



Lucas Mesz

Portfólio Exploratório: Efeitos da Guerra de Atrito e Revelação da Informação

Dissertação de Mestrado

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-graduação em Finanças do Departamento de Administração da PUC-Rio.

Orientador : Prof. Luiz Eduardo Teixeira Brandão
Co-orientador: Prof. Marco Antonio Guimarães Dias

Rio de Janeiro
Março de 2021

Lucas Mesz

Portfólio Exploratório: Efeitos da Guerra de Atrito e Revelação da Informação

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-graduação em Finanças do Departamento de Administração da PUC-Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

Prof. Luiz Eduardo Teixeira Brandão

Orientador

Departamento de Administração – PUC-Rio

Prof. Marco Antonio Guimarães Dias

Co-orientador

Departamento de Engenharia Elétrica – PUC-Rio

Prof. Paulo Roberto Gomes Brandão

Universidade Federal de Minas Gerais – UFMG

Prof. Leonardo Evangelista Lagoeiro

Universidade Federal de Ouro Preto – UFOP

Dr. Reiner Neumann

Centro de Tecnologia Mineral – CETEM/MCTI

Rio de Janeiro, 15 de Março de 2021

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

Lucas Mesz

Graduado em Geologia pela Universidade de São Paulo (2008) e graduado em Ciência Econômica pela Universidade Estadual do Rio de Janeiro (2016). Possui especialização em geofísica pela Petrobras, carreira que atua desde 2009. Trabalha em exploração de Petróleo e Gás nas bacias da Costa Brasileira.

Ficha Catalográfica

Mesz, Lucas

Portfólio Exploratório: Efeitos da Guerra de Atrito e Revelação da Informação / Lucas Mesz; orientador: Luiz Eduardo Teixeira Brandão; co-orientador: Marco Antonio Guimarães Dias. – Rio de Janeiro: PUC-Rio, Departamento de Administração , 2021.

v., 149 f: il. color. ; 30 cm

Dissertação (mestrado) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Administração .

Inclui bibliografia

1. Administração de Empresas – Teses. 2. Finanças Corporativas – Teses. 3. Opções Reais. 4. Opção de Espera. 5. Opção de Aprendizado. 6. Guerra de Atrito. 7. Barganha Cooperativa. 8. Portfólio Exploratório. I. Brandão, Luiz Eduardo. II. Dias, Marco Antônio Guimarães. III. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Administração . IV. Título.

CDD: 620.11

Aos meus pais, Ivete e Edmir Mesz,
pelo amor, suporte e incentivo.

Agradecimentos

Gostaria de agradecer à tríade: Fernando Antonio Lucena Aiube, Marco Antonio Guimarães Dias e Luiz Eduardo Teixeira Brandão. Tudo que sei sobre Opções Reais derivaram desses grandes condutores do ensino.

Agradeço à Petrobras e aos profissionais que incentivaram esta pesquisa.

Em especial, agradeço à Camila dos Anjos Barros, pela atenção, carinho e compreensão presentes o tempo todo.

Resumo

Mesz, Lucas; Brandão, Luiz Eduardo; Dias, Marco Antônio Guimarães. **Portfólio Exploratório: Efeitos da Guerra de Atrito e Revelação da Informação**. Rio de Janeiro, 2021. 149p. Dissertação de Mestrado – Departamento de Administração, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Este trabalho modela a estratégia exploratória sequencial de ativos de óleo e gás em diferentes níveis de incerteza. Considera a consolidação da carteira pelo conceito de revelação da informação e as vantagens da aplicação da teoria do Valor da Informação para a sequência ótima de perfuração. Inclui a incerteza de preços com o modelo Geométrico Browniano para o preço *spot* do barril de petróleo. Dado o tempo de contrato de concessão de exploração de petróleo, analisa o valor das opções dos ativos e do portfólio exploratório. Além dessas incertezas, o modelo considera o efeito competitivo de outra empresa em um jogo conhecido como Guerra de Atrito. Esse jogo ocorre quando os ativos têm correlações e as empresas aguardam informações gratuitas de ocorrência de hidrocarboneto.

Os resultados apontam que é melhor para empresa analisar os ativos com o valor da espera, sendo melhor a análise de portfólio exploratório, que combina valor da espera com o valor da informação. A interação estratégica é relevante, essencialmente quando os portfólios dos dois agentes têm gatilhos exploratórios similares. Em jogos assimétricos, o que define a degeneração para ação de perfurar é a relação do benefício que a empresa tem na espera por informações. Caso haja perpetuação da guerra de atrito, propõe uma mudança de jogo para o jogo de barganha cooperativa. Nessa mudança, deve haver troca de informações, sendo a informação privada mais informacional que a informação pública. No caso de pequena melhora na medida de aprendizado, já torna vantajosa para ambos os jogadores a mudança para a barganha cooperativa.

Palavras-chave

Opções Reais Opção de Espera Opção de Aprendizado Guerra de Atrito Barganha Cooperativa Portfólio Exploratório

Abstract

Mesz, Lucas; Brandão, Luiz Eduardo (Advisor); Dias, Marco Antônio Guimarães (Co-Advisor). **Exploration Portfolio: War of Attrition and Information Revelation**. Rio de Janeiro, 2021. 149p. Dissertação de mestrado – Departamento de Administração, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

The aim of this research is to model the sequential strategy of exploratory oil and gas assets under uncertainty. For that, considers revelation of information and value of information for portfolio valuation. Includes price uncertainty by Geometric Brownian motion for *spot* oil price. Besides that, the dead line of concession exploratory contract is the time boundary of defer options of the assets and the portfolio. In addition, the model considers a competitive effect of other company by the game known as the War of Attrition. This game occurs when assets have correlations and companies wait as a free-rider for information of occurrence of hydrocarbons.

The results show that is better for the company to analyze the assets with the value of the wait and even better by exploratory portfolio analysis, which combines the defer options with the value of information. The strategic interaction is relevant, essentially when the portfolios of the two agents have similar exploratory triggers. In asymmetric games, what defines the degeneration for drilling is the relation of the benefit that the company has in waiting for information. If there is a perpetuation of the war of attrition, the agents can change to a cooperative bargaining game. For that, there must be an exchange of information, with private information being more valuable than public information. In the case of marginal improvement in the learning measure, already turns advantageous for both players to change the game to cooperative bargaining.

Keywords

Real Options Defer Option Learning Option War of Attrition Cooperative Bargain Exploration Portfolio

Sumário

1	Introdução	15
1.1	Contextualização	15
1.2	Problema de Pesquisa	16
1.3	Objetivos	17
1.3.1	Geral	18
1.3.2	Específicos	18
1.4	Justificativa	19
1.5	Contribuições	20
1.5.1	Gerencial	20
1.5.2	Teórica	20
2	Referencial Teórico	22
2.1	Opções Reais	22
2.1.1	Incerteza de Preços	24
2.1.2	Opções Reais: Recursos Minerais e Indústria de Óleo e Gás	27
2.2	Portfólio de Opções Reais	28
2.2.1	Valor da Informação – Incerteza Técnica	30
2.3	Teoria dos Jogos : Guerra de Atrito e Barganha Cooperativa	34
2.4	Teoria das Opções e Jogos	35
3	Design empírico	38
3.1	Apresentação das variáveis	38
3.2	Modelo Paramétrico - VPL e VME	39
3.3	Incerteza de Preços	41
3.4	Incerteza técnica - Fator de Chance	47
3.4.1	Dependência - Função Bernoulli Bivariada	51
3.5	Incerteza estratégica	56
3.6	Portfólio	69
3.7	Modelos	72
3.7.1	Um, Dois e Três prospectos: Um bloco	72
3.7.2	Dois prospectos: Um em cada bloco	73
3.7.3	Três prospectos: Carteira com 2 e prospecto vizinho	74
4	Resultados	76
4.1	Dados de Entrada	76
4.1.1	Hiperparâmetros do Preço do Petróleo: MGB	76
4.1.2	Investimento em Desenvolvimento x Volume Recuperável	83
4.1.3	Taxa livre de risco	84
4.1.4	Parâmetros Exógenos	85
4.1.5	Parâmetros Endógenos	86
4.2	Modelos	87
4.2.1	Um, Dois e Três prospectos: Um bloco	87
4.2.2	Dois prospectos: Um em cada bloco	100
4.2.2.1	Jogo Simétrico: Atrito à Barganha	100

4.2.2.2	Jogo Assimétrico: Atrito (?) à Barganha	113
4.2.3	Três prospectos: Carteira com 2 e prospecto vizinho	125
5	Conclusão	134
A	A - Portfólio Sem Risco	145
B	B - Diferenças Finitas	147

Lista de figuras

Figura 3.1	Revelação no sexto investimento - FC e Probabilidade	56
Figura 3.2	Jogo Dinâmico: Guerra de Atrito	57
Figura 3.3	Modelo Básico - Guerra de Atrito - Prob. de Continuar	60
Figura 3.4	Modelo Básico - Guerra de Atrito - Prob. de Fracassar	61
Figura 3.5	Modelo Básico - Guerra de Atrito - Custo Esperado	62
Figura 3.6	J. Evol. Infinito - Guerra de Atrito - Modelo Básico	64
Figura 3.7	J. Evol. - Plano de Fase - Simétrico -Modelo Básico	64
Figura 3.8	J. Evol. - P.de Fase Denso - Simétrico -Modelo Básico	65
Figura 3.9	FC e VME condicionais	70
Figura 4.1	Preço Spot- WTI- EIA	77
Figura 4.2	Preços Futuros - WTI	78
Figura 4.3	Estrutura a Termo da Volatilidade	79
Figura 4.4	Taxa livre de Risco - Treasury 3 month	80
Figura 4.5	Retorno de Conveniência Implícito - δ	80
Figura 4.6	Estrutura a termo do Retorno de Conveniência - Média	81
Figura 4.7	Estrutura a termo do Retorno de Conveniência - $\bar{\delta}$	82
Figura 4.8	Filtro de Kalman - Estimado, Suavizado e Observado	83
Figura 4.9	Investimento em Desenvolvimento - Volume Recuperável	84
Figura 4.10	Título público Americano - 20 anos	85
Figura 4.11	Modelo Geral - Blocos Exploratórios	87
Figura 4.12	Opções em Petróleo - Conceitos em Dias (2005, Cap .27)	88
Figura 4.13	Curvas de Gatilho - DogFish	90
Figura 4.14	Opção de Explorar - DogFish	91
Figura 4.15	Métricas de Avaliação Exploratória - DogFish - $\tau = 3$ anos	91
Figura 4.16	Único Bloco - DogFish e Head	93
Figura 4.17	Gatilho do Portfólio - Head-DogFish	94
Figura 4.18	Único Bloco - DogFish e Head com Volume Maior	94
Figura 4.19	Gatilho -II - DogFish e Head com expansão de 35% de B	95
Figura 4.20	Bloco A- DogFish e Feather	96
Figura 4.21	Gatilho do Portfólio - DogFish e Feather	97
Figura 4.22	Modelo - Único Bloco	97
Figura 4.23	Gatilho do Portfólio - DogFish, Feather e Head	98
Figura 4.24	Modelo - DogFish x DogFish	100
Figura 4.25	Jogo Evolucionário Infinito - \$ 50/bbl	103
Figura 4.26	Jogo Evol. - P. de Fase - Simétrico -\$ 50/bbl	104
Figura 4.27	Jogo Evolucionário Infinito - \$ 72/bbl	104
Figura 4.28	Jogo Evol. - P. de Fase - Simétrico -\$ 72/bbl	105
Figura 4.29	Jogo Evolucionário Infinito - \$ 80/bbl	105
Figura 4.30	Jogo Evol. - P. de Fase - Simétrico -\$ 80/bbl	106
Figura 4.31	Guerra de Atrito: DogFish x DogFish - $\rho = 60\%$	106
Figura 4.32	Detalhe - G. de Atrito: DogFish x DogFish - $\rho = 60\%$	107
Figura 4.33	Simulação de Monte Carlo e Gatilho	108
Figura 4.34	Histograma - Início da Guerra de Atrito	108
Figura 4.35	Equilíbrios Mapeados - Jogo Simétrico	109

Figura 4.36	Barganha Cooperativa: DogFish x DogFish - $\rho = 60\%$	111
Figura 4.37	Detalhe - Barganha: DogFish x DogFish - $\rho = 60\%$	111
Figura 4.38	Detalhe - Barganha: DogFish x DogFish - $\rho = 80\%$	112
Figura 4.39	Modelo - 2 Blocos - DogFish e Head	113
Figura 4.40	Jogo Assimétrico: Preço x Valor - DogFish e Head	115
Figura 4.41	Jogo Assimétrico: Benefício da Espera	115
Figura 4.42	Equilíbrios Mapeados - Jogo Assimétrico	117
Figura 4.43	Modelo - 2 Blocos - DogFish e Head Expandido	118
Figura 4.44	Equil. Mapeados - J. Assimétrico - B_{Head} 15% maior	118
Figura 4.45	Equil. Mapeados - J. Assimétrico - B_{Head} 37% maior	119
Figura 4.46	Preço x Valor - DogFish e Head - B_{Head} 37% maior	120
Figura 4.47	Benefício da Espera -D. e H. - B_{Head} 37% maior	120
Figura 4.48	J. Evol. - P. de Fase - Assimétrico -\$ 70/bbl	121
Figura 4.49	Peso na Barganha: DogFish x Head - 35% maior	122
Figura 4.50	Barganha Cooperativa: DogFish x Head - 35% maior	123
Figura 4.51	Detalhe - Barganha: DogFish x Head - 35% maior	123
Figura 4.52	Modelo - 2 Blocos - A - DogFish e Feather - B Head	125
Figura 4.53	Jogo Portfólio: Preço x Valor - $\Pi(D + F)$ e $Head$	127
Figura 4.54	Benefício da Espera: $\Pi(D + F)$ e $Head$	127
Figura 4.55	Equilíbrios Mapeados - Jogo $\Pi(D + F)$ e $Head$	129
Figura 4.56	J. Evol. - P. de Fase - Portfólio -\$ 75/bbl	130
Figura 4.57	J. Evol. - P. de Fase Denso - Portfólio -\$ 75/bbl	130
Figura 4.58	Peso na Barganha: DogFish -Feather- Head	131
Figura 4.59	Barganha Coop.: $\Pi(D + F)$, $Head$ e $\Pi(D + F + H)$	132
Figura 4.60	Detalhe - B. Coop.: $\Pi(D + F)$, $Head$ e $\Pi(D + F + H)$	132
Figura 4.61	Detalhe - B. Coop.: maior ρ - $\Pi(D + F)$, $Head$ e $\Pi(D + F + H)$	133

Lista de tabelas

Tabela 3.1	Distribuição Bivariada de Bernoulli	52
Tabela 3.2	Simulação: Bernoulli Bivariada	54
Tabela 3.3	Subjogo 2 - Guerra de Atrito	58
Tabela 3.4	Subjogo 2 - Guerra de Atrito - Custo afundado	58
Tabela 3.5	Subjogo 1 - Guerra de Atrito - $\{E_2, R_2\}$	58
Tabela 3.6	Subjogo 1 - Guerra de Atrito - $\{R_2, E_2\}$	58
Tabela 3.7	Subjogo 1 - Guerra de Atrito - Estratégia mista	59
Tabela 3.8	Forma normal: Guerra de Atrito por Informações	65
Tabela 3.9	Forma normal: Payoffs- 2 prospectos	74
Tabela 3.10	Forma normal: Payoffs no caso de Portfólio	75
Tabela 4.1	Parâmetros estimados - Filtro de Kalman	83
Tabela 4.2	Parâmetros Exógenos Estimados	85
Tabela 4.3	Parâmetros Endógenos dos Prospectos	86
Tabela 4.4	Correlação dos prospectos da bacia	86
Tabela 4.5	Avaliação da oportunidade <i>DogFish</i> - $\tau=3$ anos	89
Tabela 4.6	Avaliação das oportunidades <i>stantd-alone</i> - $\tau=3$ anos	92
Tabela 4.7	Avaliação dos Portfólios - $\tau=3$ anos	99
Tabela 4.8	Forma normal: Guerra de Atrito	101
Tabela 4.9	Forma normal: Payoffs	102
Tabela 4.10	Forma normal: Jogo Simétrico- $P=\$50, \rho = 60\%, \tau = 3$	102
Tabela 4.11	Forma normal: Jogo Simétrico - $P=\$72, \rho = 60\%, \tau = 3$	103
Tabela 4.12	Forma normal: Jogo Simétrico - $P=\$80, \rho = 60\%, \tau = 3$	103
Tabela 4.13	Intervalo no Preço do Barril- G. de Atrito - J. Sim.	107
Tabela 4.14	Simbologia dos Quadrantes	109
Tabela 4.15	U_i - Divisão da Barganha Cooperativa - M\$	112
Tabela 4.16	Forma normal: Jogo Assimétrico - $P=\$50, \rho = 50\%, \tau = 3$	114
Tabela 4.17	Forma normal: Jogo Assimétrico - $P=\$72, \rho = 50\%, \tau = 3$	114
Tabela 4.18	Forma normal: Jogo Assimétrico - $P=\$73, \tau = 3$	116
Tabela 4.19	Forma normal: Jogo Assimétrico - $P=\$80, \tau = 3$	116
Tabela 4.20	Forma normal: Jogo Assimétrico - $P=\$85, \tau = 3$	117
Tabela 4.21	F. normal: J. Assim. - $P=\$70, \tau = 3$ e $B_{Head}=37\%$ maior	121
Tabela 4.22	Forma normal: Payoffs no caso de Portfólio	126
Tabela 4.23	Forma normal: $\Pi(D + F)$ e <i>Head</i> - $P=\$50, \tau = 3$	128
Tabela 4.24	Forma normal: $\Pi(D + F)$ e <i>Head</i> - $P=\$75, \tau = 3$	128
Tabela 4.25	Forma normal: $\Pi(D + F)$ e <i>Head</i> - $P=\$80, \tau = 3$	129
Tabela 4.26	Forma normal: $\Pi(D + F)$ e <i>Head</i> - $P=\$85, \tau = 3$	129
Tabela 4.27	Correlação dos prospectos - Interação pelo Negócio	133

[professor de Ottilie] "Contudo, existem frutos fechados em si mesmos, que são de fato os verdadeiros, aqueles que são essenciais e que, cedo ou tarde, produzirão uma bela existência."

Goethe, J. W. v., *As afinidades eletivas. Editora Penguin, 2014, tradução de Tercio Redondo. p.46.*

Lista de Abreviaturas

ADF – Augmented Dickey-Fuller test
ANP – Agência Nacional do Petróleo
ENPS – Equilíbrio de Nash Perfeito em Subjogos
EPM – Equilíbrio Perfeito Markoviano
FC – Fator de Chance/Fator de Sucesso Geológico
MGB – Movimento Geométrico Browniano
OR – Opções Reais
PAD – Plano de Avaliação de Descoberta
TOR – Teoria das Opções Reais
TJ – Teoria dos Jogos
TJ+OR – Option Games
VOI – Valor da Informação
VME – Valor Médio Esperado
VPL – Valor Presente Líquido

1

Introdução

1.1

Contextualização

A revelação da informação pode conduzir os caminhos dos investimentos futuros de um negócio. A informação possui, além do seu custo, o valor do conhecimento para ações futuras. Essa pode ser obtida por investimentos próprios, ou a depender da legislação e regulamentação do setor, por empresas concorrentes. A segunda situação, coloca um dos agentes em posição de vantagem, pois este não paga pelo conhecimento. Contudo, a depender do portfólio, a empresa pode observar vantagens em obter os dados o quanto antes e pagar por esse conteúdo, mesmo que a empresa concorrente o tenha sem custo.

Na fase exploratória de um campo de petróleo, devido às características próprias do negócio e a legislação dos órgãos reguladores, esses efeitos devem ser levados no momento da decisão de investimento. A Agência Nacional do Petróleo (ANP) exige pelo instrumento contratual assinado pela concessionária a transmissão de todas as informações de investimentos feitos no bloco no período exploratório. Isso inclui perfuração de poços, os quais tem o objetivo de detectar a ocorrência de hidrocarboneto nas possíveis reservas. Assim, o conteúdo se torna de conhecimento público, transmitido pela ANP ou até mesmo por informe de mercado pela empresa proprietária. Caso a empresa concorrente tenha concessões na vizinhança do bloco explorado, o valor dos seus possíveis ativos se altera, dado a maior certeza pela revelação. Por consequência, essa informação pode redefinir os investimentos exploratórios e de desenvolvimento pretendidos. Esse cenário desenha uma guerra de atrito entre as empresas, buscando um ótimo entre a receita esperada postergada dos ativos e a informação revelada por investimentos próprios ou de outrem. Ademais, as receitas futuras do portfólio consideram a incerteza do preço de venda do petróleo, incerteza mais corrente nas análises de investimentos.

O objetivo do trabalho é o apreçamento do portfólio exploratório dados as incertezas descritas: preço do petróleo, incerteza técnica pela revelação da informação e guerra de atrito com empresa concorrente. O arcabouço teórico

para este estudo envolve as teorias das opções reais (TOR), valor da informação (VOI), teoria dos jogos (TJ), teoria dos jogos com opções (TJ+OR) e teoria de análise de portfólio. A exploração de petróleo, por ser um elo inicial da cadeia desse suprimento, carrega consigo todas estas incertezas nos seus projetos. Dessa forma, o dimensionamento das incertezas no valor do ativo propicia ao detentor melhor ação do programa de investimento.

A principal contribuição do trabalho é apresentar a diferença de apreçamento do portfólio entre métricas tradicionais, como o Valor Presente Líquido (VPL) e Valor Médio Esperado (VME), e que consideram incertezas, sejam de preços, técnicas e de outros agentes, agregando TOR, VOI, TJ e TJ+OR.

A primeira seção trata da introdução ao tema do presente estudo. Na seção (2), o referencial teórico utilizado, seguido pelo *Design* empírico (seção 3). A penúltima parte (seção 4) apresenta as análises e resultados e por fim a conclusão (seção 5).

1.2

Problema de Pesquisa

O sucesso de um campo de petróleo pode ter correlação com a informação advinda da perfuração de outra oportunidade exploratória. Desprezar a sequência informacional é considerar que as oportunidades do portfólio exploratório são independentes, incompatível com o conhecimento geológico. O vínculo entre prospectos minerais é devido a mesma gênese, ou seja, a mesma origem na formação das rochas, sejam os reservatórios de hidrocarboneto, ou qualquer elemento do sistema petrolífero. Por vezes, a oportunidade exploratória de valor informacional se encontra na área vizinha proprietária de outra empresa. Assim, o valor da carteira deve alterar a depender da ação da concorrente. Ademais, a depender da expectativa de longo prazo do preço do barril de petróleo e o prazo dos contratos de concessão com a ANP, podem alterar o momento do investimento exploratório nos ativos da carteira.

As empresas trabalham com métricas tradicionais em finanças corporativas, como VPL, VME, que é uma derivação do VPL e a taxa interna de retorno. Essas métricas não inserem as incertezas de mercado inerentes ao projeto e trabalham com cenários ou valor médio das variáveis estocásticas. A TOR considera as incertezas de preços futuros, recolocando o ótimo do agente em momentos distintos de investimentos e por consequência, a valores tão maiores quanto o VPL. Já a TJ capta como o ótimo individual é influenciado por outros agentes. Em ambiente competitivo, como em situações de conquista de fatia de mercado e acesso a informação para investimento, desenha-se um jogo conhecido como guerra de atrito. Na fase exploratória de petróleo, a guerra de

atrito ocorre na busca de informação a menor custo, para filtrar os cenários mais improváveis e readequar o investimento planejado para desenvolvimento da produção. Caso não haja cooperação entre as empresas nessa fase, um dos agentes pode ter informação sem custo, conhecido como *free-rider*, caso a relação custo e benefício de espera seja maior que o seu benefício individual de obter a informação. A depender da carteira das companhias, pode acontecer de nenhum dos agentes investir, aguardando a informação gratuita da concorrente. Dessa forma, para dimensionar o conhecimento pela informação adquirida, faz-se uso da teoria do VOI inserida em análise de portfólio de opções reais.

O portfólio exploratório tem características singulares. Como há dependência genética entre os ativos, há uma cadeia ótima *a priori* de investimentos, de forma sequencial, a depender da ponderação técnica do fator de sucesso geológico (FC), correlação entre oportunidades, as dimensões e parâmetros estimados das reservas. Ter oportunidades com evolução geológica distintas é relevante na gestão da carteira exploratória da empresa e possui análise similar à diversificação de portfólio de [Markowitz \(1959\)](#). Contudo, um portfólio com oportunidades no mesmo *play* geológico é estratégico, visto que a dependência leva, no caso de insucesso nos poços pioneiros, prontamente o abandono de uma sequência de oportunidades não testadas. Por outro lado, o sucesso no poço exploratório gera uma abertura de fronteira para novos ativos, similar ao investimento em P&D ([Smit e Trigeorgis, 2006](#)), que novos projetos afetam outros na carteira. O trabalho vai se debruçar nessas últimas característica do portfólio, nas quais o valor da carteira são modulados e amplificados dado a correlação entre ativos.

Nesta dissertação será calculado o valor da carteira exploratória com todos os vetores de incerteza discutidos. Primeiramente, será diferenciado o cálculo de um ativo exploratório (análise *stand-alone* - VME), o impacto da análise de dependência e o valor conjunto da carteira (portfólio -incerteza técnica - VOI), adicionando o valor da opção de espera para esta mesma carteira (incerteza de mercado - TOR), a relação entre as duas incertezas na carteira (portfólio exploratório - OR+VOI) e por fim, a guerra de atrito (incerteza técnica, mercado e estratégica - VOI, TOR, TJ+OR).

1.3 Objetivos

1.3.1 Geral

De um modelo mais simplista ao modelo que considera mais planos de incerteza, o valor consolidado da carteira terá diferenças devido aos métodos e teorias envolvidas, levando para decisões distintas de investimento. O relevante na variedade de apreçamento é saber as limitações e os momentos para considerar cada modelo.

O modelo simples considera um valor constante de preços, por uma média de preços de longo prazo. Os outros modelos consideram os preços com incerteza, sendo o processo estocástico o Movimento Geométrico Browniano (MGB). O modelo de incerteza técnica, que considera a revelação da informação e opção de aprendizado, é conforme os conceitos de [Dias \(2004a\)](#). Esse modelo de incerteza técnica é usado tanto para considerar um portfólio como para inserir a incerteza estratégica, em que segue o que foi apresentado em [Dias e Teixeira \(2009\)](#), com os conceitos de guerra de atrito em [Hendricks, Weiss, e Wilson \(1988\)](#) e modelo do jogo de [J. M. Smith \(1974\)](#).

Este trabalho tem a proposta de expandir os estudos de [Dias e Teixeira \(2009\)](#) e [Dias e Calvette \(2017\)](#). Teve como referências para as soluções das equações diferenciais por diferenças finitas explícitas as formulações expostas em [Haug \(2007, Cap. 7\)](#) e [Dias \(2015a, Cap.26\)](#).

1.3.2 Específicos

Esta pesquisa envolve algumas teorias, que por vezes são combinadas nas bibliografias estudadas. São comuns trabalhos com incerteza de preços como variável estocástica. Em especial, o preço do petróleo, que é facilmente agrupado em trabalhos de Opções Reais (OR) em *commodities*. Por outro lado, são incomuns trabalhos em OR aplicados ao ambiente exploratório, contudo, os existentes têm sólida referência nesse campo.

De um modo geral, a frequência de trabalhos com incerteza técnica no desenvolvimento e produção são maiores, sendo que na exploração de petróleo não são tão comuns. O problema na pesquisa que envolve incerteza técnica se define dentro da teoria de VOI, a revelação da informação e a medida de aprendizado da variável de probabilidade de ocorrência de hidrocarboneto, conhecida como fator de chance (FC). Adotando o conceito de dependência entre ativos, o valor de portfólio pode se distinguir comparado com a simples soma desses.

A pesquisa com incerteza interacional tem um campo bem definido. A TJ é a base para essa pesquisa, mas em espacial, os estudos de TJ+OR são

fontes para o trabalho. No caso estudado, o agente gera externalidade positiva ao outro e interfere no momento de perfuração.

Nesta pesquisa, na apresentação do modelo, o caso é descrito com maior detalhe, assim como as métricas VPL e VME. O modelo de incerteza de preço é formalizado e suas propriedades são exploradas. Sobre a incerteza técnica, é explicado o conceito geológico de FC e a medida de aprendizado de dependência entre ativos exploratórios. Consequentemente, como é adotada a informação do agente pelo FC, a incerteza estratégica é apresentada juntos com o conceito de dependência e os modelos clássicos de TJ. Por fim, as consequências desses efeitos combinados em um portfólio, apresentando as equações diferenciais e a soluções matemáticas que dão suporte a esta pesquisa.

Em resultados, antes dos jogos e análise do portfólio, os parâmetros de entrada de mercado são estimados e os parâmetros do caso (parâmetros endógenos) são propostos. Em seguida, analisa-se os modelos agrupados em *stant-alone* ou em portfólio, com ou sem interação estratégica.

1.4

Justificativa

Modelos teóricos simples têm a função de orientar os primeiros caminhos da pesquisa. É o caso de valoração de ativos pelo método do VPL. Essa medida é vastamente ensinada na academia e aceita na indústria como principal métrica para decisão investimento.

Com a compreensão de como as variáveis afetam o valor do ativo, constroem-se modelos mais complexos e que se aproximam mais a realidade. É o caso da adoção da TOR como valoração de ativos, a qual insere incerteza indexada ao tempo no fluxo de caixa, como incerteza de receita, de investimento ou quantidade. Essa teoria possibilita ao investidor, além da valoração mais próxima ao valor real do ativo, uma função de momento ótimo para investimento, algo que o modelo de VPL não fornece ¹.

Contudo, não são todas as incertezas que são indexadas ao tempo. A revelação da informação é em função da perfuração de poços, ou seja, a indexação do processo estocástico é em função do evento investimento exploratório, algo endógeno a cada empresa (Dias, 2002). O VOI é a teoria de suporte para os conceitos de investir para aprender ².

Caso aceite todos os modelos supracitados, o investidor adota uma percepção monopolista de mercado. Comumente, quando uma empresa entra num

¹Como referência em OR, recomendo Dixit e Pindyck (1994) e Trigeorgis (1996). Em português, com mesma profundidade dos anteriores, Dias (2015a, 2015b). Como guia prático, Copeland e Antikarov (2001).

²Como referência, recomendo Lawrence (1999).

novo mercado, acaba atraindo outras empresas que oferecem o mesmo produto e afetam negativamente as receitas esperadas ([Grenadier, 2000](#)). Assim, há o efeito de preempção e essa incerteza estratégica deve ser considerada. Por vezes, a externalidade dos agentes é positiva e um *free-rider* pode se estabelecer. A TJ é a base de estudos para este modelo ³, assim como a TJ+OR ⁴.

A complexidade de modelos tende a ser adotada mais rapidamente nas pesquisas acadêmicas comparada ao uso na indústria. Contudo, quando se trata de decisões de investimento e planejamento estratégico, que envolvem grande quantidade monetária em cada ação, não se encontram grandes barreiras na transmissão desses conhecimentos na prática do mercado. A presente pesquisa, pelo conteúdo teórico, pretende aproximar a medida de valor ao valor real dos ativos. Assim, utiliza a intersecção dessas teorias em um exemplo prático na exploração de petróleo: dois blocos exploratórios, com prazos definidos, prospectos correlacionados entre si e também com ativos operados por duas empresas.

1.5 Contribuições

1.5.1 Gerencial

A tomada de decisão envolve, além das informações técnicas, questões comportamentais e informação assimétrica dos gestores. Mesmo que as teorias e soluções apresentadas neste trabalho tenham caráter hiper-racional ([Teece, Pisano, e Shuen, 1997](#)), é evidente que, se for possível desenhar um modelo mais próximo aos fatores exógenos e endógenos da empresa e do setor, a utilidade prática deste projeto se concebe naturalmente.

Esta dissertação tem a contribuir como ferramenta na tomada de decisão em uma carteira exploratória com concorrentes, uma realidade diária dessa indústria. Apresenta como resultado o mais apropriado valor da carteira exploratória, o momento ótimo de investimento dado o estado da natureza das variáveis e a decisão ótima de qual ativo investir primeiro.

1.5.2 Teórica

Esta pesquisa se ocupa em apreçar uma carteira exploratória de uma empresa de petróleo, com uso da intersecção das teorias de OR, VOI, TJ,

³Resumo sobre a TJ é apresentado em [Myerson \(2009\)](#)

⁴Resumo em [Smit e Trigeorgis \(2006\)](#) e [Chevalier-Roignant, Flath, Huchzermeier, e Trigeorgis \(2011\)](#)

TJ+OR e análise de portfólio. É relevante na análise de ativos a combinação da OR com TJ, dado o efeito de competição entre empresas ([Grenadier, 2000](#)). Da mesma forma, para a empresa, é necessário saber os efeitos de investimentos no conhecimento dos seus ativos, captado pelo valor da informação ([Dias, 2004b](#)).

Portanto, a dissertação tem objetivo de contribuir no conhecimento de apreeçamento na exploração de petróleo ([Dias, 2004a](#); [Dias e Teixeira, 2009](#); [Guedes e Santos, 2016](#); [Jafarizadeh e Bratvold, 2015](#)). O diferencial é a junção de VOI em portfólio, OR de espera, com arcabouço de TJ e OR+TJ, complementando ainda mais aos estudos feitos até hoje.

2

Referencial Teórico

Na primeira parte do referencial será apresentada os primeiros estudos e os mais importantes em OR (seção 2.1), seguido de estudos em incerteza do preço de *commodities* no apreçamento de ativos (seção 2.1.1). A seção (2.1.2) apresenta a TOR em recursos minerais, em destaque na indústria *upstream* de óleo e gás. O portfólio em OR é discutido na seção (2.2) e a incerteza técnica em (2.2.1). O referencial de jogos de guerra de atrito e barganha cooperativa são apresentados na seção (2.3) e por fim a teoria do jogos e opções na seção (2.4).

2.1

Opções Reais

O método mais comum de valoração de projetos é o Fluxo de Caixa Descontado. Esse considera o valor futuro esperado do fluxo de caixa descontado pela taxa ajustada ao risco. A métrica mais comum é o Valor Presente Líquido (VPL), sendo ótimo quando o valor esperado das receitas líquidas supera o valor do investimento. Em projetos com grande incerteza, como em recursos minerais, os eventos extremos são mais prováveis comparados aos investimentos com menor incerteza e métodos que consideram valor médio podem distorcer a valoração. Essa preocupação motivou pesquisadores a desenvolverem métricas que considerem as incertezas no fluxo de caixa combinada a ação ótima do tomador de decisão.

Nesse contexto, surgiu a pesquisa em Opções Reais (OR). O seu desenvolvimento é derivado das pesquisas em opções financeiras feitas por [Black e Scholes \(1973\)](#) e [Merton \(1973\)](#). O investimento em ativo real pode ser visto como uma opção sem obrigatoriedade de exercício pelo gestor, dado a incerteza no fluxo de caixa esperado. O paralelo é direto com a opção financeira: direito e não obrigação de ter um ativo financeiro, dado a incerteza do ativo base condicionado ao valor do preço de exercício (*strike*). Com isso, a estrutural lógica foi absorvida de ativos financeiros para ativos reais, considerando as diferenças entre esses dois objetos.

[Dixit e Pindyck \(1994\)](#) consolidam os conceitos em um dos livros de referência no assunto. Esse trata primeiramente de princípios econômicos de

valor, processos estocásticos de preços, dinâmica de otimização, equilíbrio com demais competidores e diversos modelos e aplicações. [Trigeorgis \(1996\)](#) e [Copeland e Antikarov \(2001\)](#) também sumarizaram os conceitos de OR, sendo o último livro com características mais práticas.

Existem diversas classificações em OR. [Trigeorgis \(1999, p.22\)](#) classifica as opções entre direitos exclusivos e compartilhados, adiáveis e com expiração. A classificação usada neste trabalho segue [Dias \(2010\)](#). Nesse trabalho classifica as OR em tipos operacionais, de aprendizado e de tempo de investimento. Também conhecidas como opção de crescimento ([Trigeorgis, 1996, p.13](#)), as opções operacionais são relacionadas a um ativo base já existente, na possibilidade de expandir, contrair, trocar o insumo, parar temporariamente ou abandonar o projeto. As opções de aprendizado são divididas entre endógenas e exógenas, sendo as exógenas aquelas do tipo de incerteza de mercado ou estratégica, essa última com abordagem em *option-games* (TJ+OR). Por outro lado, as endógenas são em função do conhecimento técnico e por *learning by doing*, conceito abordado em VOI. Já as OR de tempo de investimento, também conhecidas como opção de espera, adotam conceitos clássicos de opções de compra financeiras e adequadas em projetos de exploração de petróleo. Esta dissertação trabalha com a opção de espera em uma concessão exploratória e quando analisada em portfólio também pode ser classificada como opção de aprendizado endógena. As modelagens finais desta dissertação abordam incerteza de outro agente, com efeitos exógenos, sendo também classificadas como opção de aprendizado exógena.

O primeiro trabalho conhecido em OR foi na área de petróleo. [Tourinho \(1979\)](#) apresenta um modelo em um campo de petróleo, considerando a opção de espera e de abandono. Outro trabalho importante foi de [Titman \(1985\)](#), que analisa a opção de investir em um terreno urbano considerando tamanhos distintos de projetos dado a incerteza de preços, com resultados importantes para o detentor do terreno. [Trigeorgis \(1993\)](#) apresenta um trabalho de interações entre opções e reflexões sobre a aditividade das flexibilidades gerenciais.

Como síntese e sumarizações de trabalhos em OR, [Lander e Pinches \(1998\)](#) listam trabalhos em OR aplicados em diversas áreas e tipos de OR. [Schwartz \(2013\)](#) apresenta um resumo dos conceitos de OR, modelos em recursos naturais e em pesquisa e desenvolvimento (P&D). [Dias \(2010\)](#), além de apresentar os tipos de OR, lista os métodos de solução e classifica os principais existentes.

2.1.1

Incerteza de Preços

Os modelos de preço em *commodities* são amplamente discutidos na literatura. Devido aos mercados internacionais de negociação e a disponibilidade da informação, os modelos são facilmente confrontados com os dados e igualmente aplicados em projetos de OR.

A *commodity* se define por três elementos - (b,t,l): bem, tempo e local (Seppi e Ronn, 2002). O bem se refere ao ativo negociado, suas características e qualidades. Como se sabe, os recursos minerais são classificados comumente como único, mas cada jazida fornece um tipo e propriedades do recurso. No caso de petróleo, as correntes mais conhecidas são o WTI e *Brent blend*, justamente por serem tipos negociados em bolsa e usados pela indústria como referência na venda dos seus produtos. Já o termo tempo faz referência ao vencimento do contrato futuro, pois como se trata da negociação de um ativo físico, raramente a entrega é imediata e normalmente ocorre em períodos de meses a ano. Por último, o local vincula ao espaço de negociação. Os principais mercados para óleo, óleo cru, gás propano são: *New York Mercantile Exchange* (NYMEX), *Hong Kong Futures Exchange* (HKEX), *Philadelphia Board of Trade* (PBOT) e *International Petrol Exchange* (IPE) (Geman, 2005, p.11-12).¹

De longe, o petróleo é o ativo mais negociado em mercado futuro (Geman, 2005, p.19-20). Entre os metais, o alumínio, ouro e cobre ganham destaque, mas estes somados não chegam ao volume negociado de óleo bruto. Ademais, a negociação de petróleo em mercado aberto provoca forte influência em toda cadeia de energia, como gás natural, eletricidade, ou carvão, e se fixa como o maior indicador global econômico (Amic e Geman, 2005, p.203). Por essas diferenças de volume de transação e consequentemente de demanda, escassez do recurso e cartelização de mercados, a estrutura de preços e modelos se diferenciam entres os ativos (Geman 2005, p.28; Amic e Geman 2005, p.226).

O Modelo Geométrico Browniano (MGB) é o modelo basilar em finanças quantitativas. Black e Scholes (1973) e Merton (1973) usaram o MGB para propor a equação analítica do preço de uma opção europeia. O uso é devido a facilidade matemática, aderência com muitas séries temporais e propriedades ideais para preços. Além disso, possui fácil adaptação à modelagem de propagação de preços, como na solução discreta binomial, apresentada por Cox, Ross, e Rubinstein (1979). Contudo, series históricas de contratos em petróleo e *commodities* apresentam feições de reversão a média, devido aos equilíbrios de mercado e efeitos de fricções, como saltos (Baker, Mayfield, e Parsons, 1998;

¹Aiube (2013) é o livro de referência em português para estudo de modelos em *commodities*.

Benard, Khalaf, Kichian, e McMahon, 2008; Pindyck, 1999). Os modelos que derivam dessas conclusões, apesar de adotarem fatores de reversão ou componentes de salto, mantém algum *drive* de caráter geométrico.

Um modelo alternativo de um fator para *commodities* é o modelo 1 de Schwartz (1997). O processo de difusão é o modelo Orstein-Uhlenbeck para o logaritmo dos preços. Nesse trabalho é feito a estimação de ouro, cobre e petróleo, com baixa adesão aos dados comparados aos modelos de mais fatores desse artigo.

Outro modelo de um fator é o processo geométrico de reversão de Orstein-Uhlenbeck aplicado ao preço, apresentado em Dixit e Pindyck (1994, Capítulo 3, p.77) e com aplicações em OR (Cortazar e Casassus, 1998; Cortazar e Schwartz, 1997). Esse modelo possui feições de reversão a média, mas diferentemente do modelo 1 de Schwartz (1997), há um problema na concepção devido a multiplicação entre preços na equação diferencial, de certa aversão a ser implementado.

Modelos de mais fatores são importantes para descrever melhor a incerteza de preços. A volatilidade é um dos componentes mais relevantes para valoração por OR. Adotando dois fatores, há duas estimações de prêmios de risco e de volatilidade. Como projetos em *commodities* são de longo prazo (Pindyck, 2001), modelos de mais fatores contribuem para a separação de efeitos imediatos ou de tendência de anos.

O modelo Schwartz (1997, modelo 2) é um desses, pois possui uma equação diferencial geométrica para os preços e outra equação dependente, com difusão de Orstein-Uhlenbeck, representando a taxa de conveniência. Esse modelo, comparado ao modelo 1, tem significância estatística dos hiperpâmetros para séries de preços futuros de petróleo.

A taxa de conveniência e os fatores desse modelo são discutidos em Gibson e Schwartz (1990). A taxa de conveniência é o benefício do proprietário do bem em deter esse ativo, comparado ao detentor da posição comprada no mercado futuro. Essa taxa pode ser vista como um dividendo a receber pelo detentor e se relaciona com o risco de escassez do ativo no mercado. Assim, a taxa de conveniência tem relação com efeitos de curto prazo do mercado de petróleo, já que a média de transporte é de 30 dias (Amic e Geman, 2005, p.203-204), sendo o intervalo principal do risco de escassez. Gibson e Schwartz (1990) também analisam a taxa instantânea de conveniência desse mercado, que possuem feições estilizadas de forte reversão à média zero e com parâmetro muito volátil.

Schwartz (1998) propõe uma simplificação do modelo 2 de Schwartz (1997) dentro de um modelo de um fator similar ao MGB. A argumentação é

que os projetos em *commodities* são de longo prazo, o modelo de dois fatores representa melhor as feições estilizadas dos preços e o modelo geométrico browniano é mais prático para modelar OR. Assim, analisa os efeitos de longo prazo do modelo de dois fatores e extrai essas qualidades, inserindo num modelo de um fator. Esse modelo de longo prazo difere do modelo tradicional de MGB, pois possui a volatilidade variante no tempo, contudo é tratável nas soluções por diferenças finitas.

