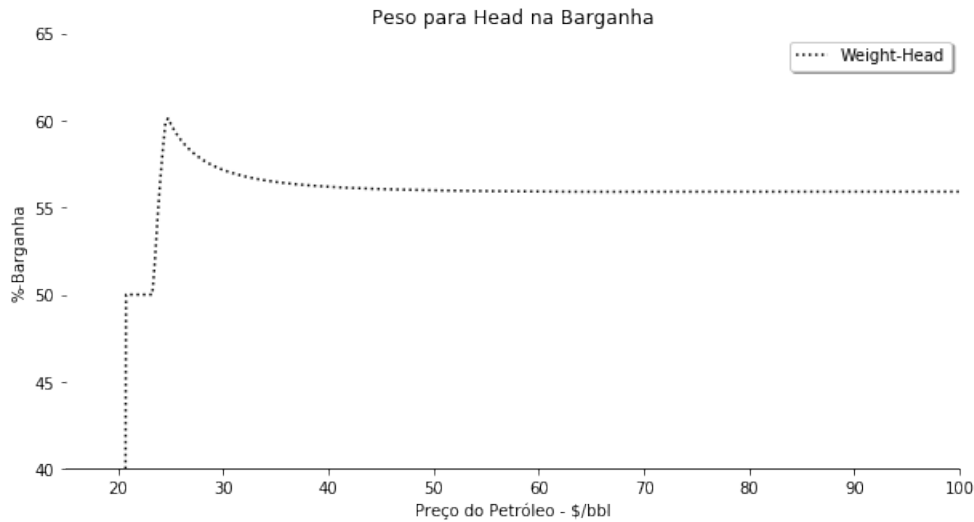


Figura 4.48: Peso na Barganha: DogFish x Head - 35% maior

No caso de jogo assimétrico, os pontos de discordância são diferentes entre si. O ponto de discordância para cada ativo altera em função do preço do barril. O ponto de discordância é quando os investidores decidem perfurar independente do outro agente, ou seja, é igual ao $VME_i(P, t)$. A figura (4.48) apresenta o peso da Barganha do portfólio e a figura (4.49). Abaixo de 25 dólares o barril, o peso para os dois jogadores é nulo, já que não há unidade de valor para compartilhar. Acima, para o detentor do ativo *Head* define um pequeno patamar no valor de 50%, logo eleva para 60.11%, estabilizando em 55.90%.

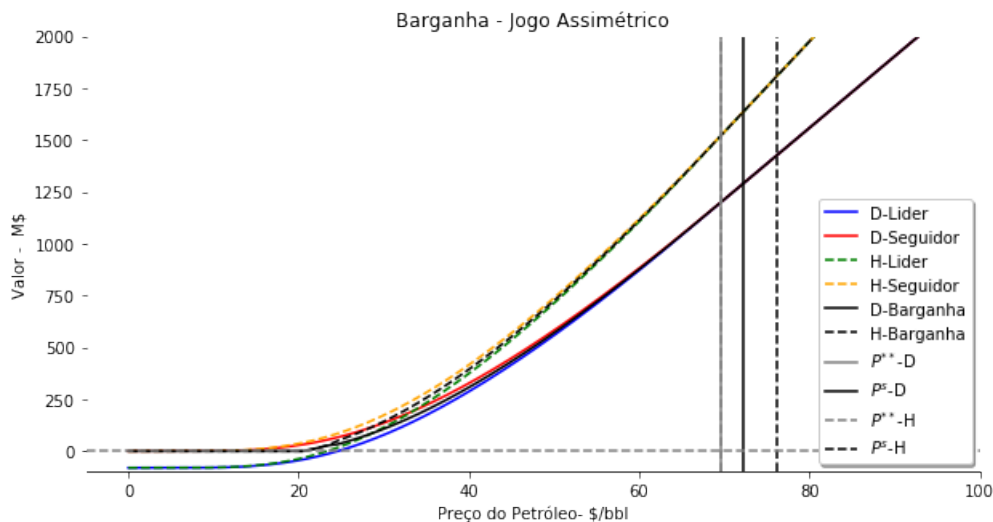


Figura 4.49: Barganha Cooperativa: DogFish x Head - 35% maior

Em detalhe (figura 4.50), no intervalo dos gatilhos, observa que o valor

da barganha é intermediária entre as posições de Líder e Seguidor.

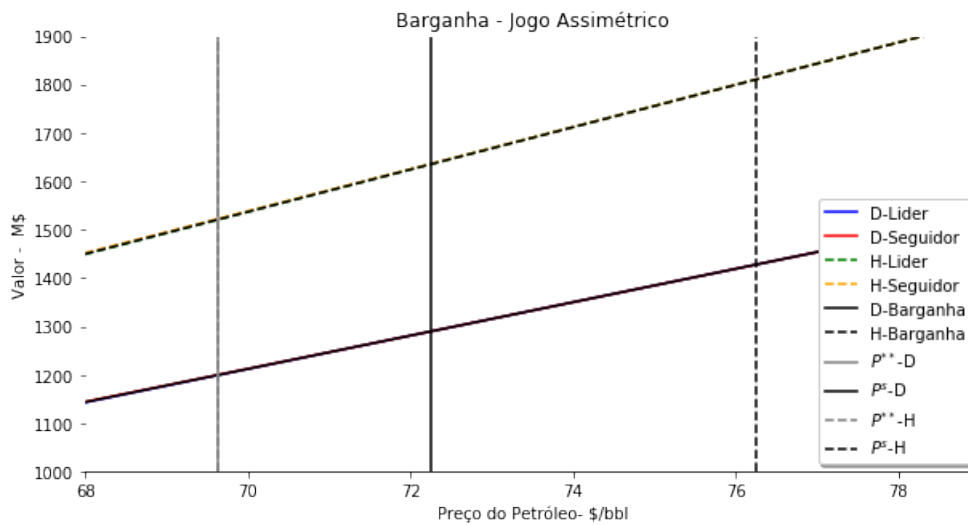


Figura 4.50: Detalhe - Barganha: DogFish x Head - 35% maior

Mas sabe-se que em ambiente de negociação, há readequação da estrutura de desenvolvimento, trocas de informações, sinergia entre projetos e conhecimentos privados que se tornam público entre os participantes. A revelação do conhecimento é representada pela elevação do valor de correlação entre ativos, subindo, por exemplo, para $\rho = 95\%$. Com esse parâmetro, por exemplo, e o barril a \$ 70 no tempo presente, a barganha eleva de \$ 1537.31 milhões para \$ 1538.94 milhões para o jogador que detém *Head*, sendo mais alto que sua posição de Seguidor (\$ 1538.75 milhões) e evidentemente da posição de Líder (\$ 1537.10 milhões). No caso do detentor do ativo *DogFish*, na condição sem interação do negócio, a barganha vale \$ 1212.84 milhões, sendo com interação indo para \$ 1214.45 milhões, maior que sua posição de Seguidor (\$ 1213.05 milhões) e Líder (\$ 1212.64 milhões) (vide jogo 4.20). com esse parâmetros, a barganha é vantajosa para o detentor da oportunidade *Head* a partir de \$ 69.25 o barril e para o detentor da oportunidade *dogfish* a partir de \$ 65 dólares o barril. Como o intervalo de possível Guerra de atrito é \$ 69.62 a \$ 72.25 o barril, a mudança de jogo para barganha cooperativa é factível.