O modelo de dois fatores de [Schwartz e Smith \(2000\)](#) é amplamente referenciado na literatura. O modelo carrega componentes com características de curto prazo no mercado de *commodity* relativos a alterações de estocagem, incertezas econômicas imediatas, modelado por reversão a média a zero de Ornstein-Uhlenbeck. Já o fator de longo prazo é modelado por um movimento aritmético em relação ao logaritmo do preço *spot*, sendo representativo da tendência de consumo de longo prazo ou até mesmo ajustes de produção de grande escala da indústria petrolífera. Nesse trabalho comparam as variáveis aos parâmetros do modelo 2 de [Schwartz \(1997\)](#), destacando as diferenças. Também estimam os hiperparâmetros para o modelo proposto e apresentam um exemplo para dois projetos de produção de petróleo. O projeto de menor dimensão tem fluxo de caixa imediato e menor investimento e o outro possui exploração de longo prazo, com investimentos de maior dimensão. Concluem que as variáveis de curto prazo afetam mais o menor projeto, sendo mais significativas que os parâmetros de longo prazo. Sobre o projeto de maior dimensão, evidenciam a importância da estimação dos parâmetros de longo prazo.

Sobre três fatores, [Schwartz \(1997\)](#) propõe um modelo incluindo um processo para a difusão da taxa de juros. Comparando com o modelo de dois fatores que possui difusão da taxa de conveniência, não há melhoras significativas nos parâmetros estimados, por outro lado, há maior esforço para estimação.

[Aiube e Samanez \(2014\)](#) propuseram um modelo com três fatores derivado de [Schwartz e Smith \(2000\)](#), sendo o *drift* do termo de longo prazo um processo de reversão à média. Os resultados tem maior aderência aos dados comparados com a estimação de dois fatores.

O campo de pesquisa é amplo na tentativa de descrever melhor a incerteza do preço de petróleo. [Cortazar e Naranjo \(2006\)](#) apresentam um modelo de N-fatores em modelos gaussianos para série de preços em petróleo, aplicando até em quatro fatores. Modelos com saltos são não gaussianos e em [Aiube, Baidya, e Tito \(2008\)](#) propõem mais um termo com componente de Poisson na extensão do modelo [Schwartz e Smith \(2000\)](#). Também se estuda a variações do prêmio

de risco ao longo do tempo, inclusive nos preços futuros de petróleo (Bhar e Lee, 2011).

Sobre a estimação dos hiperpâmetros das séries, pode-se considerar *proxies* do preço *spot*, como a primeira abordagem em Gibson e Schwartz (1990). Contudo, é importante trabalhar com maior conjunto de dados, incluindo diferentes vencimentos de contratos futuros. Em modelos gaussianos e com uso das séries de preços futuros, é possível estimar pela montagem do filtro de Kalman os parâmetros do modelo *spot* (Aiube, 2013, p. 368). Quando o modelo é não gaussiano, é necessário avançar para outras abordagens como filtro de partículas (Aiube et al., 2008).

2.1.2

Opções Reais: Recursos Minerais e Indústria de Óleo e Gás

Tourinho (1979) foi o primeiro trabalho em campo de petróleo com aplicação de OR. O modelo tem como ativo base o preço do petróleo que segue um MGB e o detentor do campo possui duas opções perpétuas de produzir ou abandonar. Como não considera dividendos ou taxa de conveniência, o detentor posterga eternamente a opção de investir. Para resolver esse paradoxo, adiciona um custo de manutenção a solução do portfólio sem risco. Adkins e Paxson (2013) revisitam esse modelo e adicionam a taxa de conveniência à difusão. Em Tourinho (2013), aponta que os efeitos entre inserir um custo de manutenção e a taxa de conveniência ou dividendos são distintos na dinâmica do derivativo. Nesse último trabalho, conduz para um aprimoramento do modelo de preços, sugerindo difusão geométrica não homogênea com reversão a média (Kloeden e Platen, 1992, p.119) e uma discussão sobre equilíbrio de mercado, em que tais questões são abordadas em TJ+OR.

Esse modelo é amplamente considerado em TOR. No caso de exploração de petróleo, em fases iniciais, os custos de manutenção são relativamente baixos, já a taxa de conveniência ou dividendos normalmente são considerados.

Brennan e Schwartz (1985) formalizam um modelo com ativo base sendo um MGB para avaliação de recurso natural finito, com opções de abertura e abandono, aplicando em caso hipotético de mina de cobre. Esse modelo pode ser usado em campos de petróleo não desenvolvido, como em Cortazar e Casassus (1998), porém, neste último foi adotado o processo geométrico de reversão a média para a difusão do ativo base.

Paddock, Siegel, e Smith (1988) apresentam um modelo de OR para reservas de petróleo não desenvolvida. Com o MGB como processo de difusão do preço do petróleo, obtêm o valor de mercado por barril, ou seja, valor monetário da opção de investir por reserva desenvolvida. Para isso, calculam

o dividendo para o campo de petróleo, sendo a razão entre a margem de lucro e fator da reserva desenvolvida ponderada pelo declínio da curva de produção exponencial. O fator da reserva desenvolvida pode ser visto como qualidade econômica do campo, conceito introduzido de maneira indireta nesse trabalho como regra do *one-third*, apontada também em [Bjerksund e Ekern \(1990\)](#) e adotada por [Dias \(2004b\)](#) no modelo paramétrico de valor de reserva.

[Dias \(2004b\)](#) distingue os tipos de opções na exploração e produção de petróleo. Na fase inicial, o objetivo é encontrar hidrocarboneto, o investidor tem a opção de explorar através do poço pioneiro. A variável em questão é o fator de chance geológico, conceito apresentado em ([Rose, 2001](#), p.37). Na fase de Plano de Avaliação de Descoberta (PAD), a variável endógena relevante é o volume recuperável, assim o investidor tem a opção de investir em poços de delimitação. Após o PAD, a empresa tem a opção de investir no desenvolvimento do campo, fase em que o investimento é o mais custoso. Durante o desenvolvimento, pode haver algumas opções, como de expansão da produção, parada temporária e abandono do campo.

[Jafarizadeh e Bratvold \(2015\)](#) apresentam um modelo para a opção de explorar um campo de petróleo, com o preço do petróleo seguindo o modelo de dois fatores de [Schwartz e Smith \(2000\)](#). Já o trabalho de [Guedes e Santos \(2016\)](#), pelo modelo binomial de [Cox et al. \(1979\)](#), modelam todas as opções conjuntas (explorar, delimitar e explorar) e analisam o incremento de valor pelo método de OR. [Saito, De Castro, Mezzomo, e Schiozer \(2001\)](#), a partir do modelo de [Paddock et al. \(1988\)](#), propuseram uma análise comparativa por simulações de diferentes técnicas de produção de petróleo e comparam o benefício da OR em relação ao VPL para cada técnica.

2.2

Portfólio de Opções Reais

Um conjunto de OR define um portfólio em OR ([Brosch, 2001](#)). Essas opções reais podem ser em cima de um único ativo base, de carácter sequencial de exercício, como em [Dixit e Pindyck \(1994, Cap.10\)](#), ou aplicado a diversos ativos da carteira.

Em primeiro momento, poderia classificar o portfólio de OR de carácter aditivo, como o conjunto de opções financeira. Um portfólio de opções financeiras é uma distribuição de regras de contrato sobre o ativo base, sendo que o exercício de uma opção financeira não afeta a outra e o ativo base. Contudo, isso não necessariamente acontece em portfólio de OR, pois o ativo base muitas vezes já é propriedade do detentor da opção. [Brosch \(2001\)](#) esclarece esse ponto, com um exemplo de uma planta em produção, com possibilidade de op-

ção de abandono. A partir do exercício do abandono, a planta perde as outras opções de produção, como a opção de expansão ou redução de fabricação.

Trigeorgis (1993) apresenta o primeiro exemplo em interações de diversas opções gerenciais. Usa um exemplo genérico em único ativo base, com as opções de postergar, abandonar, contrair, expandir e trocar o projeto para uso alternativo. Resulta que o valor incremental da opção é menor na presença de outra opção, podendo ter configurações de opções com resultados opostos, ainda que na maioria o efeito é de sub-aditividade.

Dias (2015a, Cap.24) esclarece essa questão. A super-aditividade é possível e ocorre, por exemplo, quando a sequência de expansão antecede outra opção. Isso acontece, pois se for atingido o gatilho da opção de expansão, o ativo base se amplia e consequentemente as outras opções são em função desse novo ativo base. A aditividade pode acontecer em casos de opções opostas, por exemplo, expansão e abandono, em que os preços de exercício são bem afastados. Isso ocorre, visto que a probabilidade condicional de uma opção ser exercida dado que a outra aconteceu é baixa. No caso de sub-aditividade, pode ocorrer, por exemplo, em duas opções de expansão, com expansão de menor escala em preço mais baixo e maior escala a preço mais alto. Dias (2015a, Cap.24) também indica, assim como Trigeorgis (1993), que é mais comum efeito de substituição, ou seja, casos de sub-aditividade.

Bjerksund e Ekern (1990) usam o modelo Paddock et al. (1988) e além da opção de investir no campo de petróleo, adicionam flexibilidades de abandono e parada de produção. Os resultados apontam aumentos marginais quando se adiciona outras flexibilidades além da opção de espera, mostrando a sub-aditividade dessas opções sequenciais. Ademais, mostram a relevância da opção de espera em relação as outras para o valor presente de um projeto em exploração.

Em casos de opções reais em ativos distintos, a percepção leva a considerar a diversificação como melhor forma de diminuir o risco de portfólio. Esse conceito se adere aos expostos em Markowitz (1959), que pela análise da correlação estocástica entre ativos, é possível encontrar uma carteira que minimiza a variância dado a média do retorno deste portfólio. Com esse princípio, a variável relevante é a covariância dos fluxos de caixa entre ativos.

Essa visão não é deixada de lado em ativos reais, já que a diversificação é algo relevante para a manutenção do lucro de longo prazo da empresa. Contudo, o questionamento da administração de portfólio por essa medida é legítimo. Primeiramente, o portfólio de Markowitz é expressa de forma simultânea, diferindo de muitos projetos reais que são feitos ao longo de uma cronologia. Ademais, a diversificação por empresas e conglomerados é algo questionável, já

que essa ação poder ser feita pelo acionista ou através de fundo de investimentos (Brosch, 2001).

Além da relação estocástica dos ativos, os projetos reais podem afetar uns aos outros por nível técnico ou físico, dado seus atributos específicos. Brosch (2001) define um contínuo entre complementariedade e substitutibilidade dos projetos.

Quando os projetos possuem funções técnicas idênticas, esses são considerados estritamente substitutos. Nesse caso, os investimentos disputam recursos monetários ou até mesmo o mercado de venda, podendo gerar um sub-ótimo para a empresa (Vassolo, Anand, e Folta, 2004, proposição 1).

No caso de projetos que requerem a existência de outro, esses são estritamente complementares. A complementariedade é dada quando os ativos possuem sinergia e fungibilidade (Arora e Gambardella, 1990). Dessa forma, os recursos e saberes técnicos são transmitidos de um projeto para o outro, além de ganhos em escala e escopo. Brosch (2001) aponta que a interação pode ser mútua ou em um só sentido. Afirma também, que caso não haja interações, os projetos são independentes.

Para geração de valor, a empresa deve voltar para projetos complementares (Brosch, 2001). Esse conceito se conecta com os princípios de vantagem comparativa e a Teoria Baseada em Recursos (Peteraf e Barney, 2003).

No setor *upstream* da indústria do petróleo, Faiz et al. (2000) apontam a importância de buscar análise de portfólio com RO, notando que análise *stand-alone* é diferente de uma análise em carteira. Em J. E. Smith e McCardle (1998) indicam a possibilidade em projetos exploratórios em petróleo e com proximidade geográfica, possuir desenvolvimento ótimo em série de investimentos devido à complementariedade dos ativos. Com essas concepções, Dias (2005, Cap. 3) apresenta um modelo de portfólio em OR, com a medida de aprendizado na incerteza técnica conhecida como fator de chance geológico (FC). Na seção a seguir, é detalhada a incerteza técnica e o conceito de aprendizado, presentes na teoria de Valor da Informação (VOI).

2.2.1

Valor da Informação – Incerteza Técnica

Na última seção, estudos apontam que além da importância da estocasticidade do fluxo de caixa para a gestão de ativos, a administração de portfólios em OR mira nas qualidades técnicas, idiossincrásicas de cada projeto em interação, oferecendo ao gestor melhor consolidação do portfólio. Assim, a compreensão da natureza da incerteza técnica é relevante para incluir na análise de OR e portfólio.

Diferentemente do indexador tempo para a variável preço de *commodity*, a incerteza técnica tem o indexador de evento (Dias, 2002). O evento, na maioria das vezes, é um investimento em conhecimento. Cortazar, Schwartz, e Casassus (2003) apresentam a incerteza geológica de uma mina de cobre como um processo estocástico temporal, similar a Slade (2001). Como o investimento em dimensionamento da planta de produção, perfuração de poços de produção e delimitação não são contínuos no tempo e ocorrem por ações de gestão, na maioria das vezes, o método de indexação temporal não é apropriado para lidar com a variável estocástica técnica.

O dimensionamento da variável técnica perpassa pelo conhecimento. Segundo Lawrence (1999, p.3), o conhecimento é o estoque de crenças sobre a variável técnica, que pode ser acessado pela distribuição de probabilidade, ou seja, a função de probabilidade *a priori* é o conhecimento estabelecido inicial. Para alterar o que está estabelecido sobre a variável, deve ocorrer o evento para revelar a informação. Já a informação, segundo Lawrence (1999, p.3), é o estímulo que altera o estoque de conhecimento, que também é denominada sinal.

Todo evento informativo deve ter os seguintes atributos: observável, relevante, material e econômico (Bratvold e Begg, 2010, p.150; Bratvold, Bickel, Lohne, et al., 2009). O teste precisa ser observável para a tomada de decisão futura, além de ser relevante para ser possível mudar as crenças existentes. Por exemplo, ser observável é um poço pioneiro indicar a presença de hidrocarboneto, já um teste não observável é desejar que uma sísmica indique a dimensão do reservatório, pois isso é atributo dos poços de delimitação. Bratvold et al. (2009) citam como exemplo de relevância a relação entre sinal sísmico e propriedades petrofísicas do reservatório, sendo a sísmica um teste relevante para inferir propriedades. A qualidade material é consequência da relevância, já que se houver mudanças das crenças, pode mudar as ações e definem o caráter econômico do teste. Um exemplo de canto de materialidade é um teste desenhado que não contribui para compreender a variável em questão. Bratvold et al. (2009) citam que deve ser gratuito um teste medicamentoso caso não tenha relação com o tratamento de sua doença. Por fim, o atributo econômico é o benefício do teste ser maior que seu valor de custo.

A revelação da informação é a exposição da verdadeira dimensão da variável técnica (Dias, 2002). Caso a revelação for completa, a revelação da informação *posteriori*, ou seja, a expectativa da variável dado o sinal é igual a expectativa incondicional *a priori*. Portanto, a informação imperfeita tem relação com a revelação parcial. Isso é o mais comum em investimento por conhecimento, pois é improvável um evento descrever por completo o

dimensionamento real da variável estudada. Sobre a variância da distribuição de revelação, segue a lei da variância total, ou seja, a variância da variável é a esperança da variância da variável dado o sinal somado pela variância da revelação. Assim, caso a revelação seja completa, a esperança da variância da variável dado o evento *a posteriori* é nula (Dias, 2005, p.199). Isso conduz a variância da variável técnica *a priori* ser igual a variância da revelação. Com o aumento do número de eventos informativos, mais próximo se está da informação completa, assim, há uma relação entre a diminuição da incerteza esperada com o aumento da quantidade de sinais.

Com esses princípios, Dias (2005, p. 219) cria um parâmetro chamado medida de aprendizado. Na situação em que a esperança da variância reduz para zero, ou seja, há completude da revelação da informação e por consequência há o conhecimento total da variável em questão, a medida de aprendizado é máxima igual a 1. Nesta dissertação, como apontado por Dias (2005, p. 276), se a distribuição da variável é uma função de Bernoulli bivariada, a medida de aprendizado é igual a correlação entre ativos. Reconhece que o fator de chance geológico (FC) é uma variável Bernoulli bivariada (Bickel, Smith, Meyer, et al., 2008) e se houver investimento em um ativo, ou seja, a revelação da informação da presença de hidrocarboneto, isso altera o FC dos outros ativos presentes no portfólio, a depender da correlação (Dias, 2005, p. 281).

Murtha (1995) apresenta um dos primeiros trabalhos de dependência entre prospectos exploratórios. No caso, trata-se de diferentes reservatórios em um só poço. A dependência é pelas probabilidades condicionais dos elementos do sistema petrolífero. A partir dessas probabilidades, por sistema de equações, calcula as probabilidades conjuntas e compara os resultados com dependência e independência. Conclui que com aumento da dependência eleva os casos degenerados, ou seja, seco ou com hidrocarboneto. Ademais, a variância se eleva com o aumento da dependência e a média não se altera. A média somente altera em ações condicionadas, como critério de otimização gerencial.

Smith e Thompson (2008) apresentam um modelo geral em relação a dependência de prospectos exploratórios, considerando as probabilidades conjuntas, concentrando no valor adicionado pelo aprendizado no Valor Médio Esperado (VME), com custos exploratórios iguais e deixando de lado o valor da opção da espera. Dentre as generalizações, as mais relevantes são: caso independência, ótimo é perfurar simultaneamente. Em situação com n prospectos, é melhor perfurar o prospecto de maior VME, caso esse seja de maior probabilidade. Contudo, por vezes, é melhor testar o caso de menor VME que possua probabilidade melhor. Em prospectos que tenham o mesmo tamanho, é preferível testar primeiro de maior probabilidade, e da mesma

forma, caso tenham as mesmas probabilidades, melhor perfurar o maior volume recuperável estimado. Ademais, quanto maior a interdependência, maior o valor da opção de aprendizado.

Zan e Bickel (2013) apresentam o VOI em portfólio também sem valor da espera. O exemplo aplicado em otimização do Valor Presente líquido (VPL), com um modelo de sinal de distribuição gaussiana, correlação entre projetos iguais e com restrição orçamentária. Os sinais podem ser obtidos na forma de estimativas de valor fornecidas pelo grupo técnico ou resultado de um teste. Com um sinal, é gerado uma nova distribuição de probabilidade *posteriori* e otimizado em função de $VPL > 0$. Em exemplo hipotético de cinquenta ativos, separam entre os projetos prioritários e os desfavoráveis. Concluem que em situações de restrições mais rígidas de recursos, eleva-se o valor e importância de decisão em portfólio com VOI.

Bickel e Smith (2006) apresentam exemplo de portfólio exploratório sem valor de espera. Analisam a partir das probabilidades conjuntas de Fator de Chance geológico (FC), medida mais complexa de ser estimada pelo corpo técnico. Por otimização lagrangiano, acham a sequência ótima de perfuração e as probabilidades de perfuração. Adicionam um modelo de aversão a risco, já que as análises de decisão por VOI são neutras ao risco (Bratvold et al., 2009). Em Bickel et al. (2008), ampliam a pesquisa apresentada em Bickel e Smith (2006), mas considerando os riscos do sistema petrolífero de diversos prospectos e pelas suas probabilidades conjuntas.

Calvette e Pacheco (2014) analisam o VOI de um portfólio exploratório em petróleo com a metodologia apresentada em (Dias, 2005, Cap.3), com questões similares as discutidas em Bickel e Smith (2006). Com auxílio de algoritmos genéticos, encontram o valor da carteira e a sequência ótima sem a opção de espera. Dias e Calvette (2017) analisam até três ativos em portfólio com o valor da espera pelo método binomial, com resultados importantes sobre preferência de perfuração. Com uso de exemplos numéricos, um dos portfólios apresenta múltiplas zonas de espera em função do preço e em outro caso, é preferível perfurar o prospecto mais arriscado antes dos outros.

A informação também é relevante na TJ. Caso a informação seja pública, causa efeitos em outros agentes e sendo uma externalidade positiva, pode elevar a utilidade dos outros jogadores. Dessa forma, o agente pode esperar além do momento ótimo para agir aguardando a informação gratuita. Na próxima seção, será apresentado estudos de dois jogos importantes e os efeitos da externalidade positiva.

2.3

Teoria dos Jogos : Guerra de Atrito e Barganha Cooperativa

O jogo guerra de atrito foi apresentado por [J. M. Smith \(1974\)](#). É um jogo não cooperativo e discreto, no qual não há coalizão entre os agentes e segundo [Nash \(1951\)](#), jogos desse tipo podem haver equilíbrio em estratégias mistas com n jogadores. Esse jogo possui versões similares como *Hawk and Dove game* ([J. M. Smith, 1976](#)) e *chicken game*. É estudado em jogos evolucionários, conceito delimitado em [J. M. Smith e Price \(1973\)](#). Segundo [J. M. Smith \(1982, p.1\)](#), a teoria dos jogos evolucionários é a forma de pensar a evolução no nível dos fenótipos quando a adaptação de um tipo particular depende da frequência da população. O equilíbrio estável em jogos evolucionários (EEE) ocorre caso a estratégia de uma população de indivíduos seja resistente a invasões ou mutações. O conceito de EEE tem uso na escolha entre equilíbrios de Nash Perfeitos em Subjogos, como é o caso desta dissertação.

[J. M. Smith \(1974\)](#) apresenta o conflito entre dois tipos de indivíduos, um agressivo e outro que recua, lutando por um recurso. A luta causa danos, assim como a espera causa um custo de espera. Dois perfis agressivos lutam até os danos acumulados forem maiores que o recurso. [J. M. Smith \(1976\)](#) aponta que dois perfis que recuam podem também definir uma disputa, na qual é em função do custo de espera. Então, o jogo Guerra de Atrito é em função do tempo que o indivíduo suporta o conflito. Nesse jogo, o EEE ocorre em estratégia mista entre os tipos escala e recua.

Esse modelo é importante em estudos econômicos. Leilões do tipo *all-pay* são analisados nessa estrutura de jogos ([Krishna e Morgan, 1997](#)). [Ghemawat e Nalebuff \(1985\)](#) apresentam um modelo de duopólio assimétrico em declínio de mercado, em que o conflito leva a única estratégia ótima de equilíbrio de Nash perfeito em subjogos, onde a grande empresa abandona antes da pequena. [Ghemawat \(1997, Cap.7\)](#) exemplifica esse tipo de conflito entre a *British Satellite Broadcasting* e a *Sky Television*, resultando na fusão das operações após anos de disputa de mercado.

No estudo do exemplo real acima, houve a continuação da guerra de atrito, algo prejudicial para ambas as empresas. Caso houvesse negociação e fusão dos projetos no início do conflito, em certos casos, poderia ser vantajoso para as duas companhias. [Brandenburger e Nalebuff \(1996, Cap.1\)](#) argumentam que os negócios não possuem regras fixas como jogos de *poker* ou xadrez, e podem ser alterados por força dos próprios jogadores. Também afirma, em [Brandenburger e Nalebuff \(1996, Cap.4\)](#), que a mudança de jogo é a essência da estratégia do negócio. Na situação de guerra de atrito, em certas condições de negociação, pode haver vantagens na mudança de jogo para barganha

cooperativa (Dias e Teixeira, 2009).

Nash (1953) apresenta a solução da barganha cooperativa. É definida por um ponto de desacordo entre os jogadores e o resultado da barganha. A solução é obtida pela maximização do produto das diferenças das utilidades entre os dois jogadores.

A assimetria entre *payoffs* coloca esses jogos em um domínio mais realistas. Segundo Hammerstein e Selten (1994, p.965), no jogo *Hawk-Dove* com n jogadores e informação incompleta, a estratégia estável evolucionária é pura e estrita em termos de equilíbrio de Nash. Ademais, Hammerstein e Parker (1982), em sua análise em jogo de guerra de atrito assimétrico, apontam que a razão entre o benefício e custo é determinante para definir a empresa ganhadora do conflito.

Hendricks et al. (1988) formalizam a guerra de atrito em tempo contínuo com informação completa, forma aplicada na exploração de petróleo. Define o conflito em função do tempo de exercício de dois jogadores, sendo o líder a exercer primeiro e o seguidor a depender do líder. Dias (1997) apresenta, num cenário de exploração de petróleo e com incerteza de preços, o conflito em tempo discreto e solução binomial retro-indutiva. Dias e Teixeira (2009) analisam o jogo de guerra de atrito simétrico e com incerteza de preços com migração para barganha cooperativa. Devido à incerteza de preços, o campo teórico desses estudos está presente em *option-games* (Chevalier-Roignant et al., 2011).

2.4

Teoria das Opções e Jogos

A OR+TJ contribui para melhor formulação do comportamento econômico dos agentes dado incerteza (Grenadier, 2000). É uma teoria relevante, por exemplo, para projetos de Pesquisa e Desenvolvimento (P&D), que possuem desdobramentos de investimentos e incerteza exógena no desenvolvimento do projeto, normalmente modelada por RO e efeitos da competição entre os agentes, modelada por TJ (Smit e Trigeorgis, 2006).

Chevalier-Roignant et al. (2011) fazem uma síntese dos trabalhos na área e sugerem uma classificação levando em conta características da TJ, organização industrial e OR.

Muitos modelos em OR+TJ analisam duopólio, oligopólio e competição perfeita com choques de demanda. Leahy (1993) aponta que em competição perfeita, o gatilho de entrada considerando incerteza de demanda e competição é igual a entrada míope monopolista, que considera a opção de investir sem concorrentes. Essa coincidência, em que o gatilho de entrada é igual porém

o prêmio é distinto, é conhecida como Miopia de Leahy. [Dixit e Pindyck \(1994, Cap. 9\)](#) e [Huisman, Kort, et al. \(1999\)](#) apresentam modelo de duopólio simétrico, com opção de expansão na produção. Resulta na entrada (expansão) da líder no ponto de indiferença de valor entre líder e seguidora e a empresa seguidora entrará no ótimo monopolista. Esse tipo de jogo tem claro efeito de preempção de um agente.

[Dias e Teixeira \(2010\)](#) trabalham com o mesmo caso acima, mas com assimetria de custo. A líder de baixo custo não precisa exercer no ponto de indiferença, pois não há ameaça de preempção, já que nesse estado da natureza, a de alto custo não tem atração por expandir. A ameaça de preempção é em função dos seus custos e caso sejam baixos, com vantagens comparativas elevadas, seu exercício pode ser como um agente monopolista, ignorando a rival.

Com agentes interagindo, o projeto pode estar “fora do dinheiro”, ou seja, abaixo do ótimo do exercício da opção, mas mesmo assim ser executado e a depender da competição, pode reduzir a opção de espera para zero ([Grenadier, 2000](#)). Nesse contexto, [Grenadier \(1996\)](#) apresenta um modelo em que construção de novos empreendimentos imobiliário ocorrem pelo efeito da preempção, mesmo com a queda da demanda.

A exploração de petróleo é melhor analisada pelo ponto de vista das externalidades positivas. Nesse caso, a ação do outro agente e a divulgação para o mercado da informação sobre a variável técnica gera um benefício para aquele que entra por último. Esse efeito de externalidade positiva ocorre também em duopólios de mercado declinante, modelo de [Ghemawat e Nalebuff \(1985\)](#), no qual quem abandona por último tem vantagens advindas da fatia de mercado deixada pelo líder.

Pelo modelo de [Hendricks et al. \(1988\)](#) usado em exploração de petróleo, a seguidora tem vantagem na sua ação posterior. [Dias e Teixeira \(2009\)](#) apresenta um modelo com incerteza de preços, em que a seguidora obtém vantagem informacional vinda da ação da empresa líder. A informação da variável técnica é o sucesso ou fracasso do poço pioneiro e o ótimo da seguidora é em função dessa revelação. O modelo usado nesta dissertação é baseado nesse trabalho.

Em especial, modelos em OR+TJ são analisados pelo equilíbrio markoviano (EPM). Jogos em que há história pretérita e os estágios do jogo tem influência no estado corrente da variável, devem ser analisado pelo Equilíbrio de Markov ([Kapur, 1995](#); [Maskin e Tirole, 1988](#)). Nesta dissertação, a variável de estado é o preço do petróleo, em que é incerta e quando descontada pela taxa livre de risco sob medida martingal tem propriedade Markov. Como definição, o jogo é mapeado pelo conjunto de todos estados possíveis para o

conjunto de ações viáveis. Assim, o que é relevante é momento da estratégia e o número de jogadores ativos. Dessa forma, se torna coincidente o estágio com o intervalo do tempo, representando cada estágio um subjogo. Portanto, o Equilíbrio Perfeito Markoviano (EPM) também é Equilíbrio de Nash Perfeito em Subjogos (ENPS), sendo EPM mais abrangente que o conceito de ENPS.

3

Design empírico

A situação estudada neste trabalho é de dois blocos exploratórios vizinhos, com mesmo período de contrato e sem poço obrigatório. Serão modelados até três prospectos em diversas combinações. Cada modelo considera 11 variáveis endógenas e exógenas. Esta seção tem o objetivo de explicar as variáveis e suas relações em cada modelo.

3.1

Apresentação das variáveis

Os ativos exploratórios possuem variáveis internas, apresentadas como endógenas e variáveis externas, apresentadas como exógenas. As endógenas são próprias e vinculadas aos projetos. São elas: volume recuperável de óleo, qualidade da reserva, fator de chance, correlações entre ativos e os investimentos. Já as exógenas são relacionadas as variáveis de mercado, como taxa de juros, hiperparâmetros do preço do petróleo e período de contrato de exploração. Todas foram elencadas abaixo, sendo n o número de oportunidades:

Endógenos:

- $B[1 : n]$ - Volume Recuperável (bbl)
- $q[1 : n]$ - Qualidade da Reserva (%)
- $FC[1 : n]$ - Fator de Chance dos prospectos (%)
- $\rho[n \times n]$ - Matriz de correlação dos prospectos (%)
- $dummy_1[1 : n]$ - Dummy de propriedade [0,1]
- I_w - Investimento no poço pioneiro (MM\$)
- I_d - Investimento em desenvolvimento - função do Volume Recuperável (MM\$)

Exógenos:

- $P(\alpha, \sigma)$ - hiperparâmetros dos Preço do petróleo (%a.a, %a.a.)
- δ - taxa de conveniência (%a.a)
- r - Taxa livre de risco (%a.a.)
- τ - Tempo do contrato de exploração - comum em todos os blocos (anos)

3.2

Modelo Paramétrico - VPL e VME

A relação linear entre valor de projeto e preço do ativo base é considerada em alguns trabalhos (Dixit e Pindyck, 1994; Paddock et al., 1988, Cap.12,p.399). O modelo paramétrico (“bussiness model”) considera linear a relação do preço do petróleo com o valor de receitas líquido de custos operacionais em tempo presente (Dias, 2004b) :

$$V = qBP \quad (3-1)$$

Sendo q a qualidade econômica da reserva, B o volume recuperável da reserva e P o preço do petróleo. A qualidade econômica é um fator de desconto da reserva, com valor entre $[0,1]$. Esse parâmetro sintetiza as características próprias de cada reserva, como qualidade do óleo, viscosidade, permeabilidade e capacidade tecnológica de produção, inclusive regime fiscal. A equação linear é útil, pois o resultado é próximo de modelos completos de fluxo de caixa e é um facilitador de cálculo. Porém, em regimes de partilha, a aproximação linear não é adequada, visto que a transferência para o governo é distinta na fase inicial e final de produção e altera o valor de receitas líquidas (Dias, 2002), sendo necessário outro modelo.

Diferentemente de Paddock et al. (1988), o valor desta equação não é unitário por reserva desenvolvida. Mas de forma análoga, os termos multiplicativos determinísticos não alteram a dinâmica estocástica dos preços (equação 3-6), como pode ser visto na demonstração a seguir. Sendo o preço um MGB como a equação abaixo, temos:

$$\frac{dP}{P} = \alpha(P, t)dt + \sigma(P, t)dz \quad (3-2)$$

Em que $\alpha(P, t)$ é o termo de tendência do MGB, conhecido como *drift* do processo, $\sigma(P, t)$ o termo de volatilidade que multiplica o incremento de Wiener, o qual $dz \sim N(0, dt)$. Como V é uma função de P igual a equação (3-1), $\frac{\partial V}{\partial t} = 0$, $\frac{\partial V}{\partial P} = qB$ e $\frac{\partial^2 V}{\partial P^2} = 0$. Assim, pela fórmula de Itô-Doeblin:

$$dV = \frac{\partial V}{\partial t}dt + \frac{\partial V}{\partial P}dP + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial P^2}d[P, P] \quad (3-3)$$

Substituindo as derivadas:

$$dV = qBdP \quad (3-4)$$

Substituindo a equação estocástica dos preços:

$$dV = qB[\alpha(P, t)Pdt + \sigma(P, t)Pdz] \quad (3-5)$$

E organizando a equação:

$$dV = \alpha(P, t)Vdt + \sigma(P, t)Vdz \quad (3-6)$$

Isso quer dizer que o projeto V possui dinâmica similar ao ativo base (P), ou seja, V também é um MGB, com os mesmos hiperparâmetros de P no seu processo, ou seja, *drift* $\alpha(P, t)$ e de difusão $\sigma(P, t)$.

O Valor Médio Esperado (VME) é uma medida ponderada do VPL pelo fator de chance do projeto. Essa medida de valor é amplamente aceita em projetos exploratórios (Faúndez, Marquardt, Jara, e Guzmán, 2020; Rose, 2000, Cap. 3). Então:

$$VME = FC(V - I_d) - I_w \quad (3-7)$$

Onde, I_d é o investimento no desenvolvimento da reserva a valor presente, em que $(V - I_d)$ é o VPL do projeto. O investimento inicial é o poço pioneiro, I_w . Esse investimento pode ser visto como o custo de obter a informação de existência de hidrocarboneto. O fator de chance (FC) é uma variável de incerteza técnica, apresentada na seção (3.4).

O Investimento em desenvolvimento é a valor presente e pode ser em função do preço do ativo base e da reserva. Optou por modelar em função da reserva, similar a Dias (2006) e Dias e Teixeira (2009). O investimento é uma função linear do volume recuperável, sendo o investimento marginal k_v e o investimento fixo k_f . As justificativas de adoção desse modelo são apresentadas na seção (4.1.2).

$$I_d(B) = k_f + k_v B \quad (3-8)$$

O parâmetro de qualidade (q) pode ser definido a partir da derivação do

VPL em relação a variável P , ou seja:

$$q = \frac{\partial VPL}{\partial P} \frac{1}{B} \quad (3-9)$$

Da mesma forma que demonstrados nas equações (3-3 a 3-6), o termo $FC \cdot V$ da equação (3-7) possui mesmo *drift* $\alpha(P, t)$ e difusão $\sigma(P, t)$ que o preço P .

3.3

Incerteza de Preços

A variável preço é a mais importante na construção do fluxo de caixa. Devido a incertezas sobre oferta e demanda em todo o tempo (t), os preços dos produtos apresentam oscilações. Por vezes, possuem uma tendência de longo prazo, podendo ser ascendente ou, por exemplo, reverter a um valor médio, sendo particular para cada bem. O processo estocástico é uma forma usual de modelar ativos com esses comportamentos. Assim, o processo estocástico é uma família, ou série de sequências de variáveis aleatórias, definida num espaço de probabilidade, o qual depende do espaço amostral, a sua filtração e a probabilidade dos eventos $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$. Esse processo (S_t) é indexado a um domínio, sendo em finanças comum ativos serem indexados ao tempo (t).

O ativo S_t pode ser modelado como um processo browniano padrão (dz), que carrega a difusão das séries, uma medida de desvio σ e com uma variação temporal de tendência, conhecido como *drift* (α). O Movimento Geométrico Browniano (MGB) é o mais comum modelo em finanças. Esse modelo apresenta diversas vantagens: *ii*) aderência a muitos dados históricos de preço; *ii*) não possui probabilidade de S_t ser negativo, da mesma forma que os preços dos ativos negociados em mercado e *iii*) solução fechada da equação diferencial estocástica. Com esse modelo, Black e Scholes (1973) basearam a solução analítica da opção europeia de compra. O modelo MGB pode ser visto na equação (3-10):

$$dS_t = \alpha S_t dt + \sigma S_t dz \quad (3-10)$$

Essa dinâmica pode representar preços de ativos de mercado, como ações em bolsa de valores ou preço *spot* de tipos de óleo por barril, como o óleo tipo WTI. Em ações, os dividendos (δ) são pagos para o detentor e a dinâmica de preços de tendência possui desconto do dividendo, sendo $\alpha = \mu - \delta$. Esse

comportamento também acontecesse em relação ao preço *spot* do óleo, mas em ativos físicos é conhecido como taxa de conveniência, também simbolizado por δ . A taxa de conveniência é o benefício do proprietário do produto em detê-lo, em relação ao detentor da posição comprada no mercado futuro. Esse benefício tem relação com a segurança de possuir fisicamente a *commodity* dado risco de escassez. Essa taxa (δ) é uma variável não observada e pode ser estimada em contratos futuros.

A solução da equação diferencial (3-10) é dada pela transformação de S_t e aplicação da fórmula de Itô-Doeblin. Considere $Y(S_t) := \ln S$, então $\frac{\partial Y}{\partial S} = \frac{1}{S}$ e $\frac{\partial^2 Y}{\partial S^2} = -\frac{1}{S^2}$ e a dinâmica de Y é:

$$\begin{aligned} dY &= \frac{1}{S} dS - \frac{1}{2} \frac{1}{S^2} d[S, S](t) \\ &= (\mu - \delta) dt + \sigma dz - \frac{1}{2} \sigma^2 dt \\ &= \left(\mu - \delta - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) dt + \sigma dz \end{aligned}$$

Integrando os dois lados da equação entre t e T :

$$\ln S_T - \ln S_t = \left(\mu - \delta - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) (T - t) + \sigma z_{T-t}$$

Sendo $z_{T-t} \sim N(0, 1)\sqrt{T-t}$, a solução de S_T dado a filtração em t é:

$$S_T = S_t e^{(\mu - \delta - \frac{1}{2} \sigma^2)(T-t) + \sigma z_{T-t}} \quad (3-11)$$

Com a solução (3-11), é possível calcular a média dado a filtração em t :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[S_T | \mathcal{F}_t] &= \mathbb{E}[S_t e^{(\mu - \delta - \frac{1}{2} \sigma^2)(T-t) + \sigma(z_T - z_t)} | \mathcal{F}_t] \\ &= S_t e^{(\mu - \delta - \frac{1}{2} \sigma^2)(T-t)} \mathbb{E}[e^{\sigma(z_T - z_t)} | \mathcal{F}_t] \\ &= S_t e^{(\mu - \delta - \frac{1}{2} \sigma^2)(T-t)} \mathbb{E}[e^{\sigma z_{T-t}}] \\ &= S_t e^{(\mu - \delta - \frac{1}{2} \sigma^2)(T-t)} e^{\frac{1}{2} \sigma^2 (T-t)} \end{aligned}$$

Ou seja:

$$\mathbb{E}[S_T|\mathcal{F}_t] = S_t e^{(\mu-\delta)(T-t)} \quad (3-12)$$

Sendo a variância igual a $Var[X] = E[X^2] - E[X]^2$, o cálculo de $E[X^2]$ é:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[S_T^2|\mathcal{F}_t] &= \mathbb{E}[S_t^2 e^{2(\mu-\delta-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)+2\sigma(z_T-z_t)}|\mathcal{F}_t] \\ &= S_t^2 e^{2(\mu-\delta-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)} \mathbb{E}[e^{2\sigma(z_T-z_t)}|\mathcal{F}_t] \\ &= S_t^2 e^{2(\mu-\delta-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)} \mathbb{E}[e^{2\sigma z_{T-t}}] \\ &= S_t^2 e^{2(\mu-\delta-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)} e^{\sigma^2(T-t)} \\ \mathbb{E}[S_T^2|\mathcal{F}_t] &= S_t^2 e^{2(\mu-\delta+\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)} \end{aligned}$$

Assim, a variância dada a filtração em t é:

$$\begin{aligned} Var[S_T|\mathcal{F}_t] &= \mathbb{E}[S_T^2|\mathcal{F}_t] - \mathbb{E}[S_T|\mathcal{F}_t]^2 \\ &= S_t^2 e^{2(\mu-\delta)(T-t)} e^{\sigma^2(T-t)} - S_t^2 e^{2(\mu-\delta)(T-t)} \end{aligned}$$

Portanto:

$$Var[S_T|\mathcal{F}_t] = S_t^2 e^{2(\mu-\delta)(T-t)} (e^{\sigma^2(T-t)} - 1) \quad (3-13)$$

Caso μ seja maior que δ , a média é crescente ao longo do tempo e se $t \rightarrow \infty$, a variância também tende ao infinito quando σ é diferente de zero. A propriedade da variância do MGB é desejável, já que o tempo $t + \Delta t$ é mais incerto que o tempo t . Sobre a média desse processo, diversos estudos apontam preços de equilíbrio em *commodities*, visto que os preços se acomodam por forças de demanda e oferta do produto, algo que não acontecesse nesse modelo. Dessa forma, desenvolveram modelos mais aderentes a esses tipos de ativos, como modelos com dois e três fatores com reversões de curto e/ou longo prazo (Aiube e Samanez, 2014; Cortazar e Schwartz, 2003; Schwartz, 1997; Schwartz e Smith, 2000).

Caso μ seja menor que δ , temos uma média decrescente e se $t \rightarrow \infty$, a média tende para zero. Esse efeito ocorre em longo prazo (70 anos?), tornando aceitável o modelo com essa relação para apreçamento financeiro de ativos reais. Contudo, a diferença $\mu - \delta$ não pode ser menor que $-\frac{1}{2}\sigma^2$, pois torna a variância decrescente, algo não factível. Essa conclusão pode ser obtida

com a derivação em relação ao tempo da equação (3-13), igualando a zero e analisando o tempo t no ponto máximo. Caso exista a relação $\mu - \delta < -\frac{1}{2}\sigma^2$, o estudo (opções, simulação, etc) deve ser feito com horizonte de tempo até o t^* de variância máxima, evitando variância decrescente.

Para apresentação de conceitos de opções e mercado futuro, é necessário o conceito de mudança de medida. Sejam duas medidas, P em (Ω, \mathcal{F}) e Q em (Ω, \mathcal{F}) , sendo que para todo $A \in \mathcal{F}$, $P(A) = 0$ então $Q(A) = 0$, sendo absolutamente contínuas ($Q \ll P$).

Dados a hipótese de continuidade, existe uma variável aleatória não negativa ν que relaciona essas duas medidas (relaciona as densidades de probabilidade). Essa variável é conhecida como derivada Radon-Nikodym. Em processos estocásticos, essa conversão de medida do processo é enunciada pelo teorema de Girsanov, que adota a derivada de Radon-Nikodym.

Seja o processo estocástico em medida real (Ω, \mathcal{F}, P) apresentado pela equação abaixo:

$$dS_t = (\mu - \delta)S_t dt + \sigma S_t dz \quad (3-14)$$

define-se o incremento de Wiener em medida martingal:

$$d\tilde{z} = \theta dt + dz$$

e a derivada Radon-Nikodym:

$$\nu = \exp \left[-\theta z - \frac{1}{2}\theta^2 t \right]$$

Onde, $d\tilde{z}$ é igual ao incremento de Wiener sob medida equivalente, o preço do prêmio de risco igual a $\theta = \frac{\mu - r}{\sigma}$, em que o prêmio de risco é $\pi = \mu - r$. Dessa forma, o processo estocástico (equação 3-14), em medida martingal equivalente (Ω, \mathcal{F}, Q) é:

$$\begin{aligned} dS_t &= (\mu - \delta)S_t dt + \sigma S_t (-\theta dt + d\tilde{z}) \\ &= (\mu - \delta)S_t dt + -(\mu - r)S_t dt + \sigma S_t d\tilde{z} \end{aligned}$$

$$dS_t = (r - \delta)S_t dt + \sigma S_t d\tilde{z} \quad (3-15)$$

Ou seja, há um desconto no processo pelo prêmio de risco, sendo que esse processo, em medida neutra ao risco, tem média relacionada a taxa livre de risco (em tempo contínuo - e^{rt}), descontado o dividendo/taxa de conveniência. Sob a medida equivalente, a variância (ou matriz de covariância em caso de processo estocástico multivariado) é igual a variância sob medida real. A vantagem de trabalhar com essa medida é que o ativo S_t e qualquer derivativo desse ativo base - $F(S_t)$, em medida martingal equivalente, pode ser descontado pela taxa livre de risco em análise de apreçamento de ativo. Esse artifício facilita a análise de opções, pois nesse derivativo, a taxa de desconto ponderada ao risco altera ao longo do tempo e é maior em opções de compra comparada com a taxa livre de risco e menor em opções de venda.