4.2.3

Três prospectos: Carteira com 2 e Prospecto vizinho

Quanto maior o portfólio da empresa, mais elevado é o valor de gatilho (vide exemplo de portfólio com 2 e 3 ativos das figuras 4.22 e xx). Assim, a chance da empresa com maior portfólio entrar num quadro de guerra de atrito é improvável. Ademais, como discutido, devido a assimetria inerente às carteiras das empresas, o equilíbrio estável por jogos evolucionários é degenerado, indicando que haverá perfuração por uma empresa e informação gratuita para a outra. Sabe-se também, que as empresas podem falhar nessa percepção de equilíbrio de longo prazo e ficarem presas na guerra de atrito. Para ocorrer guerra de atrito, deve haver equilíbrio em estratégias mistas.

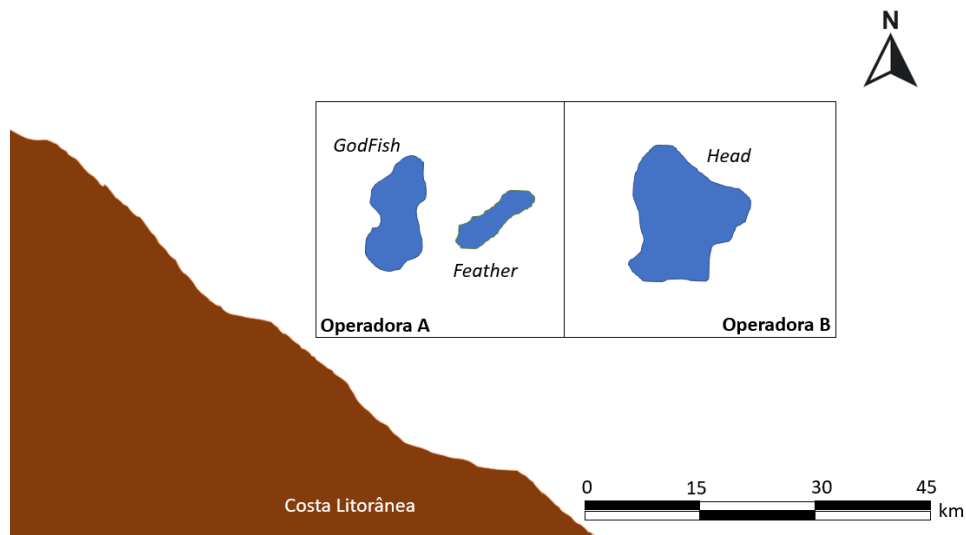


Figura 4.51: Modelo - 2 Blocos - A - DogFish e Feather - B Head

O jogo em portfólio é um pouco distinto do jogo com só um ativo. A forma normal da tabela (4.21) apresenta o modelo, sendo somente o jogador 1 com portfólio:

		Jogador 2	
		Investe	Espera
Jogador 1	Investe	$VME_{\pi_1} ; VME_2$	$VME_{\pi_1} ; E_{2 1}$
	Espera	$\Pi_{1 2} ; VME_2$	$\Pi_1 - c_1 ; E_2 - c_2$

Tabela 4.21: Forma normal: Payoffs no caso de Portfólio

A empresa que possui portfólio pode avaliar todos os ativos separadamente, pelo valor médio esperado aplicado na opção de investir em desenvolvimento ($VME(P, t)$), ou o valor da opção da espera $E(P, t)$. Contudo, sabe-se

que há efeitos complementares de portfólio, sendo a soma dos ativos *stand-alone* menor que os ativos em portfólio. Para a espera em portfólio $\Pi(P, t)$, foi utilizado a equação diferencial xx. Para o valor médio esperado em portfólio, $VME_{\pi}(P, t)$, foi utilizado a equação xx. O valor médio esperado do portfólio assume o risco de perfuração do primeiro poço, contudo a escolha é ótima para a carteira como todo. Ademais, difere do jogo com dois ativos em relação o custo da espera para o agente que possui uma carteira. Nesse caso, o custo é o prêmio perdido do ativo não perfurado, não do portfólio como um todo. Assim, como após o gatilho o agente tem preferência em perfurar o prospecto *DogFish* (figura 4.22), o custo tem relação com o $VME(P, t)$ dessa oportunidade.

As curvas dos prêmios da espera por informações e valor médio esperado no início do contrato são apresentadas na figura (4.52). É possível notar que o prêmio do portfólio é mais elevado que o prêmio do ativo *Head* da outra empresa em qualquer preço, tanto o VME quanto a opção de espera. Porém, o gatilho de investir em exploração é simultâneo, $P^{**}(D + F) \sim P^{**}(H)$ (para o *Head*, tabela 4.6 e a carteira $D + F$, figura 4.22). Contudo, para a empresa detentora do portfólio, o gatilho em que o prêmio de espera por informação é igual ao prêmio do valor monetário esperado é mais baixo ($P^s(D + F) < P^s(H)$). Assim, nessa caso, a empresa a sair da guerra de atrito e investir é a detentora do portfólio.

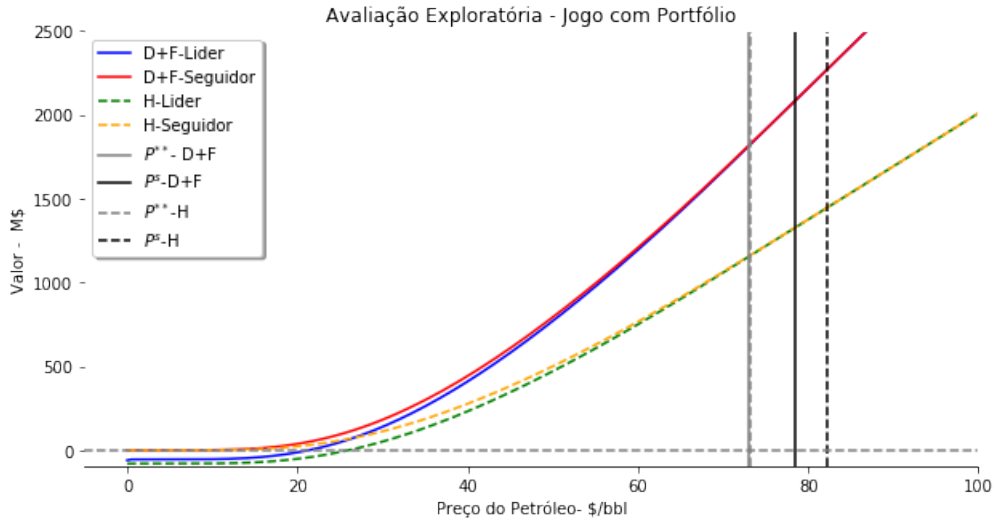


Figura 4.52: Jogo Portfólio: Preço x Valor - $\Pi(D + F)$ e *Head*

Curiosamente, o benefício da espera do portfólio *DogFish + Feather*, logo antes do gatilho de explorar, é maior que a oportunidade *Head*. Contudo, o benefício de espera antes do gatilho de explorar é devido a espera do próprio portfólio, não o benefício da informação da perfuração pelo vizinho. Após o gatilho, que é o início da possível guerra de atrito, o benefício se inverte, sendo

maior para a oportunidade *Head*. Por fim, o benefício do portfólio se torna nulo em $P^s(D + F)$. Essa mudança na curva de benefício se relaciona com a não necessária convexidade do valor da opção de portfólio, ou, pela mesma razão, a não estritamente concavidade da curva de gatilho (figura 4.22). Isso pode gerar respostas ótimas que não são tão intuitivas.

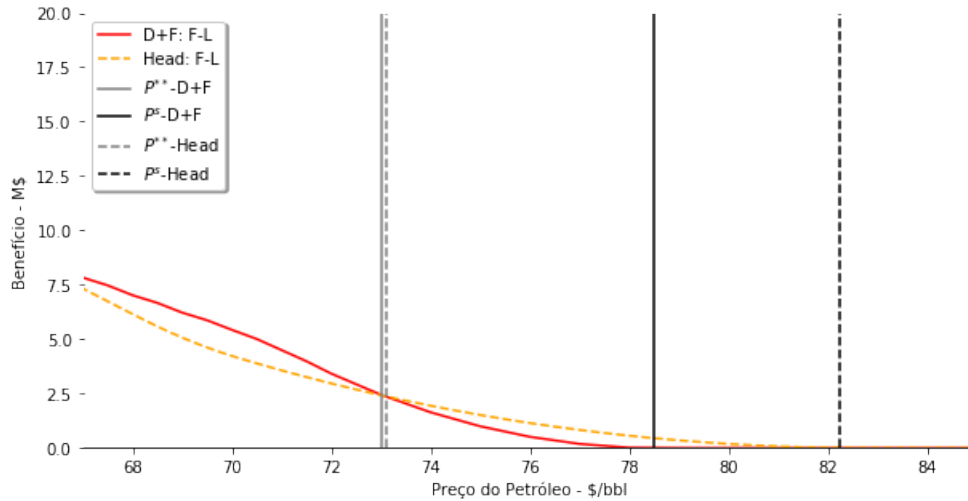


Figura 4.53: Benefício da Espera: $\Pi(D + F)$ e *Head*

Intervalos interessantes para estudo dos jogos na forma normal, n tempo presente ($\tau = 3$):

- $[0; \sim 73.0[- [0; P^{**}(D + F) \text{ e } P^{**}(H)[$
- $[\sim 73.0; 78.5[- [P^{**}(D + F) \text{ e } P^{**}(H); P^s(D + F)[$
- $[78.5; 82.25[- [P^s(D + F); P^s(H)[$
- $[82.25; \infty[- [P^s(H); \infty[$

Como esperado, quando o preço do petróleo está abaixo da curva de gatilho exploratório do portfólio e do ativo *Head*, o equilíbrio ocorre na estratégia pura $\{Espera, Espera\}$.

		J2- <i>Head</i>	
		Investe	Espera
J1 - $\Pi(D + F)$	Investe	770.83 ; 471.13	770.83 ; <u>500.48</u>
	Espera	<u>793.57</u> ; 471.13	<u>786.91</u> ; <u>497.72</u>

Tabela 4.22: Forma normal: $\Pi(D + F)$ e *Head* - $P = \$50$, $\tau = 3$

Com petróleo a \$ 75 dólares o barril, temos três equilíbrios de Nash, dois puros ($\{Investe, Espera\}$, $\{Espera, Investe\}$ e um misto. O equilíbrio misto a esse preço se dá com probabilidade para o detentor do portfólio

perfurar em 66.66% e esperar 33.33%, já proprietário da oportunidade *Head* com 58.15% para perfuração. Essas probabilidades colocam o *payoffs* esperados em estratégia mista em (1912.80; 1217.55). Como dito, em jogos assimétricos, os *payoffs* são diferentes, conduzindo a longo prazo para *payoffs* melhores.

		J2- <i>Head</i>	
		Investe	Espera
J1 - $\Pi(D + F)$	Investe	<u>1912.80</u> ; 1217.55	<u>1912.80</u> ; <u>1219.07</u>
	Espera	<u>1913.80</u> ; <u>1217.55</u>	1911.41 ; 1214.51

Tabela 4.23: Forma normal: $\Pi(D + F)$ e *Head* - $P=\$75$, $\tau = 3$

Situação curiosa relatada na seção (4.2.2.1), também acontece quando petróleo está em 80 dólares o barril nesta jogo (tabela 4.24). A ação investe para o detentor do portfólio domina a ação espera. Com isso, a estratégia $\{Espera, Investe\}$ não é crível. Nesse preço, o detentor do portfólio vai perfurar o ativo *DogFish* e o detentor da oportunidade *Head* vai obter a informação gratuita de sucesso ou fracasso.

		J2- <i>Head</i>	
		Investe	Espera
J1 - $\Pi(D + F)$	Investe	<u>2160.61</u> ; 1376.04	<u>2160.61</u> ; <u>1376.23</u>
	Espera	<u>2160.61</u> ; <u>1376.04</u>	2159.22 ; 1372.60

Tabela 4.24: Forma normal: $\Pi(D + F)$ e *Head* - $P=\$80$, $\tau = 3$

A tabela (4.25) apresenta um jogo acima do gatilho simultâneo da oportunidade *Head* a \$ 85 o barril. O jogo apresenta três equilíbrios de Nash: $\{Investe, Investe\}$, $\{Investe, Espera\}$ e $\{Espera, Investe\}$. Situação similar já foi discutida na seções (4.2.2.1 e 4.2.2.2). O único equilíbrio crível é $\{Investe, Investe\}$, já que para o jogador 1 e 2, a ação investe domina em relação a ação espera.