Isso quer dizer que a esperança do ativo base (ou seu derivativo) sob medida equivalente martingal (\mathbb{Q}), descontado pela taxa livre de risco ($D_{T,t} = e^{-r(T-t)}$) é martingal ($D_t \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[S_T | \mathcal{F}_t] = S_t$). Esse raciocínio é essencial para apreçamento de opções. Por exemplo, seja uma opção de compra europeia com *strike* K e vencimento em T , em um tempo t , a opção vale:

$$\begin{aligned} c_t &= e^{-r(T-t)} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[c_T | \mathcal{F}_t] \\ &= e^{-r(T-t)} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[(S_T - K)^+ | \mathcal{F}_t] \end{aligned} \quad (3-16)$$

Sendo a simbologia $(.)^+$ a função máximo entre o resultado e zero.

O estudo dos preços futuros é importante para a estimação dos parâmetros do modelo do preço *spot*. No caso de *commodity*, o mercado futuro é bem desenvolvido e há diversos contratos com diferentes vencimentos de um mesmo ativo físico. A estimativa do preço *spot* é necessária em muitas *commodities*, visto que os contratos negociados em mercado são os contratos futuros, não o ativo de entrega imediata. Essa é a realidade do óleo tipo *Brent* ou *WTI*. Então, o preço do *spot* é desconhecido e estimado por diversos contratos do mercado futuro, sendo os parâmetros do preço *spot* relevantes para o apreçamento de OR.

A estrutura a termo dos preços futuros no tempo t é definida como a esperança em medida martingal do preço do ativo base (*spot*) na data do término do contrato (T), dada as informações em t . Sendo a dinâmica de preço *spot* igual a equação diferencial estocástica (3-14), o mesmo processo em medida martingal será igual a equação (3-15) e a estrutura do preço futuro

igual a equação (3-17), com resolução bem parecida com a equação (3-12):

$$F_{t,T} = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[S_T | \mathcal{F}_t] = S_t e^{(r-\delta)(T-t)} \quad (3-17)$$

Nesse modelo, o preço futuro é crescente caso $r - \delta > 0$ em relação ao aumento de $T - t$ e decrescente caso $r - \delta < 0$. Como a taxa livre de risco e a taxa de conveniência são parâmetros constantes, o modelo não capta a variação da estrutura a termo de *contango* para *backwardation*, ou vice e versa.

Como em Gibson e Schwartz (1990), considerando a taxa livre de risco constante, por diferentes contratos futuros com diferença de m meses, pode-se extrair, em termos anuais, a taxa de conveniência implícita (δ), segundo a fórmula a seguir:

$$\delta = r + \frac{12}{m} \ln \left[\frac{F_{t,T+m}}{F_{t,T}} \right] \quad (3-18)$$

Agora, a dinâmica de difusão do preço futuro pode ser obtida pela fórmula de Itô-Doeblin. Sendo $\frac{\partial F}{\partial t} = -(r - \delta)F$, $\frac{\partial F}{\partial S} = e^{(r-\delta)(T-t)} = \frac{F}{S}$ e $\frac{\partial^2 F}{\partial S^2} = 0$, e dS em medida martingal, a difusão dF é:

$$\begin{aligned} dF &= -(r - \delta)F dt + \frac{F}{S} dS \\ &= -(r - \delta)F dt + \frac{F}{S} [(r - \delta)S dt + \sigma S d\tilde{z}] \\ &= -(r - \delta)F dt + (r - \delta)F dt + \sigma F d\tilde{z} \\ \frac{dF}{F} &= \sigma d\tilde{z} \end{aligned} \quad (3-19)$$

Por isometria de Itô $\left(\mathbb{E}[(\int_t^T \sigma(u) dz_u)^2] = \mathbb{E}[\int_t^T \sigma^2(u) du] \right)$, a variância de $\frac{dF}{F}$ é igual a $\sigma^2 dt$, portanto a volatilidade do retorno futuro $\left[\frac{1}{dt} \text{Var} \left[\frac{dF}{F} \right] \right]^{1/2}$ é igual a σ . Isso quer dizer que a estrutura a termo da volatilidade é independente do prazo do vencimento do contrato ($T - t$), constante e igual a volatilidade do preço *spot*. Empiricamente, nos contratos futuros, nota-se uma diminuição da volatilidade com o aumento do prazo do contrato. Por essa razão, foi desenvolvido modelos mais complexos como de dois e três fatores, tentando captar também esse efeito dos preços (Cortazar e Schwartz, 2003; Schwartz, 1997; Schwartz e Smith, 2000).

O Modelo MGB é um modelo de um fator (S) e pode ser estimado pelo

filtro de Kalman. Trata-se de um método recursivo de modelos gaussianos, com equações na forma de espaço-estado, de previsão e estimação de variáveis não observáveis. As equações de estado (3-20) e transição (3-21) são apresentadas, segundo Harvey (1990, Cap. 3):

$$y_t = Z_t \alpha_t + d_t + \epsilon_t \quad (3-20)$$

$$\alpha_t = T_t \alpha_{t-1} + c_t + R_t \eta_t \quad (3-21)$$

O modelo discreto do MGB, na forma espaço-estado:

$$\ln F_{t+\Delta t} = [1] \ln S_{t+\Delta t} + (r - \delta) \tau + \epsilon_t \quad (3-22)$$

$$\ln S_{t+\Delta t} = [1] \ln S_t + (\mu - \delta - 0.5\sigma^2) \Delta t + \eta_t \quad (3-23)$$

Sendo Δt a discretização dos contratos futuros, τ o vencimento do contrato da variável medida, $\mathbb{E}[\epsilon_t] = 0$ e $\text{Var}[\epsilon_t] = H_t$, $\mathbb{E}[\eta_t] = 0$ e $\text{Var}[\eta_t] = Q_t$. A matriz H_t precisa ser estimada, que é em função do número n de contratos de entrada $F_{1:n} - H_{t[n \times n]}$. Já $\text{Var}[\eta_t]$, no caso de um modelo MGB, é igual a $\sigma^2 \Delta t$.

3.4

Incerteza técnica - Fator de Chance

Entre as variáveis descritas nas equações (3-1 e 3-7), a qualidade econômica (q), volume recuperável (B) e fator de chance (FC) são essencialmente características endógenas, dependentes de análise técnica e dos eventos de investimentos em conhecimento e produção. Elas se diferenciam dos preços, justamente pois seus processos estocásticos são indexados aos eventos (por exemplo, investimento) e os preços são indexados de forma contínua ao tempo. Agora, o investimento em desenvolvimento (I_d) é dependente dos fatores de qualidade econômica e volume estimado de hidrocarboneto, mas também das oscilações de preços dos insumos.

Os limites de atuação da atividade exploratória podem ser expandidos, mas a função principal é encontrar reservas. Assim sendo, o parâmetro volume recuperável após a perfuração do poço pioneiro continua incerto e essa incerteza é reduzida somente com os poços de delimitação. Este trabalho considera que os investimentos de delimitação estão agregados em I_d . Ademais, o volume recuperável B é um parâmetro médio estimado e não alterado pelo poço exploratório. Evidente que no caso de insucesso do poço exploratório, a

revelação da informação demonstra a inexistência de reserva de petróleo, mas não alterando a variável B e sim zerando a variável FC .

As considerações acima sobre o volume recuperável valem também para a qualidade econômica da reserva. Esse parâmetro, uma simplificação e sumarização de outros parâmetros pertencentes ao fluxo de caixa, incluindo até característica do reservatório (permo-porosidade), taxa de desconto e risco-país, não são mitigados ou reduzidos com a campanha exploratória. Muitos dos parâmetros endógenos só são compreendidos no investimento de delimitação e na produção do hidrocarboneto.

A incerteza técnica exploratória é representada na variável FC . O FC é uma medida de probabilidade subjetiva comum em exploração de recursos minerais, em especial na indústria de petróleo. Num modelo que considera outros jogadores, o fator de chance pode servir para representar os efeitos do investimento alheio em seu portfólio, sendo, nesse caso, uma medida de incerteza estratégica. Esse assunto será explorado na seção (3.5).

O Fator de chance é composto pela interseção das probabilidades independentes do sistema petrolífero. O sistema petrolífero pode ser definido de diversas maneiras, mas é normalmente expresso pelos seguintes fatores:

- Reservatório (R)
- Trapa (T)
 - Selo
 - Estrutura
- Geração (G)
- Migração (M)
- Sincronismo (S)

Reservatório - considera-se reservatório um espaço poroso e permeável que pode conter hidrocarboneto. A proposição da probabilidade subjetiva sobre a presença de reservatório vem do entendimento do sistema deposicional na formação da rocha e as alterações ao longo do tempo geológico. Além do sistema deposicional, um componente importante na análise da existência de reservatório é o soterramento. Devido ao aumento de pressão e temperatura pela carga litostática, a rocha reservatório começa a sofrer processo diagenético e quanto maior o soterramento, menor o espaço poroso. Isso depende do tipo de depósito e das rochas na vizinhança (rochas encaixantes), relevantes na cimentação do espaço poroso. Casos conhecidos são arenitos de Marlim e Roncador e microbialitos do Pré-Sal.

Trapa - Sem o trapeamento, o hidrocarboneto não se acumula. A compreensão da probabilidade subjetiva da trapa vem do entendimento dos especialistas em relação ao selo e a estrutura. O fator selo se refere à rocha encaixante, que normalmente são folhelhos, sendo importante que essa rocha seja pouco friável e resista em armazenar o hidrocarboneto na rocha reservatório. A estrutura é parte importante no trapeamento, sendo a curvatura espacial (concavidade) necessária para o acúmulo. Ainda que haja contatos laterais estratigráficos, sempre há componentes estruturais na determinação da reserva. No fator estrutural, a atenção dos especialistas vai das falhas geológicas e dobramento até regimes de esforços regionais para qualificar melhor o trapeamento. Novamente, o componente soterramento é importante na definição dessa probabilidade subjetiva, em especial no selo, pois quanto menos soterrada a rocha encaixante, menos resistente às pressões e consequentemente pior a trapa.

Geradora - para haver reservatório de hidrocarboneto, deve haver rochas geradoras. Algumas rochas tem maior potencial gerador que outras, sendo fundamentalmente, folhelhos ricos em matéria orgânica as principais delas. A concentração de matéria orgânica pode ter relação com eventos globais de subsistência de bacias ou eustasia, ou eventos locais da bacia estudada. Essa diferenciação entre global e local é essencial para a avaliação subjetiva da probabilidade de geração. Novamente, o soterramento é um fator importante para a rocha geradora. A razão também tem relação com a carga litostática sobre a rocha geradora, pois a geração e expulsão do hidrocarboneto da rocha dependem da história de pressão e temperatura que esta sofreu.

Migração - Esse parâmetro relaciona dois pontos no espaço, conexão entre a possível rocha geradora com a possível rocha reservatório. Estuda-se os prováveis caminhos de migração do hidrocarboneto da rocha geradora até a acumulação e para isso, faz-se o mapeamento de falhas, evolução estrutural da bacia, possíveis níveis carreadores e mapas de geopressão para identificar regiões de expulsão do fluido.

Por fim, o sincronismo envolve a história geológica dos elementos do sistema petrolífero. Esse fator se relaciona com a compreensão total da formação da bacia onde se pretende prospectar. Assim, não adianta ter boa rocha reservatório formada após ao momento máximo de expulsão do hidrocarboneto da rocha geradora, ou por exemplo, a formação do trapeamento do reservatório após o máximo de geração.

Para cada fator descrito, os técnicos ponderam de 0 a 1 (Rose, 2001, p.37). Na consolidação do fator de chance geológico, não há valores extremos, pois se o FC é zero, não há oportunidade exploratória e se for igual a 1, não é exploração. Observa-se pela descrição do sistema petrolífero que os componentes não são totalmente independentes (Stabell et al., 2000), contudo, para não tornar tão complexo o exercício, decide relevar essa questão.

A equação de fator de chance geológico é apresentada abaixo:

$$FC = prob(R) \cdot prob(T) \cdot prob(G) \cdot prob(M) \cdot prob(S)$$

Além do FC geológico, a indústria do petróleo considera o fator de chance recuperável, comercial e econômico (Rose, 2001, p. 23-24). Esses fatores de chance carregam a incerteza dos parâmetros q , B e P . O fator de chance recuperável agrupa incerteza em relação a permo-porosidade, a qualidade do óleo, técnicas de exploração, representados no parâmetro q , além da própria delimitação do campo, derivado do parâmetro B . Contudo, só é possível reduzir essa incerteza com investimento em conhecimento dado especificidades de cada projeto, como teste de longa duração, sísmica 4D, tecnologia para recuperação e outros. Já sobre o fator de chance comercial, envolve incerteza de economicidade, sendo relacionado principalmente com o tamanho da reserva (B) e incerteza de preços (P). Este trabalho não pretende adotar esses conceitos de fator de chance, visto que separam a incerteza de sua variável estocástica, ou seja, esses fatores de chance agregam incertezas advindas de múltiplas variáveis (P , q e B) separando-as de seus parâmetros. Chama a atenção, em especial, o fator de chance comercial, pois agrega características da estocasticidade dos preços. Pelo método de valoração de OR, variáveis de mercado possuem prêmio de risco. Devido a isso, com o ajuste da probabilidade pela medida martingal equivalente, é possível descontar a tempo presente esse ativo ou qualquer derivativo deste ativo base pela taxa livre de risco, sem uso da taxa ajustada ao risco. Dessa forma, é conflituoso adotar metodologia de fator de chance comercial-econômico, já que o prêmio de risco já foi determinado e descontado do processo estocástico dos preços. Questões relacionadas ao tema fator de chance são encontradas em Murtha (1995) e fator de chance e opções reais em Dias (2005, p. 272).

A avaliação do FC é feita para cada oportunidade exploratória. Em um mesmo bloco exploratório, podem haver diversas oportunidades com características semelhantes devido a mesma gênese ou questões existentes no sistema petrolífero. Algo que não é comum na indústria, mas é intuitivo na

consolidação do portfólio exploratório pelo corpo técnico, é consideração da correlação (ρ) entre as oportunidades. Essa análise deve ser feita dois a dois, correspondendo, portanto, $\binom{n}{2}$ avaliações, em que $n \geq 2$, sendo n o número de oportunidades do portfólio. Estimativas de correlação de 100% são improváveis, pois cada oportunidade possui uma idiossincrasia na acumulação do bem mineral, além de impossíveis matematicamente em situação de probabilidade distintas, tanto do FC, quanto os fatores de risco independentes. Por outro lado, correlação 0% é possível, já que a evolução geológica da bacia pode colocar oportunidades próximas em regimes hidráulicos distintos. Correlações negativas não são consideradas neste trabalho, ainda que matematicamente sejam possíveis.

Murtha (1995) trata a dependência em um único poço exploratório de diversas zonas potenciais. Esse conceito se equivale a dependência de diferentes prospectos no caso de sobreposição, em particular, sobreposições de objetivos com o mesmo potencial exploratório na zona de maior confiança de ocorrência, conhecida como P90. Os casos desta dissertação se assemelham a essa hipótese somente no estudo das probabilidades caso haja a sobreposição dos P90 dos diversos objetivos em um só poço. Como será detalhado na seção (4.2.1), os prospectos dos casos estudados não se sobrepõem. Na hipótese de sobreposição dos P90, não há escolha ótima sequencial, pois um prospecto necessariamente será perfurado antes do outro. Haveria diferença na valoração, pois o estudo considera a existência de otimização sequencial pela escolha gerencial (escolha ótima) de perfuração dado a incerteza dos preços e o valor da informação. Por outro lado, os custos de perfuração podem ser reduzidos. Assim, estudos que comparam o ótimo com um único poço e sem escolha informacional com o caso de vários poços e escolha sequencial também são relevantes para gestão da carteira.

3.4.1

Dependência - Função Bernoulli Bivariada

Só existem dois possíveis resultados na perfuração de um poço exploratório de petróleo: sucesso ou insucesso. Por esta razão, a distribuição binária de Bernoulli é útil. Como o valor da informação é o valor dado um investimento prévio, ou seja, a probabilidade de ocorrência dado ocorrência de outro evento, a função Bernoulli é bivariada.

Sejam dois prospectos: X e Y , com respectivos fatores de chance (FC_X e FC_Y). O sucesso será definido como ocorrência do valor 1 e o insucesso como valor 0. A probabilidade de X ser sucesso e Y também ser sucesso é FC_{11} ($= P(X = 1, Y = 1)$). Já a probabilidade de X ser fracasso e Y também ser

fracasso é FC_{00} ($= P(X = 0, Y = 0)$). As outras interseções podem ser vistas na tabela (3.1).

		X		
		1	0	
Y	1	FC_{11}	FC_{01}	FC_Y
	0	FC_{10}	FC_{00}	
		FC_X		

Tabela 3.1: Distribuição Bivariada de Bernoulli

O objetivo é apresentar a correlação ρ_{XY} e as probabilidades condicionais $P(Y = 1|X = 1)$ e $P(Y = 1|X = 0)$. Uma melhor leitura dessas probabilidades é: dado que X foi sucesso, qual é o fator de chance de Y e dado que X foi fracasso, qual é o fator de chance de Y? Essas probabilidades condicionais representam o aprendizado dado o investimento em X, ou seja, o quanto a revelação da informação X afeta Y. Como a realização X condiciona o espaço amostral de Y e as perfurações ocorrem normalmente de forma sequencial, as análises dos ativos são melhor feitas por probabilidades condicionais, ou em termos de VOI, em função da medida de aprendizado. Como apresentado por Dias (2005, p. 276), a correlação é a medida de aprendizado de um ativo exploratório em relação a um investimento em outro ativo exploratório.

A esperança matemática é calculada por $\mathbb{E}[Z] = \sum_i z_i f(z_i)$, assim, para a variável X:

$$\mathbb{E}[X] = 1 \cdot FC_{11} + 1 \cdot FC_{10} + 0 \cdot FC_{01} + 0 \cdot FC_{00}$$

$$\mathbb{E}[X] = FC_{11} + FC_{10} = FC_X$$

$$Var[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$$

$$\mathbb{E}[X^2] = 1^2 \cdot FC_{11} + 1^2 \cdot FC_{10} + 0^2 \cdot FC_{01} + 0^2 \cdot FC_{00}$$

$$\mathbb{E}[X^2] = FC_{11} + FC_{10} = FC_X = \mathbb{E}[X]$$

$$Var[X] = FC_X - FC_X^2 = FC_X(1 - FC_X)$$

$$\sigma_X = \sqrt{FC_X(1 - FC_X)}$$

De forma similar a X, os momentos da variável Y são:

$$\mathbb{E}[Y] = 1 \cdot FC_{11} + 1 \cdot FC_{01} + 0 \cdot FC_{10} + 0 \cdot FC_{00}$$

$$\mathbb{E}[Y] = FC_{11} + FC_{01} = FC_Y$$

$$\mathbb{E}[Y^2] = FC_{11} + FC_{01} = FC_Y = \mathbb{E}[Y]$$

$$\begin{aligned} Var[Y] &= FC_Y - FC_Y^2 = FC_Y(1 - FC_Y) \\ \sigma_Y &= \sqrt{FC_Y(1 - FC_Y)} \end{aligned}$$

Para calcular a correlação, é necessária a covariância. Assim:

$$Cov(X, Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$$

$$\mathbb{E}[XY] = (1 \cdot 1) \cdot FC_{11} + (1 \cdot 0) \cdot FC_{10} + (0 \cdot 1) \cdot FC_{01} + (0 \cdot 0) \cdot FC_{00} = FC_{11}$$

$$Cov(X, Y) = FC_{11} - FC_X FC_Y$$

Assim, a correlação é:

$$\rho_{XY} = \frac{Cov(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{FC_{11} - FC_X FC_Y}{\sqrt{FC_X(1 - FC_X)FC_Y(1 - FC_Y)}} \quad (3-24)$$

Pela probabilidade condicional, FC_{11} é:

$$FC_{11} = P(X = 1, Y = 1) = P(Y = 1|X = 1)P(X = 1) = P(Y = 1|X = 1)FC_X$$

Substituindo a última equação em (3-24), $P(Y = 1|X = 1)$ é :

$$P(Y = 1|X = 1) = FC_Y + \frac{\sqrt{FC_X(1 - FC_X)FC_Y(1 - FC_Y)}}{FC_X} \rho_{XY} \quad (3-25)$$

Para obter a probabilidade condicional $P(Y = 1|X = 0)$, deve-se lembrar que $FC_Y = FC_{11} + FC_{01}$ e

$$FC_{01} = P(X = 0, Y = 1) = P(Y = 1|X = 0)P(X = 0) = P(Y = 1|X = 0)(1 - FC_X)$$

Substituindo em FC_{11} na equação (3-24), $P(Y = 1|X = 0)$ é:

$$P(Y = 1|X = 0) = FC_Y - \frac{\sqrt{FC_X(1 - FC_X)FC_Y(1 - FC_Y)}}{1 - FC_X} \rho_{XY} \quad (3-26)$$

Dias e Calvette (2017), Dias (2004a) e Joe (1997, p. 210) apresentam os limites pela inequação Fréchet, dado FC_{11} , ρ_{XY} e as probabilidades incondicionais FC_X e FC_Y :

$$\max[0, FC_X + FC_Y - 1] \leq FC_{11} \leq \min[FC_X, FC_Y]$$

Porém, a preocupação com limites deve ser da equipe de técnicos. Na prática, deve-se estimar a correlação por uma avaliação subjetiva e verificar se pertence ou não aos limites. Caso não esteja, deve rever tanto os fatores de chance quanto a correlação.

A seguir, é apresentado um estudo dessa medida de aprendizado. Propõe um exemplo simples, onde há 6 oportunidades de investimentos, em que o FC (incondicionais) de todas é igual a 30% e a correlação dois a dois é 50%. O método de cálculo é similar ao binomial não recombinação. Verifica-se na tabela (3.2), com a informação *a priori*, a média não se altera e aumenta o desvio padrão da distribuição em cada evento. Como o FC é um parâmetro do VME, não só o FC dispersa com o aumento do número de revelações (investimentos), mas também o VME quanto mais oportunidades existirem. Em estratégia sequencial, esse efeito de manutenção da média e aumento da variância foram notados por [Murtha \(1995\)](#) e [Smith e Thompson \(2008\)](#).

Investimentos	Média	Desvio Padrão	Cenários
1	0,3	0,0	1
2	0,3	0,23	2
3	0,3	0,30	4
4	0,3	0,35	8
5	0,3	0,38	16
6	0,3	0,40	32

Tabela 3.2: Simulação: Bernoulli Bivariada

Essas médias em cada evento de investimento podem ser explicadas pela lei da estatística iteradas. Sendo X o primeiro poço e Y o segundo poço, além do sucesso ser 1 e fracasso 0, a média incondicional de Y:

$$\mathbb{E}[Y] = 1 \cdot FC_Y + 0 \cdot (1 - FC_Y) = 1 \cdot 30\% + 0 \cdot 70\% = 30\%$$

Já a média condicional de Y dado X=1, sendo $(FC_Y|X = 1)$ pela equação (3-25):

$$\mathbb{E}[Y|X = 1] = FC_X \cdot [1 \cdot (FC_Y|X = 1) + 0 \cdot (1 - FC_Y|X = 1)]$$

E a média condicional de Y dado X=0, sendo $(FC_Y|X = 0)$ pela equação (3-26):

$$\mathbb{E}[Y|X = 0] = (1 - FC_X) \cdot [1 \cdot (FC_Y|X = 0) + 0 \cdot (1 - FC_Y|X = 0)]$$

Assim, média incondicional das médias condicionais é:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\mathbb{E}[Y|X]] &= FC_X \cdot [1 \cdot (FC_Y|X=1) + 0 \cdot (1 - FC_Y|X=1)] + \\ &\quad (1 - FC_X) \cdot [1 \cdot (FC_Y|X=0) + 0 \cdot (1 - FC_Y|X=0)]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\mathbb{E}[Y|X]] &= 30\% \cdot [1 \cdot 65\% + 0 \cdot 35\%] + 70\% \cdot [1 \cdot 15\% + 0 \cdot 85\%] \\ &= 30\% \cdot 65\% + 70\% \cdot 15\% = 30\%\end{aligned}$$

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[Y|X]] = \mathbb{E}[Y]$$

Em casos das variáveis aleatórias serem permutáveis ($FC_X = FC_Y$), o cálculo condicional (equações 3-25 e 3-26) pode ser simplificado:

$$P(Y=1|X=1) = FC + (1 - FC)\rho$$

$$P(Y|X=0) = FC(1 - \rho)$$

A figura (3.1) apresenta uma análise *a priori* da distribuição de revelação dado cinco investimentos. Como muita informação seria revelada até esse evento, expondo 32 possíveis cenários para o investimento 6, nota-se a distribuição de fatores de chance para o sexto prospecto praticamente degenerado, concentrando FC próximos de zero e de 100%. Nessa etapa de investimento numa bacia, após cinco poços perfurados, não se deve ter muita dúvida geológica de existência ou não de hidrocarboneto. Isso é o efeito das informações reveladas pelos poços exploratórios de 1 a 5. Um gestor, a partir das informações neste estado, decidiria investir em um prospecto que tivesse, por exemplo, probabilidade de sucesso acima de 60%. Essa decisão pode ser em função de um critério ótimo, ou seja, estados da natureza em que o VME é maior que zero. Esse é o princípio da formulação da opção de aprendizado. Ademais, a perfuração de certos poços antes de outros podem apresentar informações mais valiosas, obtendo uma sequência ótima de perfuração. Acrescenta-se a esse problema a oscilação dos preços, podendo afetar a ordem da sequência ótima, ou até mesmo sugerir aguardar e não investir, algo extremamente comum em exploração. E caso essa informação, a revelação da informação seja feita por um investimento no bloco vizinho?

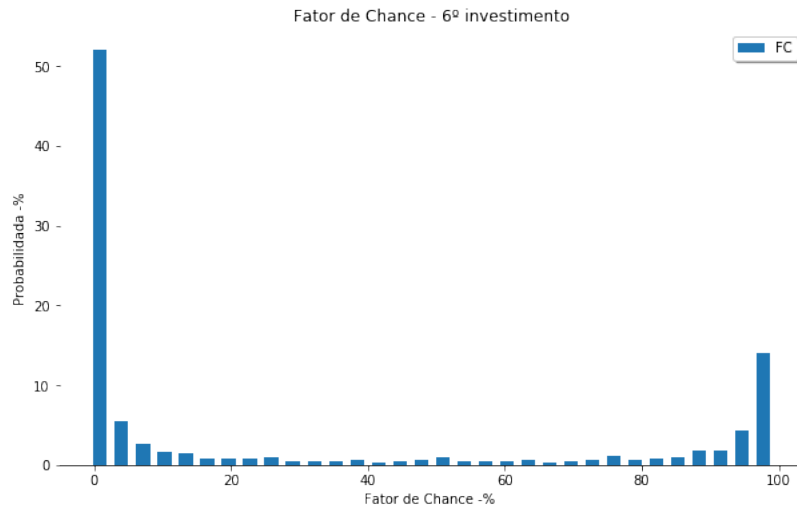


Figura 3.1: Revelação no sexto investimento - FC e Probabilidade

3.5

Incerteza estratégica

A TOR não adiciona incerteza de outros agentes ao ótimo de cada investimento. Já a “teoria dos jogos é o estudo de problemas de decisão por mais de um indivíduo” (Gibbons, 1992, prefácio), forma correta de abordar a incerteza estratégica no estudo. Para incluir essa complexidade, será apresentado um modelo discreto de TJ em uma situação recorrente na exploração do petróleo, sendo os *payoffs* da matriz obtidos pela TOR. Essa intersecção de teorias é denominada de *option-games* (Chevalier-Roignant et al., 2011).

Esta seção introduz um modelo básico de guerra de atrito em jogos dinâmicos, as implicações e algumas intuições. Depois apresenta conceitos de jogo evolucionário, o uso dessa teoria para o equilíbrio estável e as derivações do replicador dinâmico em jogos simétricos e assimétricos. Como a variável da TOR é estocástica, conceitos e uso de jogos markovianos são delimitados. Por último, será apresentado o jogo de guerra de atrito na exploração de petróleo baseado no modelo de Dias e Teixeira (2009).

O primeiro jogo apresentado é o modelo básico de Guerra de Atrito, um jogo dinâmico e repetido, de informação imperfeita e completa (Gibbons, 1992, p.117-119), discreto e simétrico. Jogos denominados de *Hawk and Dove game* e *Chicken game* possuem conclusões similares.

No jogo de guerra de atrito, há uma disputa de dois jogadores por um recurso que vale v . Há duas ações nesse jogo: luta pelo recurso, apresentada como **Escalada** (E) ou abandono, saída do jogo, apresentada como **Recuo** (R). Caso ambos escalarem (E,E), o jogo continua *ad infinitum*, e para cada

estado, ocorre um custo c ($c < v$) por manter a estratégia de escalada para cada jogador, portanto, um jogo simultâneo e dinâmico. Caso um recue (E,R) ou (R,E), o que atacar recebe o recurso v e o outro nada recebe, ambos os *payoffs* descontados pelos custos acumulados da guerra ¹.

A melhor forma de analisar esse jogo é em estrutura de árvore (figura 3.2) e em duas etapas. Os conceitos dessa simplificação podem ser levados a generalização do jogo infinito. A linha pontilhada indica o conjunto de informações e os parênteses, os *payoffs*. Conjunto de informações é um conjunto de nós em que o jogador não sabe em qual ramo se encontra. Isso torna o jogo de informação imperfeita e de característica de ação simultânea em casa passo. Nessa árvore, no caso de ambos escalarem até o segundo subjogo, há um custo c para os dois.

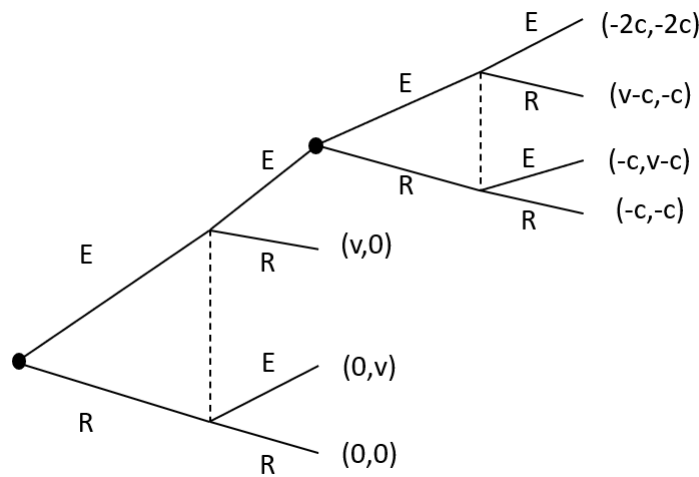


Figura 3.2: Jogo Dinâmico: Guerra de Atrito

O equilíbrio em jogos dinâmicos precisa ser equilíbrio perfeito em todos os subjogos (ENPS). Os três subjogos são: $\{(E_2, E_2), (E_2, R_2), (R_2, E_2), (R_2, R_2)\}$, $\{(E_1, E_1), (E_1, R_1), (R_1, E_2), (R_1, R_1)\}$ e o jogo completo.

O jogo deve ser analisado por indução retroativa (*backward*), contudo, o jogador 2 no segundo momento não sabe em qual ramos está. Então podemos representar esse "subjogo estático" na forma normal:

¹Esse modelo básico da guerra de atrito foi baseado em [Bonatti \(2015\)](#).

		Jogador 2	
		q	$1 - q$
		Escala	Recua
Jogador 1	p	Escala	$-2c ; -2c$
	$1 - p$	Recua	$-c ; v - c$

Tabela 3.3: Subjogo 2 - Guerra de Atrito

Observa-se que na tabela (3.3), o custo c é igual para todos. Isso torna o custo irrelevante no sentido estratégico neste estado. Assim, é possível considerar como custo afundado e analisar como no subjogo (3.4):

		Escala	Recua
Escala	$-c +$	$-c ; -c$	$\underline{v} ; \underline{0}$
Recua		$\underline{0} ; \underline{v}$	$0 ; 0$

Tabela 3.4: Subjogo 2 - Guerra de Atrito - Custo afundado

As linhas sublinhadas indicam a melhor ação de cada jogador. Observa dois equilíbrios puros no subjogo 2: $\{E_2, R_2\}$ e $\{R_2, E_2\}$. Há um terceiro equilíbrio neste subjogo, que será analisado depois.

No processo de indução retroativa, é necessário levar esses *payoffs* de continuação com o seu custo afundado para o primeiro momento. Primeiro, o equilíbrio $\{E_2, R_2\}$ para o subjogo 1:

	Escala	Recua
Escala	$\underline{v - c} ; -c$	$\underline{v} ; \underline{0}$
Recua	$0 ; \underline{v}$	$0 ; 0$

Tabela 3.5: Subjogo 1 - Guerra de Atrito - $\{E_2, R_2\}$

No caso do subjogo 1, com equilíbrio puro $\{R_2, E_2\}$:

	Escala	Recua
Escala	$-c ; \underline{v - c}$	$\underline{v} ; 0$
Recua	$\underline{0} ; \underline{v}$	$0 ; 0$

Tabela 3.6: Subjogo 1 - Guerra de Atrito - $\{R_2, E_2\}$

Para o subjogo (3.5), o equilíbrio é $\{E_1, R_1\}$, sendo para o subjogo total apresentado na figura (3.2), o equilíbrio perfeito em subjogos é $\{E_1, E_2; R_1, R_2\}$, em que o subscrito numérico indica o subjogo e o símbolo (;) separa as ações do primeiro e segundo jogador. Agora, para o subjogo (3.6), o equilíbrio é $\{R_1, E_1\}$ e para o subjogo total, $\{R_1, R_2; E_1, E_2\}$. Note que em ambos os subjogos (3.5 e 3.6) não há estratégia $E_1; E_1$ como equilíbrio, terminando o jogo no primeiro momento e sem custo. Ou seja, no primeiro momento, caso o jogador saiba que o outro vai desistir, ele vai atacar quantos forem os estados.

Por vezes, de antemão, essa certeza não existe. Vamos analisar novamente o jogo (3.4) em busca do equilíbrio em estratégias mistas. Esse equilíbrio é a probabilidade de uma ação em que o outro jogador seja indiferente em qual ação tomar. Esse é um dos princípios da teoria dos jogos, estratégia em que não há incentivo ao desvio. Considerando a probabilidade do jogador 1 escalar igual a p , temos as utilidades do jogador 2 de escalar e recuar de:

$$U2(E) = p^*(-c) + (1 - p^*)v \quad (3-27)$$

$$U2(R) = p^*0 + (1 - p^*)0 \quad (3-28)$$

Igualando as duas utilidades, devido a indiferença entre as ações destacada no parágrafo anterior, chegamos em $p^* = \frac{v}{v+c}$ ², sendo $0 \leq p^* \leq 1$. Como se trata de um jogo simétrico, a probabilidade do jogador 2 em escalar q , na qual deixa indiferente o jogador 1 em qual ação tomar, também é igual a $q^* = \frac{v}{v+c}$. Isso quer dizer que quanto maior o prêmio v , mais provável o jogador atacar e quanto maior for o custo c , maior a probabilidade de recuar.

Como o jogo é simétrico e as probabilidades são iguais, o prêmio dos dois jogadores são iguais no subjogo 2. Como os jogadores são indiferentes em qual ação tomar, é só substituir a probabilidade na equação (3-27 ou 3-28), resultando com o par de *payoff* (0,0). Assim, carregando o custo, com estratégias mistas do subjogo 2, o subjogo 1 fica:

	Escala	Recua
Escala	$-c ; -c$	$v ; 0$
Recua	$0 ; v$	$0 ; 0$

Tabela 3.7: Subjogo 1 - Guerra de Atrito - Estratégia mista

Note que o subjogo 1 com estratégias mistas (3.7) é igual ao subjogo 2 (3.4), exceto pelo custo c . Esse jogo já foi resolvido, com três equilíbrios, dois puros $\{E_1, R_1\}$, $\{R_1, E_1\}$ e um misto com probabilidade $\{p^*, q^*\}$. Essa constatação facilita a percepção da repetitividade do jogo. Assim, é possível analisar no primeiro momento, ou seja, na forma normal do primeiro instante, um jogo de guerra de atrito de dois períodos ou infinitos períodos, considerando o valor esperado do custo como custo afundado dos agentes.

Portanto, nesse jogo, temos três equilíbrios perfeitos em subjogos: $\{E_1, E_2; R_1, R_2\}$, $\{R_1, R_2; E_1, E_2\}$ e $\{p_1^*, p_2^*; q_1^*, q_2^*\}$. O equilíbrio em estratégias mistas é o único que dá continuidade ao jogo. Como se trata de um jogo infinito, ele é definido quando o primeiro jogador deflete. A escolha do equilíbrio

²A probabilidade poderia ser encontrada maximizando a utilidade total do jogador 1 ou 2. Será utilizado esse método na apresentação do modelo final desta dissertação.

estável de longo prazo será feita com suporte da teoria dos jogos evolucionários e a definição do término do jogo será apresentado adiante.

Agora será apresentado algumas características desse modelo básico. Os dados de entrada são: o prêmio v é 50, custo c de 10. Isso leva a probabilidade p^* para escalar de 83.3%. A probabilidade do jogo se prologar é dado pela probabilidade independente dos dois jogadores escalarem em cada estado t :

$$Pr(\text{jogo} - \text{avançar}) = p^{2t} = e^{2t \ln p} \quad (3-29)$$

Como $\ln p$ é negativo, no infinito, a série tende para zero. Ou seja, com o passar do tempo, é mais improvável que os jogadores continuem a escalada na guerra de atrito, similar a formulação em [Bishop e Cannings \(1978\)](#). Na figura (3.3), nota-se esse efeito, também no caso de aumento do prêmio para 70 e aumento do custo para 20:

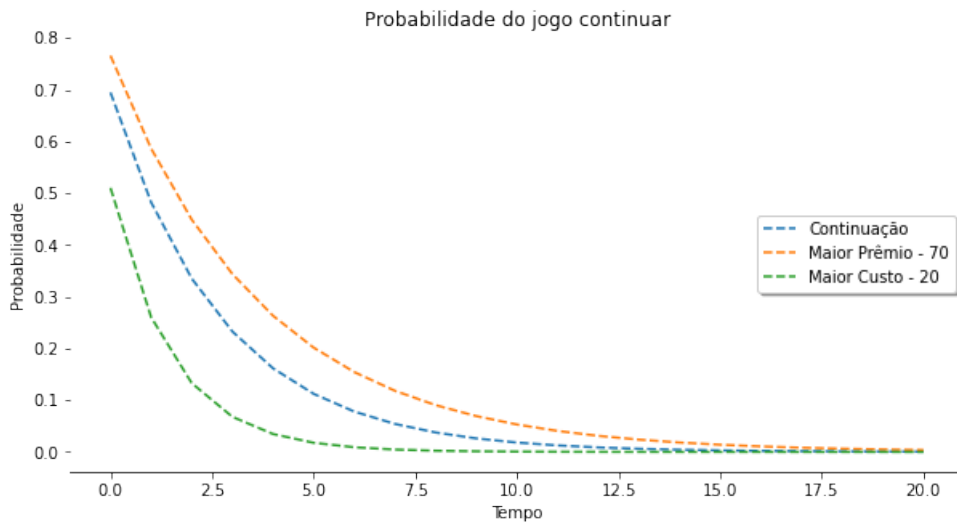


Figura 3.3: Modelo Básico - Guerra de Atrito - Prob. de Continuar

A probabilidade de jogar e fracassar é a probabilidade de não ganhar. A probabilidade de ganhar é dado pelo jogador escalar e o outro recuar, ou seja $2p(1 - p)$. Assim, no primeiro estado, a probabilidade de fracassar é 72.2%, maior que a probabilidade de continuar ($p^2 = 69.4\%$). A figura (3.4) apresenta as duas probabilidades. Nota-se que a diferença diminui quanto maior o tempo.

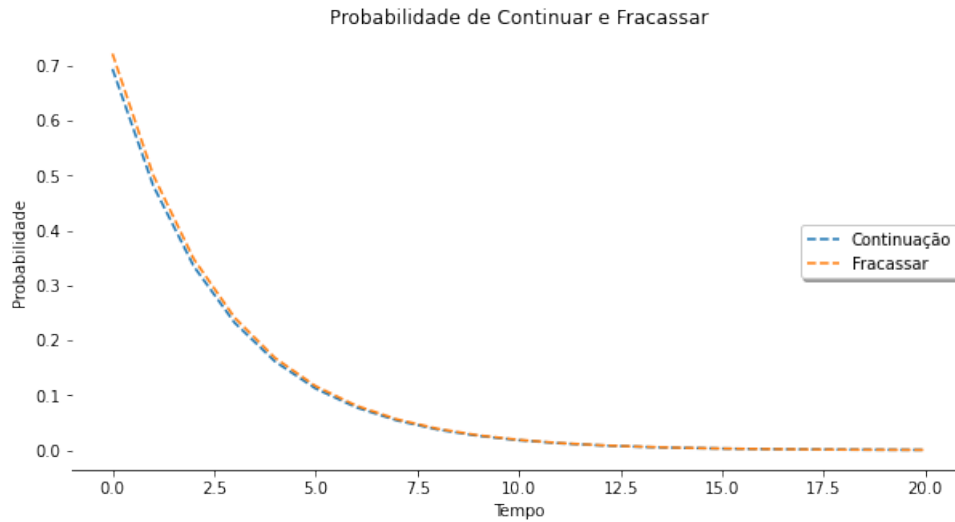


Figura 3.4: Modelo Básico - Guerra de Atrito - Prob. de Fracassar

O custo esperado de um jogo infinito, para cada jogador, pode ser calculado como:

$$\mathbb{E}[\text{custo}] = cp^2 + 2cp^4 + 3cp^6 + \dots = c \sum_{t=1}^{\infty} tp^{2t} \quad (3-30)$$

$$\mathbb{E}[\text{custo}] = c \frac{p^2}{(1 - p^2)^2} \quad (3-31)$$

A fórmula (3-31) é a solução da série aritmética-geométrica conhecida como *Gabriel's staircase*. A figura (3.5) mostra o custo esperado, também no caso de aumento do prêmio para 70 e no caso do custo afundado subir para 20. Em todos os casos, tem uma feição de patamar quando o tempo de competição é longo. Com o aumento do prêmio, eleva-se a razão $\frac{p^2}{(1-p^2)^2}$ e com o aumento do custo afundado, ainda que a série aumente pela multiplicação do custo, diminui a razão e por consequência a esperança do custo. No caso base de prêmio de 50, o custo afundado que leva a esperança do custo ser menor que o prêmio são valores maiores que 17.