		J2- <i>Head</i>	
		Investe	Espera
J1 - $\Pi(D + F)$	Investe	<u>2408.42</u> ; <u>1534.52</u>	<u>2408.42</u> ; <u>1534.52</u>
	Espera	<u>2408.42</u> ; <u>1534.52</u>	2407.02 ; 1530.69

Tabela 4.25: Forma normal: $\Pi(D + F)$ e *Head* - $P=\$85$, $\tau = 3$

A consolidação pode ser apresentada em um gráfico preço *versus* estratégia, sendo as estratégias seguindo a tabela (4.13), em que números não inteiros representam estratégia mista (figura 4.54).

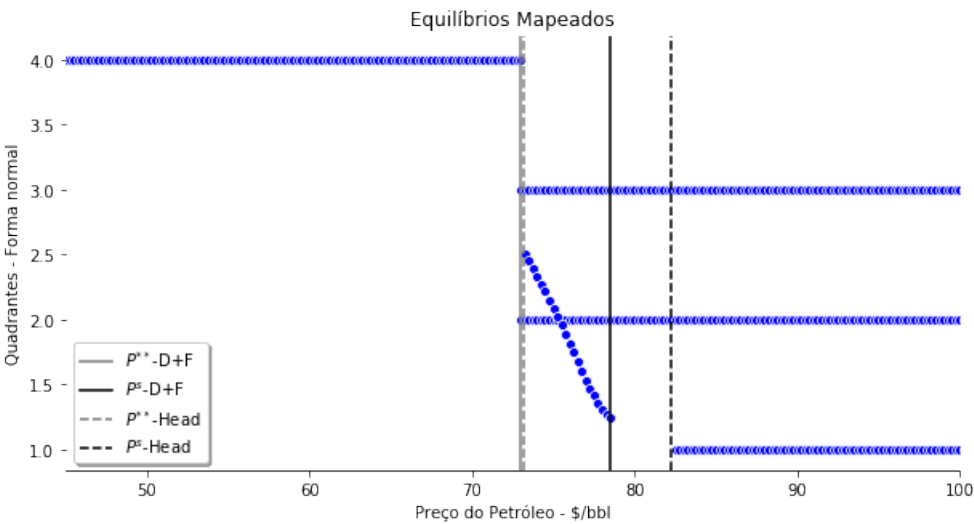


Figura 4.54: Equilíbrios Mapeados - Jogo $\Pi(D + F)$ e *Head*

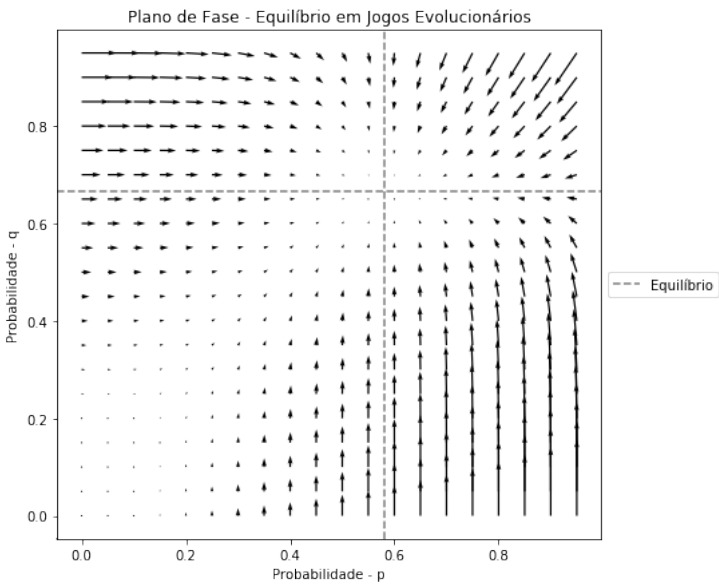


Figura 4.55: Jogo Evolucionário - Plano de Fase - Portfólio -\$ 75 o barril

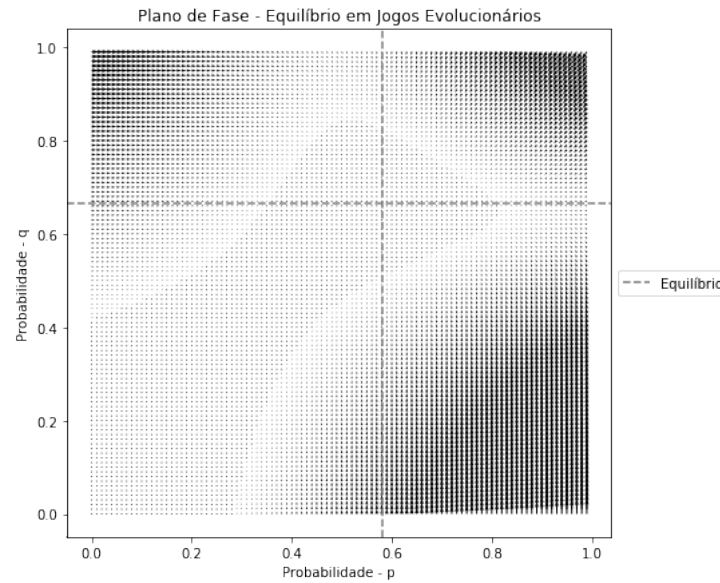


Figura 4.56: J. Evol. - Plano de Fase - Portfólio -\$ 75- Maior Densidade

O possível impasse entre os preços de \$ 78 e 82 pode perdurar e é proposto mudança para o jogo da barganha cooperativa. Funciona como unitização e escolhe qual é o ativo informacional pela nova carteira formada e os benefícios conjuntos são repartidos.

A formulação da carteira é obtida pela calculo do $VME_{\pi D+F+H}$, pela equação xx. A carteira como está, com os ativos *DogFish*, *Feather* e *Head* começa a ter valor a partir de 19.25 dólares o barril. O ativo colocado como preferível para perfuração é o *Feather*, como discutido no final da seção (4.2.1). Esse ativo tem uma importância do portfólio conjunto pois é de maior valor informacional para *DogFish* e *Feather*. No intervalo de preços crítico da possível guerra de atrito, o ativo *Head* tem 38.8% de participação do todo (figura 4.57).