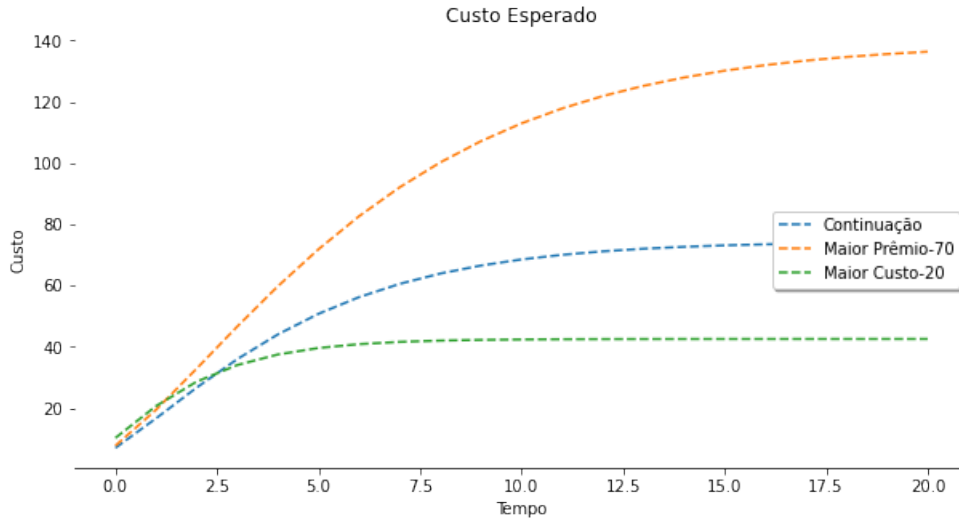


Figura 3.5: Modelo Básico - Guerra de Atrito - Custo Esperado

O Estratégia Estável Evolucionária (EEE) é um conceito de jogos evolucionários, aplicado em biologia, para explicar o equilíbrio das proporções das espécies na natureza. Mesmo sem racionalidade dos animais, os efeitos estatísticos populacionais são compatíveis com a teoria dos jogos. No caso da guerra de atrito ou *hawk and dove game*, propõe-se uma população, com perfis ou tipos de agressividade e passividade em que os indivíduos assimilam a estratégia do outro, e mesmo com pequenas alterações/mutações das populações em ϵ , pode haver uma resistência a estabilidade de uma estratégia, denominado de EEE. Segundo [J. M. Smith \(1974\)](#), para que ocorra a EEE na estratégia s , a utilidade da estratégia s dado que todos os indivíduos tem estratégia s deve ser maior que a utilidade da invasora x dado que os outros indivíduos jogam s . Esse já é um critério de não perpetuação da invasão, como um mecanismo de eliminação da estratégia invasora. Ademais, se essas forem iguais, a utilidade s dado que os outros indivíduos jogam x precisa ser maior que todos jogarem a estratégia invasora x . Em fórmulas, é igual a:

$$U(s, s) > U(x, s) \quad (3-32)$$

$$U(s, s) = U(x, s) \quad e \quad U(s, x) > U(x, x) \quad (3-33)$$

O jogo de guerra de atrito, como apresentado em [J. M. Smith \(1974\)](#), é condicionado pelo tempo em que os jogadores resistem ao conflito. No caso de dois jogadores recuarem, como é a ação *dove* do jogo *hawk and dove game*, haverá um custo de espera em função do tempo ([J. M. Smith, 1976](#)). Sendo o tempo de parada do jogador i (t_i) e m o custo em função do tempo, a utilidade

do primeiro jogador é:

$$u_1(t_1, t_2) = \begin{cases} V - m(t_2), & \text{se } t_1 > t_2 \\ -m(t_1), & \text{se } t_1 < t_2 \\ \frac{V}{2} - m(t_1), & \text{se } t_1 = t_2 \end{cases}$$

A única EEE é uma estratégia mista de probabilidade $p(x) = \frac{1}{V}e^{-x/V}$, similar a formulação (3-29) ³. No modelo básico, conclui-se que no jogo dinâmico tem três ENPS, dois puros e um misto. A teoria dos jogos evolucionários ajuda a encontrar EEE pela equação do replicador dinâmico.

A equação do replicador dinâmico em jogos simétricos é apresentada a seguir, em que há um ajuste na proporção x da ação ao longo do tempo t , que é em função de uma proporção prévia de x e as diferenças da utilidade da melhor resposta f em relação à média ϕ :

$$f = Ax \tag{3-34}$$

$$\phi = fx \tag{3-35}$$

$$\frac{dx}{dt} = x(f - \phi) \tag{3-36}$$

O jogo (3.4) pode ser aplicado nas equações do replicador dinâmico, com a matriz A correspondendo a:

$$A = \begin{pmatrix} -c & v \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3-37}$$

A figura (3.6) corresponde à integração da equação do replicador dinâmico no modelo básico, com valores de $v = 50$ e $c = 20$. Nota-se que o equilíbrio estável EEE ocorre em estratégia mista em que ambos os tipos jogam p^* no jogo de guerra de atrito.

³dedução em (J. M. Smith, 1974).

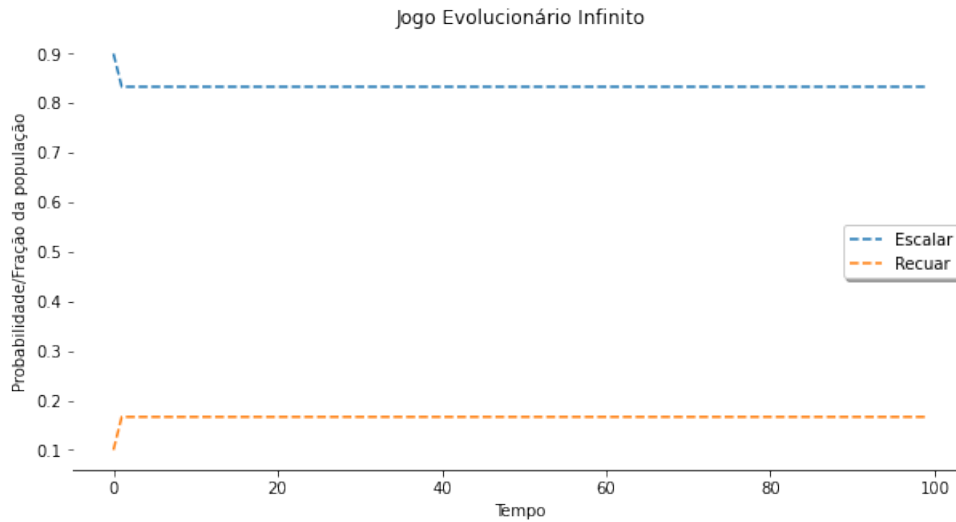


Figura 3.6: J. Evol. Infinito - Guerra de Atrito - Modelo Básico

O jogo (3.3) pode ser analisado em um plano de fase, que se trata das derivadas das equações (3-44 e 3-45). O equilíbrio é a região em que a derivada é igual a zero. A figura (3.7) indica justo no ponto de probabilidades iguais a $p^* = q^*$. Note que os vetores, vindo de todas as direções, indicam esse ponto, sendo um máximo global.

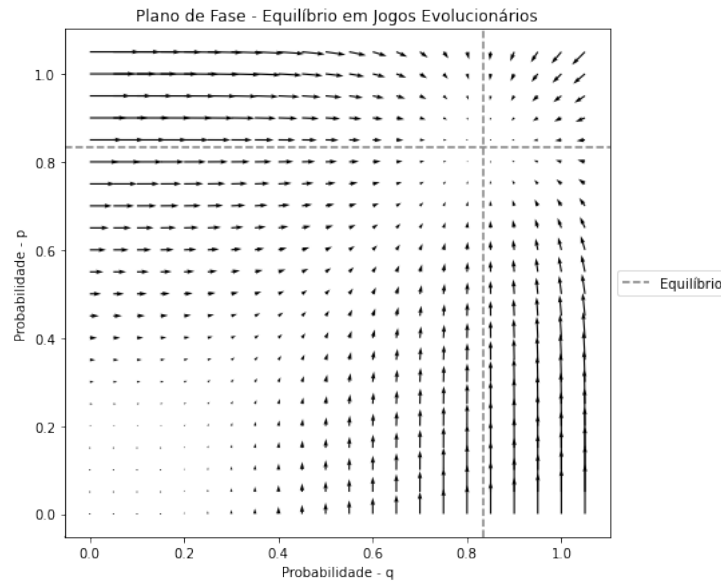


Figura 3.7: J. Evol. - Plano de Fase - Simétrico -Modelo Básico

Adensando as setas (figura 3.8), observa que se trata de um ponto de máximo de todo o domínio. Isso indica que nenhum jogador tem estímulo de sair do ponto $p^* = q^*$, mesmo com pequenas perturbações ϵ .

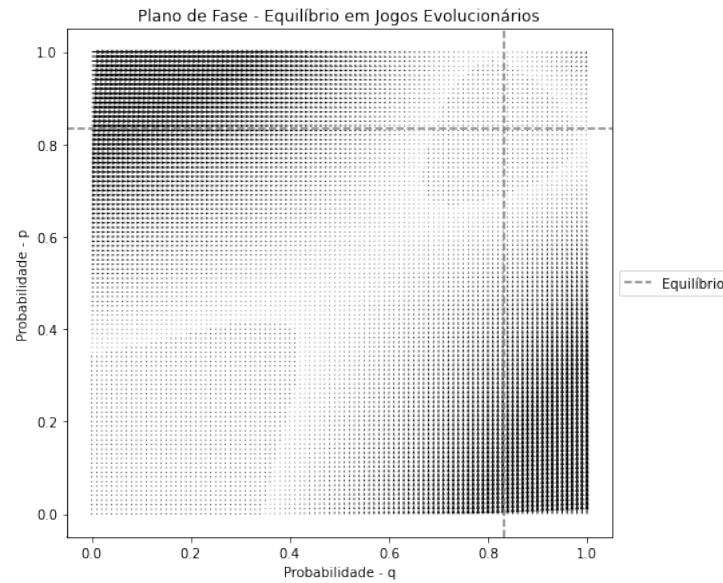


Figura 3.8: J. Evol. - P.de Fase Denso - Simétrico -Modelo Básico

O jogo proposto nesta dissertação é um pouco distinto, mas tem os elementos até então apontados. Esse jogo foi proposto em [Dias e Teixeira \(2009\)](#), *paper* sobre a guerra de atrito por informações em exploração de petróleo. O jogador tem duas ações, perfurar ou esperar. A princípio, a espera tem dois significados. Caso o preço esteja abaixo do ótimo, ou seja, abaixo do gatilho, ambos os jogadores esperam independente de informações gratuitas. É um estado em que os agentes não têm interesses econômicos na guerra de atrito por informações. Com preços acima do gatilho do ativo, aciona um custo de espera e o valor informacional do vizinho começa a ficar atrativo. Comparando com o que foi apresentado até aqui, a espera é a ação agressiva do jogador e é "punido" pelo custo de esperar, tendo esse custo relação com o ativo que foi acionado no gatilho e não foi investido. Por outro lado, o jogador ambiciona a informação gratuita, pois há um combinado favorável: evitar o custo de perfuração e ainda assim obter informações importantes para seu portfólio. A tabela (3.8) descreve o jogo de guerra de atrito por informações:

		Jogador 2	
		q	$1 - q$
Jogador 1	p	Investe	Espera
	$1 - p$	Espera	Espera
		$S_1; S_2$	$L_1; F_2$
		$F_1; L_2$	$W_1; W_2$

Tabela 3.8: Forma normal: Guerra de Atrito por Informações

O *payoff* W depende do estado corrente. Abaixo do gatilho exploratório, W vale o prêmio da opção exploratória. Caso o preço corrente esteja acima do

preço de gatilho, terá um desconto do prêmio mensal da reserva não perfurada. Já o *payoff* S é justo o prêmio da perfuração instantânea da reserva. Considera F o agente seguidor, que aguarda a informação. Assim, o agente pode esperar a perfuração do outro e obter a informação. O L é o *payoff* do líder, que ignora a possibilidade de informação alheia e perfura sua oportunidade exploratória desprezando o portfólio do vizinho.

Abaixo do preço de gatilho (P^{**}) essa relação é verdadeira: $S = L < W < F$. Acima do gatilho, $W < S = L < F$. Acima de um preço chamado de perfuração simultânea (P^s), em que $P^{**} \leq P^s$, a relação é $W < S = L = F$.

Como esse jogo depende do estado da natureza da variável estocástica preço do petróleo, as definições do jogo devem adotar conceitos de jogos estocásticos e equilíbrio perfeito de Markov (EPM). Jogos estocásticos são jogos repetidos, com conjunto de estado e ações finitas e probabilidade de transição para esses estados. Agora, o EPM depende somente do estado corrente dos preços e das ações dos jogadores nesse momento. Como o preço, descontado pela taxa livre de risco e em medida de probabilidade Q é um martingal que possui propriedade de Markov, esses conceitos de equilíbrio são adotados. Assim, é possível estudar os jogos na forma normal no estado inicial do jogo, ao invés de todos os possíveis subjogos até o término do contrato. Ademais, o EPM é perfeito em subjogos, sendo conceito mais abrangente que o trabalhado até agora.

Para encontrar o equilíbrio em estratégias mistas, será feito pela maximização da utilidade. Sendo a utilidade do jogador 1 dado a ação perfurar q e a ação esperar $(1 - q)$ do jogador 2:

$$\begin{aligned} U[1|2 = q^*] &= p^* S_1 + (1 - p^*) F_1 \\ U[1|2 = 1 - q^*] &= p^* L_1 + (1 - p^*) W_1 \end{aligned}$$

A utilidade do jogador 1 incondicional:

$$\begin{aligned} U[1] &= q^* U[1|2 = q^*] + (1 - q^*) U[1|2 = 1 - q^*] \\ &= q^* [p^* S_1 + (1 - p^*) F_1] + (1 - q^*) [p^* L_1 + (1 - p^*) W_1] \end{aligned}$$

A maximização da utilidade de U_1 é dado por:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial U[1]}{\partial p^*} &= 0 \\
q^*(S_1 - F_1) + (1 - q^*)(L_1 - W_1) &= 0 \\
q^*(S_1 - F_1) + (q^* - 1)(W_1 - L_1) &= 0 \\
q^*(S_1 - F_1 + W_1 - L_1) &= W_1 - L_1 \\
q^*(F_1 - S_1 + L_1 - W_1) &= L_1 - W_1
\end{aligned}$$

$$q^* = \frac{L_1 - W_1}{F_1 - S_1 + L_1 - W_1} \quad (3-38)$$

E o ótimo p^* dado a maximização da utilidade do jogador 2 é:

$$p^* = \frac{L_2 - W_2}{F_2 - S_2 + L_2 - W_2} \quad (3-39)$$

Sendo um jogo simétrico:

$$p^* = q^* = \frac{L - W}{F - S + L - W} \quad (3-40)$$

Como o jogo de atrito é um jogo de tempo de parada ótima, então, a estratégia do líder é o menor tempo em que o preço é maior ou igual ao gatilho exploratório. Seu tempo de parada é:

$$t_L = \inf\{t | P(t) \geq P^{**}(t)\} \quad (3-41)$$

Já a Seguidora, após a revelação da informação da líder, irá decidir em seu novo gatilho exploratório, denominado P^F .

$$t_F = \inf\{t | P(t) \geq P^F, \text{ sendo } P^F > P^{**}(t) \text{ ou } P^F < P^{**}(t)\} \quad (3-42)$$

No caso simétrico do jogo de atrito por informações, o replicador dinâmico pelas equações (3-34, 3-35 e 3-36) tem a matriz A igual a equação 3-43:

$$A = \begin{pmatrix} S & L \\ F & W \end{pmatrix} \quad (3-43)$$

Em teoria dos jogos evolucionários e jogos assimétricos, o replicador dinâmico é um sistema de equações:

$$\frac{dx}{dt} = x(1-x)(fa_x - fb_x) \quad (3-44)$$

$$\frac{dy}{dt} = y(1-y)(fb_y - fa_y) \quad (3-45)$$

Sendo, no caso estudado:

$$fa_x = yS_1 + (1-y)L_1 \quad (3-46)$$

$$fb_x = yF_1 + (1-y)W_1 \quad (3-47)$$

$$fa_y = xS_2 + (1-x)L_2 \quad (3-48)$$

$$fb_y = xF_2 + (1-x)W_2 \quad (3-49)$$

Assim como no caso simétrico, busca-se a derivação igual a zero, em que a probabilidade ou fração (x e y) da população não tem incentivos a desvios. Nessas últimas equações (3-46 até 3-49), caso volte a ser simétrico ($S_1 = S_2$, $F_1 = F_2$, $L_1 = L_2$ e $W_1 = W_2$), replica-se a equação (3-36).

A situação de conflito é desvantajosa para o desenvolvimento local, pois pode-se perpetuar até o final do contrato sem perfuração de poços, mesmo que os *payoffs* sejam positivos. Por isso há o interesse geral de mudar o jogo, para que os agentes percebam vantagens e que haja um programa de investimentos na área. O jogo de barganha cooperativa é a unitização dos ativos e a melhor divisão deles entre os agentes. A solução de Nash para barganha cooperativa tem os pesos para dois jogadores iguais a:

$$w_i = \frac{1}{2} + \frac{(d_i - d_j)}{2B} \quad (3-50)$$

$$w_i = 1 - w_j \quad (3-51)$$

Sendo o par (d_i, d_j) o ponto de discordância e o B a unitização dos ativos. Em caso simétrico, as coordenadas de discordância dos dois jogadores são iguais, assim $w_i = w_j = 50\%$. O ponto de discordância ocorre caso cada empresa decida perfurar sem buscar informações e no caso assimétrico, $d_i = VME_i(P, t) = L_i(P, t) \neq d_j = VME_j(P, t) = L_j(P, t)$. Sendo um tempo t do contrato, a discordância não será um ponto (w_i, w_j) , mas um vetor, já que a variável preço pode assumir qualquer valor positivo ($P \in \mathbf{R}_+$). Os detalhes dos parâmetros de avaliação de portfólio exploratório serão apresentados na seção a seguir.

3.6

Portfólio

Neste trabalho se considera três formas de analisar uma carteira. A mais tradicional é adotar que os prospectos são independentes, assim a carteira é a soma do VME ($\sum VME(P)$ e $\sum VME(P, t)$) ou a soma das opções de espera ($\sum E(P, t)$). A forma que considera somente a revelação da informação é denominada de portfólio ($\pi(P)$), por vezes simbolizada somente por π . Por último, a forma que considera o valor da espera em conjunto com o valor da informação é denominada portfólio exploratório, simbolizada por $(\Pi(P, t))$ ou somente Π . Nesta seção será apresentada os detalhes do portfólio (π).

O portfólio (π) pode ser composto no mínimo por um prospecto. Os ativos são consolidados na carteira pela ponderação do risco geológico (FC) de acordo com as formulações da seção (3.2).

– Um ativo na carteira:

$$- \pi = VME_1$$

– 2 ativos independentes na carteira:

$$- \pi_{1,2} = VME_1 + VME_2$$

$$- \pi_{1,2} = \pi_{2,1}$$

– Em que $\pi_{i,j}$ simboliza o portfólio com sequência do prospecto i anterior à oportunidade j .

– n ativos independentes na carteira:

$$- \pi_n = \sum_{i=1}^n VME_n$$

O valor do portfólio de ativos não correlacionados independe da ordem dos ativos na sequência de perfuração. Para ativos correlacionados, a equipe técnica estima os FCs incondicionais, as correlações entre ativos e na consolidação do portfólio, é necessário calcular os fatores de chance condicionais, assim como apresentados na seção (3.4). Por consequência, o Valor Monetário Esperado também é condicional. A figura (3.9) apresenta um dos exemplos de portfólio para dois ativos.

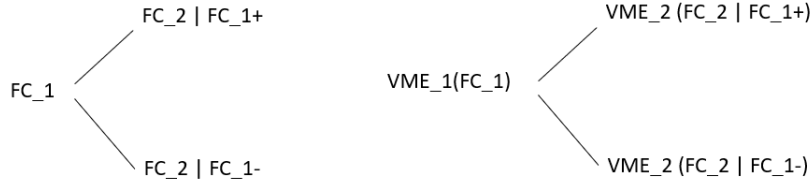


Figura 3.9: FC e VME condicionais

– 2 ativos dependentes na carteira:

- $\pi_{12} = VME_1 + FC_1[Max(0; VME_2^+)] + (1 - FC_1)[Max(0; VME_2^-)]$
- $\pi_{12} \neq \pi_{21}$
- Não necessariamente os portfólios sequenciais são distintos, podendo ser iguais a depender do preço

Como pode ser visto, a ordem de perfuração pode importar em portfólios com ativos correlacionados. Com três ativos dependentes na carteira:

$$\begin{aligned} \pi_{123} = & EMV_1 \\ & + CF_1 \left\{ Max[0; EMV_2^+ + CF_2^+(Max(0; EMV_3^{++})) + (1 - CF_2^+)(Max(0; EMV_3^{+-}))] \right\} \\ & + (1 - CF_1) \left\{ Max[0; EMV_2^- + CF_2^-(Max(0; EMV_3^{-+})) + (1 - CF_2^-)(Max(0; EMV_3^{--}))] \right\} \end{aligned}$$

Sendo as probabilidades condicionais:

$$CF_2^+ = CF_{2|1}$$

$$CF_2^- = CF_{2|\bar{1}}$$

E a barra ($\bar{1}$) significa insucesso da oportunidade 1.

- $\pi_{123} \neq \pi_{132} \neq \pi_{213} \neq \pi_{231} \neq \pi_{312} \neq \pi_{321}$
- Não necessariamente os portfólios sequenciais são distintos, podendo ser iguais a depender do preço

– Portfólio dependente e independente:

$$\pi_{Total} = \pi_{dependente} + \pi_{independente}$$

– Portfólio com 2 ativos e ativo vizinho i :

$$\begin{aligned} \pi_{12|i} = & CF_i \left\{ Max[0; EMV_1^+ + CF_1^+(Max(0; EMV_2^{++})) + (1 - CF_1^+)(Max(0; EMV_2^{+-}))] \right\} \\ & + (1 - CF_i) \left\{ Max[0; EMV_1^- + CF_1^-(Max(0; EMV_2^{-+})) + (1 - CF_1^-)(Max(0; EMV_2^{--}))] \right\} \end{aligned}$$

- $\pi_{12|i} \neq \pi_{21|i}$
- Não necessariamente os portfólios sequenciais com informações do vizinho são distintos, podendo ser iguais a depender do nível de preço de longo prazo

Estudo de otimização de carteira pode ser feitos sem o valor da espera, como as apresentadas nesta seção. Contudo, sabe-se que o valor da espera é importante em análise de portfólio. São raras as decisões de agora ou nunca. As decisões apresentadas nestes tópicos acontecem somente no vencimento ou quando valores do petróleo são muito altos, ou seja, quando valor intrínseco é maior que o valor da espera. Ademais, a análise considerando o valor da espera fornece a curva de gatilho, ou seja, o momento ótimo de exercício dado a incerteza dos preços. Isso é importante para decisões de investimento. Considera-se também, no modelo de valor de espera, ativos correlatos de bloco vizinho que podem afetar o preço e o exercício da prospecção exploratória. Esses conceitos são apresentados na seção a seguir (3.7). Na seção (4.2.1), em essência na tabela (4.7), destacam na forma de resultados o valor da espera com o valor da informação e em portfólio exploratório (II).

3.7

Modelos

3.7.1

Um, Dois e Três prospectos: Um bloco

O ativo de investimento de exploração do hidrocarboneto (R) pode ser visto como um derivativo do ativo base P . Como o ativo base P é estocástico, usando o método de portfólio sem risco (Apêndice A), que nada mais é que o princípio de não arbitragem, similar ao aplicado por [Black e Scholes \(1973\)](#), chega-se na equação diferencial abaixo:

$$\frac{\partial R}{\partial t} + (r - \delta) \frac{\partial R}{\partial P} P + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 R}{\partial P^2} \sigma^2 P^2 = rR \quad (3-52)$$

As condições de contorno, sendo as duas últimas conhecidas como condições de continuidade e suavidade ([Dixit e Pindyck, 1994](#), Cap. 4, p.119):

- Caso $P = 0$, $R(0, t) = 0$
- Caso $t = T$, $R(P, T) = \max(VPL, 0)$
- Caso $P = P^*$, $R(P^*, T) = VPL(P^*)$
- Caso $P = P^*$, $\frac{\partial R(P^*, t)}{\partial P} = \frac{\partial VPL}{\partial P}$

Sendo σ e δ a volatilidade e a taxa de conveniência do ativo base P e r a taxa livre de risco. Nas condições de contorno, o VPL é calculado segundo a equação (3-1) menos o investimento da equação (3-8).

Agora, o ativo exploratório (E) pode ser compreendido pela equação diferencial abaixo:

$$\frac{\partial E}{\partial t} + (r - \delta) \frac{\partial E}{\partial P} P + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 E}{\partial P^2} \sigma^2 P^2 = rE \quad (3-53)$$

Com as seguintes condições de contorno:

- Caso $P = 0$, $E(0, t) = 0$
- Caso $t = T$, $E(P, T) = \max(-I_w + CF \cdot VPL, 0)$
- Caso $P = P^*$, $E(P^*, T) = -I_w + FC \cdot VPL(P^*)$
- Caso $P = P^*$, $\frac{\partial E(P^*, t)}{\partial P} = CF \cdot \frac{\partial VPL}{\partial P}$

O investidor pode fazer a análise de decisão a partir de $R(P, t)$, mais sabidamente que VPL, já que VPL é somente condição terminal da equação diferencial. No caso de um ativo exploratório, e se não considerar a opção exploratória da equação (3-53), pode analisar nos moldes da equação de Valor Médio Esperado (equação 3-7). Porém, o valor médio esperado não é mais só em função do preço (VME(P)), mas também em função do tempo de vencimento do contrato - $VME(P, t)$.

$$VME(P, t) = -I_{Wi} + FC_i.R_i(P, t) \quad (3-54)$$

Da mesma forma que o ativo exploratório, o portfólio exploratório (Π) pode ser visto como um derivativo do ativo base P . Como o ativo base P é estocástico, pelo método de portfólio sem risco, determina-se à equação abaixo:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial t} + (r - \delta) \frac{\partial \Pi}{\partial P} P + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial P^2} \sigma^2 P^2 = r \Pi \quad (3-55)$$

E com as condições de Contorno:

- Caso $P = 0$, $\Pi(0, t) = 0$
- Caso $t = T$, $\Pi(P, T) = \max(\pi, 0)$
- Caso $P = P^*$, $\Pi(P^*, T) = \pi(P^*)$
- Caso $P = P^*$, $\frac{\partial \Pi(P^*, t)}{\partial P} = \frac{\partial \pi(P^*)}{\partial P}$

Pelas mesmas razões apontadas entre $R(P, t)$ e VPL, o portfólio é melhor analisado em $\Pi(P, t)$ que em $\pi(P)$, justamente pois o último é somente condição terminal do primeiro.

3.7.2

Dois prospectos: Um em cada bloco

A empresa líder L_i irá perfurar antes da informação da concorrente, portanto é igual a equação $VME(P, t)$ (equação 3-54):

$$L_i(P, t) = -I_W + FC_i.R_i(P, t) \quad (3-56)$$

Essa valoração também ocorre para empresa que tem perfuração imediata S_i . A preços altos, todas as funções têm mesmo valor, como demonstrado na seção (4.2.1).

Já o seguidor F_i , terá informação fornecida pelo o líder (L_j) e o seu prospecto terá outro valor. Sendo que o valor do ativo para o seguidor i será

uma ponderação pelo FC incondicional da concorrente j aplicado às opções de explorar condicionadas pelo fator de chance da concorrente (equação 3-53):

$$F_i(P, t) = \mathbb{E}[E_i(P, t)|j] = FC_j \cdot E_i(P, t, FC_{i|j}^+) + (1 - FC_j) \cdot E_i(P, t, FC_{i|j}^-) \quad (3-57)$$

Em que $FC_{i|j}^+$ e $FC_{i|j}^-$ são funções de FC_i , FC_j e ρ , apresentados em detalhes na seção (3.4), em especial na seção (3.4.1). A forma normal do jogo de atrito por informação (tabela 3.8) é representada por:

		Jogador 2	
		Investe	Espera
Jogador 1	Investe	$VME_1 ; VME_2$	$VME_1 ; E_{2 1}$
	Espera	$E_{1 2} ; VME_2$	$E_1 - c_1 ; E_2 - c_2$

Tabela 3.9: Forma normal: Payoffs- 2 prospectos

Em que $VME_i = VME_i(P, t)$ e c_i é o custo de espera.

3.7.3

Três prospectos: Carteira com 2 e prospecto vizinho

Detendo um portfólio, a empresa seguidora F aplica a equação diferencial abaixo. Essa formulação adota os conceitos de VOI da equação (3-57) em portfólio. A diferença em relação a equação (3-55) é somente nas condições de contorno, em que j é o ativo do vizinho a ser perfurado primeiro:

$$\frac{\partial \Pi|j}{\partial t} + (r - \delta) \frac{\partial \Pi|j}{\partial P} P + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Pi|j}{\partial P^2} \sigma^2 P^2 = r \Pi|j \quad (3-58)$$

Condições de contorno são:

- Caso $P = 0$, $\Pi(0, t)|j = 0$
- Caso $t = T$, $\Pi(P, T)|j = \max(\pi|j, 0)$
- Caso $P = P^*$, $\Pi(P^*, T)|j = \pi(P^*)|j$
- Caso $P = P^*$, $\frac{\partial \Pi(P^*, t)|j}{\partial P} = \frac{\partial \pi(P^*)|j}{\partial P}$

Para o *payoff* da líder L , assim como da perfuração simultânea S , deve haver uma versão de $VME(P, t)$ para portfólio. Essa medida consiste na busca do ótimo do portfólio, em que é feito a perfuração do ativo menos custoso ou mais informativo e aprendido para os outros ativos. Difere da equação (3-55), pois não são todos os ativos que estão na função máximo. Pelo mesmo motivo, difere da equação (3-54), pois tem ativos na função otimização ponderado pelo

risco geológico. A seguir, a equação diferencial, com as condições de contorno, em que i é o ativo a ser perfurado primeiro e $-i$ todos os outros:

$$\frac{\partial VME_\pi}{\partial t} + (r - \delta) \frac{\partial VME_\pi}{\partial P} P + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 VME_\pi}{\partial P^2} \sigma^2 P^2 = r VME_\pi \quad (3-59)$$

E as condições de contorno são:

- Caso $P = 0$, $VM E_\pi(0, t) = -\min(I_w)$
- Caso $t = T$, $VM E_\pi(P, T) = \max(\pi_{-i}, 0) + FC_i \cdot VPL_i(P, t) - I_{wi}$
- Caso $P = P^*$, $VM E_\pi(P^*, T) = \pi_{-i}(P^*) + FC_i \cdot VPL_i(P^*, t) - I_{wi}$
- Caso $P = P^*$, $\frac{\partial VME_\pi(P^*, t)}{\partial P} = \frac{\partial \pi_{-i}(P^*)}{\partial P} + FC_i \frac{\partial VPL_i}{\partial P}$

A forma normal do jogo de atrito por informação em portfólio (tabela 3.8) é representada por:

		Jogador 2	
		Investe	Espera
Jogador 1	Investe	$VM E_{\pi_1} ; VM E_2$	$VM E_{\pi_1} ; E_{2 1}$
	Espera	$\Pi_{1 2} ; VM E_2$	$\Pi_1 - c_1 ; E_2 - c_2$

Tabela 3.10: Forma normal: Payoffs no caso de Portfólio

Onde $VM E_2 = VM E_2(P, t)$ e c_i é o custo de espera.

4

Resultados

4.1

Dados de Entrada

4.1.1

Hiperparâmetros do Preço do Petróleo: MGB

As bases de dados da [US Energy Information Administration](#), [IMF](#) e [FRED](#) apresentam séries históricas do preço *spot* dos óleos tipo *Brent* e *WTI*. Essas informações são trabalhadas por essas agências (bancos, organizações), sendo estimativas do preço *spot*, médias e coletâneas de informações de organizações que pesquisam o preço à vista. O preço à vista não é negociado em bolsa e sim os contratos futuros ([CME Group](#)). Normalmente, o que é apresentado em painéis como [Trading Economics](#), [Oil Price](#), [Bloomberg](#) e outros são os contratos com vencimento em um mês, uma *proxy* razoável do preço à vista. Ciente disso, como uma estimativa inicial dos parâmetros, será trabalhado a série [US Energy Information Administration](#) do óleo tipo *WTI*. Após essa análise, será feito um estudo com alguns contratos futuros para estimativa dos hiperparâmetros do preço *spot*.

Os dados da [US Energy Information Administration](#) são semanais e janelados no intervalo de 1996-2016 (figura 4.1). O teste *Dickey- Fuller* Aumentado (ADF) foi aplicado nessa série histórica. Não é possível rejeitar a hipótese nula (H_0) de normalidade da primeira diferença dos preços dado ao p-valor de 0.21149. Isso quer dizer que não é possível rejeitar o MGB para esse intervalo. Notando as feições estilizadas da série, além de saltos referentes a crise de 2008, a tendência de crescimento exponencial dos preços é um bom indicativo de não rejeição do modelo MGB.



Figura 4.1: Preço Spot- WTI- EIA

Nesse caso, em um modelo igual a equação (3-10), o retorno é estacionário em que erro estimado é uma normal, ou seja, $\epsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$, sendo σ^2 :

$$\sigma^2 = \text{Var} [\ln(S_{t-1}/S_t)] \quad (4-1)$$

e o *drift* α é

$$\alpha = \mathbb{E}[\ln(S_{t-1}/S_t)] + \frac{1}{2}\sigma^2 \quad (4-2)$$

Aplicando essas equações nessa série temporal, $\sigma = 31.15\%$ e $\alpha = 10.43\%$ ao ano.

Os 20 contratos futuros são do óleo tipo *WTI*, entre os períodos de 1996-2016, com informações semanais, de vencimento *CL1* a *CL20*, possíveis de ser acessados em [quandl](#). Os dados trabalhados já estão tratados, sem informações faltantes e *short-squeeze*. A figura (4.2) apresenta 2 contratos, *CL1* e *CL20*.

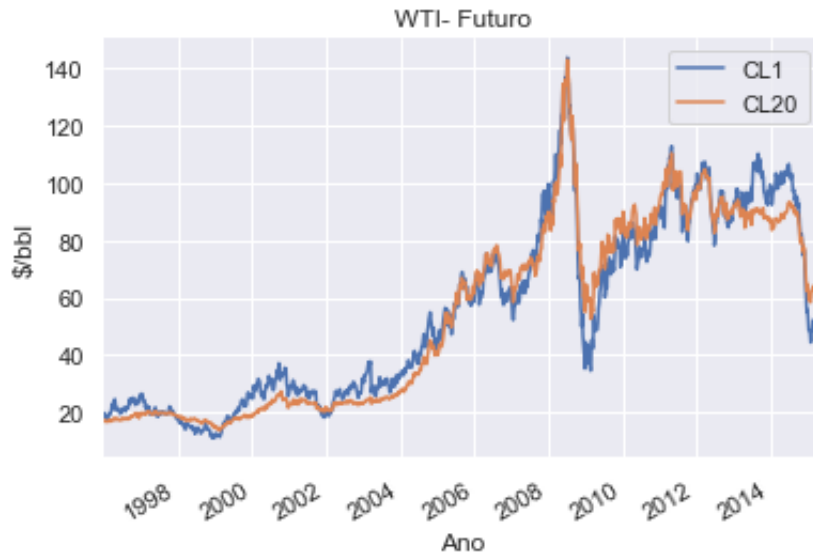


Figura 4.2: Preços Futuros - WTI

Note a diferença de estocasticidade entre as duas séries, sendo a série mais curta com maior volatilidade. Ademais, a série mais longa ($CL20$), na maior parte do tempo, é mais barata que a série de um mês. Essa feição é típica de *backwardation* e em poucos momentos a série $CL20$ é mais cara que a série $CL1$, efeito conhecido como *contango*. Como visto na seção (3.3) e na demonstração da equação (3-17), em modelo em que o *spot* segue um MGB, a característica crescente ou decrescente da estrutura a termo do preço futuro só depende da relação $r - \delta$. Modelos como de dois ou mais fatores tentam captar essas variações temporais na estrutura a termo dos preços (Schwartz, 1997).

A figura (4.3) mostra a estrutura a termo da volatilidade, demonstrando uma queda na volatilidade com o aumento dos prazos. Como visto na seção (3.3) e na demonstração da equação (3-19), a estrutura a termo da volatilidade em um modelo MGB para o preço *spot* não varia em relação ao vencimento do contrato e é igual a volatilidade do preço *spot*. Para captar esse decréscimo da volatilidade com o aumento do prazo, foram desenvolvidos outros modelos, como de um fator com reversão a média dos logaritmos dos preços e de dois e três fatores (Schwartz, 1997).

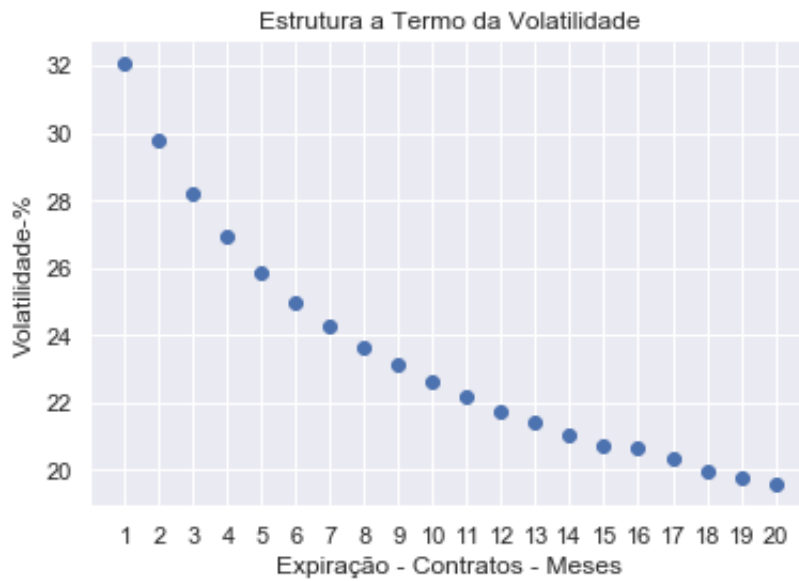


Figura 4.3: Estrutura a Termo da Volatilidade

Considerando o contrato *CL1* como *proxy* do preço *spot*, foi aplicado o teste Dickey- Fuller Aumentado de normalidade (ADF) para essa série. Não é possível rejeitar a hipótese nula (H_0) de normalidade da primeira diferença dos preços dado ao p-valor de 0.2207. Aplicando as equações (4-1 e 4-2), obtêm $\sigma = 32.07\%$ e $\alpha = 9.14\%$ ao ano, resultados bem próximos da estimativa com a série histórica *spot* da [US Energy Information Administration](#).

Na seção (3.3), pelas equações (3-17 e 3-18), caso a taxa livre de risco seja constante, é possível obter a taxa de conveniência implícita ([Gibson e Schwartz, 1990](#)). Os dados de taxa de juros de curto prazo são acessíveis em [quandl](#), aplicativo vinculado ao FRED. Trata-se de 3 meses *Treasury-Constant-Maturity* não dessazonalizada e em porcentagem, diária, desde 1981, janelado entre 1996 e 2015 (figura 4.4).



Figura 4.4: Taxa livre de Risco - Treasury 3 month

Nota-se uma instabilidade dos juros americanos nas décadas de noventa e anos 2000. O intuito não é gerar um modelo estocástico para taxa de juros, somente estudar os momentos, sendo a média igual a 2.4056% e o desvio padrão de 2.21% ao ano. Com o valor médio de r , foi aplicado na equação (3-18) para os contratos $CL1$ e $CL2$, que pode ser visto na figura (4.5).

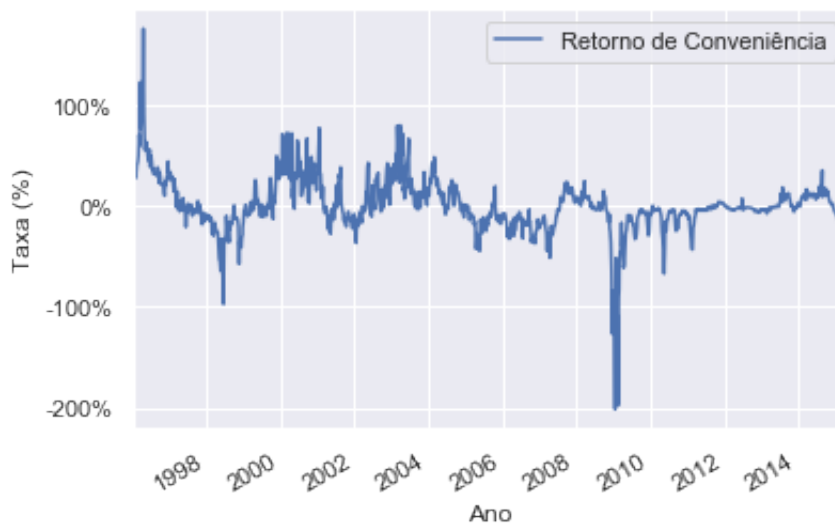


Figura 4.5: Retorno de Conveniência Implícito - δ

A série da taxa de conveniência implícita mostra feições estilizadas de processo estocástico. Três características chamam atenção dessa série temporal:

alta volatilidade, efeito de reversão para valores próximo de zero e forte reversão para esse valor. Neste intervalo, possui valor máximo de 176%, mínimo de -201.6%, média de 0.76% e desvio padrão de 26.8%.

Usando o primeiro contrato como a aproximação do *spot*, é possível, a partir da média das séries do retorno de conveniência implícito, montar a estrutura a termo desse retorno. A figura (4.6) apresenta a estrutura a termo com a média das séries. É possível notar um aumento da taxa média como aumento do prazo dos contratos, estabilizando em torno de 4.88% a.a..

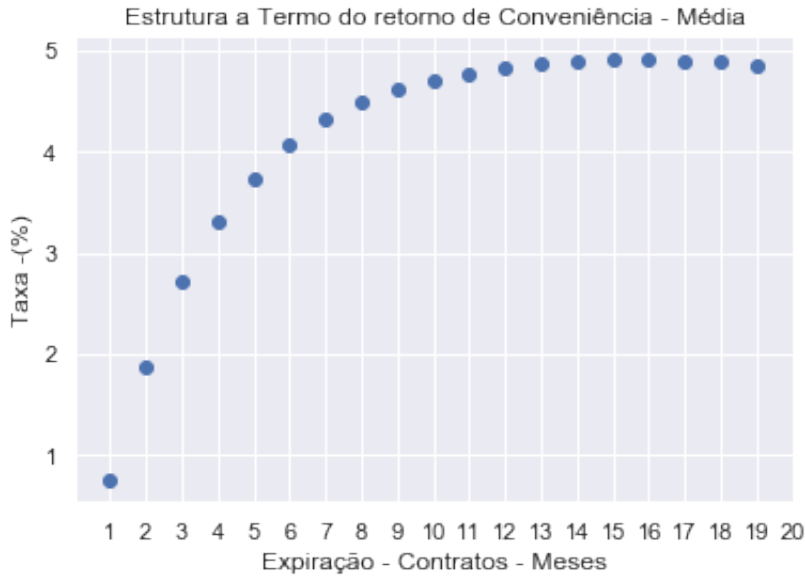


Figura 4.6: Estrutura a termo do Retorno de Conveniência - Média

Projetos na área de óleo e gás são de longo prazo. No modelo MGB, a taxa de conveniência (*carry*) é uma medida relevante, contudo, medidas de curto prazo interferem pouco nas decisões de investimentos. Portanto, na implementação de um modelo de OR, é importante considerar o retorno de conveniência de longo prazo, não a taxa instantânea.