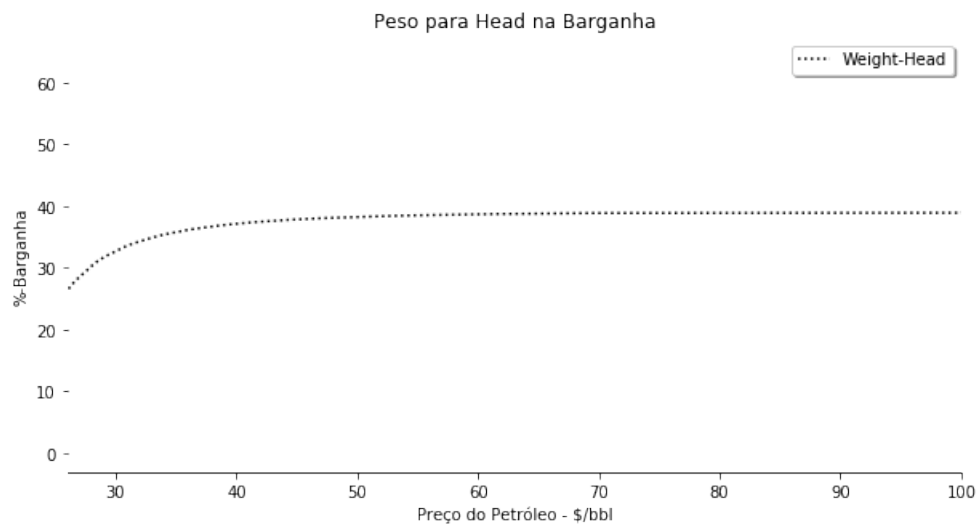


Figura 4.57: Peso na Barganha: DogFish -Feather- Head

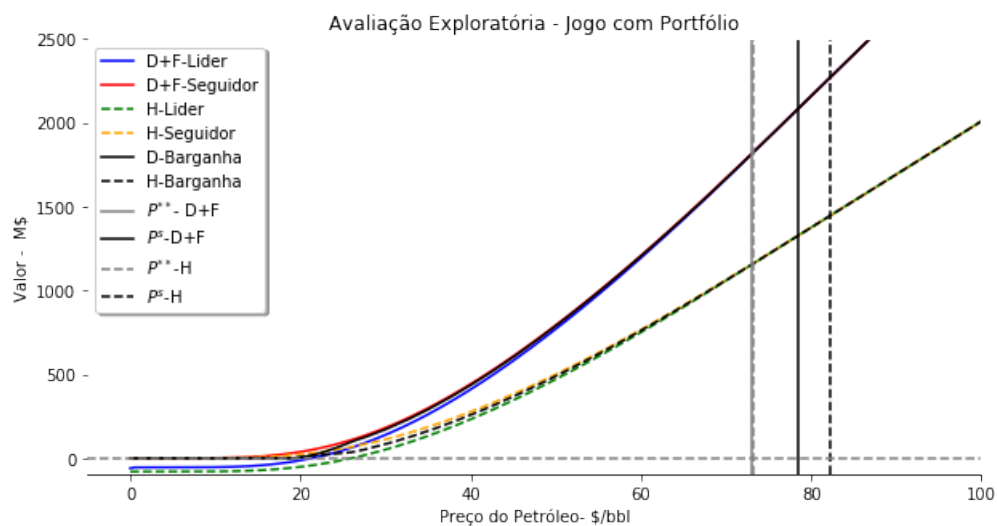


Figura 4.58: Barganha: Preço x Valor - $\Pi(D + F)$, *Head* e $\Pi(D + F + H)$

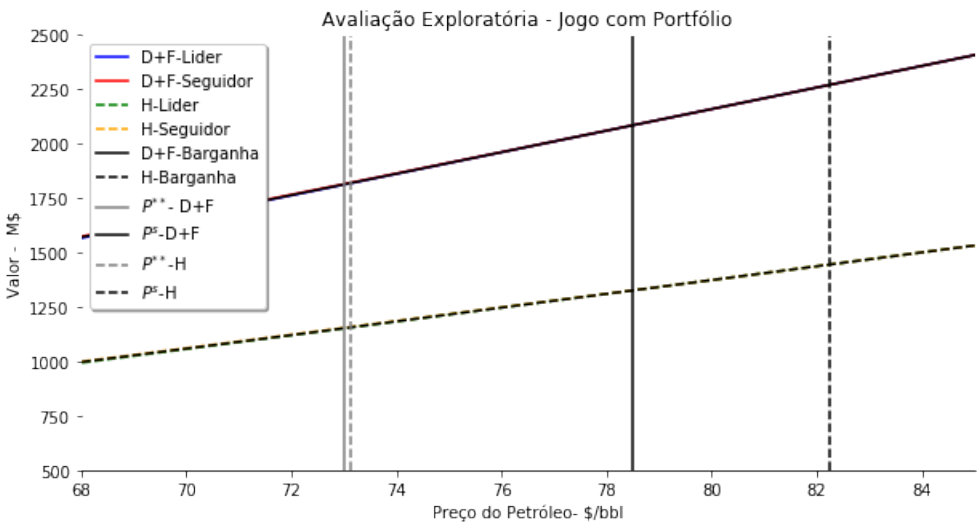


Figura 4.59: Barganha detalhe: Preço x Valor - $\Pi(D + F)$, *Head* e $\Pi(D + F + H)$

ρ	DogFish	Feather	Head
DogFish	1	—	—
Feather	0.7	1	—
Head	0.6	0.7	1

Tabela 4.26: Correlação dos prospectos - Interação do Negócio

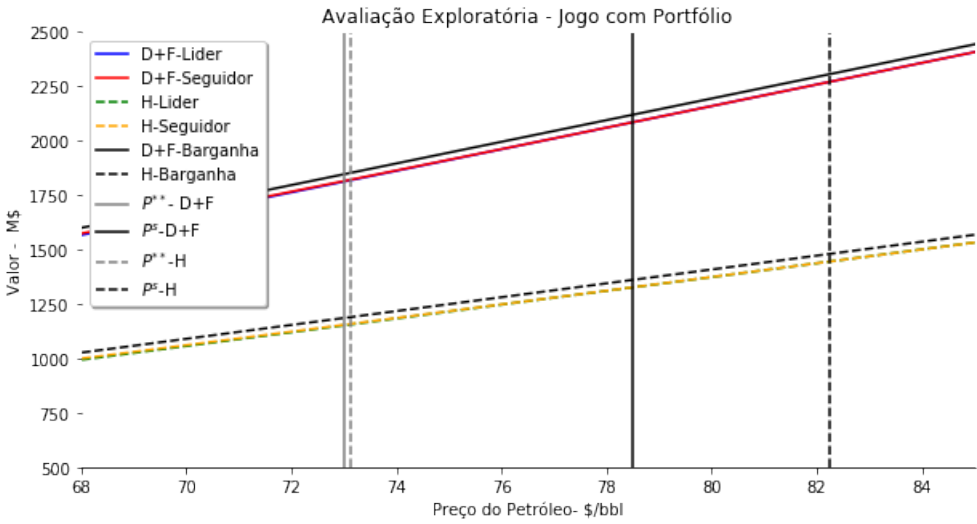


Figura 4.60: Barganha detalhe: Correlação elevada - $\Pi(D + F)$, *Head* e $\Pi(D + F + H)$

5

Conclusão

As conclusões derivam das análises de sensibilidade feitas na seção (4.2).

Alguma perguntas que se deve concluir depois dos modelos e simulações:

- Há diferenças significativas entre valor de um portfólio com análise correlacionada e não correlacionada (como é feito na indústria *stand alone*)? - Espera-se que sim.
- Há diferença entre análise de portfólio correlacionada sem o valor de espera (π) e com o valor de espera (Π)? Espera-se que sim.
- Variações dos parâmetros (sensibilidade) resultam em mudança na :
 - Ordem do portfólio - Sim
 - Valor do Portfólio - Sim
 - Momento de perfuração - Sim
- Qual dos parâmetros é mais sensível? - σ , ρ ?
- Ativo vizinho afeta sensivelmente o portfólio da empresa (um portfólio com opção e correlação - Π)? - Não sei.
 - Mais ativos na vizinhança alteram o portfólio da empresa? - Talvez.
 - Ativos mais correlacionados alteram mais ou menos o portfólio da empresa? - Talvez.
 - Alteram ao ponto de mudar a ordem de investimento? - Não sei.

Referências bibliográficas

- Anderson, S. T., Friedman, D., & Oprea, R. (2010). Preemption games: Theory and experiment. *American Economic Review*, 100(4), 1778–1803.
- Arora, A., & Gambardella, A. (1990). Complementarity and external linkages: the strategies of the large firms in biotechnology. *The journal of industrial economics*, 361–379.
- Arrow, K. J. (1973). *Information and economic behavior* (Tech. Rep.). HARVARD UNIV CAMBRIDGE MA.
- Bishop, D., & Cannings, C. (1978). A generalized war of attrition. *Journal of Theoretical Biology*, 70(1), 85–124.
- Black, F., & Scholes, M. (1973). The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of political economy*, 81(3), 637–654.
- Bratvold, R. B., Bickel, J. E., Lohne, H. P., et al. (2009). Value of information in the oil and gas industry: past, present, and future. *SPE Reservoir Evaluation & Engineering*, 12(04), 630–638.
- Brennan, M., & Schwartz, E. (1978). Finite difference methods and jump processes arising in the pricing of contingent claims: A synthesis. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 13(3), 461–474.
- Brennan, M. J., & Schwartz, E. (1985). Evaluating natural resource investments. *Journal of business*, 135–157.
- Brosch, R. (2001). *Portfolio-aspects in real options management* (Tech. Rep.). Working Paper Series: Finance & Accounting.
- Calvette, L. d. M. D., & Pacheco, M. A. C. (2014). Genetic algorithms and real options on wildcat drilling optimal choice.
- Chevalier-Roignant, B., Flath, C. M., Huchzermeier, A., & Trigeorgis, L. (2011). Strategic investment under uncertainty: A synthesis. *European Journal of Operational Research*, 215(3), 639–650.
- Copeland, T., & Antikarov, V. (2001). *Real options* (No. BOOK). Texere New York.
- Cortazar, G., & Schwartz, E. (1997). Implementing a real option model for valuing an undeveloped oil field. *International Transactions in Operational Research*, 4(2), 125–137.
- Cortazar, G., & Schwartz, E. (2003). Implementing a stochastic model for oil futures prices. *Energy Economics*, 25(3), 215–238.

- Cortazar, G., Schwartz, E., & Casassus, J. (2003). Optimal exploration investments under price and geological—technical uncertainty: a real options model. In *Real r & d options* (pp. 149–165). Elsevier.
- Décaire, P., Gilje, E. P., & Taillard, J. P. (2019). *Real option exercise: Empirical evidence* (Tech. Rep.). National Bureau of Economic Research.
- Dias, & Calvette, L. d. M. D. (2017). Portfolio of oil exploration assets: Learning options, sequential drilling options and defer options. In *Proceedings of the 21th annual international conference on real options. real options group at boston*.
- Dias, M. (2015a). *Análise de investimentos com opções reais: Teoria e prática com aplicações em petróleo e em outros setores (vol. 2: Processos estocásticos e opções reais em tempo contínuo)*.
- Dias, M. (2015b). *Análise de investimentos com opções reais-teoria e prática com aplicações em petróleo e em outros setores-volume 1: Conceitos básicos e opções reais em tempo discreto*. Rio de Janeiro: Interciência.
- Dias, M. A., & Teixeira, J. P. (2009). Continuous-time option games: War of attrition and bargaining under uncertainty in oil exploration. *OPEC, Oil Prices and LNG (Energy Policies, Politics and Prices)*. Hauppauge, NY: Nova Science Publishers, 73–105.
- Dias, M. A. G. (2002). Investment in information in petroleum, real options and revelation. In *Proceedings of the 6th annual international conference on real options. real options group at cyprus, cyprus*.
- Dias, M. A. G. (2004a). Real options, learning measures, and bernoulli revelation processes..
- Dias, M. A. G. (2004b). Valuation of exploration and production assets: an overview of real options models. *Journal of petroleum science and engineering*, 44(1-2), 93–114.
- Dias, M. A. G. (2005). *Opções reais híbridas com aplicações em petróleo*. 2005. 490 f (Unpublished doctoral dissertation). Tese.
- Dias, M. A. G. (2006). Real options theory for real asset portfolios: The oil exploration case. In *10th annual international conference on real options, june 14-17*.
- Dias, M. A. G. (2010). Calculating real option values. *Wiley Encyclopedia of Operations Research and Management Science*.
- Dias, M. A. G., & Teixeira, J. P. (2004). Continuous-time option games part 2: oligopoly, war of attrition and bargaining under uncertainty. In *Working paper, puc-rio, proceeding at 8th annual international conference on real options, montreal, june*.
- Dixit, A. K., & Pindyck, R. S. (1994). *Investment under uncertainty*. Princeton

university press.

- Faúndez, P. I., Marquardt, C., Jara, J. J., & Guzmán, J. I. (2020). Valuation and prioritization of early-stage exploration projects: a case study of cu-ag and au-mineralized systems in the tiltil mining district, chile. *Natural Resources Research*, 1–26.
- Gibson, R., & Schwartz, E. (1990). Stochastic convenience yield and the pricing of oil contingent claims. *The Journal of Finance*, 45(3), 959–976.
- Grenadier, S. R. (1996). The strategic exercise of options: Development cascades and overbuilding in real estate markets. *The Journal of Finance*, 51(5), 1653–1679.
- Grenadier, S. R. (1999). Information revelation through option exercise. *The Review of Financial Studies*, 12(1), 95–129.
- Grenadier, S. R. (2000). Option exercise games: the intersection of real options and game theory. *Journal of Applied Corporate Finance*, 13(2), 99–107.
- Guedes, J., & Santos, P. (2016). Valuing an offshore oil exploration and production project through real options analysis. *Energy Economics*, 60, 377–386.
- Harvey, A. C. (1990). *Forecasting, structural time series models and the kalman filter*. Cambridge university press.
- Haug, E. G. (2007). *Option pricing formulas*. McGraw-Hill, New York.
- Hendricks, K., & Porter, R. H. (1996). The timing and incidence of exploratory drilling on offshore wildcat tracts. *The American Economic Review*, 388–407.
- Hendricks, K., Weiss, A., & Wilson, C. (1988). The war of attrition in continuous time with complete information. *International Economic Review*, 663–680.
- Huisman, K. J., Kort, P. M., et al. (1999). *Effects of strategic interactions on the option value of waiting*. Tilburg University Netherlands.
- Jafarizadeh, B., & Bratvold, R. B. (2015). Oil and gas exploration valuation and the value of waiting. *The Engineering Economist*, 60(4), 245–262.
- Joe, H. (1997). *Multivariate models and multivariate dependence concepts*. CRC Press.
- Kellogg, R. (2014). The effect of uncertainty on investment: Evidence from texas oil drilling. *American Economic Review*, 104(6), 1698–1734.
- Lander, D. M., & Pinches, G. E. (1998). Challenges to the practical implementation of modeling and valuing real options. *The quarterly review of economics and finance*, 38(3), 537–567.
- Lawrence, D. (1999). *The economic value of information*. new york: Springerverlag. Inc.
- Lawrence, D. B. (1987). The assessment of the expected value of information in the binary decision model. *Managerial and Decision Economics*, 8(4),