O retorno de conveniência da figura (4.5) pode ser modelado como processo estocástico de reversão a média de Ornstein Uhlenbeck, com parâmetro de velocidade de reversão κ , média de longo prazo $\bar{\delta}$, como pode ser visto na equação (4-3) e na discretização na equação (4-4).

$$d\delta_t = \kappa(\bar{\delta} - \delta)dt + \sigma dz_t \quad (4-3)$$

$$\delta_t - \delta_{t-1} = a + b\delta_{t-1} + \epsilon_t \quad \epsilon_t \sim \mathbf{N}(0, \sigma_\epsilon^2) \quad (4-4)$$

Onde $\kappa\bar{\delta}dt$ referente ao coeficiente (a) da aproximação, $-\kappa dt$ o coeficiente (b) e termo browniano associado ao ϵ_t da regressão. Sendo $\Delta t=1/52$ ano, os

parâmetros do modelo são:

$$\kappa = -b/\Delta t$$

$$\bar{\delta} = a/-b$$

$$\sigma = \sigma_\epsilon/\sqrt{\Delta t}$$

O parâmetro $\bar{\delta}$ representa a reversão de longo prazo. Dessa forma, é possível montar a estrutura a termo com esse parâmetro, mais rigoroso que o uso da média, como utilizado na figura (4.6). A figura (4.7) apresenta essa estrutura a termo do retorno de conveniência. Nota-se que a série é assintótica em valores próximos de $\bar{\delta} = 3.80\%$ a.a..

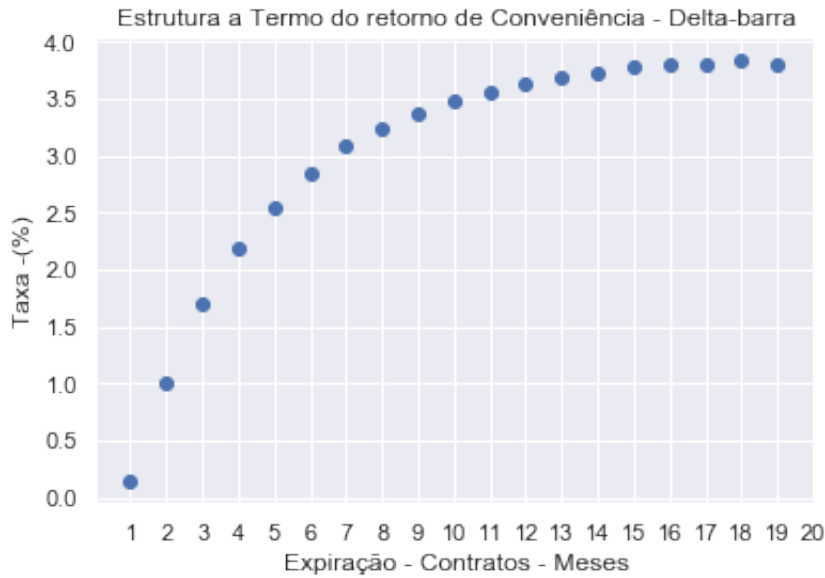


Figura 4.7: Estrutura a termo do Retorno de Conveniência - $\bar{\delta}$

Com os contratos futuros, é possível estimar pelo filtro de Kalman os hiperparâmetros do preço à vista. O Modelo MGB foi apresentado na forma de espaço-estado na seção (3.3) e equações (3-21 e 3-20). Como o MGB não capta bem os efeitos de volatilidade e preços ao longo dos contratos, decidiu utilizar somente três contratos, sendo os mais próximos do preço à vista (*CL1*, *CL2* e *CL3*). A aplicação seguiu [Shumway e Stoffer \(2017, Cap. 7\)](#).

A volatilidade é o único hiperparâmetro significativo, já que os outros tem estatística t menor que 1.96, dado 5% de significância (tabela 4.1). A volatilidade estimada é próxima ao preço *spot* de [US Energy Information Administration](#) e da aproximação do contrato *CL1* para o preço à vista. A figura (4.8) apresenta o dado estimado (azul), suavizado (preto) e o observado *CL1* (vermelho).

Parâmetros	Estimativa	teste-t
σ	0.2981	47.960
μ	0.1287	0.0006
r	0.0867	0.0004
δ	0.0846	0.0004

Tabela 4.1: Parâmetros estimados - Filtro de Kalman

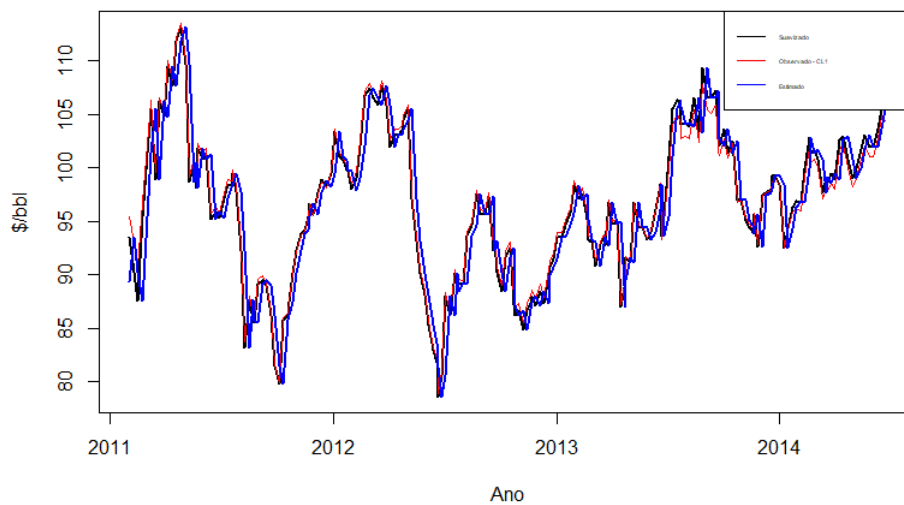


Figura 4.8: Filtro de Kalman - Estimado, Suavizado e Observado

4.1.2

Investimento em Desenvolvimento x Volume Recuperável

O investimento em desenvolvimento (Id) é uma variável que depende de características próprias do projeto e do preço de mercado. Os preços dos insumos, como aço e tubulações, são relevantes para a construção de módulos, tanto em unidades flutuantes de produção (FPSO) quanto em estruturas menores como *subsea tie-back*. A oferta e demanda dessas estruturas também modulam os preços de mercado e esses mercados são aquecidos essencialmente pela variação do preço do barril de petróleo, portanto, as séries de preços dos insumos da produção possuem correlação com o preço *spot* do barril de petróleo.

Fatores locais são relevantes para o investimento na produção. A lâmina d'água determina se a plataforma é fixa, semisubmersível, flutuante e implica em distintas ordens de investimento. As características do hidrocarboneto também determinam o projeto, como por exemplo, campos que predominam gás

possuem investimentos distintos comparados a campos que possuem predominantemente óleo. Considerando todos os parâmetros descritos constantes, o fator interno que é dominante na determinação do valor de investimento é o volume recuperável do campo (B). Dessa forma, pela equação (3-8), foi estimado a correlação entre essas duas grandezas.

As informações analisadas sobre investimento foram obtidas em [IHS Markit](#). Nessa plataforma foi coletado treze projetos de investimento de extração de óleo, todos no mesmo contexto geológico, com programas de investimentos atualizados e execução em momentos próximos. A regressão é apresentada pela equação (4-5).

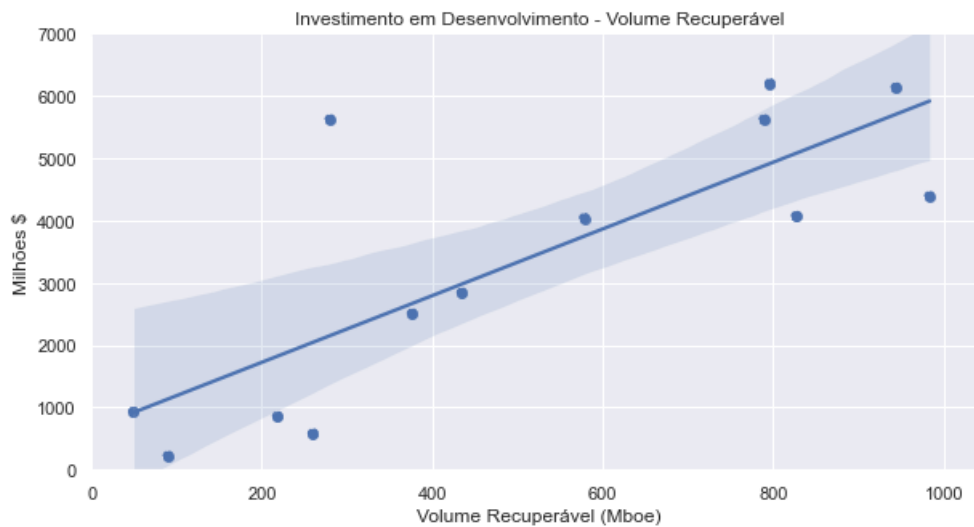


Figura 4.9: Investimento em Desenvolvimento - Volume Recuperável

$$I_d(B) = 650 + 5.35B \quad (R^2 = 0.628) \quad (4-5)$$

4.1.3

Taxa livre de risco

Como descrito anteriormente, projetos em OR são de longo prazo, dessa forma, o estudo das séries históricas de título público devem privilegiar períodos de longo prazo. A taxa do título público americano com vencimento de 20 anos pode ser encontrada em [FRED](#). A figura (4.10) apresenta desde o ano de 1994 até o tempo presente. Como os dados do preço do mercado futuro do petróleo são limitados até o ano de 2016, a análise da taxa livre de risco também será limitada nessa data.



Figura 4.10: Título público Americano - 20 anos

Essa análise é simplesmente a média em um período. Foi determinado que o período não maior que dez anos, já que a opção de espera é de 3 anos. Por essa razão, decidi escolher uma janela entre 2010 e 2016. A média é igual a 3.02%

4.1.4 Parâmetros Exógenos

A tabela (4.2) consolida os parâmetros exógenos estimados, com valores arredondados, relevantes para OR. Esses serão entradas para o cálculo das opções.

r (%)	δ (%)	σ (%)
3.00	3.80	30.00

Tabela 4.2: Parâmetros Exógenos Estimados

Em suma, na seção (3.3) discuti sobre as qualidades do MGB, essencialmente sobre as equações (3-12 e 3-13). No caso do movimento sob medida martingal (equação 3-15), as propriedades ótimas em relação a variância ocorrem quando $r - \delta > -\frac{1}{2}\sigma^2$. Com os hiperparâmetros da tabela (4.2), essa relação se mantém ($-0.008 > -0.0450$), ou seja, a variância é monotônica e crescente. Já a média do processo estocástico sob medida Q é decrescente, visto que $r < \delta$. Tendo um valor inicial de $S_0 = \$50$, com esses parâmetros da tabela, a esperança sob medida martingal em 3 anos é \$48.81 ($\mathbb{E}^Q[S_T] = S_0 e^{(r-\delta)T}$)

4.1.5

Parâmetros Endógenos

Os parâmetros endógenos são relacionados as prospectos existentes nos dois blocos exploratórios. Os blocos possuem somente três prospectos: *DogFish*, *Feather* e *Head*. Os prospectos *DogFish* e *Feather* fazem parte do bloco exploratório 0 e o prospecto *Head* é a única oportunidade do bloco exploratório 1.

Denominação	Propriedade	B (mbbl)	q (%)	FC (%)	I_w (M\$)
<i>DogFish</i>	0	620	20.00	30.00	80.00
<i>Feather</i>	0	310	21.00	25.00	60.00
<i>Head</i>	1	950	18.00	20.00	80.00

Tabela 4.3: Parâmetros Endógenos dos Prospectos

Todos os prospectos tem correlação dois a dois. Como são três prospectos, então são 3 correlações = $\binom{3}{2}$.

ρ	DogFish	Feather	Head
DogFish	1	—	—
Feather	0.6	1	—
Head	0.5	0.6	1

Tabela 4.4: Correlação dos prospectos da bacia

Todas as oportunidades estão no mesmo *play* geológico. Os prospectos *DogFish* e *Head* estão na mesma profundidade, por isso tem mesmo custo de poço exploratório (I_w). Contudo, possuem menor correlação entre si, devido ao distanciamento entre eles. Ainda que a oportunidade *Head* tenha maior volume recuperável esperado, a qualidade econômica é menor, devido às características permoporosas inferiores estimadas pelos técnicos. Além disso, *Head* tem características mais fracas de indicador direto de presença de hidrocarboneto (DHI), já que seu contorno estimado não é compatível com o contorno estrutural, tendo, por essa razão, um FC menor que as outras. Já a oportunidade *DogFish* possui volume recuperável estimado e propriedades de qualidade intermediárias, com DHI melhor de todos, portanto com FC mais alto. Agora, o prospecto *Feather* possui volume esperado menor, então seu custo de desenvolvimento da produção é menor (equação 4.9). Dessa forma, não é tão atraente do ponto de vista de receita líquida, mas importante no conjunto das oportunidades, visto que possui interessante correlação com as outras duas. Além do mais, possui vantagem exploratória, dado que o custo do poço pioneiro é menor, já que o soterramento do topo da oportunidade é menor comparado com as outras oportunidades.

Como dito na seção (3.2), o parâmetro q é a sumarização das características presentes no fluxo de caixa. Essa medida pode ser estimada pelo próprio fluxo de caixa pela equação (3-9). Para obtê-la, monta-se o fluxo de caixa com preço constante do hidrocarboneto em todo o fluxo. Depois, varia os preços de venda do hidrocarboneto de forma constante em todo o fluxo, tomando nota o Valor Presente Líquido. O coeficiente angular da regressão entre o preço do hidrocarboneto e VPL é o produto qB . Como o volume recuperável médio é entrada, ou seja, é conhecido antes de montar o fluxo de caixa, é só dividir o coeficiente angular por B .

4.2

Modelos

O modelo geral da figura (4.11) é o último caso que será analisado. Para isso, serão apresentadas algumas combinações de análise para construir um entendimento sobre o caso final e facilitar a apresentação do caso completo.

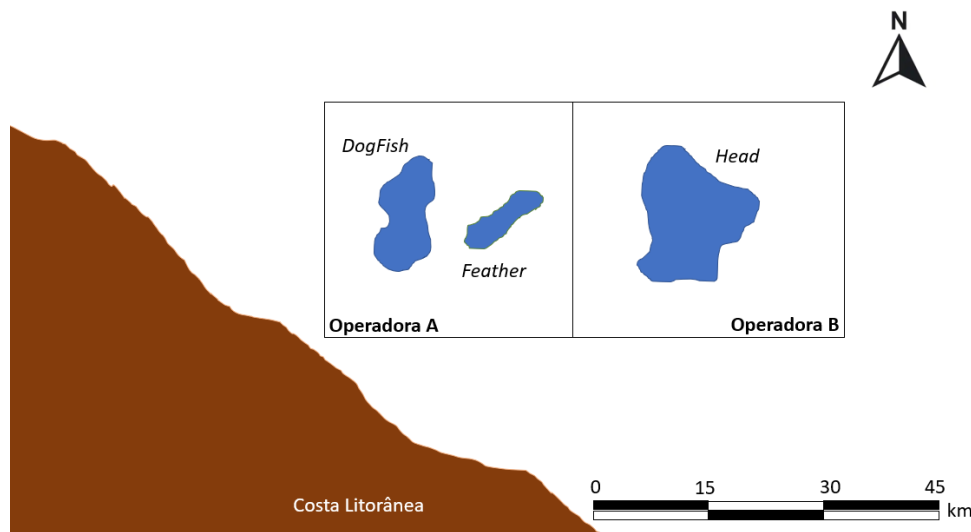


Figura 4.11: Modelo Geral - Blocos Exploratórios

4.2.1

Um, Dois e Três prospectos: Um bloco

Nesta seção serão apresentadas as soluções das três oportunidades, considerando de forma independente os prospectos e de forma conjunta. Na apresentação dos prospectos de forma independente (*stand-alone*), a primeira oportunidade será analisada de forma mais minuciosa, detalhando as opções existentes. Nas demais, serão apresentadas somente os resultados.

Os parâmetros dos prospectos são os da seção (4.1.5) e os parâmetros exógenos da seção (4.1.4), incluindo o preço do barril no tempo inicial de \$50 e contrato exploratório de 3 anos.

Em todos os ativos e avaliações, foi aplicado uma taxa de desconto ao modelo paramétrico (V - equação 3-1) e o investimento em desenvolvimento (I_d - equação 4-5). Isso foi feito pois há um prazo de aproximadamente dois anos para começar a produção. Após a tomada de decisão de investir, nesse período de dois anos, o agente perde valor em uma taxa δ por decidir produzir e não poder e um desconto com taxa r pelo capital aplicado que ainda não produz. Portanto, para o V , foi aplicado o desconto de $e^{-2\delta}$ e para I_d , o desconto de e^{-2r} .

Para cada oportunidade, o investidor tem em mãos duas opções encadeadas: a opção de explorar e a opção de investir (figura 4.12). Caso o operador ignorar a opção de explorar, terá em mãos somente a opção de investir. É uma hipótese remota, como se o investidor não tivesse dúvidas exploratórias. Essa situação pode acontecer, caso uma outra empresa já tenha feito exploração, ainda haja prazo até o término do contrato exploratório e o investidor tem a opção de investir ou não na extração do recurso $R(P, t)$. Nesse contorno, a equação diferencial a ser solucionada é a equação (3-52).

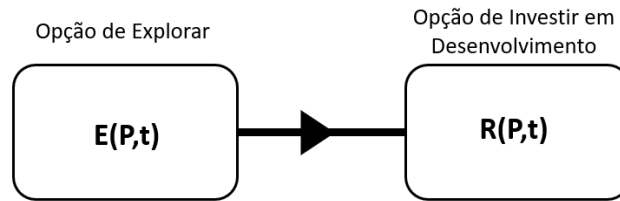


Figura 4.12: Opções em Petróleo - Conceitos em Dias (2005, Cap .27)

Como em todos os exemplos desta dissertação, há um risco exploratório (FC) em cada ativo, então a malha de soluções $R(P, t)$ deve ser multiplicada pelo fator de chance líquido do custo do poço exploratório I_w , como na equação (3-54). Foi denominado $VME(P, t)$ a opção de investir na produção dado o risco exploratório e seu investimento. O risco exploratório e o investimento do poço pioneiro não são considerados na equação diferencial e sim posteriormente. Comparando com $VME(P)$, o $VME(P, t)$ é mais completo, dado que essas métricas são iguais somente na condição terminal e somente se $VPL > 0$.

Já a opção de explorar $E(P, t)$ considera nas condições de contorno o risco e o investimento exploratório, ou seja, na maximização das condições terminais o projeto riscado deve ser maior que o custo do poço pioneiro (equação 3-53). Trata-se, no vencimento, do máximo entre zero e $VME(P)$.

Por essa razão, a opção de explorar nunca é menor que zero. Além do mais, o gatilho de investir em exploração é mais alto que o gatilho do preço de investir no projeto $R(P, t)$. Portanto, a opção de explorar tem característica mais conservadora que o $VME(P)$ e $VME(P, t)$. Esse efeito da função máximo e do ótimo entre esperar e investir em cada tempo do contrato são sumarizados no valor adicionado da espera comparado com o valor monetário esperado. Na tabela (4.5), os resultados da oportunidade exploratória *DogFish* foram consolidados nessas diversas métricas no início do contrato exploratório.

<i>DogFish</i>	M\$	%
VME(P)	523.08	-
VME(P,t)	558.23	6.72
E(P,t)	581.28	11.13

Tabela 4.5: Avaliação da oportunidade *DogFish* - $\tau=3$ anos

O valor da opção de explorar é 11.13% acima do $VME(P)$. Esse valor acrescido é devido à espera, ou seja, a decisão de não investir. Mesmo que tenha um $VME(P)$ positivo e alto, o investimento em exploração não está dentro do dinheiro. Só estaria, no início do contrato, caso o preço do barril estivesse acima de \$69.62 (figura 4.13), porém está em \$50 /bbl. Esse valor de preço define o gatilho de investimento exploratório no momento inicial do contrato.

O gatilho é uma função implícita da opção americana e é em função das variáveis de estado preço e tempo. É possível notar que é uma função decrescente com o tempo, sendo que no vencimento é o valor do preço do petróleo que faz com que o $VME(P)$ seja igual a zero, ou seja, o "break-even" do VME. Nota-se, com esse exemplo, a superioridade da curva de gatilho ao *break-even*, visto que o gatilho é uma função e *break-even* é um ponto no espaço preço x tempo. A curva de gatilho, também conhecida como fronteira ótima, é contínua, mas o serrilhado da figura (4.13) é devido ao método numérico de solução. Contudo, a descontinuidade pode acontecer no vencimento, caso $r > \delta$ (Dias, 2015a, Capítulo 20, p. 259). Com a subida do σ do ativo base, da relação $r - \delta$ e τ , a curva de gatilho também se eleva, e por consequência o prêmio por esperar.

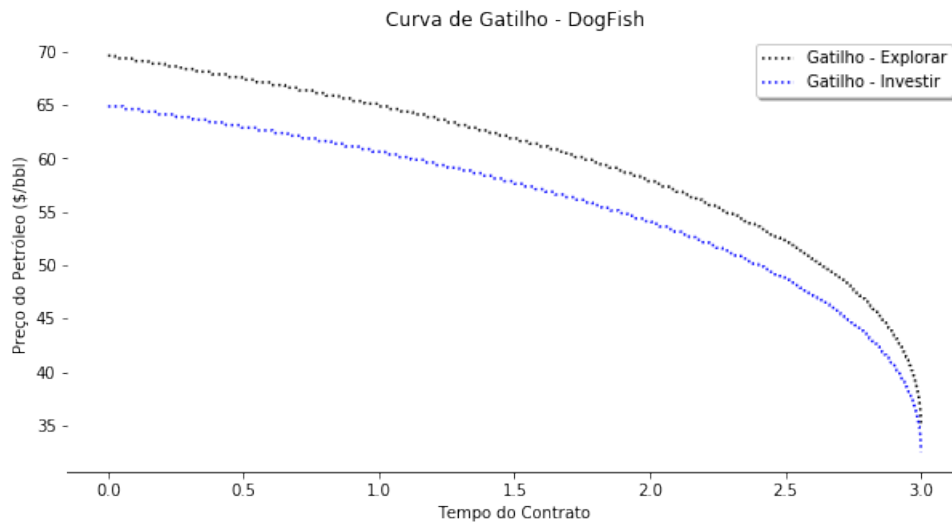


Figura 4.13: Curvas de Gatilho - DogFish

Nota-se que a curva de gatilho de explorar está sempre acima da curva de gatilho de investir em desenvolvimento. Portanto, considerar o gatilho de explorar já inclui a opção de investir, visto que a opção de explorar antecede à opção de investir em produção (figura 4.12) e caso exerça no gatilho de explorar, a opção de investir estará *deep-in-the-money*.

Na figura (4.14) é apresentada a opção de explorar em dois momentos, no vencimento e no início do contrato. Note que a opção é convexa, maior ou igual a zero e no vencimento a opção é o máximo entre zero e a função $VME(P)$. Na opção americana, verifica-se em todo instante de tempo se o valor intrínseco é maior que o valor de não exercer. Com o preço de \$50 o barril, a opção de explorar é viva, pois \$ 581.28 milhões é maior que \$ 523.08 milhões. Ou seja, deve-se aguardar para investir em exploração. Nesse gráfico pode-se extrair o gatilho do momento inicial do contrato. Isso ocorre quando a opção toca suavemente na função $VME(P)$, sendo $VME(P)$ também o valor intrínseco da opção. Essas condições de contorno são exploradas em [Dixit e Pindyck \(1994, Capítulo 4, p.119\)](#).

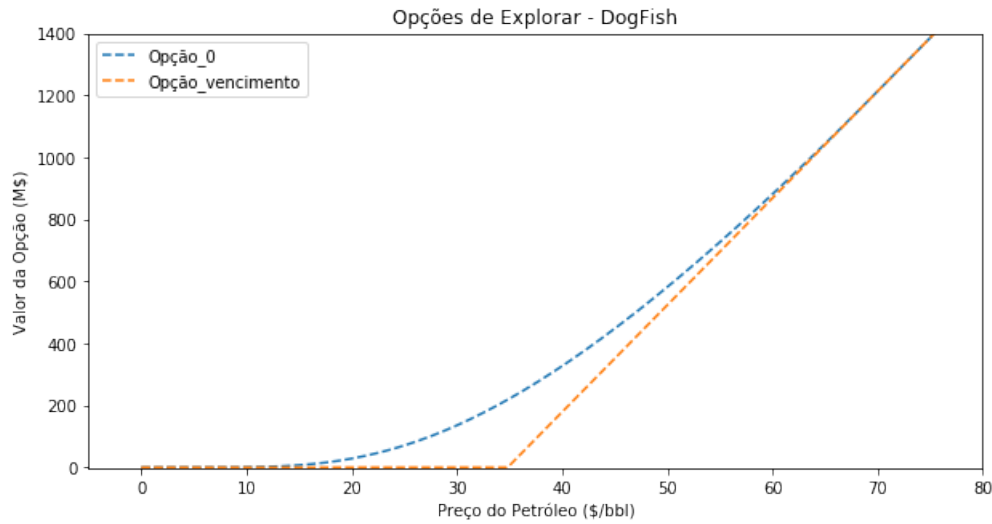
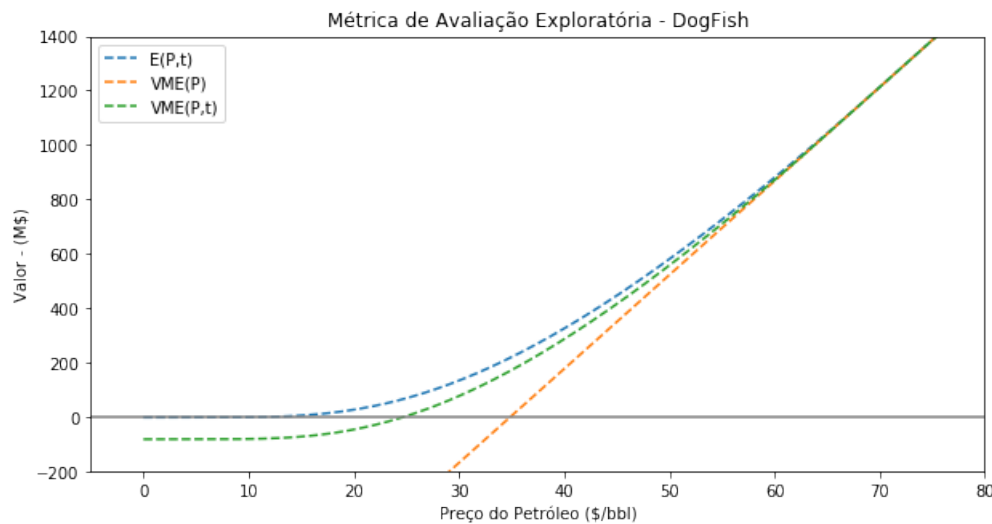


Figura 4.14: Opção de Explorar - DogFish

Segundo a tabela (4.5), o valor do $VME(P, t)$ é 6.72% acima do $VME(P)$. Esse valor acima vem do prêmio da esperar da opção de investir no desenvolvimento da reserva $R(P, t)$. A função $VME(P, t)$, no tempo inicial do contrato pode ser vista na figura (4.15), em conjunto com a opção de explorar e o $VME(P)$.

Figura 4.15: Métricas de Avaliação Exploratória - DogFish - $\tau = 3$ anos

O mínimo da função $VME(P, t)$ é o investimento do poço exploratório (\$ 80 milhões). A opção de explorar é igual ao $VME(P, t)$ a partir do gatilho da opção de explorar, ou seja, a partir de \$69.62 o barril em $t = 0$ ($\tau = 3$). Acima desse preço, as três funções possuem o mesmo valor.

Em suma, $VME(P)$ e $VPL(P)$ são medidas estáticas, que não consideram o prazo do contrato. A métrica $VME(P, t)$ não considera a opção de explorar, mas considera a opção de investir. Essa métrica é mais adequada que $VME(P)$. A opção de explorar $E(P, t)$ já inclui a opção de investir $R(P, t)$, visto que o seu gatilho de explorar é superior ao gatilho de investir. A métrica $E(P, t)$ é adequada à exploração de petróleo, já que considera o risco na formulação do derivativo. A tabela (4.6) sintetiza os resultados:

Métrica	<i>DogFish</i>		<i>Feather</i>		<i>Head</i>	
	\$M	%	\$M	%	\$M	%
VME(P)	523.08	-	150.68	-	425.12	-
VME(P,t)	558.23	6.72	182.23	20.94	471.13	10.82
E(P,t)	581.28	11.13	206.14	36.81	497.71	17.08
	\$/bbl		\$/bbl		\$/bbl	
P^*	64.875	-	72.125	-	68.125	-
P^{**}	69.625	-	79.875	-	73.125	-

Tabela 4.6: Avaliação das oportunidades *stand-alone* - $\tau=3$ anos

A oportunidade *Feather* tem 36.81% de valor de espera em relação ao exercício imediato ($VME(P)$), *Head* 17.08% e *DogFish* 11.13%. Por essa razão, *DogFish* está mais próxima do dinheiro e por consequência, tem o gatilho exploratório menor (P^{**}). Com a mesma justificativa, dado ao prêmio de espera alto da oportunidade *Feather*, o gatilho exploratório é o mais elevado, ou seja, numa análise *stand-alone*, essa é a última a ser investida. O gatilho de investir em desenvolvimento (P^*) não é tão analisado nessa etapa, pois ainda há risco envolvido e investimentos de exploração não atribuídos no cálculo. É possível notar que em todos os casos, o gatilho de investir em desenvolvimento é menor que o gatilho de explorar.

O estudo *stand-alone* é o primeiro passo para compreender a economicidade de um bloco exploratório. Nas seções (3.6 e 3.7.1) foram apresentados a importância do estudo conjunto de um portfólio e portfólio exploratório, devido a correlação dos prospectos. Nos próximos passos, os modelos são de Dias e Calvette (2017). O trabalho analisa um portfólio exploratório com dois e três ativos, usando o método binomial. Aqui será apresentado soluções usando o método de diferenças finitas explícitas (Apêndice B). Os casos a seguir são situações hipotéticas para melhor analisar os exemplos nos casos de incerteza estratégica.

A situação inicial é a hipótese de um grande bloco exploratório operado

pela Empresa X. Além disso, a oportunidade *Feather* foi reavaliada pelo grupo técnico, sendo considerada sem probabilidade de sucesso, eliminando-a da carteira. É raro, mas é possível acontecer, por exemplo, caso identifiquem por interpretação sísmica que não se trata de reservatório. Essa situação (figura 4.16) é usada no modelo de barganha cooperativa da seção (4.2.2.2).

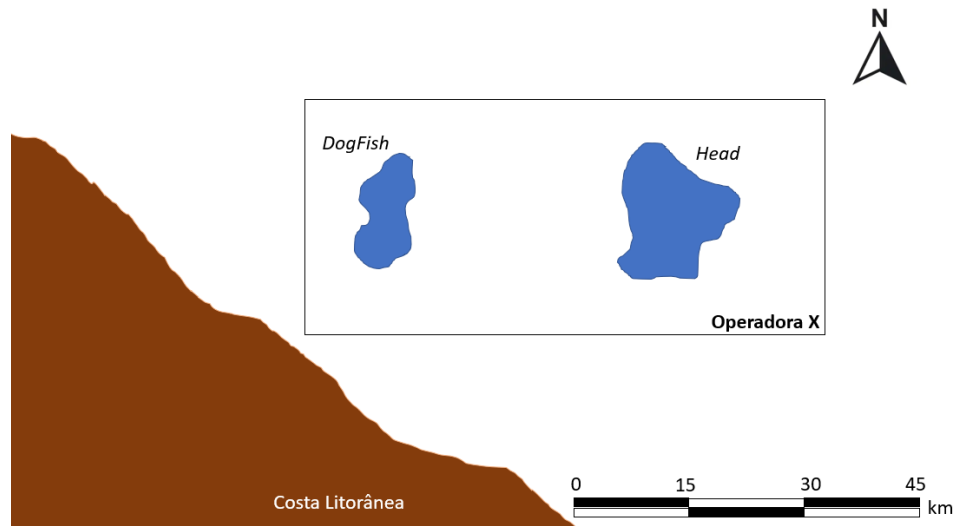


Figura 4.16: Único Bloco - DogFish e Head

O valor de portfólio exploratório (II) deve ser maior ou tanto quanto a soma das opções de explorar. Comparando com a tabela (4.6), a soma das opções de explorar os ativos *DogFish* e *Head* é igual a \$ 1078.99 milhões. O valor do portfólio exploratório ($\Pi_{Head+dogfish}$) é igual a \$ 1092.98 milhões. A diferença de \$ 14 milhões é devido a vantagem da dependência entre ativos combinado com a espera em situação de portfólio. O portfólio exploratório tem um nova curva de gatilho, sendo no início do contrato igual a \$ 71.50 dólares o barril, sendo ótimo esperar no momento inicial do contrato.

A figura (4.17) apresenta a curva de gatilho do portfólio. No tempo presente, o valor do gatilho do portfólio é \$ 71.50 dólares, entre os gatilhos de explorar das duas oportunidades *stand-alone*. Diferentemente do gatilho de uma oportunidade, agora existe um ótimo que define a oportunidade de perfurar primeiro, ou seja, qual sequência ótima dado as informações *a priori*. As cores simbolizam a preferência, sendo uma dominância da perfuração da oportunidade *DogFish* primeiro. Contudo, numa análise do valor da espera entre a primeira e segunda sequência ótima acima do gatilho, não há diferença significativa de valor na perfuração da oportunidade *DogFish* antes ou depois da oportunidade *Head*. Diferenças significativas entre perfurar *Dogfish* primeiro ocorrem somente próximo ao vencimento, entre os preços de \$ 35 e \$ 41 o barril.

Essa indiferença em preços altos é importante na prioridade de perfuração no jogo de barganha cooperativa.

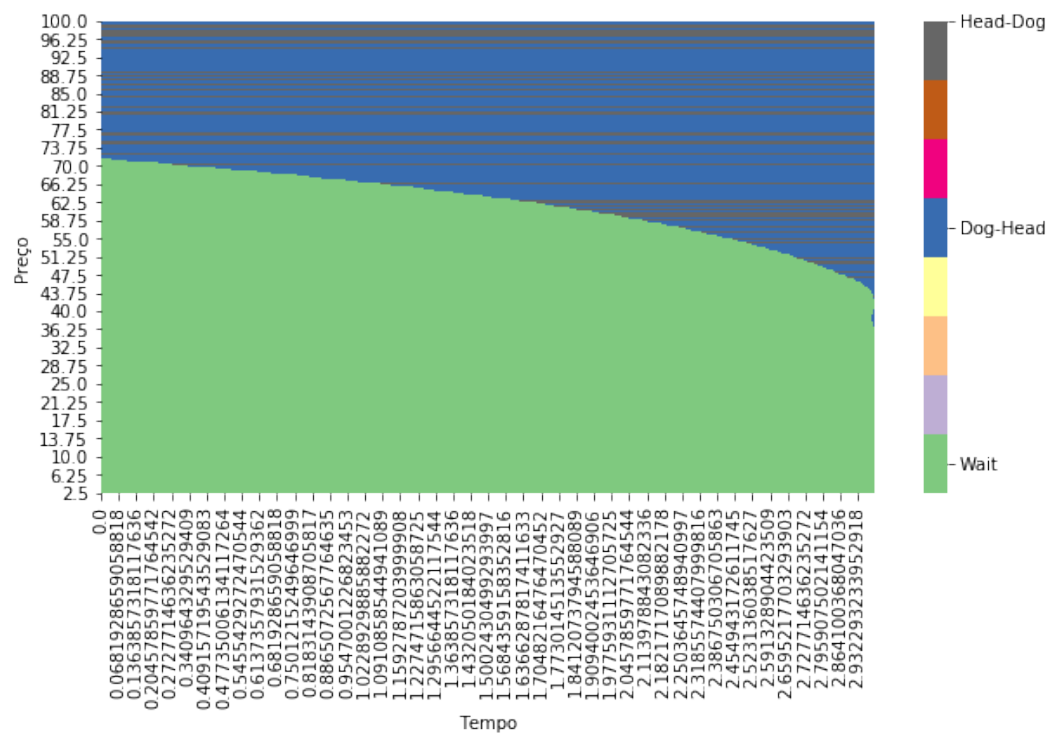


Figura 4.17: Gatilho do Portfólio - Head-DogFish

Em uma reavaliação da carteira, o operador X e o seu grupo técnico alteram o volume recuperável médio da oportunidade *Head*. Esse exemplo está sendo criado, pois será útil nas análises de assimetria na guerra de atrito por informação e na barganha cooperativa (seção 4.2.2.2).

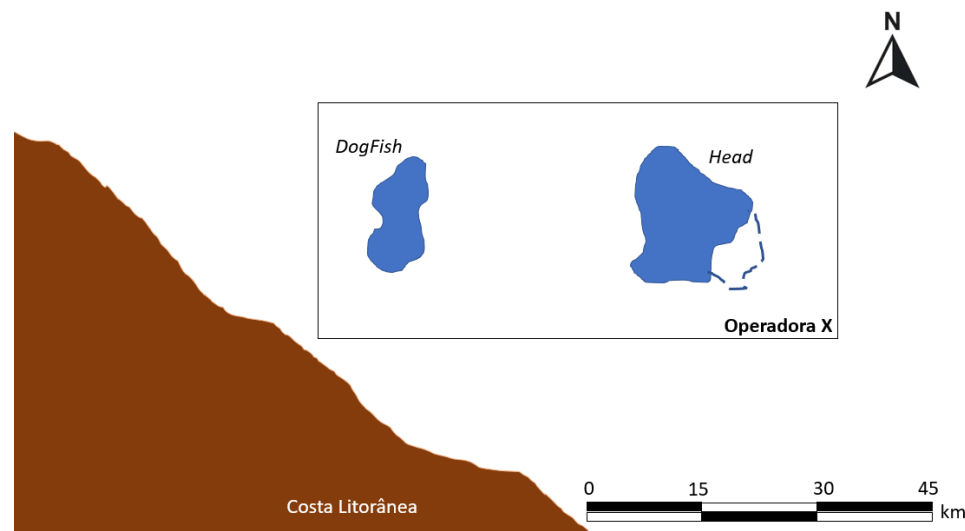


Figura 4.18: Único Bloco - DogFish e Head com Volume Maior

Caso eleve em 35% de B da oportunidade *Head*, o portfólio exploratório é avaliado em \$ 1334.70 milhões, sendo a soma das opções de explorar *DogFish* e o expandido de *Head* valendo \$ 1318.06 milhões. Novamente, a diferença de \$ 16 milhões é devido ao efeito de portfólio combinado com a espera. O gatilho no tempo inicial do contrato reduz comparado a não expansão, indo para \$ 69.75 o barril. Isso representa que o portfólio exploratório é mais atraente para exercício com o aumento da reserva. Além disso, a pequena área de exercício com preferência para a *DogFish* como primeiro poço, próximo do vencimento diminuiu, agora entre \$ 35 e \$38 dólares o barril. No vencimento, a diferença entre o primeiro e o segundo portfólio é marcante. Se o barril estiver em \$ 36 dólares, o portfólio com a primeira perfuração sendo a oportunidade *DogFish* vale \$ 115.738 milhões, visto que a perfuração do primeiro poço em *Head* vale \$ 95.872 milhões. A diferença de \$ 19.866 milhões é a informação incremental que a oportunidade *DogFish* passa, comparado a perfuração anterior do prospecto *Head*. Porém, assim como no caso original (figura 4.16), para valores altos do preço do petróleo, o investidor é indiferente entre qual ativo irá perfurar antes. Essa indiferença é relevante para a barganha cooperativa.

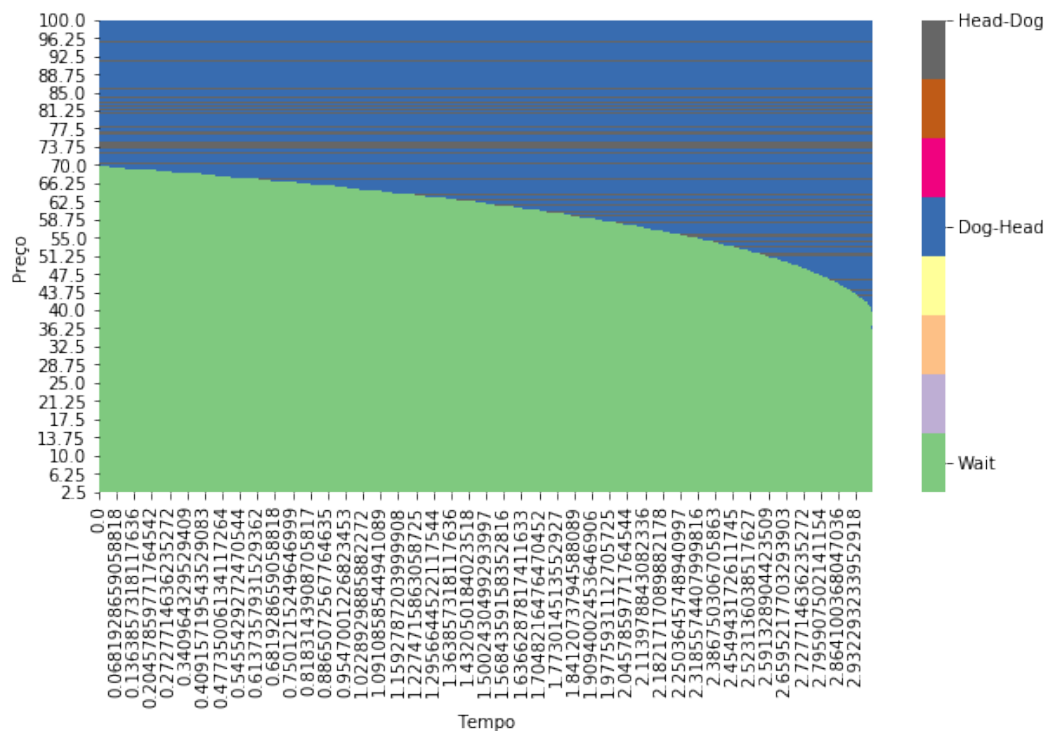


Figura 4.19: Gatilho -II - DogFish e Head com expansão de 35% de B

Agora, o bloco exploratório 0, operado pela empresa A possui carteira composta pelas oportunidades *DogFish* e *Feather*, como pode ser visto na figura (4.20).

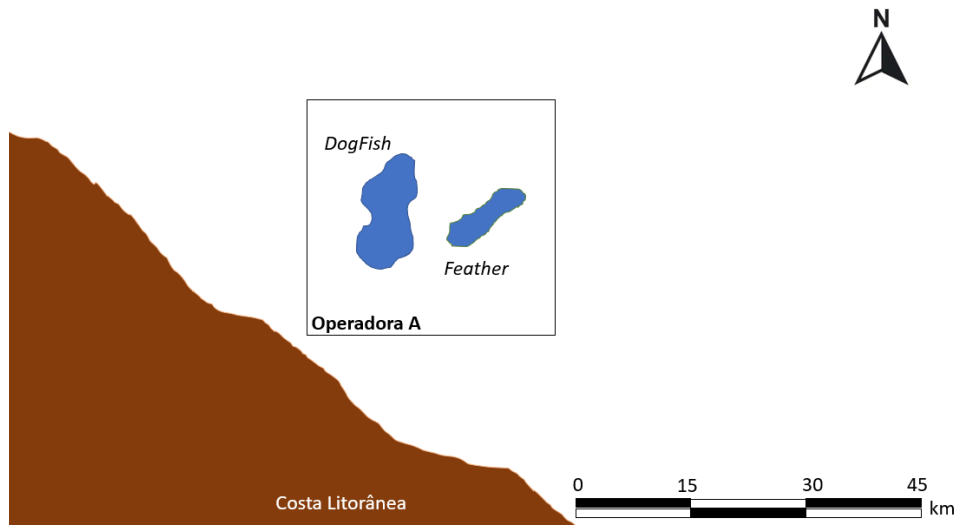


Figura 4.20: Bloco A- DogFish e Feather

O valor do portfólio exploratório ($\Pi_{dogFish+Feather}$) é 796.60 milhões de dólares, maior que a soma das opções de explorar (= 787.42 milhões de dólares). O excedente de 9.18 milhões de dólares é devido a correlação entre as oportunidades e o valor da espera. A figura (4.21) apresenta a curva de gatilho do portfólio *DogFish* e *Head*. O gatilho no início do contrato é \$ 73.25 o barril, entre os dois gatilhos *stand-alone* (tabela 4.6). Como nos outros casos, com preços acima da espera, os valores da perfuração *DogFish* como primeira oportunidade é similar à perfuração antes da oportunidade *Feather*. Exceção somente no intervalo entre \$ 35 e 48 o barril, próximo do vencimento, em que é preferível perfurar a oportunidade *DogFish*.