- 301–306.
- Lawrence, D. B. (2012). *The economic value of information*. Springer Science & Business Media.
- Longstaff, F. A., & Schwartz, E. (2001). Valuing american options by simulation: a simple least-squares approach. *The review of financial studies*, 14(1), 113–147.
- Markowitz, H. (1959). Portfolio selection: Efficient diversification of investments, wiley, new york, new york.
- Martinelli, G., Eidsvik, J., & Hauge, R. (2013). Dynamic decision making for graphical models applied to oil exploration. *European Journal of Operational Research*, 230(3), 688–702.
- Murtha, J., et al. (1995). Estimating reserves and success for a prospect with geologically dependent layers. In *Spe hydrocarbon economics and evaluation symposium*.
- Myerson, R. B. (2009). Learning from schelling's strategy of conflict. *Journal of Economic Literature*, 47(4), 1109–25.
- Paddock, J. L., Siegel, D. R., & Smith, J. (1988). Option valuation of claims on real assets: The case of offshore petroleum leases. *The Quarterly Journal of Economics*, 103(3), 479–508.
- Rose, P. R. (2000). Taking the risk out of petroleum exploration-the adoption of systematic risk analysis by oil and gas corporations during the 1990s.
- Rose, P. R. (2001). *Risk analysis and management of petroleum exploration ventures* (Vol. 12). American Association of Petroleum Geologists Tulsa, OK.
- Rudolph, K. W., & Goulding, F. J. (2017). Benchmarking exploration predictions and performance using 20+ yr of drilling results: One company's experience. *AAPG Bulletin*, 101(2), 161–176.
- Schwartz, E. (1997). The stochastic behavior of commodity prices: Implications for valuation and hedging. *The journal of finance*, 52(3), 923–973.
- Schwartz, E., & Smith, J. (2000). Short-term variations and long-term dynamics in commodity prices. *Management Science*, 46(7), 893–911.
- Shumway, R. H., & Stoffer, D. S. (2017). *Time series analysis and its applications: with r examples*. Springer.
- Smit, H. T., & Trigeorgis, L. (2006). Real options and games: Competition, alliances and other applications of valuation and strategy. *Review of Financial Economics*, 15(2), 95–112.
- Smith, & Thompson, R. (2008). Managing a portfolio of real options: Sequential exploration of dependent prospects. *The Energy Journal*, 43–61.
- Smith, J. M. (1974). The theory of games and the evolution of animal conflicts.

- Journal of theoretical biology*, 47(1), 209–221.
- Stabell, C. B., et al. (2000). Alternative approaches to modeling risks in prospects with dependent layers. In *Spe annual technical conference and exhibition*.
- Tavella, D. (2003). *Quantitative methods in derivatives pricing: an introduction to computational finance* (Vol. 158). John Wiley & Sons.
- Teece, D. J., Pisano, G., & Shuen, A. (1997). Dynamic capabilities and strategic management. *Strategic management journal*, 18(7), 509–533.
- Titman, S. (1985). Urban land prices under uncertainty. *The American Economic Review*, 75(3), 505–514.
- Tourinho, O. A., et al. (1979). *The option value of reserves of natural resources* (Tech. Rep.). University of California at Berkeley.
- Trigeorgis, L. (1993). The nature of option interactions and the valuation of investments with multiple real options. *Journal of Financial and quantitative Analysis*, 28(1), 1–20.
- Trigeorgis, L. (1995). *Real options in capital investment: Models, strategies, and applications*. Greenwood Publishing Group.
- Vassolo, R. S., Anand, J., & Folta, T. B. (2004). Non-additivity in portfolios of exploration activities: A real options-based analysis of equity alliances in biotechnology. *Strategic Management Journal*, 25(11), 1045–1061.
- Wilmott, P. (2006). *Paul wilmott on quantitative finance* (2nd ed.).

A

A - Portfólio Sem Risco

O Ativo base segue um MGB segundo a equação diferencial estocástica abaixo:

$$dP = \mu P dt + \sigma P dz \quad (\text{A-1})$$

Para o derivativo, que será o valor do projeto $V(P, t)$, utiliza-se a fórmula de Itô-Doeblin encontrar sua dinâmica:

$$dV = V_t dt + V_P dP + \frac{1}{2} V_{PP} d[P, P](t) \quad (\text{A-2})$$

Sendo V_P e V_{PP} a primeira e segunda derivada de V em relação a P , V_t a derivada de V em relação ao tempo e $d[P, P](t)$ a covariação quadrática de P . Esse último termo é de ordem dt , sendo no MGB igual a $\sigma^2 P^2 dt$.

Monta-se um portfólio em que não há risco, em que a variação dele rende a taxa livre de risco. Assim, o portfólio pode ser desenhado como comprado no derivativo V e vendido em Δ no ativo base P :

$$\phi = V - \Delta P \quad (\text{A-3})$$

E a variação deste portfólio é igual a

$$d\phi = (dV + \pi(P, t)dt) - \Delta(dP + \delta P dt) = r\phi dt$$

Caso o derivativo já tenha um fluxo de caixa, ele vai gerar $\pi(P, t)$ em dt . O ativo base P paga dividendo δP em dt . Substituindo dV :

$$d\phi = \left(V_t dt + V_P dP + \frac{1}{2} V_{PP} \sigma^2 P^2 dt + \pi(P, t) dt \right) - \Delta (dP + \delta P dt)$$

Substituindo dP :

$$d\phi = V_t dt + V_P \mu P dt + V_P \sigma P dz + \frac{1}{2} V_{PP} \sigma^2 P^2 dt + \pi(P, t) dt - \Delta \mu P dt - \Delta \sigma P dz - \Delta \delta P dt$$