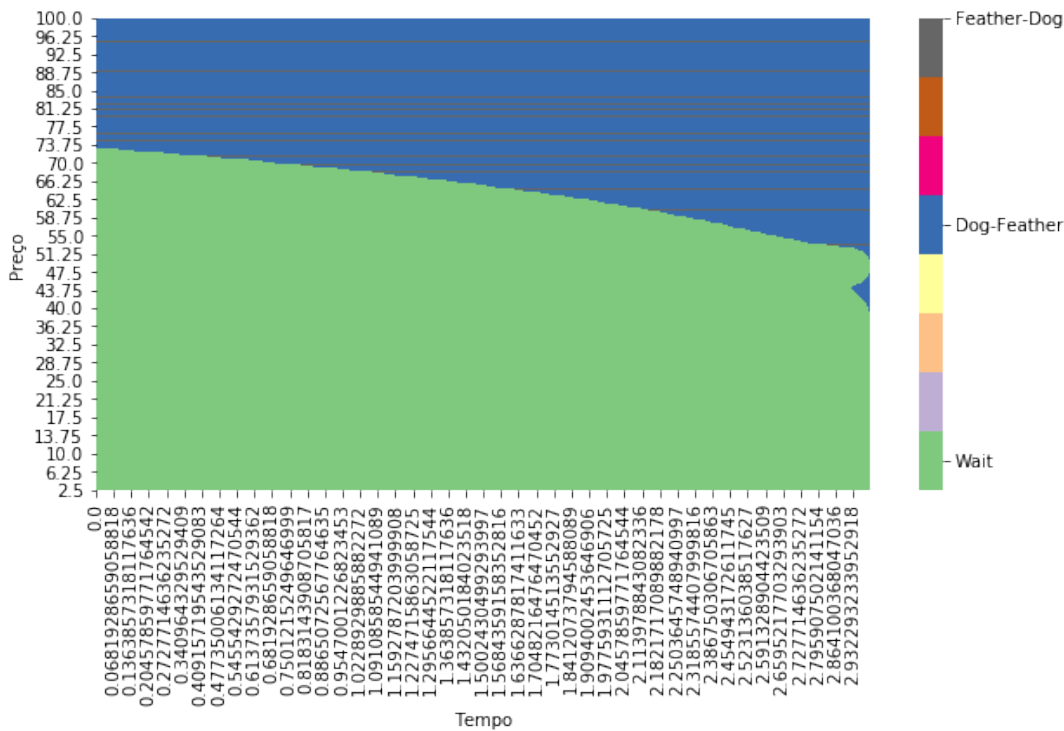


Figura 4.21: Gatilho do Portfólio - DogFish e Feather

Finalmente, a figura (4.22) apresenta um portfólio com três oportunidades operadas pela empresa X. Esse também é o caso de unitização pela barganha cooperativa no estudo da seção (4.2.3).

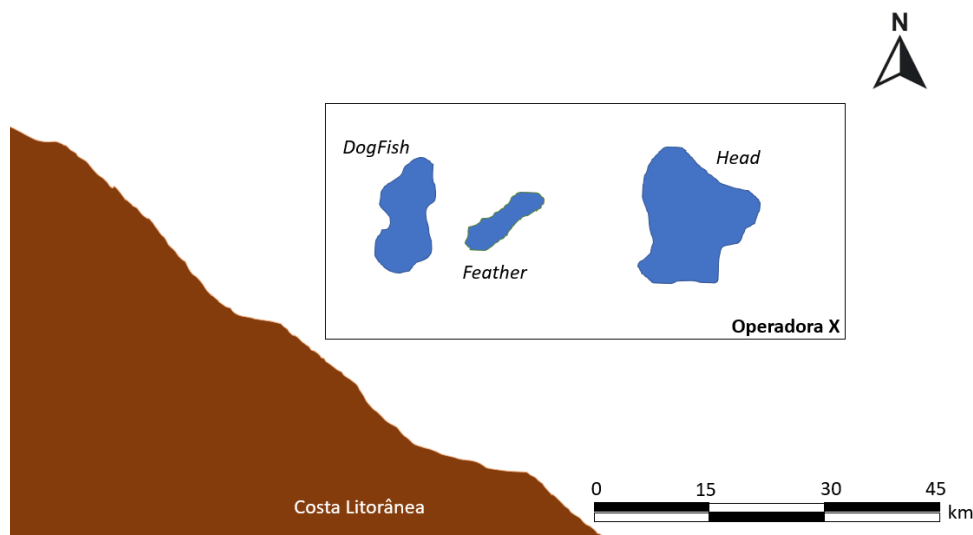


Figura 4.22: Modelo - Único Bloco

O portfólio exploratório, no tempo presente vale \$ 1309.54 milhões, maior que a soma da opção da espera *stand-alone* (=1285.13). A diferença de \$ 24.41

milhões é devido a otimização e o valor advindo da revelação da informação. A curva de gatilho é interessante, já que no tempo presente acontece no preço de \$ 72, contudo a zona de espera volta a aparecer, em todo o contrato, entre \$72.75 e \$74.50 dólares o barril. Outro fato interessante é que acima do gatilho côncavo, a preferência é de perfuração primeiro do ativo *Feather*. O ativo *Feather* possui o gatilho mais alto entre as oportunidades quando analisado sozinho (\$79.87, tabela 4.6) e mesmo quando em portfólio exploratório (bloco A - DogFish e Feather), pois há a preferência de perfuração da oportunidade *DogFish* (figura 4.21). A preferência pela oportunidade *Feather* no portfólio exploratório unitizado acontece, pois ela é estratégica para os outros dois ativos. Observando a tabela de correlação das oportunidades (tabela 4.4), esse ativo tem correlação alta com os outros dois, contudo, os outros dois tem correlação baixa entre si. Ou seja, a perfuração do prospecto *Feather* revela muita informação para o portfólio, mesmo tendo o mais baixo VME e a maior porcentagem de espera no caso *stand-alone* (tabela 4.6). Agora, em caso de preços muito elevados, acima de 74.50 dólares o barril, é indiferente a ordem da perfuração.

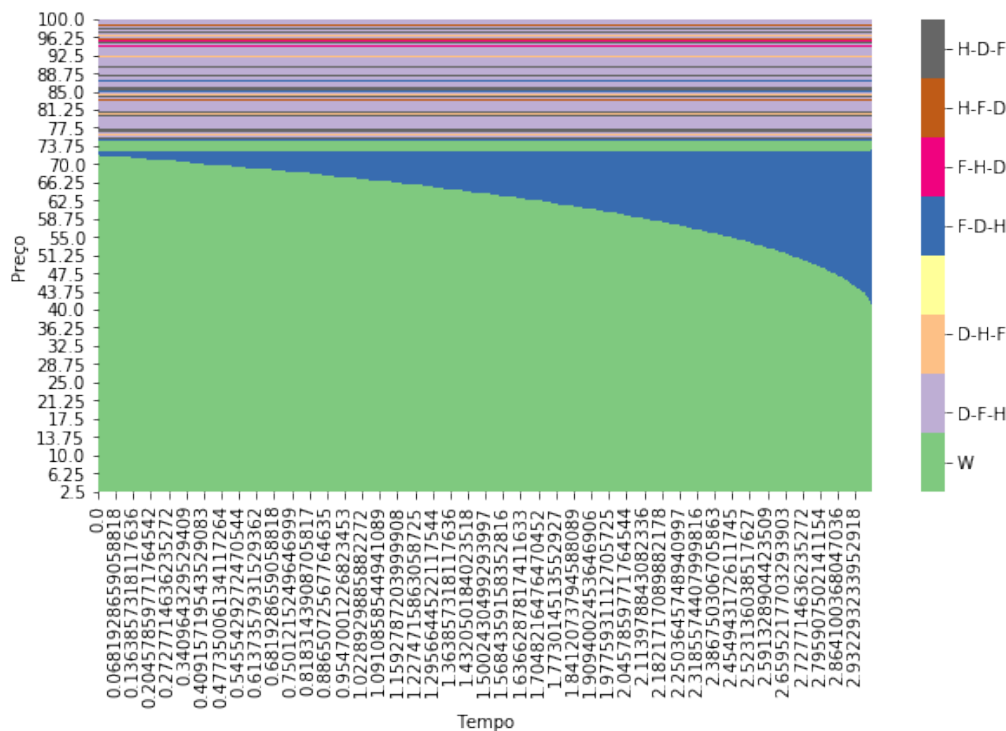


Figura 4.23: Gatilho do Portfólio - DogFish, Feather e Head

Neste momento, cabe a comparação com a avaliação estática do valor da informação ($\pi(P)$). A avaliação estática serve, caso considere o contrato no

vencimento, ou na hipótese de desconsiderar o contrato, em situação de agora ou nunca. O portfólio estático ($\pi(P)$) não acrescentar nenhuma informação nas carteiras *DogFish + Head* e *DogFish+Feather* a preços correntes, quando comparado com a soma do valor $VME(P)$. Como comentado ao longo do texto, há pequenos acréscimos quando o preço do petróleo está entre 35-40 dólares e inexistentes em valores acima. Assim, essas carteiras possuem valor da informação ao longo do contrato, pois a decisão exploratória não é de imediato e existe probabilidades de preços onde a revelação apresenta valor, conceito considerado em modelos de opções. Esse acréscimo pode ser visto na tabela (4.7), em que a a coluna $VOI(P, t)$ é a diferença do portfólio (Π) com as somas das opções *stand-alone* do ativos. Esse acréscimo é devido ao valor da informação dado as probabilidades de diversos preços no futuro com aplicação da regra ótima de valor maior que zero. Além do acréscimo, é possível priorizar melhor as carteiras, por exemplo, a carteira $D + H$ traz mais informações ao longo do tempo que a carteira $D + F$, pois tem maior $VOI(P, t)$, sendo esse efeito não exposto no caso estático.

<i>Métrica</i>	<i>D+H</i>	<i>D+F</i>	<i>D+F+H</i>
\$ Milhões			
$\pi(P)$	948.20	673.76	1129.69
$\sum VME(P)$	948.20	673.76	1098.88
$VOI(P)$	-	-	30.81
$\Pi(P, t)$	1092.98	796.60	1309.54
$\sum E(P, t)$	1078.99	787.42	1285.13
$VOI(P, t)$	13.99	9.18	24.41
\$/bbl			
P^{**}	71.50	73.25	72-74.75

Tabela 4.7: Avaliação dos Portfólios - $\tau=3$ anos

Portanto, a comparação entre o modelo estático e com opções aponta a superioridade do modelo com incertezas. Além disso, entre os métodos com incerteza de preços, é preferível análise pelo portfólio exploratório comparado a soma simples das opções de exploração. A preferência é não somente pelo valor agregado final e suas diferenças ($VOI(P, t)$), mas a vantagem existente das curvas de gatilho de portfólio que o somatório não oferece.

4.2.2

Dois prospectos: Um em cada bloco

Os resultados desta seção ampliam o desenvolvimento de [Dias e Teixeira \(2009\)](#), adequados aos prospectos apresentados na seção (4.1.5) e os parâmetros exógenos da seção (4.1.4), incluindo o preço do barril no tempo inicial de \$ 50 e tempo de contrato igual a 3 anos (τ). A situação foi simplificada para compreender melhor o problema e em etapas adiante o exemplo vai sendo modificado até chegar ao modelo original das figuras (4.11 ou 4.52) e tabelas (4.3 e 4.4).

4.2.2.1

Jogo Simétrico: Atrito à Barganha

O modelo contempla dois blocos exploratórios, adquiridos no mesmo leilão por companhias distintas, com prazo de três anos (τ) e sem compromisso de poço exploratório, vizinhos um ao outro. Cada bloco tem somente um prospecto, com características iguais a oportunidade *DogFish* (figura 4.24). Os dois agentes precificam o investimento da produção com a mesma equação (4-5) e com o mesmo dispêndio para o poço exploratório. O jogo é de informação completa e simétrico, pois os dois agentes possuem ativos diferentes, mas com as mesmas características geológicas e de produção. Contudo, a correlação dos prospectos é diferente de 100%, sendo a princípio ρ igual a 60%.

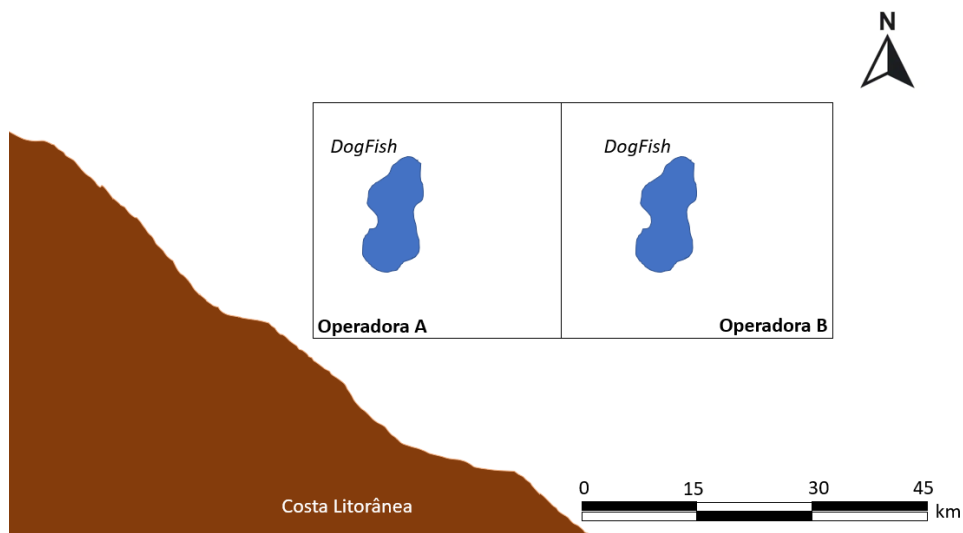


Figura 4.24: Modelo - DogFish x DogFish

O jogo envolve somente dois jogadores e o conjunto de estratégias é $s_{i,-i} = \{esperar, esperar\}; \{esperar, investir\}; \{investir, esperar\}$ e

$\{investir, investir\}$. Nesse jogo, há uma variável incerta no tempo, então o equilíbrio se dá em jogo com equilíbrio markoviano (EPM). Abaixo é apresentada a forma normal do jogo (tabela 4.8):

			Jogador 2	
			q	$1 - q$
			Investe	Espera
Jogador 1	p	Investe	$S_1; S_2$	$L_1; F_2$
	$1 - p$	Espera	$F_1; L_2$	$W_1; W_2$

Tabela 4.8: Forma normal: Guerra de Atrito

O EPM é um equilíbrio perfeito de subjogos (ENPS), sendo em função do estado corrente, que apresenta a propriedade de Markov. O estado corrente a ser analisado é o momento inicial do contrato, $t = 0$.

O equilíbrio em estratégia pura $\{W_1, W_2\}$ ocorre quando os dois jogadores não tem interesse em perfurar devido a baixa do preço do petróleo ($< P^{**}$). O *payoff* é representado pela opção de explorar e a melhor ação ocorre devido ao alto valor da espera de $E_i(P, 0)$. Quando se ultrapassa o gatilho, pode haver interesse do jogador continuar esperando, agora devido a obtenção de informação pela perfuração do outro jogador, porém incorre em um custo de espera pelo prospecto não explorado. No caso, foi calculado uma perda mensal de valor, ou seja, $c_i(P^{**}, 0) = VME_i(P^{**}, 0)(1 - e^{-r/12})$ e como se trata de um jogo simétrico, $W_i = W_1 = W_2$.

O caso de equilíbrio $\{S_1; S_2\}$ ocorre devido ao exercício imediato dos jogadores e somente em situações de preços muito elevados. É necessário que o preço ultrapasse o preço de gatilho da opção exploratória (P^{**}) e fique acima do preço que delimita superiormente a guerra de atrito por informação entre os jogadores (P^s). Esse limite é quando o jogador desconsidera o valor da informação da perfuração pelo outro jogador. Como se trata de um jogo simétrico, $VM E_1(P, 0) = VM E_2(P, 0) = S_i$.

As estratégias puras de equilíbrio $\{F_1; L_2\}$ e $\{L_1; F_2\}$ ocorrem simultaneamente devido a simetria do jogo. A líder (L_i) é a empresa que não aguarda a informação do próximo, portanto possui *payoff* igual ao $VM E_i(P, 0)$. Já a seguidora F_i tem valor em função da informação do outro jogador, ou seja, igual a equação (3-57).

Em um jogo simétrico e de informação completa, quando há dois equilíbrios puros, sempre há um equilíbrio em estratégia mista. Neste caso de equilíbrio $\{F_1; L_2\}$ e $\{L_1; F_2\}$, utiliza o conceito de equilíbrio evolucionariamente estável. Esse conceito ajuda a escolher o equilíbrio de longo prazo. Nesse caso, o único equilíbrio em estratégia evolucionariamente estável (EEE) é o equilíbrio em estratégia mista. É nessa situação de indecisão, em que há a probabilidade

dos jogadores i ou j aguardar informação gratuitas e sendo essas estratégias críveis, ocorre a situação de guerra de atrito por informação. Além do mais, esse conflito pode perdurar enquanto os preços correntes não alterarem ou não saírem do intervalo que esse equilíbrio misto ocorre.

Os *payoffs* do jogo são apresentados a seguir (tabela 4.9):

		Jogador 2	
		Investe	Espera
Jogador 1	Investe	$VME_1 ; VME_2$	$VME_1 ; E_{2 1}$
	Espera	$E_{1 2} ; VME_2$	$E_1 - c_1 ; E_2 - c_2$

Tabela 4.9: Forma normal: Payoffs

As melhores respostas serão sublinhadas em todos os jogos (exemplo na tabela 4.10). Como esse primeiro jogo analisado é com o preço corrente, alguns prêmios já foram apresentados na seção de estudo sem incerteza estratégica (seção 4.2.1) e tabela (4.5). Para o preço de petróleo igual a 50 dólares o barril, a ação esperar é dominante para qualquer jogador. Essa espera é devida somente ao seu próprio ativo, sem o aguardo da externalidade positiva da perfuração do poço vizinho.

		Jogador 2	
		Investe	Espera
Jogador 1	Investe	558.23 ; 558.23	558.23 ; <u>583.37</u>
	Espera	<u>583.37</u> ; 558.23	<u>581.28</u> ; <u>581.28</u>

Tabela 4.10: Forma normal: Jogo Simétrico- $P=\$50$, $\rho = 60\%$, $\tau = 3$

Se o preço subir acima do gatilho exploratório de P^{**} de \$ 69.62 o barril, o equilíbrio do jogo muda. Com preço a 72 dólares o barril, temos dois equilíbrios puros de Nash e um equilíbrio misto. As probabilidades do equilíbrio misto são em função dos *payoffs* (equações 3-38 ou 3-39), sendo que neste caso, o jogador i tem 81.42% de investir e 18.58% de esperar. Em jogos simétrico, a utilidade esperada em equilíbrio misto para cada jogador é sempre igual, sendo neste caso $U_i(p^*, q^*) = 1281.59$ M\$. O prêmio é igual a um dos prêmios de equilíbrio em estratégias puras, sendo a ação espera ou investimento. Em jogos evolucionários, o único equilíbrio estável neste tipo de jogo se dá na estratégia mista, visto que os degenerados $\{F_1; L_2\}$ e $\{L_1; F_2\}$ são instáveis, pois têm *payoffs* distintos para cada jogador. É neste contexto de estratégia mista, nas probabilidades de aguardar e perfurar é que ocorre a guerra de atrito por informações.

Nesse jogo, no tempo zero, o intervalo de guerra de atrito é até o preço \$ 76.25 o barril (P^s). É o ponto no espaço preço do barril versus *payoff* que o

		Jogador 2	
		Investe	Espera
Jogador 1	Investe	1281.59 ; 1281.59	<u>1281.59</u> ; <u>1282.32</u>
	Espera	<u>1282.32</u> ; <u>1281.59</u>	1278.39 ; 1278.39

Tabela 4.11: Forma normal: Jogo Simétrico - $P=\$72$, $\rho = 60\%$, $\tau = 3$

prêmio de ser seguidor é igual ao de ser líder. A seguir, é apresentado o jogo em que o barril está em \$80 no tempo presente:

		Jogador 2	
		Investe	Espera
Jogador 1	Investe	<u>1557.41</u> ; <u>1557.41</u>	<u>1557.41</u> ; <u>1557.41</u>
	Espera	<u>1557.41</u> ; <u>1557.41</u>	1553.52 ; 1553.52

Tabela 4.12: Forma normal: Jogo Simétrico - $P=\$80$, $\rho = 60\%$, $\tau = 3$

Se o outro jogador tem ação de investir, o jogador é indiferente entre investir e esperar. Isso quer dizer que a espera não traz nova informação. Caso o outro jogador espera, o jogador prefere investir. Assim, não são críveis as estratégias $\{investir, esperar\}$ e $\{esperar, investir\}$ e o equilíbrio se dá em ações simultâneas de perfuração $\{investir, investir\}$.

Com o uso da teoria dos jogos evolucionários, é possível selecionar o equilíbrio estável. A solução é por integração da equação diferencial (3-34, 3-35 e 3-36 e 3-43).

O jogo evolucionário infinito em \$ 50 dólares (tabela 4.10) é apresentado por mais de mil passos na figura (4.25). É possível notar que em poucos passos estabiliza e degenera para ação esperar.

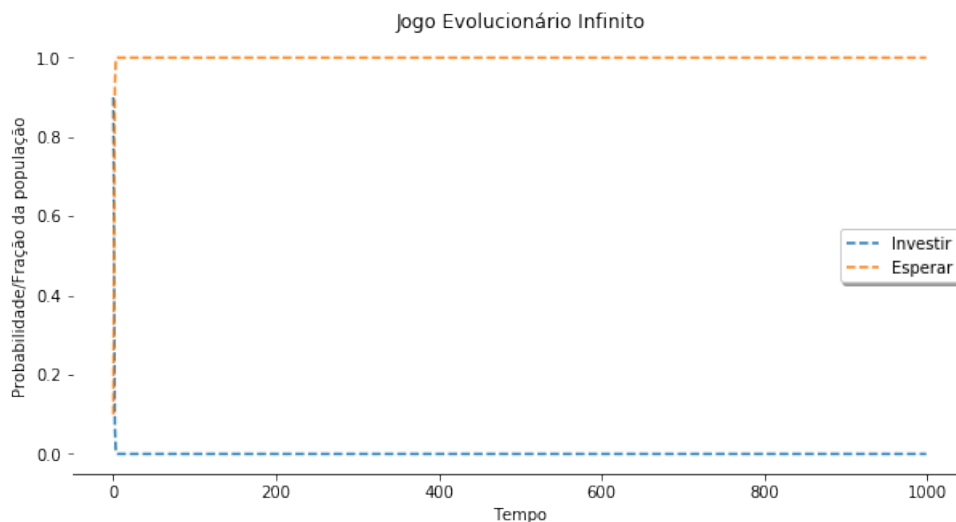


Figura 4.25: Jogo Evolucionário Infinito - \$ 50/bbl

Também é possível observar a solução num plano de fase, sendo derivados das equações (3-43, 3-46 a 3-49).

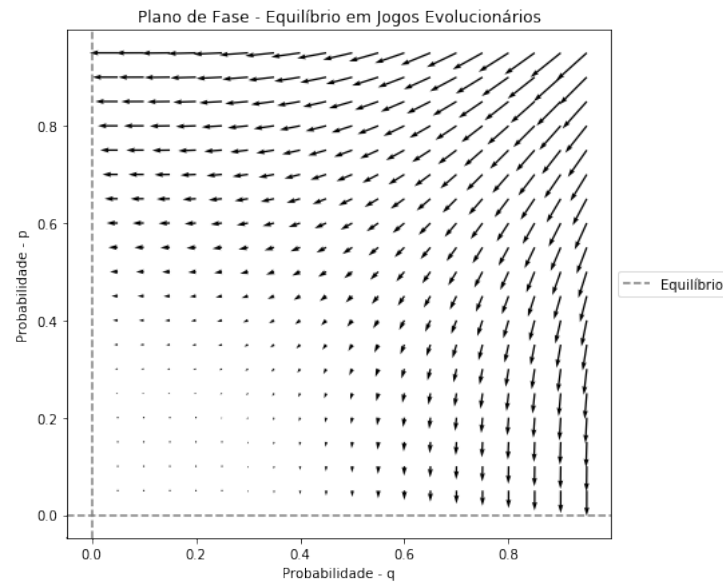


Figura 4.26: Jogo Evol. - P. de Fase - Simétrico -\$ 50/bbl

Os vetores da figura (4.26) apontam para p^*, q^* igual a (0,0), que é a estratégia $\{esperar, esperar\}$.

No jogo evolucionário infinito em \$ 72 dólares (tabela 4.11), estabiliza em frações de 81.42% em investir e 18.58% em esperar (figura 4.27), probabilidades do equilíbrio em estratégias mistas. Como não se trata de jogo cooperativo, em que uma porcentagem de vezes se espera e outra investe, preços a este nível se configuram um impasse, uma guerra de atrito por informações.

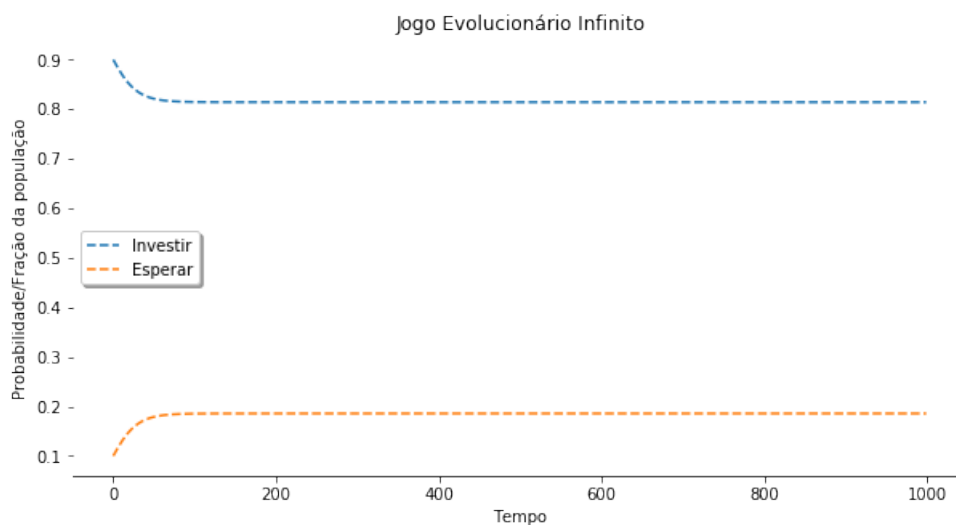


Figura 4.27: Jogo Evolucionário Infinito - \$ 72/bbl

O resultado também pode ser observado na malha adensada do plano de fase (figura 4.28). O ponto de máximo indicado pelas linhas pontilhadas, fechados com vetores no sentido deste máximo global, apontam que (p^*, q^*) é estável e EEE.

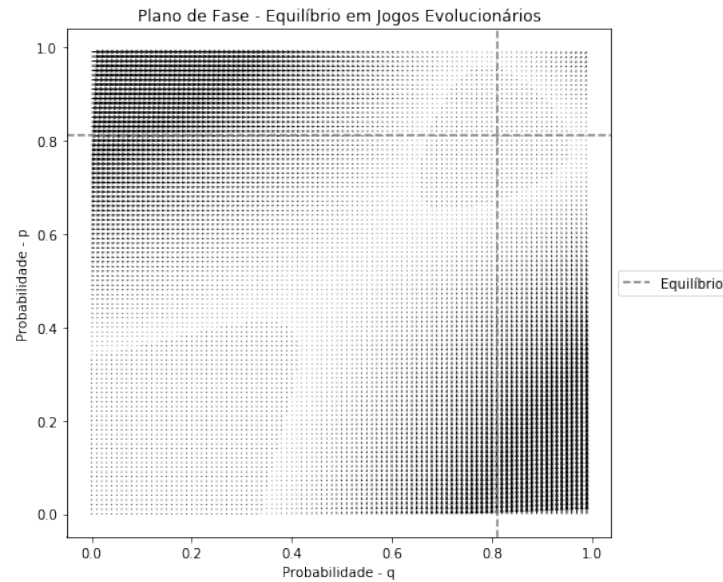


Figura 4.28: Jogo Evol. - P. de Fase - Simétrico -\$ 72/bbl

No caso de jogo evolucionário infinito em \$ 80 dólares (tabela 4.12), estabiliza na ação degenerada em investir (figura 4.29).

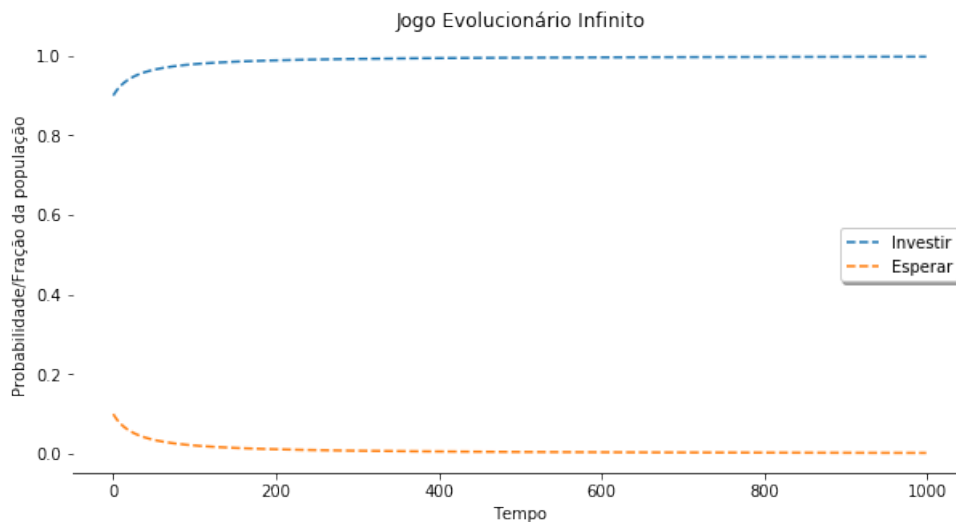


Figura 4.29: Jogo Evolucionário Infinito - \$ 80/bbl

No plano de fase em \$ 80 dólares o barril (figura 4.30), os vetores indicam o ponto de máximo na situação de canto de (p^*, q^*) igual a $(1,1)$, sendo igual ao par de estratégia $\{investir, investir\}$.

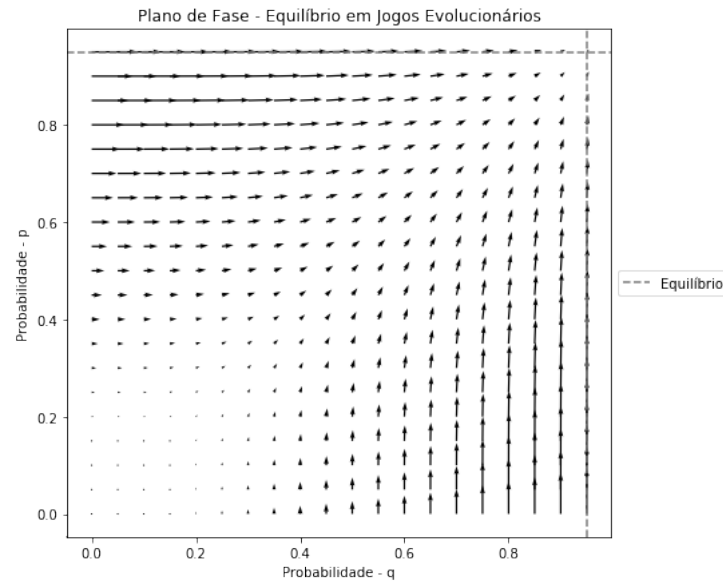


Figura 4.30: Jogo Evol. - P. de Fase - Simétrico - \$ 80/bbl

A figura (4.31) apresenta o prêmio do líder e do seguidor. Nas condições exógenas, ou seja, pelos parâmetros de preço, taxa de juros e contrato exploratório, e endógenas, pelos prospectos envolvidos, o intervalo de guerra de atrito ocorre entre \$69.62 e 76.25 (linhas verticais).

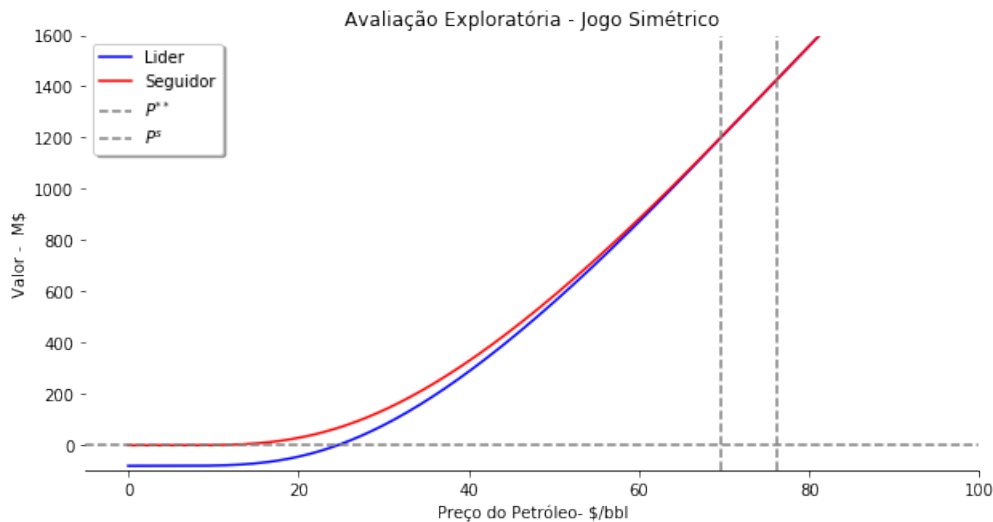


Figura 4.31: Guerra de Atrito: DogFish x DogFish - $\rho = 60\%$

No detalhe da figura (4.32), quando há a sobreposição efetiva do prêmio do seguidor e do líder, é o preço superior do limite da guerra de atrito, denominado de gatilho da perfuração simultânea (P^s).

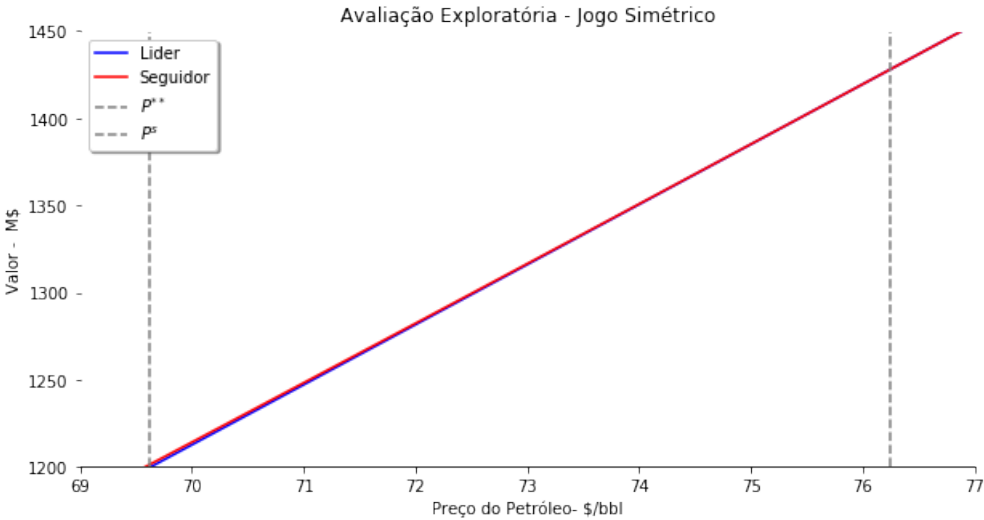


Figura 4.32: Detalhe - G. de Atrito: DogFish x DogFish - $\rho = 60\%$

O limite inferior depende do gatilho exploratório, já o superior tem relação com o prêmio da informação. Esse limite superior pode diminuir ou aumentar, dado a correlação entre os prospectos (tabela 4.13). Note que quanto mais correlacionados são os prospectos, maior o limite superior, sendo ∞ no caso correlação de 100%. Como discutido na seção (3.4), ativos 100% correlacionados não existem.

ρ	30%	60%	80%
Intervalo]69.63, 71.5]]69.63, 76.25]]69.63, 87.50]

Tabela 4.13: Intervalo no Preço do Barril- G. de Atrito - J. Sim.

E quando essa guerra de atrito pode começar? Como se trata de um processo estocástico, não é possível saber *a priori* o momento exato que o preço do petróleo vai atingir a curva de gatilho (figura 4.13). Pode começar muito próximo do início do contrato, ou nunca acontecer, visto que o preço da *commodity* pode ficar sempre abaixo da curva. Para ter uma estimativa, é necessário fazer simulação de Monte Carlo. Como entrada da simulação, é necessária a curva de gatilho da opção de explorar (figura 4.13), a discretização temporal da solução por diferenças finitas, equação de simulação do processo MGB (similar a equação 3-11) e parâmetros exógenos usados na solução por diferenças finitas (tabela 4.2). Como a simulação é em medida real, é necessário o *drift* do processo, adotando α igual a 9% a.a. (estimado em seção 4.1).

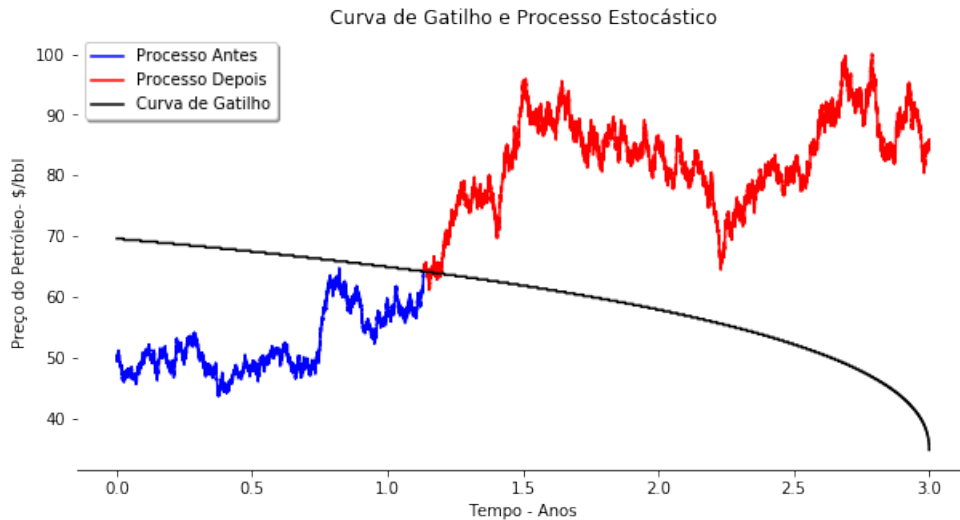


Figura 4.33: Simulação de Monte Carlo e Gatilho

A figura (4.33) apresenta uma possível simulação de um caminho. Veja que quando o processo atinge a curva de gatilho, o caminho altera a cor. Nesse processo, a primeira chegada ocorreu no tempo 1.13 ano. Foram feitas 10000 simulações (figura 4.34). Como verificação, a esperança matemática do MGB em medida real no prazo de três anos é \$ 65.498 o barril (equação 3-12), agora a média das 10000 simulações no vencimento do contrato é \$ 65.613 o barril, bem próximo da esperança matemática.

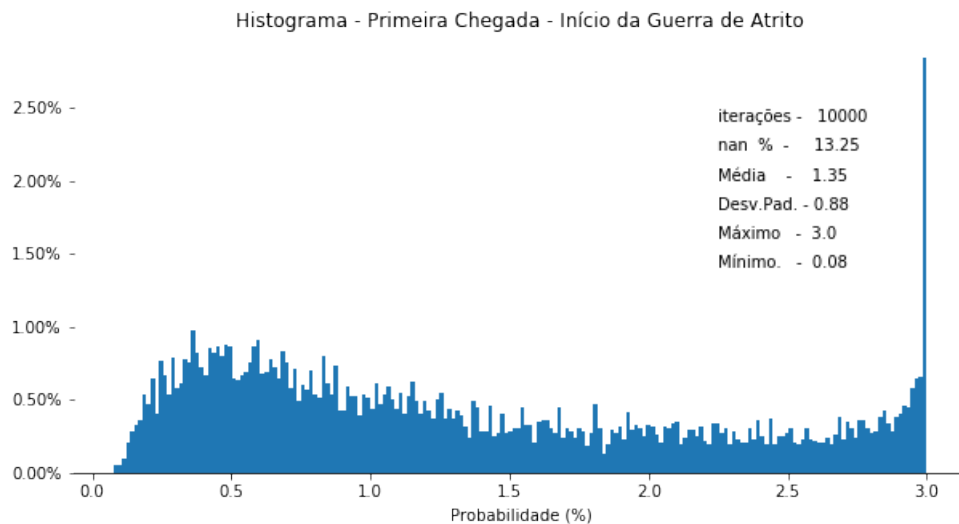


Figura 4.34: Histograma - Início da Guerra de Atrito

O tempo médio para início da guerra de atrito é de 1 ano e 4 meses. Na figura (4.34), nota-se grande dispersão dos eventos, com desvio padrão de dez meses. A probabilidade de não perfurar o prospecto é de 13.25%, independente

da guerra de atrito, já que essa porcentagem representa os caminhos que não atingiram a curva de gatilho. A probabilidade de começar a guerra de atrito antes do primeiro ano é de 38.88%. Contudo, a probabilidade de esperar o prospecto valorizar e começar a guerra de atrito nos últimos 6 meses de contrato é 13.8%. Isso pode colocar a decisão de investimento nos últimos momentos do contrato. Também, nota-se que há classes mais representativas próximos ao vencimento. Isso é devido a forte inclinação da curva de gatilho no término do contrato.

Pode-se observar os equilíbrios do jogo em relação a variável estocástica no tempo presente. Segundo a tabela (4.14), o conjunto de estratégias degeneradas $\{investe, investe\}$ será representado na figura (4.35) com o valor 1, assim como $\{investe, espera\}$, $\{espera, investe\}$ e $\{espera, espera\}$ serão com os números, 2 , 3 e 4. Números racionais não negativos representam estratégias mistas entre investir e esperar, e no caso estudado, representam o intervalo de guerra de atrito por informação.

		Jogador 2	
		Investe	Espera
Jogador 1	Investe	1	2
	Espera	3	4

Tabela 4.14: Simbologia dos Quadrantes

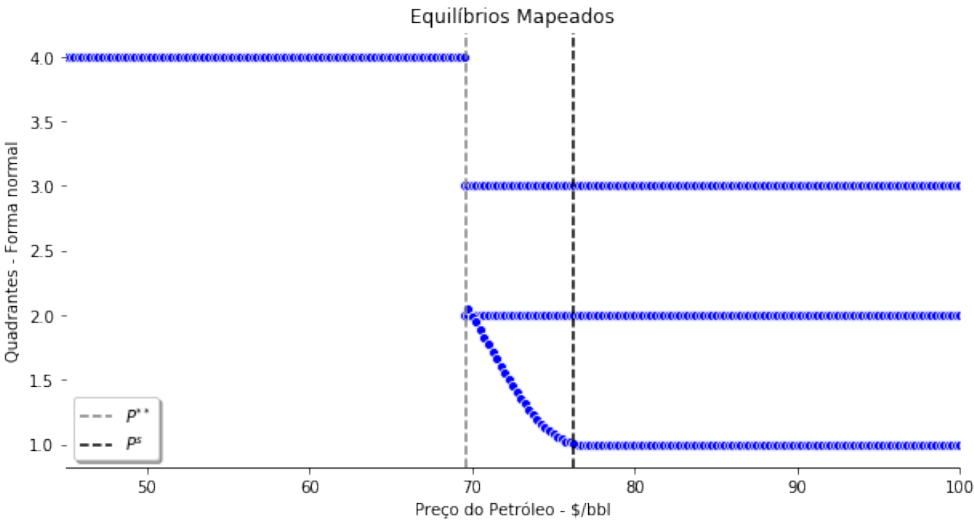


Figura 4.35: Equilíbrios Mapeados - Jogo Simétrico

As conclusões feitas até agora podem ser tiradas desse mapeamento. As estratégias puras de espera são EPM (e também ENPS) em preços baixos, até o gatilho. Após o gatilho, há duas estratégias puras F_i, S_i e uma estratégia mista

como equilíbrio de Nash. As probabilidades são maiores para espera e com a elevação do preço, as probabilidades dos dois jogadores são maiores para investir. Esse equilíbrio misto é o único EEE nesse intervalo, que suporta pequenas oscilações populacionais. Quando se ultrapassa o gatilho simultâneo, três equilíbrios são notados, contudo o equilíbrio crível é a perfuração simultânea e o único EEE.

Como a guerra de atrito é um jogo de parada ótima, o equilíbrio é definido em função do tempo. O tempo de exercício do líder é quando acionar seu gatilho exploratório e do seguidor, após a revelação da informação, seu novo ótimo será definido em P^F , já que o FC vai alterar. Como o jogo é simétrico, o equilíbrio se dá em $\{t_L, t_F\}$ e $\{t_F, t_L\}$ simultaneamente. Esse equilíbrio é ENPS e EPM. As equações abaixo representam o momento das estratégias do líder e do seguidor:

$$t_L = \inf\{t | P(t) \geq P^{**}(t)\} \quad (4-6)$$

$$t_F = \inf\{t | P(t) \geq P^F, \text{ sendo } P^F > P^{**}(t) \text{ ou } P^F < P^{**}(t)\} \quad (4-7)$$

Em situações de impasse por guerra de atrito, pode haver incentivos para alterar o tipo de jogo. Diferente da guerra de atrito, a barganha cooperativa é um jogo na busca de um ganha-ganha. Parte do princípio de uma análise de portfólio e a divisão deste portfólio entre os jogadores (tabela 4.15). No caso, como o jogo é simétrico, a divisão é 50% (figuras 4.36 e 4.37). As negociações poderiam começar a partir de \$ 21.25 dólares do barril, já que abaixo desse valor a parte que cabe a cada jogador é zero. Contudo, deve-se comparar com o ótimo de cada jogador no jogo de guerra de atrito. Na situação de preço inicial, o valor do prêmio seria \$ 570.80 milhões (comparar com o jogo da tabela 4.10), abaixo do equilíbrio $\{espera, espera\}$. Em \$ 72 dólares o barril, preço que está contido no intervalo de guerra de atrito, o valor para cada jogador ficaria \$ 1281.95 milhões, melhor que a ação de investir do equilíbrios $\{F_1, L_2\}$ e $\{L_1, F_2\}$ (comparar com tabela 4.11), mas pior que a espera. Em \$ 80 dólares, o valor da barganha seria \$ 1557.411 milhões, igual a ação de investir, sendo desnecessária a negociação (comparar com tabela 4.12). Ou seja, na simples divisão dos ativos, não há vantagens para nenhum jogador, porém, com um ganho marginal pela negociação, pode haver um intervalo contendo o intervalo de preços do impasse e a divisão pela barganha seja preterida ao atrito por informações.

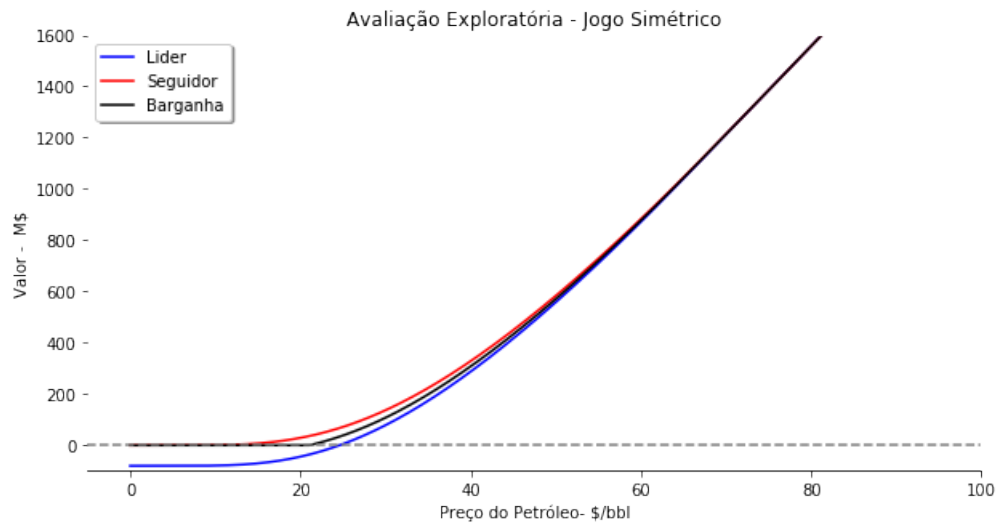


Figura 4.36: Barganha Cooperativa: DogFish x DogFish - $\rho = 60\%$

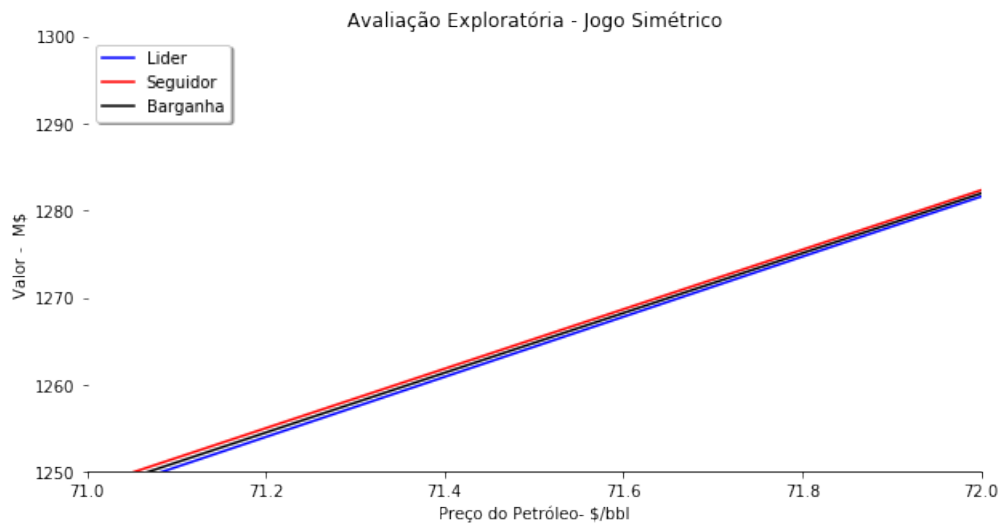


Figura 4.37: Detalhe - Barganha: DogFish x DogFish - $\rho = 60\%$

Como apresentado em seções anteriores, a informação obtida pelo sucesso ou fracasso do poço é pública. Informações privadas revelam tanto quando ou mais informações que o conhecimento geral. Neste trabalho, a revelação da informação é através da variável ρ . No processo de negociação, devido a interação cooperativa entre os dois jogadores, a percepção de correlação pode ser positivamente avaliada entre os dois prospectos. Inclusive, é comum em negociação ou avaliação de carteira a otimização dos projetos, por incorporação de conhecimentos de outros projetos das operadoras ou redesenhos de projetos em *cluster*. Isso quer dizer que em ambiente cooperativo tende a revelar a

informação privada dos agentes.

Para facilitar o exercício de revelação de informação privada, foi elevado o ρ para 80% dado a interação dos agentes em ambiente de negociação. Comparando com a situação de guerra de atrito, no início do contrato, com barril a \$50 (tabela 4.10), o *payoff* da barganha é 572.67 milhões de dólares, ainda pior que o equilíbrio $\{espera, espera\}$. Em \$ 72 o barril (tabela 4.11), a utilidade da barganha é \$ 1283.65 milhões, *payoff* melhor que a estratégias mista e puras. Em \$ 80 o barril (tabela 4.12) as condições de negociação ainda são preferidas, visto que o valor esperado da utilidade para cada jogador é \$ 1557.91 M, melhor que a estratégia pura de simultânea de investir (=\$ 1557.41 M).

$P(\$/bbl)$	B_i		
	50	72	80
$\rho = 60\%$	570.80	1281.95	1557.41
$\rho = 80\%$	572.67	1283.65	1557.91

Tabela 4.15: U_i - Divisão da Barganha Cooperativa - M\$

Na figura (4.38), é possível notar o detalhe da utilidade superior da barganha em relação as utilidades do líder e do seguidor. O intervalo contínuo de cooperação em que é melhor cooperar que qualquer outra ação é de \$ 66.25 até 88 o barril. Esse intervalo contém o intervalo da $[P^{**}, P^s]$ ($[69.63, 76.25]$), sendo viável a substituição do jogo de guerra de atrito pela barganha cooperativa.

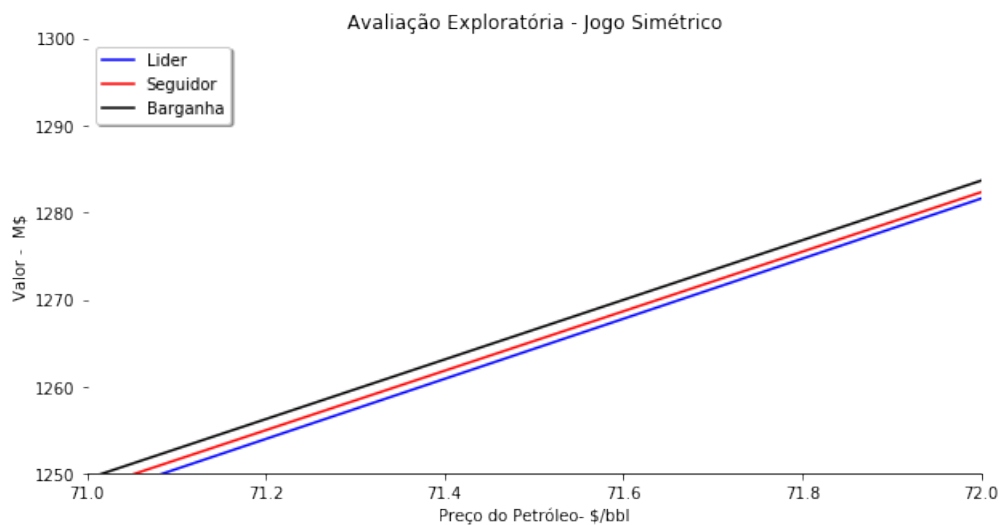


Figura 4.38: Detalhe - Barganha: DogFish x DogFish - $\rho = 80\%$

4.2.2.2

Jogo Assimétrico: Atrito (?) à Barganha

O próximo jogo a ser analisado envolve dois ativos, cada um em um bloco exploratório, sendo a oportunidade *DogFish* operada pela empresa A e *Head* pela empresa B (figura 4.39).

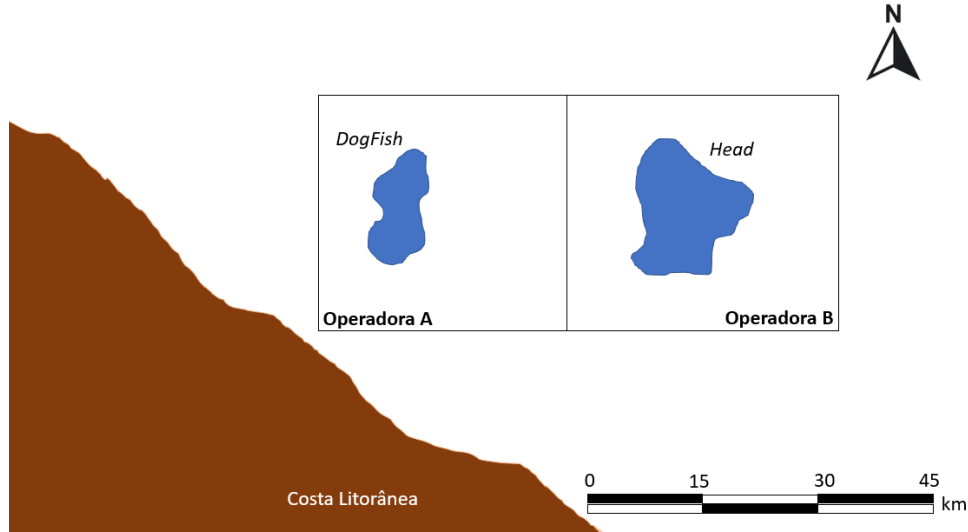


Figura 4.39: Modelo - 2 Blocos - DogFish e Head

Neste jogo, já se destaca os intervalos de preço importantes para estudar no tempo presente ($\tau = 3$). Esses são relacionados com os preços de gatilho exploratório de cada oportunidade e o preço de perfuração simultânea de cada um, sendo a simbologia (H) referente a oportunidade *Head* e (D) a oportunidade *DogFish*:

- $[0; 69.62[- [0; P^{**}(D)[$
- $[69.62; 72.25[- [P^{**}(D); P^s(D)[$
- $[72.25; 73.12[- [P^s(D); P^{**}(H)[$
- $[73.12; 82.25[- [P^{**}(H); P^s(H)[$
- $[82.25; \infty[- [P^s(H); \infty[$

A seguir, serão apresentadas a forma normal do jogo em diversos preços do barril no tempo presente, representando os equilíbrios em cada intervalo mencionado acima.

Quando o preço está abaixo do gatilho da oportunidade *DogFish* (tabela 4.16) , como no jogo simétrico, o equilíbrio é $\{esperar, esperar\}$.

		J2- <i>Head</i>	
		Investe	Espera
J1 - <i>DogFish</i>	Investe	558.23 ; 471.13	558.23 ; <u>500.48</u>
	Espera	<u>582.19</u> ; 471.13	<u>581.28</u> ; <u>497.72</u>

Tabela 4.16: Forma normal: Jogo Assimétrico - $P=\$50$, $\rho = 50\%$, $\tau = 3$

Quando o preço está acima do gatilho da oportunidade *DogFish* e abaixo do preço de perfuração simultânea dessa oportunidade $P^s(D)$ (tabela 4.17), a espera é dominante em relação ao investimento para o jogador 2, diferentemente na situação simétrica (tabela 4.11). Isso quer dizer que logo no momento em que o preço do petróleo é igual ao gatilho da oportunidade *DogFish*, o jogador 1 exerce sua opção e perfura o prospecto *DogFish*, sem aguardar a informação do concorrente. Já a operadora *B* espera o resultado e com as novas informações adequa a decisão de aguardar ou investir na oportunidade *Head*.

		J2- <i>Head</i>	
		Investe	Espera
J1 - <i>DogFish</i>	Investe	1281.59 ; 1122.46	<u>1281.59</u> ; <u>1125.43</u>
	Espera	<u>1281.61</u> ; 1122.46	1278.39 ; <u>1122.63</u>

Tabela 4.17: Forma normal: Jogo Assimétrico - $P=\$72$, $\rho = 50\%$, $\tau = 3$

Em jogos assimétricos, o equilíbrio se dá pela relação entre os prêmios das opções (tabela 4.6), ou seja, quão longe do dinheiro o ativo está. A mudança de ação ocorre devido ao acionamento do gatilho combinado com o surgimento do custo de espera, visto que o custo tem relação com o valor intrínseco ($VME(P, t)$) e o gatilho da opção de explorar. Portanto, a empresa que tiver o gatilho mais baixo vai perfurar e a empresa que tem o gatilho com preço mais alto vai esperar a informação gratuita. A relação de investir e esperar é com o valor da espera e do gatilho, não com o valor do ativo ou do portfólio em si, já que *DogFish* tem valor maior que *Head*. O que está em questão é a atratividade de investir no momento ou esperar estados da natureza melhores no futuro com informações alheias.

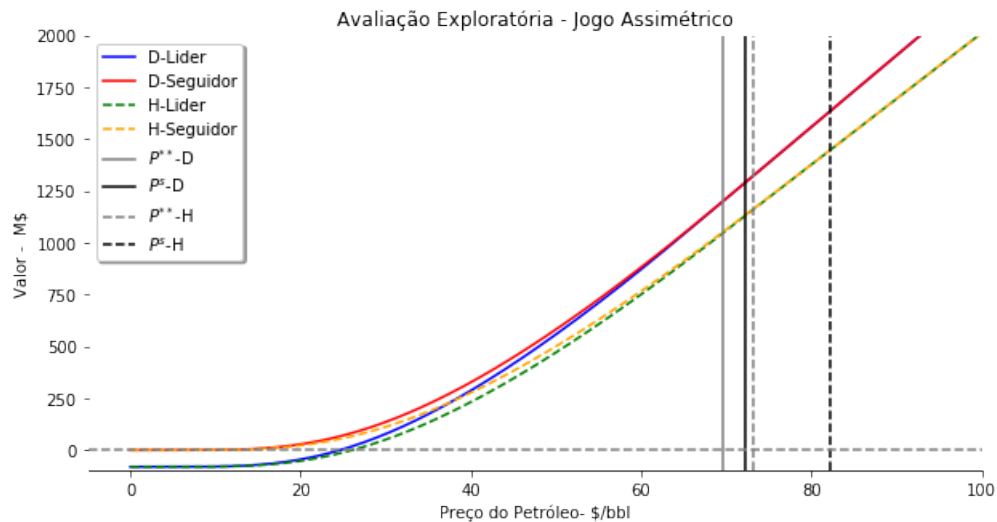


Figura 4.40: Jogo Assimétrico: Preço x Valor - DogFish e Head

A figura (4.40) apresenta os payoffs das operadoras A e B em relação ao preço da variável estocástica preço do petróleo, com ou sem vantagens pela informação. Comparando com o jogo simétrico (figura 4.31), a assimetria desloca os prêmios e apresenta intervalos distintos nas ações dos jogadores. Já o benefício da espera pode ser visto na figura (4.41). Nota-se que a oportunidade *Head* tem benefício maior em qualquer preço, em especial após o gatilho da oportunidade *DogFish*, chegando a zero em seu gatilho simultâneo $P^s(H)$.

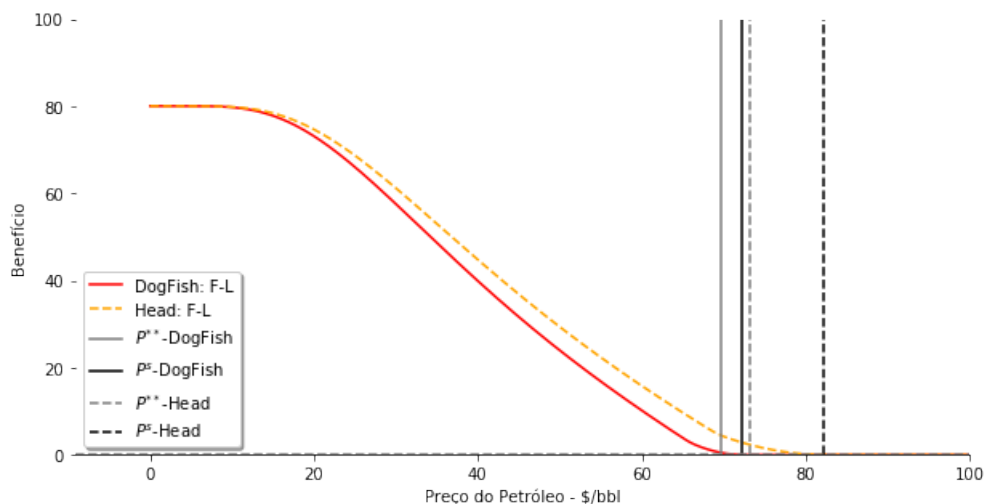


Figura 4.41: Jogo Assimétrico: Benefício da Espera

Continuando a análise na forma normal, é interessante o caso em \$73 dólares o barril, em que possui dois equilíbrios de Nash puros, podendo haver um equilíbrio de Nash misto e portanto, uma guerra de atrito. Contudo, para

		J2- Head	
		Investe	Espera
J1 - <i>DogFish</i>	Investe	<u>1316.07</u> ; 1154.16	<u>1316.07</u> ; <u>1156.58</u>
	Espera	<u>1316.07</u> ; <u>1154.16</u>	1312.78 ; <u>1154.16</u>

Tabela 4.18: Forma normal: Jogo Assimétrico - $P=\$73$, $\tau = 3$

o Jogador 2, a ação esperar é fracamente dominante em relação a ação investir, ou seja, a estratégia $\{esperar; investir\}$ não é equilíbrio crível. Ademais, ação investir para o jogador 1 domina em relação a ação de esperar. Isso quer dizer que só há um equilíbrio de Nash, sendo o jogador 1 investir em *DogFish* e o jogador 2 aguardar a informação e perfurar no seu momento ótimo.

A dominância da ação esperar para o jogador 2 acontece, pois não há custo na espera para esse jogador dado que o preço corrente está abaixo do gatilho exploratório de \$ 73.125 o barril (tabela 4.6). Contudo, o preço corrente está num valor muito próximo, sendo $VM E_2(P, t) \sim E_2(P, t)$, levando os *payoffs* serem iguais $L_2 = W_2$ independente da ação do jogador 1.

A dominância da ação investir para o jogador 1 acontece, pois está acima do seu gatilho exploratório, ou seja, há custo de espera. Dado ao custo, o *payoff* W_1 fica abaixo de qualquer outro *payoff*. Contudo, como está acima do gatilho simultâneo ($P^s(D)$), leva a opção com informações valer tanto quando o exercício imediato $VM E_1(P, t) \sim E_1(P, t)|2$, ou seja, $S_1 = L_1 = F_1$. Assim o jogador 1 escolhe a ação investir independente da ação do jogador 2.

		J2- Head	
		Investe	Espera
J1 - <i>DogFish</i>	Investe	<u>1557.41</u> ; 1376.04	<u>1557.41</u> ; <u>1376.23</u>
	Espera	<u>1557.41</u> ; <u>1376.04</u>	1553.52 ; 1372.60

Tabela 4.19: Forma normal: Jogo Assimétrico - $P=\$80$, $\tau = 3$

Na tabela (4.19), com esse valor de \$80 o barril do petróleo, a informação acrescenta pouco ao jogador 2 (\$ 190 mil = 1376.23-1376.04) e nada ao jogador 1. Isso acontece pois estamos próximo do gatilho de jogo simultâneo para o jogador 2 e acima do gatilho simultâneo do jogador 1. Similar ao jogo em preço de 73 dólares o barril (tabela 4.18), a estratégia $\{espera, investe\}$ não é equilíbrio, pois para o jogador 1, a ação investe domina de forma fraca a ação espera. Contudo, a ação espera não é dominante para o jogador 2. Isso ocorre pois 80 é acima do gatilho exploratório e gera um custo para esperar ao investidor 2.

No jogo com preço de 85 dólares o barril (tabela 4.20) indica três equilíbrios, mas somente a estratégia $\{investe, investe\}$ é equilíbrio de Nash,

		J2- <i>Head</i>	
		Investe	Espera
J1 - <i>DogFish</i>	Investe	<u>1729.80 ; 1534.52</u>	<u>1729.80 ; 1534.52</u>
	Espera	<u>1729.80 ; 1534.52</u>	1725.48 ; 1530.69

Tabela 4.20: Forma normal: Jogo Assimétrico - $P=\$85$, $\tau = 3$

pois para os jogadores 1 e 2 a ação investe domina a ação espera.

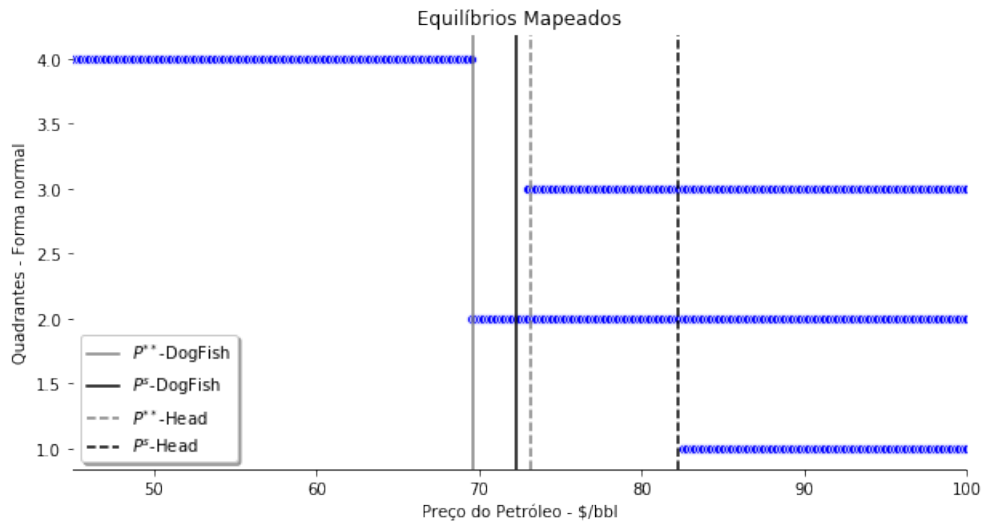


Figura 4.42: Equilíbrios Mapeados - Jogo Assimétrico

Como no jogo simétrico (figura 4.35), os equilíbrios podem ser mapeados preço a preço (figura 4.42). Com o mesmo critério da tabela (4.14), com preços baixos até $P^{**}(D)$, o equilíbrio é a estratégia $\{espera, espera\}$. Como discutido, após esse preço, estratégia dominante é $\{investe, espera\}$ até o gatilho simultâneo do jogador 2 $P^s(H)$. Em preços maiores, o equilíbrio se dá em estratégia $\{investe, investe\}$. Diferente do jogo simétrico, não há equilíbrio em estratégia mista, portanto, nesse caso não há guerra de atrito por informações.

Como se trata de um jogo de parada ótima, o único EPM é (t_L, t_F) , sem disputa por informações.

Nesta próxima etapa, explora a possibilidade da operadora B reavaliar a oportunidade *Head*. Com o aumento da esperança do volume recuperável, também se eleva o investimento na produção, dado a relação da equação (4-5).

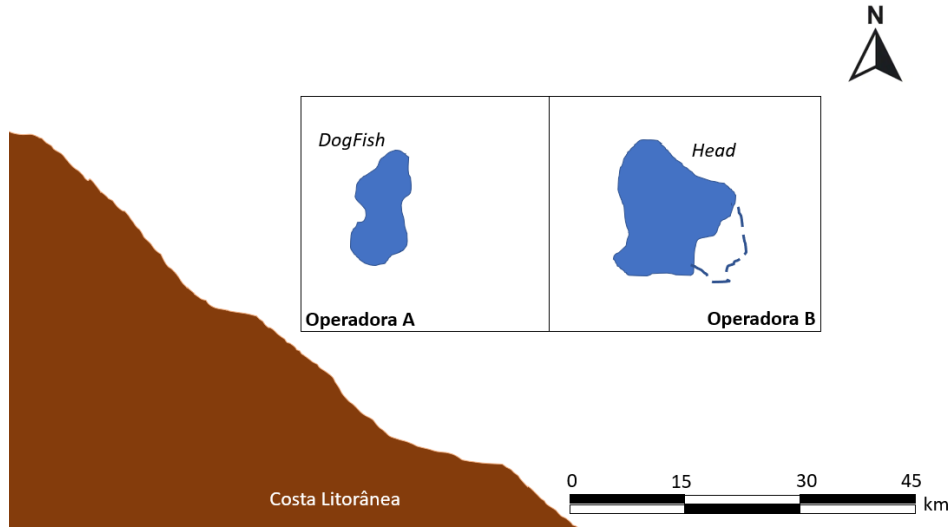
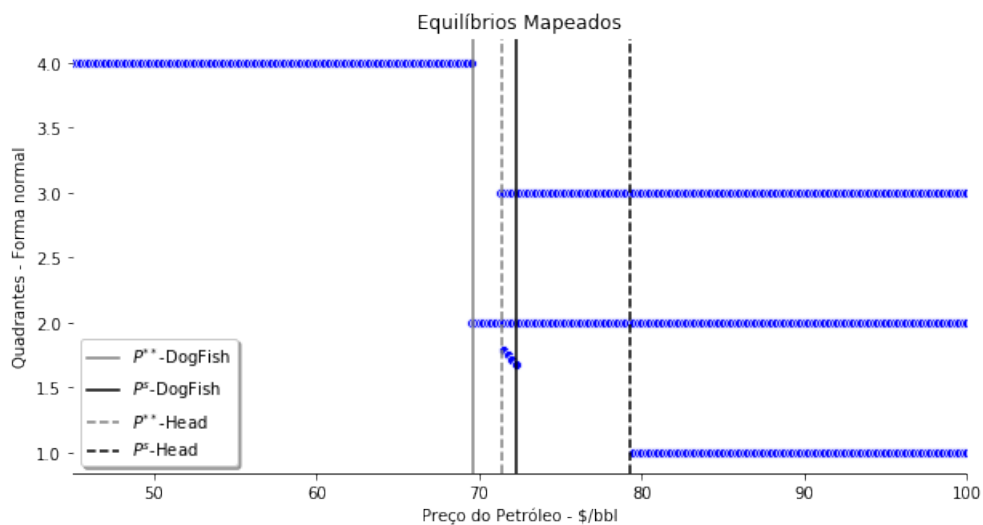


Figura 4.43: Modelo - 2 Blocos - DogFish e Head Expandido

Caso a esperança do volume recuperável da oportunidade *Head* eleve em torno de 15%, com valor médio de $B=1100$ milhões de barris. A figura (4.44) mostra os equilíbrios mapeados. Comparando com a figura (4.42), o gatilho exploratório da oportunidade *Head* alterou ($P^{**}(H)$), agora com preço entre o gatilho de explorar e o gatilho simultâneo da oportunidade *DogFish* ($[P^{**}(D), P^s(D)]$). Note que por essa mudança, nessa janela de preços ($[P^{**}(H), P^s(D)]$), os jogadores tem estratégia mista entre as ações de investir e esperar, podendo ocorrer a guerra de atrito. Com preços maiores que $P^s(D)$, a estratégia dominante é $\{investe, espera\}$, sendo que depois do gatilho simultâneo da oportunidade *Head*, o equilíbrio de Nash é $\{investe, investe\}$.

Figura 4.44: Equil. Mapeados - J. Assimétrico - B_{Head} 15% maior

Porém, essa guerra de atrito não é factível. Note que vindo de um preço baixo e ultrapassando o gatilho exploratório do jogador 1 ($P^{**}(D)$), a melhor escolha desse jogador é investir e o jogador 2 esperar por informações (quadrante 2 da figura 4.44). Portanto, o EPM continua o mesmo do exemplo anterior (t_L, t_F), sem disputa por informações.

Caso a reserva estimada da oportunidade *Head* seja 37% do valor estimado *a priori* ($B_{Head} = 1310$ milhões de barris), há uma sobreposição dos gatilhos exploratórios das duas oportunidades (figura 4.45). Com a mudança de reserva, também altera o preço do gatilho simultâneo $P^s(H)$, contudo ainda é mais elevado que o gatilho simultâneo do prospecto *DogFish*. O volume recuperável da oportunidade *Head* em que o gatilho exploratório é igual ao gatilho exploratório de *DogFish* é a que gera a mesma razão valor investimento da oportunidade *DogFish* ($\frac{V^D}{I_d^D} = \frac{V^H(B^*)}{I_d^H(B^*)}$).

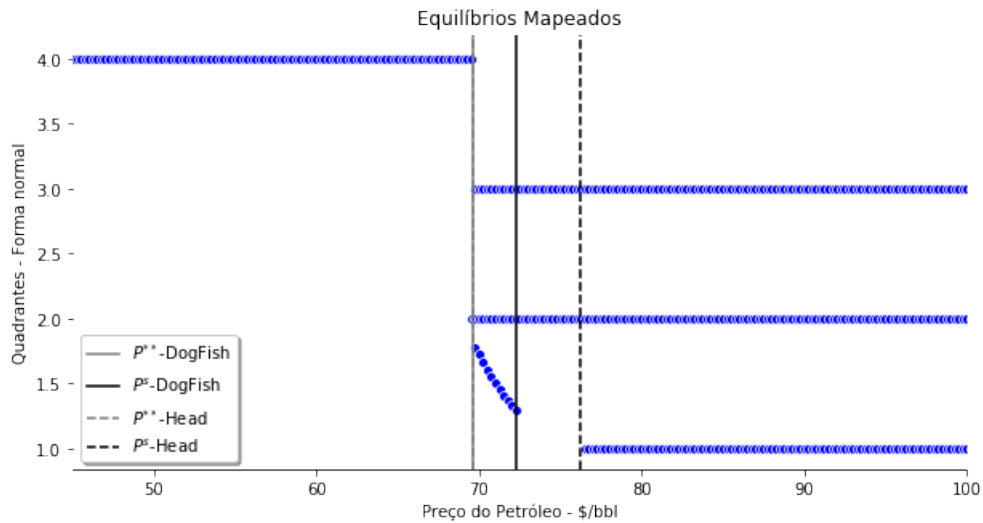


Figura 4.45: Equil. Mapeados - J. Assimétrico - B_{Head} 37% maior

Note que esse cenário coloca o ativo *Head* com valoração acima do ativo *DogFish* (figuras 4.46 e 4.40).

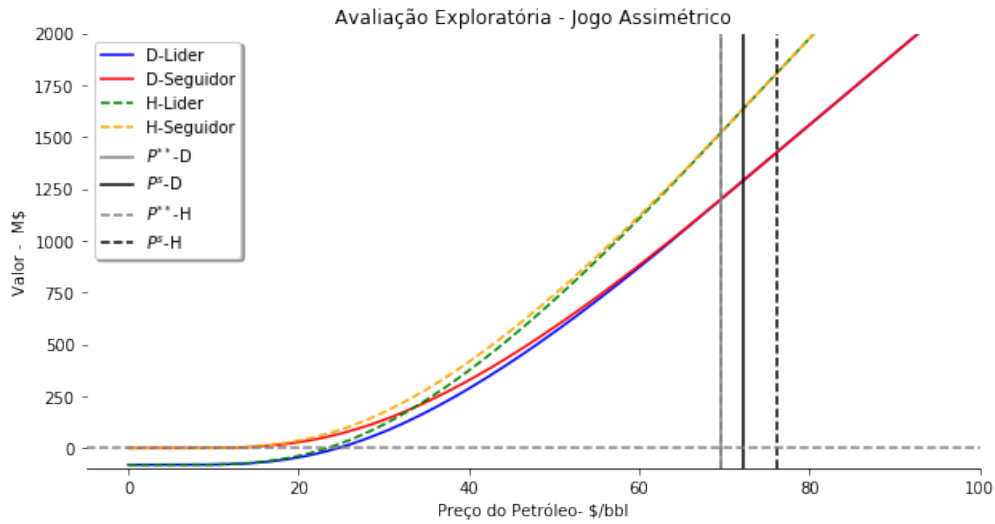


Figura 4.46: Preço x Valor - DogFish e Head - B_{Head} 37% maior

Inclusive, essa mudança altera o benefício de espera do *Head*, pois fica mais atraente para perfurar a preços mais baixos. A figura (4.47) mostra uma aproximação dos benefícios comparado ao caso base (figura 4.41), ainda com benefícios maiores quanto maior o preço.

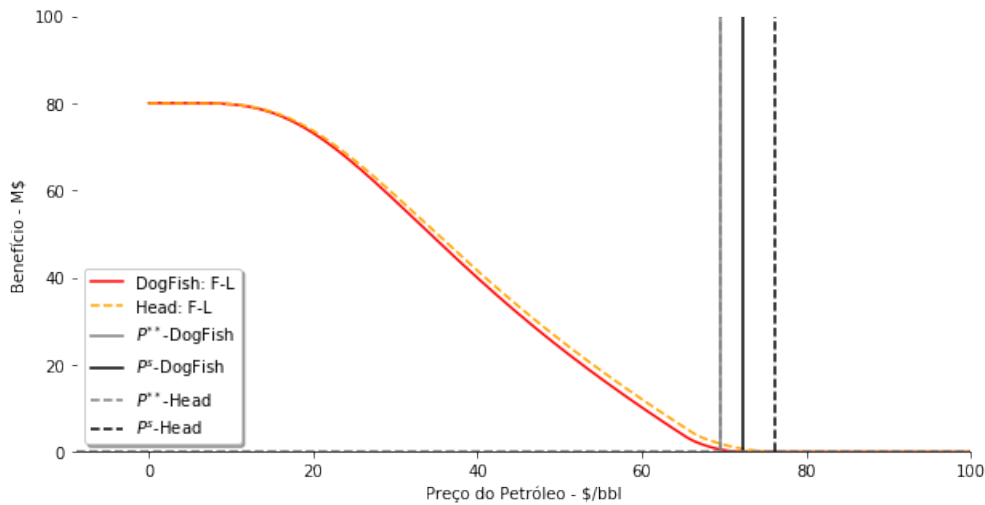


Figura 4.47: Benefício da Espera -D. e H. - B_{Head} 37% maior

No jogo da tabela (4.21) com preços a \$ 70 dólares o barril, existe três equilíbrio de Nash, dois degenerados $=\{investe, espera\}$, $\{espera, investe\}$ e um de estratégia mista, com probabilidades para *DogFish* de investir com probabilidade de 69.89% e *Head* de investir com probabilidade de 88.08%. A utilidade para o jogador 1 é \$ 1212.64 milhões e para o jogador 2 de \$ 1537.10 milhões. A utilidade não é simétrica entre eles, podendo provocar um distúrbio

e levar para ações degeneradas. A guerra de atrito pode existir, mas o equilíbrio misto em jogo assimétrico não é estável em termos de jogos evolucionários.

		J2- Head	
		Investe	Espera
J1 - DogFish	Investe	1212.64 ; 1537.10	<u>1212.64</u> ; <u>1538.75</u>
	Espera	<u>1213.05</u> ; <u>1537.10</u>	1209.61 ; 1533.27

Tabela 4.21: F. normal: J. Assim. - $P=\$70$, $\tau = 3$ e $B_{Head}=37\%$ maior

A instabilidade pode ser notada no plano de fase da figura (4.48). Se partir de uma fração/probabilidade de $q = 1$ e $p^* = 0.6989$, em cima da linha horizontal, os vetores não direcionam para o ponto de equilíbrio do jogo assimétrico de \$ 70 o barril da tabela (4.21). Isso faz crer que o equilíbrio $(p^*, q^*)=(0.6989, 0.8808)$ não é estável em termos de jogos evolucionários por não ser um máximo global.

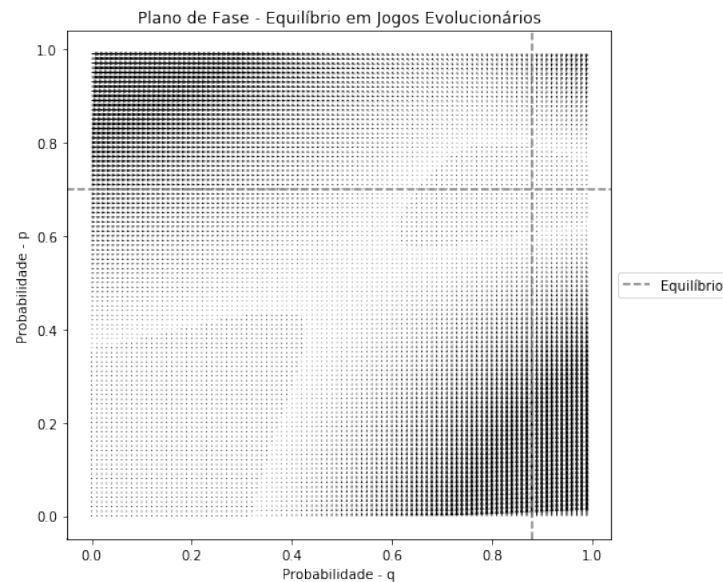


Figura 4.48: J. Evol. - P. de Fase - Assimétrico -\$ 70/bbl

Contudo, na prática, pode acontecer dos jogadores ficarem "presos" nesse impasse. Com essa possibilidade, pode se configurar uma guerra por informação e os operadores poderiam estar melhor em uma ambiente de negociação. Como apresentado na seção (4.2.1), na há grande diferença entre um portfólio com perfuração antes do prospecto *DogFish*, somente próximo do vencimento (figura 4.19), caso preço do petróleo esteja entre 34 e 37 dólares o barril.

Em ativos simétricos, como no caso da seção (4.2.2.1), intuitivamente a divisão é de 50% da barganha para cada jogador. Na solução de Nash para barganha cooperativa, o peso da divisão do prêmio é dado pela diferença no

ponto de discordância de cada jogador, normalizado pelo dobro do prêmio a ser repartido, adicionado 50% a essa razão (equações 3-50 e 3-51). No caso de simetria, como cada jogador tem o mesmo ponto de discordância, pois os ativos são iguais, restando 50% do prêmio para cada operador.

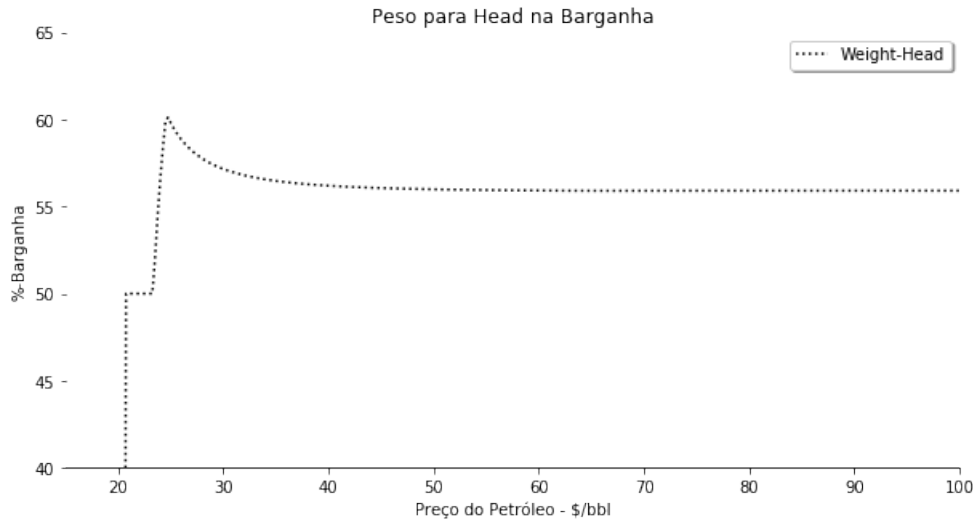


Figura 4.49: Peso na Barganha: DogFish x Head - 35% maior

No caso de jogo assimétrico, os pontos de discordância são diferentes entre si. Esses pontos são as decisões quando os investidores decidem perfurar independente do outro agente, ou seja, é igual ao $VME_i(P, t)$, sendo, portanto, variante com o tempo e com o preço do petróleo. A figura (4.49) apresenta o peso da barganha do portfólio no tempo $t = 0$ e a figura (4.50) os *payoffs* com as utilidades da barganha repartida entre os operadores. Abaixo de 25 dólares o barril, o peso para os dois jogadores é nulo, já que não há unidade de valor para compartilhar. Acima desse preço, para o detentor do ativo *Head*, define um pequeno patamar na quantidade de 50% do total, e com preços levemente acima eleva para 60.11%, estabilizando em preços maiores na porcentagem de 55.90% do total da unitização.