Agrupando dt e dz :

$$d\phi = \left(V_t + V_P \mu P - \Delta \mu P + \frac{1}{2} V_{PP} \sigma^2 P^2 + \pi(P, t) - \Delta \delta P \right) dt + (V_P - \Delta) \sigma P dz$$

Tornando o portfólio neutro ao risco, os termos dz devem ser igual a zero,

ou seja:

$$(V_P - \Delta) \sigma P dz = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \Delta = V_P$$

Assim, a equação $d\phi$ acima fica, cortando também $V_P \mu P dt$, temos:

$$d\phi = V_t + \frac{1}{2} \sigma^2 P^2 V_{PP} dt + \pi(P, t) dt - \delta P V_P dt$$

Como foi visto, a variação de portfólio é igual ao rendimento livre de risco ($d\phi = r\phi dt$), assim:

$$V_t + \frac{1}{2} \sigma^2 P^2 V_{PP} + \pi(P, t) - \delta P V_P = r\phi$$

O portfólio ϕ foi montado na equação (A-3), contudo agora sabe-se o delta hedge ($\Delta = V_P$), portanto:

$$V_t + \frac{1}{2} \sigma^2 P^2 V_{PP} + \pi(P, t) - \delta P V_P = r(V - P V_P)$$

Chegamos na equação diferencial do valor do projeto, como pode ser visto abaixo:

$$V_t + \frac{1}{2} \sigma^2 P^2 V_{PP} + \pi(P, t) - \delta P V_P - rV + rP V_P = 0$$

Arrumando os termos:

$$V_t + \frac{1}{2} \sigma^2 P^2 V_{PP}(P) + (r - \delta) P V_P(P) - rV(P, t) + \pi(P, t) = 0 \quad (\text{A-4})$$

Caso considere que a planta não gera fluxo de caixa, como é a situação de projetos exploratórios, $\pi(P, t)$ é zero, convertendo em uma Equação Diferencial parcial igual a deduzida em [Black and Scholes \(1973\)](#).

B

B - Diferenças Finitas

Materiais de referência :[Black and Scholes \(1973\)](#), [M. Brennan and Schwartz \(1978\)](#), [Tavella \(2003, Cap. 7\)](#), [Haug \(2007, Cap.7\)](#) .

Os métodos de diferenças finitas podem ser classificados em :

- Diferenças Finitas Explícitas
- Diferenças Finitas Implícitas
- Método de Crank-Nicolson

Equação diferencial do Movimento Geométrico Browniano, apresentado em [Black and Scholes \(1973\)](#), mas com ativo S_t que paga dividendos:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (r - \delta) \frac{\partial f}{\partial S} S + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 = r f \quad (\text{B-1})$$

Diferenças Finitas Explícitas

Diferenciação *forward*. Tempo só move para frente. j(tempo) e i(valor) :

$$\frac{\partial f}{\partial t} \approx \frac{f_{j+1,i} - f_{j,i}}{\Delta t} \quad (\text{B-2})$$

Para o delta e gama, utiliza-se a aproximação da diferenciação central. Valor pode mover para qualquer direção.

$$\frac{\partial f}{\partial S} \approx \frac{f_{j+1,i+1} - f_{j+1,i-1}}{2\Delta S} \quad (\text{B-3})$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \approx \frac{f_{j+1,i+1} - 2f_{j+1,i} + f_{j+1,i-1}}{\Delta S^2} \quad (\text{B-4})$$

Aplicando as aproximações (B-2,B-3 e B-4) na equação (B-1), temos:

$$\begin{aligned} \frac{f_{j+1,i+1} - f_{j+1,i-1}}{2\Delta S} + (r - \delta) \frac{f_{j+1,i+1} - 2f_{j+1,i} + f_{j+1,i-1}}{\Delta S^2} S \\ + \frac{1}{2} \frac{f_{j+1,i+1} - 2f_{j+1,i} + f_{j+1,i-1}}{\Delta S^2} \sigma^2 S^2 = r f_{i,j} \quad (\text{B-5}) \end{aligned}$$

Esta equação pode ser reescrita como:

$$f_{i,j} = \frac{1}{1 + r\Delta t} (p_u f_{j+1,i+1} + p_m f_{j+1,i} + p_d f_{j+1,i-1}) \quad (\text{B-6})$$

Onde,

$$p_u = \frac{1}{2} [\sigma^2 i^2 + i(r - \delta)] \Delta t \quad (\text{B-7})$$

$$p_m = 1 - \sigma^2 i^2 \Delta t \quad (\text{B-8})$$

$$p_d = \frac{1}{2} [\sigma^2 i^2 - i(r - \delta)] \Delta t \quad (\text{B-9})$$

Na implementação do algoritmo, é necessário ter um valor máximo de S . [Wilmott \(2006, Cap.77, p.1202\)](#) recorda da equação de Black-Scholes, onde há integração de zero a infinito dos possíveis valores no vencimento. Porém, ressalta que não precisa ser um valor tão alto. Primeiro, ainda que a soma seja até infinito, a probabilidade de ocorrência é baixa para valores altos. Segundo, quando maior a malha, mais consumo de tempo de máquina. Assim, recomenda valores no máximo 3 ou 4 vezes o S inicial. [M. A. G. Dias \(2005, Cap.26, p. 408\)](#) sugere o uso de uma porcentagem acima do gatilho da opção perpétua, já que a opção perpétua tem gatilho sempre acima da opção com vencimento. Também atenta a questão da estabilidade, vinculando a discretização S com o tempo, assim como [Haug \(2007, Chap.7, p.337\)](#) e [Tavella \(2003, Cap.7, p.225\)](#).

B.0.0.0**Solução Numérica**

Result: *Op. Americana de Compra e Gatilho - DF Explícita*

Definição do S_{max} ;

Definição dos passos ΔS (M) e Δt (N) ;

Localização do S de entrada no vetor S_{Grid} ;

Cálculo da taxa de desconto;

for j em M - *cálculo no vencimento* **do**

 Cálculo do vetor S;

$F_{N,j} = \max[0; S_j - I]$;

end

Gatilho no vencimento = I;

for i em $N-1$ - *backward* **do**

for j em M **do**

$F_{i,j}$ = ponderação da opção no tempo posterior (F_{i+1}), em
diferentes valores de V (F_{j-1}, F_j e F_{j+1}) por p_u, p_m e p_d ,
descontado pela taxa livre de risco;

if ($F_{i,j}$ for maior que $S_j - I$) e ($F_{i,j-1}$ for menor $S_{j-1} - I$) **then**
 Gatilho = Média de V_j e S_{j-1}

end

$F_{i,j} = \max[F_{i,j}; S_j - I]$

end

end

Vetor Gatilho;

Opção Hoje = $F_{0, S_{Grid}}$.

Algorithm 1: DF Explícita - Opção de Compra e Gatilho