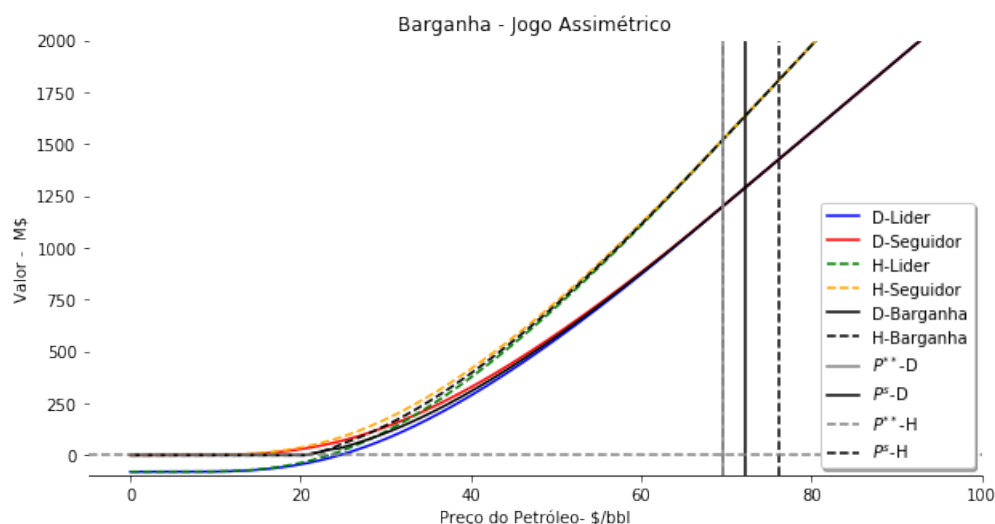


Figura 4.50: Barganha Cooperativa: DogFish x Head - 35% maior

Em detalhe (figura 4.51), no intervalo dos gatilhos, observa que o valor da barganha é intermediário entre as posições de líder e seguidor.

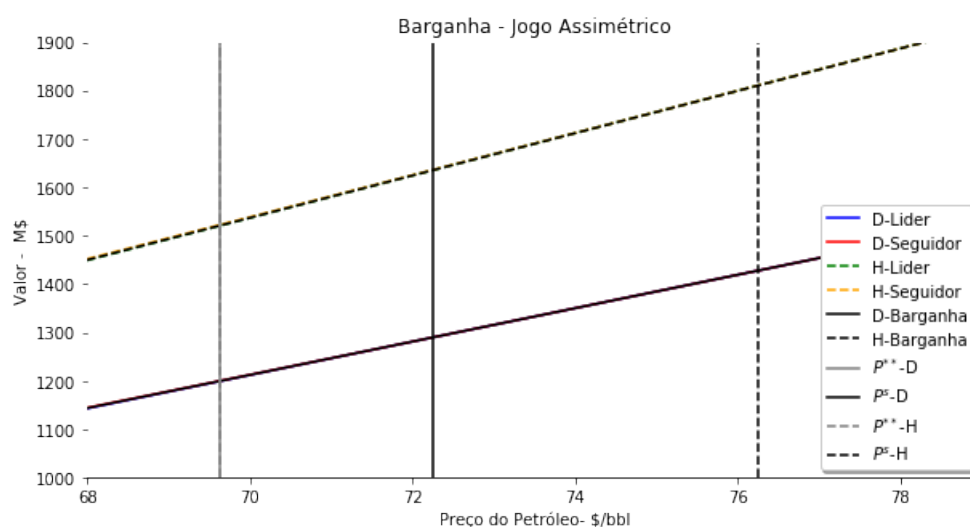


Figura 4.51: Detalhe - Barganha: DogFish x Head - 35% maior

Mas sabe-se que em ambiente de negociação, há readequação da estrutura de desenvolvimento, trocas de informações, sinergia entre projetos e conhecimentos privados que se tornam públicos entre os participantes. A revelação do conhecimento é representada pela elevação do valor de correlação entre ativos, subindo, por exemplo, para $\rho = 95\%$. Com esse parâmetro e com o barril a \$ 70 no tempo presente, a barganha eleva de \$ 1537.31 milhões para \$ 1538.94 milhões para o jogador que detém *Head*, sendo mais alto que sua posição de seguidor (\$ 1538.75 milhões) e evidentemente da posição de líder (\$ 1537.10

milhões). No caso do detentor do ativo *DogFish*, na condição sem interação do negócio, a barganha vale \$ 1212.84 milhões, sendo com interação indo para \$ 1214.45 milhões, maior que sua posição de seguidor (\$ 1213.05 milhões) e líder (\$ 1212.64 milhões) (vide jogo 4.21). Com esses parâmetros, a barganha é vantajosa para o detentor da oportunidade *Head* a partir de \$ 69.25 o barril e para o detentor da oportunidade *DogFish*, a partir de \$ 65 dólares o barril. Como o intervalo de possível guerra de atrito por informações é entre \$ 69.62 e \$ 72.25 o barril, a mudança de jogo para barganha cooperativa é factível.

4.2.3

Três prospectos: Carteira com 2 e prospecto vizinho

Quanto maior o portfólio da empresa, mais elevado é o valor de gatilho agregado (tabela 4.7). Assim, a chance da empresa com maior portfólio entrar num quadro de guerra de atrito é mais improvável. Ademais, como discutido, devido a assimetria inerente entre as carteiras das empresas, o equilíbrio estável por jogos evolucionários tende a ser degenerado nas ações, indicando que haverá perfuração por uma empresa e informação gratuita para a outra. Sabe-se também, que as empresas podem falhar nessa percepção de equilíbrio de longo prazo e ficarem "presas" na guerra de atrito. Também, para ocorrer guerra por informações, as empresas precisam estar indiferentes em relação as ações, com probabilidades de esperar e perfurar, ou seja, deve haver equilíbrio em estratégias mistas para configurar situação de impasse e não cooperação. Em TJ+OR, ocorre somente quando os gatilhos dos dois portfólios são próximos um ao outro.

A figura (4.52) apresenta a situação final. A empresa *A* detém o portfólio composto por *DogFish* e *Feather* e a empresa *B* possui o ativo *Head*.

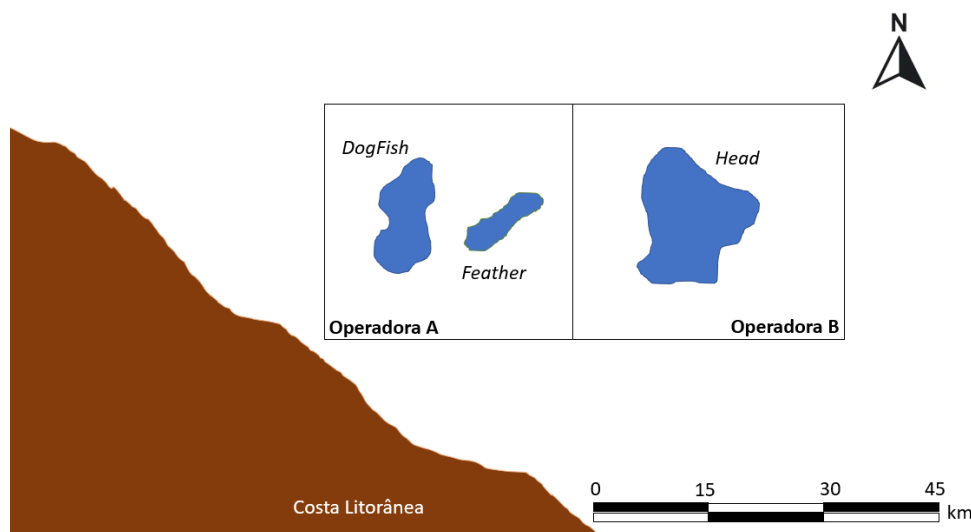


Figura 4.52: Modelo - 2 Blocos - A - DogFish e Feather - B Head

O jogo em portfólio é um pouco distinto do jogo com um ativo. A forma normal da tabela (4.22) apresenta o modelo, sendo somente o jogador 1 com portfólio:

		Jogador 2	
		Investe	Espera
Jogador 1	Investe	$VME_{\pi_1} ; VME_2$	$VME_{\pi_1} ; E_{2 1}$
	Espera	$\Pi_{1 2} ; VME_2$	$\Pi_1 - c_1 ; E_2 - c_2$

Tabela 4.22: Forma normal: Payoffs no caso de Portfólio

A empresa que possui portfólio exploratório pode avaliar todos os ativos separadamente, pelo valor médio esperado aplicado na opção de investir em desenvolvimento ($VME(P, t)$), ou o valor da opção da espera $E(P, t)$. Contudo, sabe-se que há efeitos complementares na carteira, sendo a soma dos ativos *stand-alone* menor que os ativos em portfólio exploratório. Para a espera em portfólio $\Pi(P, t)$, foi utilizado a equação diferencial (3-55). Para o valor médio esperado em portfólio, $VME_{\pi}(P, t)$, foi utilizado a equação diferencial (3-59). O valor médio esperado do portfólio assume o risco de perfuração do primeiro poço, considerando a escolha ótima para a carteira como um todo. Também, a posição da empresa seguidora com portfólio ($\Pi_{i|j}(P, t)$) considera outra equação diferencial (3-58).

Além das questões citadas, difere do jogo com dois ativos em relação ao custo da espera para o agente que possui uma carteira. Nesse caso, o custo é o prêmio perdido do ativo não perfurado, não do portfólio como um todo. Assim, após o gatilho do portfólio, o agente tem preferência em perfurar o prospecto *DogFish* (figura 4.21), o custo tem relação com o $VME(P, t)$ dessa oportunidade.

As curvas dos prêmios da espera por informações e valor médio esperado no início do contrato são apresentadas na figura (4.53). É possível notar que o prêmio do portfólio é mais elevado que o prêmio do ativo *Head* da empresa *B* em qualquer preço, tanto o VME quanto a opção de espera. Porém, o gatilho de investir em exploração é simultâneo, $P^{**}(D + F) \sim P^{**}(H)$ (para o *Head*, tabela 4.6 e a carteira $D + F$, figura 4.21). Contudo, para a empresa detentora do portfólio, o gatilho em que o prêmio de espera por informação é igual ao prêmio do valor monetário esperado é mais baixo ($P^s(D + F) < P^s(H)$). Assim, nesse caso, a empresa a sair de uma possível guerra de atrito e investir se o preço do petróleo estiver maior $P^s(D + F)$ é a detentora do portfólio.

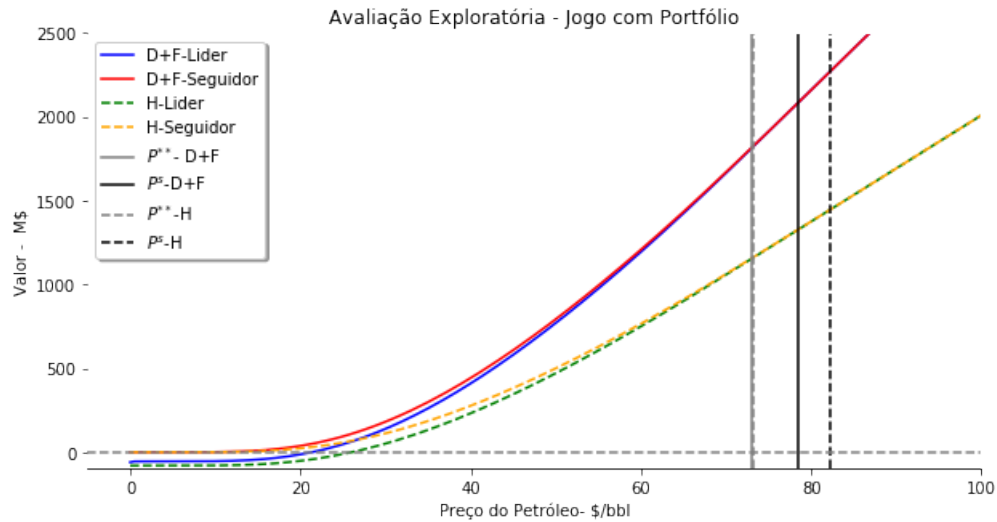


Figura 4.53: Jogo Portfólio: Preço x Valor - $\Pi(D + F)$ e $Head$

Curiosamente, logo antes do gatilho de explorar, o benefício da espera do portfólio *DogFish + Feather* é maior que o da oportunidade *Head* (figura 4.54). Contudo, o benefício de espera antes do gatilho de explorar é devido a espera do próprio portfólio, não o benefício da informação da perfuração pelo vizinho. Após o gatilho, que é o início da possível guerra de atrito, o benefício se inverte, sendo maior para a oportunidade *Head*. Por fim, o benefício do portfólio se torna nulo em $P^s(D + F)$. Essa mudança na curva de benefício se relaciona com a não estrita convexidade no valor da opção de portfólio, ou, pela mesma razão, a não estrita concavidade da curva de gatilho (figura 4.21). Isso pode gerar respostas ótimas que não são tão intuitivas.

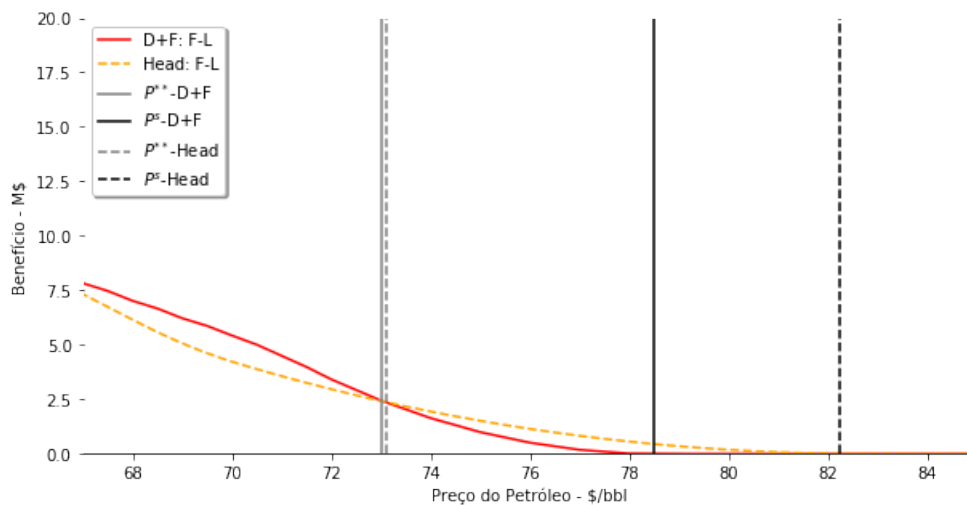


Figura 4.54: Benefício da Espera: $\Pi(D + F)$ e $Head$

Similar ao caso assimétrico, existem intervalos importantes para analisar o jogo no início do contrato ($\tau = 3$). Quando os preços estão abaixo dos gatilhos exploratórios, entre o gatilho exploratório e o gatilho simultâneo do portfólio, entre os gatilhos simultâneos e acima do gatilho simultâneo da oportunidade *Head*:

- $[0; \sim 73.0[- [0; P^{**}(D + F) \text{ e } P^{**}(H)[$
- $[\sim 73.0; 78.5[- [P^{**}(D + F) \text{ e } P^{**}(H); P^s(D + F)[$
- $[78.5; 82.25[- [P^s(D + F); P^s(H)[$
- $[82.25; \infty[- [P^s(H); \infty[$

Como esperado, quando o preço do petróleo está abaixo da curva de gatilho exploratório do portfólio e do ativo *Head*, o equilíbrio ocorre na estratégia pura $\{espera, espera\}$.

		J2- <i>Head</i>	
		Investe	Espera
J1 - $\Pi(D + F)$	Investe	770.83 ; 471.13	770.83 ; <u>500.48</u>
	Espera	<u>793.57</u> ; 471.13	<u>786.91</u> ; <u>497.72</u>

Tabela 4.23: Forma normal: $\Pi(D + F)$ e *Head* - $P=\$50$, $\tau = 3$

Com o petróleo a \$ 75 dólares o barril, há três equilíbrios de Nash, dois puros $\{investe, espera\}$, $\{espera, investe\}$ e um misto. O equilíbrio misto a esse preço se dá com probabilidade para o detentor do portfólio perfurar em 66.66% e esperar 33.33%, já proprietário da oportunidade *Head* com 58.15% para perfuração. Essas probabilidades colocam os *payoffs* esperados em estratégia mista em (1912.80; 1217.55). Como dito na explicação dos jogos assimétricos, com *payoffs* diferentes em estratégias mistas, geram incentivos a desvios, conduzindo a longo prazo para *payoffs* melhores.

		J2- <i>Head</i>	
		Investe	Espera
J1 - $\Pi(D + F)$	Investe	<u>1912.80</u> ; 1217.55	<u>1912.80</u> ; <u>1219.07</u>
	Espera	<u>1913.80</u> ; <u>1217.55</u>	1911.41 ; 1214.51

Tabela 4.24: Forma normal: $\Pi(D + F)$ e *Head* - $P=\$75$, $\tau = 3$

Situação curiosa relatada na seção (4.2.2.1), também acontece quando petróleo está em 80 dólares o barril (tabela 4.25). A ação investe para o detentor do portfólio domina a ação espera. Com isso, a estratégia $\{espera, investe\}$ não é crível. Nesse preço, o detentor do portfólio vai perfurar o ativo *DogFish* e o detentor da oportunidade *Head* vai obter a informação gratuita de sucesso ou fracasso do vizinho.

		J2- <i>Head</i>	
		Investe	Espera
J1 - $\Pi(D + F)$	Investe	<u>2160.61</u> ; 1376.04	<u>2160.61</u> ; <u>1376.23</u>
	Espera	<u>2160.61</u> ; <u>1376.04</u>	2159.22 ; 1372.60

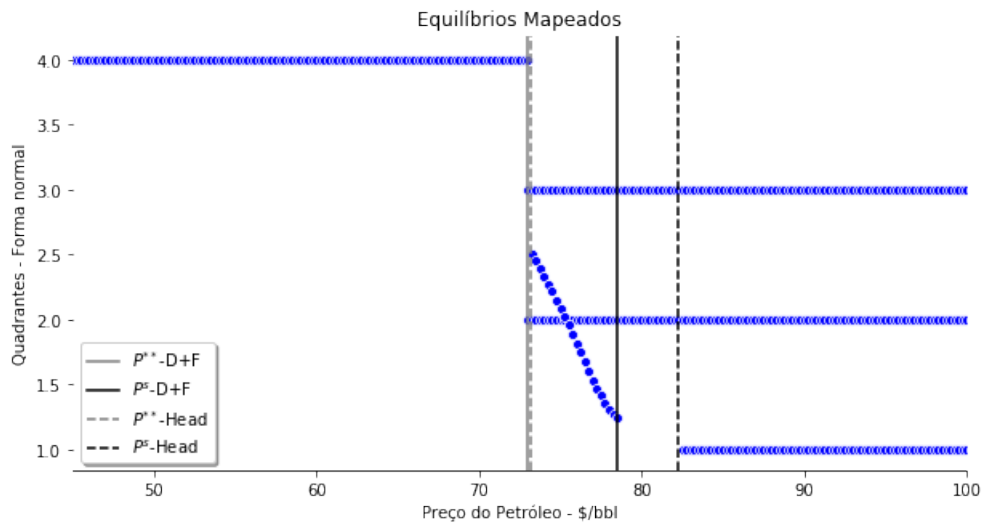
Tabela 4.25: Forma normal: $\Pi(D + F)$ e *Head* - $P=\$80$, $\tau = 3$

A tabela (4.26) apresenta um jogo acima do gatilho simultâneo da oportunidade *Head* a \$ 85 o barril. O jogo apresenta três equilíbrios de Nash: $\{investe, investe\}$, $\{investe, espera\}$ e $\{espera, investe\}$. Situação similar já foi discutida na seções (4.2.2.1 e 4.2.2.2), em que o único equilíbrio crível é $\{investe, investe\}$, já que para o jogador 1 e 2, a ação *investe* domina em relação a ação *espera*.

		J2- <i>Head</i>	
		Investe	Espera
J1 - $\Pi(D + F)$	Investe	<u>2408.42</u> ; <u>1534.52</u>	<u>2408.42</u> ; <u>1534.52</u>
	Espera	<u>2408.42</u> ; <u>1534.52</u>	2407.02 ; 1530.69

Tabela 4.26: Forma normal: $\Pi(D + F)$ e *Head* - $P=\$85$, $\tau = 3$

A consolidação pode ser apresentada em um gráfico de preço *versus* estratégia, sendo as simbologias do par de estratégias conforme a tabela (4.14), em que os números não inteiros representam estratégias mistas (figura 4.55).

Figura 4.55: Equilíbrios Mapeados - Jogo $\Pi(D + F)$ e *Head*

No intervalo de preços que há estratégias mistas, existe a probabilidade do jogador aguardar por informações e pode se configurar um guerra de atrito. O estudo do plano com preços em \$ 75 dólares o barril apresenta os máximos das utilidades resistentes a distúrbios (figura 4.56).

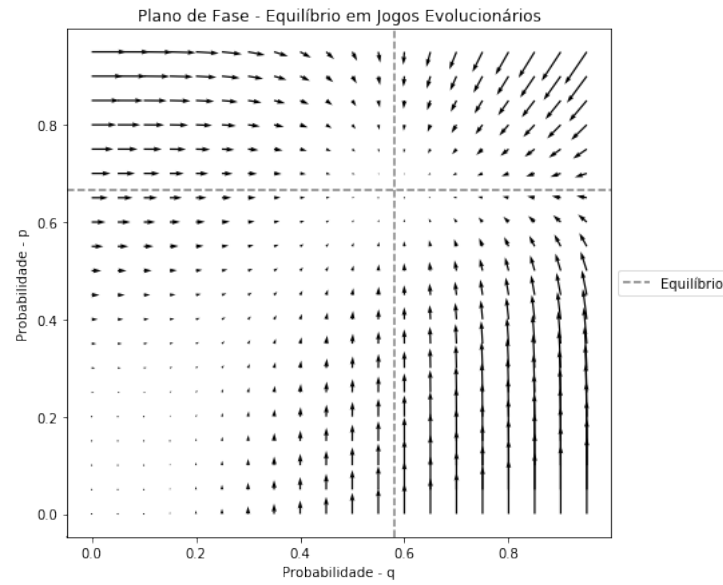


Figura 4.56: J. Evol. - P. de Fase - Portfólio -\$ 75/bbl

É possível notar que os vetores no plano de fase possuem direção e magnitude para o equilíbrio $(p^*, q^*) = (0.6, 0.5815)$. Porém, observando em uma malha mais densa (figura 4.57), nota-se os detalhes do jogo.

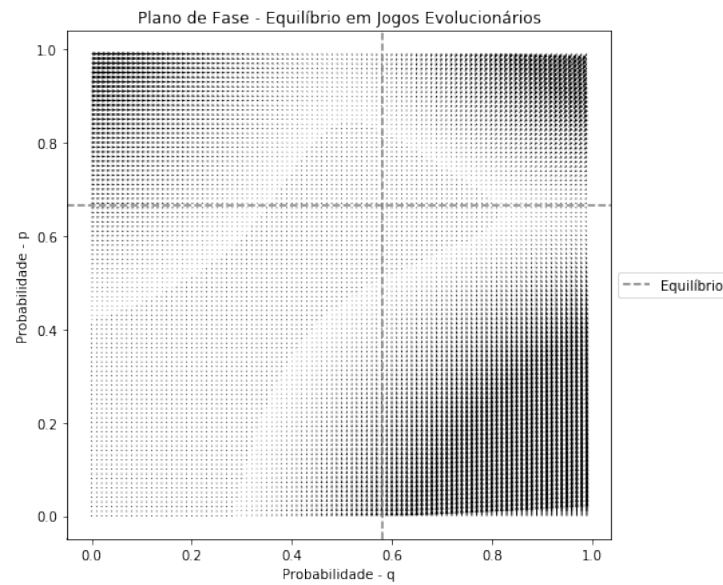


Figura 4.57: J. Evol. - P. de Fase Denso - Portfólio -\$ 75/bbl

Na hipótese de uma população inicial partindo de $(p, q) = (1, 0)$, o caminho evolutivo seria para o equilíbrio (p^*, q^*) . Também, partindo da relação inicial $(p, q) = (0, 1)$, os vetores indicam equilíbrio estável em (p^*, q^*) . Porém, se partir de uma população, por exemplo, $(p, q) = (0.2, 0.2)$, o fluxo não seguirá necessa-

riamente para o equilíbrio (p^*, q^*) . Assim, o equilíbrio (p^*, q^*) não é estável em termos de jogos evolucionários, pois não é um máximo global.

Contudo, as empresas podem ficar "presas" nesse impasse caso o preço não saia do intervalo de \$ 73 até \$78.50 o barril. Então, é proposto uma mudança para o jogo da barganha cooperativa, em que funciona como uma unitização dos ativos. Essa consolidação dos prospectos é com análise ótima de uma sequência informacional dos ativos exploratórios, também considerando o valor da espera e a repartição proporcional dos benefícios para cada empresa.

A formulação da carteira é obtida pelo cálculo do $VME_{\pi_{D+F+H}}$ com a equação (3-59). A carteira como está, com os ativos *DogFish*, *Feather* e *Head* começa a ter valor a partir de 19.25 dólares o barril. Nota-se, com a unitização, a sequência exploratória ótima se altera. Antes, perfuraria primeiro o prospecto *DogFish*. Com a barganha cooperativa, é preferível a perfuração de *Feather*, como discutido no final da seção (4.2.1). Esse ativo tem uma importância na carteira conjunta, pois é de maior valor informacional para *DogFish* e *Head*. No intervalo de preços crítico da possível guerra de atrito, a empresa *B*, na qual detinha o ativo *Head*, tem 38.8% de participação do todo (figura 4.58).

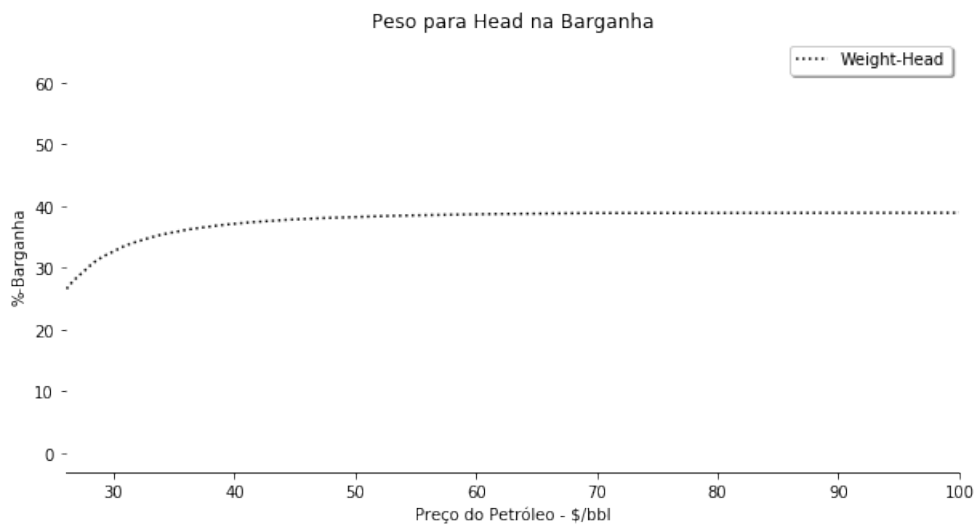


Figura 4.58: Peso na Barganha: DogFish -Feather- Head

A figura (4.59) apresenta no início do contrato ($\tau = 3$ anos), os prêmios em cada ação para todos os preços. Acrescenta nesse gráfico o prêmio dividido da barganha cooperativa.

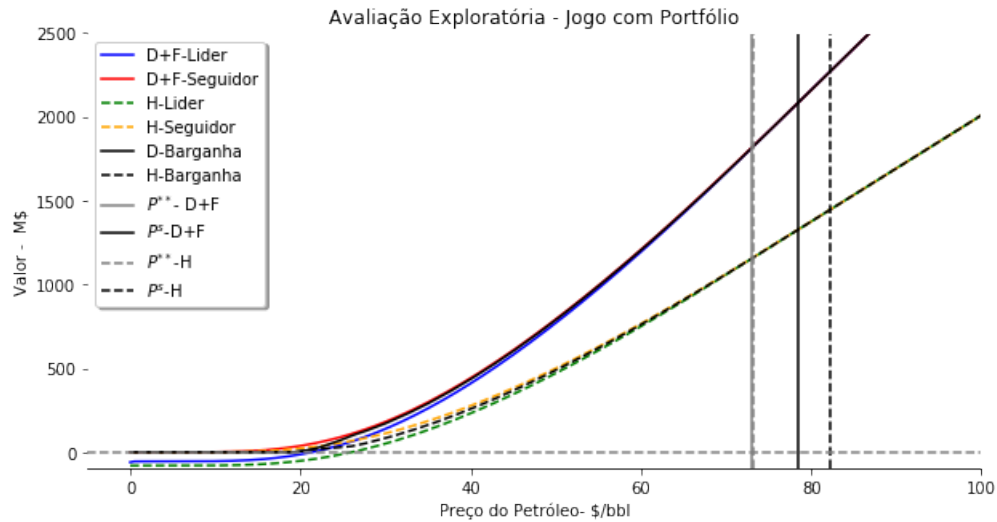


Figura 4.59: Barganha Coop.: $\Pi(D + F)$, *Head* e $\Pi(D + F + H)$

No intervalo de guerra informacional (figura 4.60), o valor da barganha é intermediário aos *payoffs* das ações dos jogadores. Assim, a mudança do jogo não é ótima para nenhuma empresa.

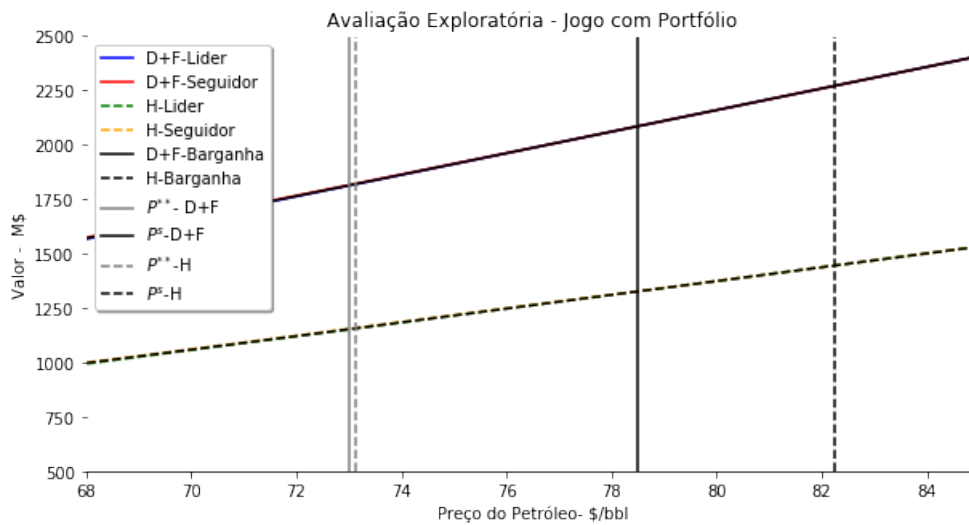


Figura 4.60: Detalhe - B. Coop.: $\Pi(D + F)$, *Head* e $\Pi(D + F + H)$

Porém, quando há espaço de negociação, as empresas revelam informações privadas, sendo um conjunto de informação tanto quanto ou maior que as informações públicas. Nos projetos, esse efeito normalmente se materializa em sinergias, reduções de custos e importação de *expertises* de outros projetos. Visto que nos problemas trabalhados a medida de aprendizado é representada pela correlação (ρ) (tabela 4.4), propõe-se que a informação privada aumenta

em de 10% a medida de aprendizado ρ em cada oportunidade, como na tabela (4.27).

ρ	DogFish	Feather	Head
DogFish	1	—	—
Feather	0.7	1	—
Head	0.6	0.7	1

Tabela 4.27: Correlação dos prospectos - Interação pelo Negócio

Com a interação entre as empresas, a barganha cooperativa é maior que qualquer *payoff* de qualquer jogador no intervalo do impasse (figura 4.61). Com esse resultado é possível sair de uma guerra de atrito para um jogo de barganha cooperativa. Também se nota que pequenas variações da correlação alteram a utilidade da carteira, sendo, por essa razão, uma medida importante na avaliação de portfólio.

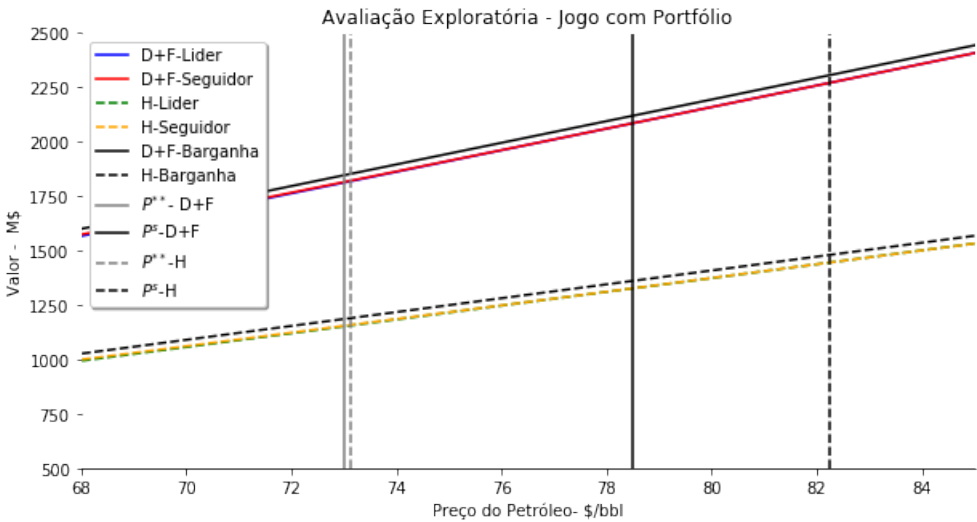


Figura 4.61: Detalhe - B. Coop.: maior ρ - $\Pi(D + F)$, *Head* e $\Pi(D + F + H)$

5

Conclusão

O Modelo Geométrico Browniano tem propriedades ideais para preços de ativo. É um processo de difusão mais simples, incluindo a equação diferencial parcial da opção real, com uso da solução por diferenças finitas explícitas em todos os casos deste trabalho. Contudo, a aplicação dos testes econométricos nas séries de preços possui pouca aderência estatística ao MGB. Dessa forma, é um excelente modelo como uma primeira etapa de pesquisa, para analisar e compreender a dinâmica dos ativos, com ou sem portfólio e com e sem interação com outros agentes e em passos futuros aplicar modelos de preços com maior significância estatística. Para esse avanço e refinamento dos resultados, deve ser considerado o *trade-off* entre simplificação e custo de máquina/implementação.

Todos os exemplos de prospectos tinham VME positivo, mas dado as variáveis de estado do momento inicial, não estavam prontos para investir. Sobre a análise de portfólio estático comparado com a soma dos ativos *stand-alone*, quanto mais ativos na carteira, maior é a combinação entre eles. Desse modo, se administra de forma mais eficiente o portfólio, levando a maior valor adicionado. O caso mais explícito é o portfólio *DogFish+Feather+Head*.

Quando considerado o portfólio exploratório sequencial com a espera, há mais valor que a soma *stand-alone* das opções de explorar, que consideram somente o valor da espera. Isso é devido aos efeitos combinados entre a espera e VOI. Comparado à análise estática, ordena melhor a carteira, como é o caso do portfólio exploratório *DogFish+Feather* e *DogFish+Head*. Considerando a maior carteira, pelo critério de ótimo, perfura o poço menos atraente primeiro, já que traz mais informações que os outros. Ademais, a depender dos preços, pode inverter a ordem de perfuração do prospecto mais atraente. Inclui nas vantagens desse tipo de análise a curva de gatilho unificada, útil como ferramenta para o decisor organizar e planejar o investimento do bloco exploratório.

É comum que as empresas tenham blocos com ativos exploratórios correlacionados com blocos vizinhos. Por vezes, se configura um conflito por informação gratuita de ocorrência de hidrocarboneto, em um jogo de TJ conhecido como Guerra de atrito. As empresas sofrem perdas, pois postergam o investimento acima do seu ótimo, pela possibilidade de ser um agente *free-*

rider. Dado esse conflito, há a possibilidade de nenhuma empresa investir, mesmo que os ativos estejam avaliados acima do ótimo por todas as métricas.

Neste trabalho estudou os casos do jogo simétrico, assimétrico e com portfólio.

A apresentação do jogo simétrico, mesmo considerado o exemplo menos realista, é importante para delimitar melhor a guerra por informação exploratória. Nele percebe-se que antes do gatilho exploratório não há guerra de atrito, pois as empresas não tem interesse econômico para perfurar. A partir do preço do gatilho, a tensão se inicia entre as duas empresas, pois como a situação vizinha é um espelho do seu ativo, o gatilho de perfuração ocorre ao mesmo preço nos dois blocos e, portanto, o interesse por informação gratuita começa no mesmo momento para os dois agentes. Pelo modelo estocástico dos preços, foi estimado por simulação de Monte-Carlo o início de impasse. Assim, como o início, o término desse conflito é indeterminado, pois a variável preço é estocástica. O término do conflito não depende somente do estado dos preços, mas também da correlação entre ativos, sendo mais improvável o término do conflito quanto maior a correlação. Contudo, acontece em um único preço, denominado de gatilho simultâneo P^s . Com preços tão maiores quanto esse, as empresas ignoram a presença do vizinho, pois a perfuração imediata é ótima para os agentes.

Nesse modelo simétrico é apresentado a mudança de jogo. No intervalo de preços que há conflito entre os jogadores, a mudança de jogo só ocorre caso exista um prêmio maior do que todos os *payoffs* de cada jogador. O jogo apresentado é a simples barganha cooperativa, ou seja, juntar os ativos e dividir os prêmios. Contudo, a simples unitização e divisão não fornece ágio nos projetos. Então, nessa situação de negociação, é proposto que a informação pública seja mais restrita que a informação privada. E de fato, em negociações, pode haver sinergias de projetos, redução de custos, compreensão profunda dos negócios combinados. Assim, uma melhora da correlação dos ativos é suficiente para sair da guerra de atrito e migrar para o jogo da barganha cooperativa.

Em modelos assimétricos, o tamanho do portfólio ou do ativo não é relevante na guerra de atrito, e sim a relação do prêmio de espera com o valor intrínseco do ativo, que no caso é o valor monetário esperado, comparado com esses mesmos parâmetros do vizinho. A outra face da mesma moeda é o gatilho exploratório, sendo o parâmetro mais prático a analisar que a porcentagem do prêmio de espera. Quando os gatilhos dos prospectos das empresas são díspares, a probabilidade de atrito é baixa. Isso quer dizer que a empresa que tem o preço de gatilho baixo não vai aguardar a empresa de gatilho alto perfurar, já que tem interesse econômico imediato no seu projeto. Dessa forma,

no gatilho baixo, a empresa detentora desse ativo perfura e passa a informação para outra empresa. Também, outra forma útil de analisar esse desequilíbrio é pelo benefício da espera no intervalo de interesse, sendo que para a empresa com maior benefício no gatilho exploratório será a seguidora, ou seja, o agente *free-rider*.

Em caso de prêmios assimétricos, mas com gatilhos iguais ou próximos, há equilíbrio perfeito em subjogos em estratégia mista no intervalo entre o gatilho de exploração e o preço mais baixo do gatilho simultâneo. Contudo, esse equilíbrio não é estável em jogos evolucionários. O plano de fase ajuda a elucidar essa questão, pois não há um máximo global e tendo, portanto, incentivo ao desvio pelos jogadores. Esse efeito também pode ser notado nas diferenças entre as utilidades esperadas no equilíbrio de estratégias mistas, provocando incentivos ao desvio para as probabilidades degeneradas. Contudo, como efeito prático dos negócios, pode acontecer dos jogadores ficarem "presos" nessa guerra de atrito e se confundindo no ótimo para seus projetos.

Nessa situação, a barganha cooperativa é a solução para esse possível impasse. Em prêmios distintos, a solução de Nash não é constante como em ativos simétricos e também é em função do preço e do momento de negociação. A porcentagem da divisão é em função do preço e do tempo, pois o ponto de discordância também é em função das mesmas variáveis, assim como os ativos a serem unitizados e repartidos. Em caso de dois ativos, a pequena mudança da correlação é suficiente para alterar o jogo e migrar para barganha cooperativa.

Em jogos com portfólio, os cálculos dos *payoffs* são diferentes, pois os ativos se correlacionam dentro do próprio bloco exploratório. Porém, o custo de espera considera somente o primeiro ativo a perfurar da sequência ótima, não o prêmio total do portfólio. Da mesma forma, a empresa vizinha considera como revelação da informação somente o primeiro prospecto do cronograma de sonda da concorrente. Como no caso assimétrico, quando os gatilhos exploratórios são similares, há possibilidade de guerra por informação exploratória até o primeiro gatilho simultâneo das empresas. A primeira perfuração pode acontecer com a de maior ou menor portfólio, dependendo do benefício de espera ou da combinação entre gatilhos exploratório e simultâneo.

Em caso de persistência do conflito, a barganha cooperativa é um bom jogo para substituir a guerra de atrito. Com o portfólio unitizado, a sequência de perfuração pode alterar, como foi o caso de mudança de preferência para a oportunidade *Feather*, o ativo de menor valor, mas o mais informativo para os outros prospectos. Ademais, nota-se que dado uma pequena melhoria nas correlações dos prospectos podem adicionar mais valor a unitização dos blocos. Esse efeito coloca a medida de aprendizado (correlação entre ativos)

com grande importância na avaliação de portfólios. O efeito ocorre, pois com mais ativos, eleva-se fatorialmente o número de sequências possíveis, havendo mais possibilidades para o ótimo exploratório e o gestor ordenar as preferências de perfuração.

Referências

- Adkins, R., e Paxson, D. (2013). The tourinho model: neglected nugget or a receding relic? *The European Journal of Finance*, 19(7-8), 604–624.
- Aiube, F. A. L. (2013). *Modelos quantitativos em finanças com enfoque em commodities*. Bookman Editora.
- Aiube, F. A. L., Baidya, T. K. N., e Tito, E. A. H. (2008). Analysis of commodity prices with the particle filter. *Energy Economics*, 30(2), 597–605.
- Aiube, F. A. L., e Samanez, C. P. (2014). On the comparison of schwartz and smith's two-and three-factor models on commodity prices. *Applied Economics*, 46(30), 3736–3749.
- Amic, E., e Geman, H. (2005). The oil market as a world market. *Commodities and Commodity Derivatives*, 201–224.
- Arora, A., e Gambardella, A. (1990). Complementarity and external linkages: the strategies of the large firms in biotechnology. *The journal of industrial economics*, 361–379.
- Baker, M. P., Mayfield, E. S., e Parsons, J. E. (1998). Alternative models of uncertain commodity prices for use with modern asset pricing methods. *The Energy Journal*, 19(1).
- Benard, J., Khalaf, L., Kichian, M., e McMahon, S. (2008). Oil prices: Heavy tails, mean reversion and the convenience yield. *Cahiers de recherche*, 801, 08–01.
- Bhar, R., e Lee, D. (2011). Time-varying market price of risk in the crude oil futures market. *Journal of Futures Markets*, 31(8), 779–807.
- Bickel, J. E., e Smith, J. E. (2006). Optimal sequential exploration: A binary learning model. *Decision Analysis*, 3(1), 16–32.
- Bickel, J. E., Smith, J. E., Meyer, J. L., et al. (2008). Modeling dependence among geologic risks in sequential exploration decisions. *SPE Reservoir Evaluation & Engineering*, 11(02), 352–361.
- Bishop, D., e Cannings, C. (1978). A generalized war of attrition. *Journal of Theoretical Biology*, 70(1), 85–124.
- Bjerkstrand, P., e Ekern, S. (1990). Managing investment opportunities under price uncertainty: From "last chance" to "wait and see" strategies. *Financial Management*, 65–83.
- Black, F., e Scholes, M. (1973). The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of political economy*, 81(3), 637–654.
- Bonatti, A. (2015). *Game theory for strategic advantage 15.025 - lecture 9: War of attrition*. MIT Course Ware. Retrieved from <https://ocw.mit.edu/courses/>
- Brandenburger, A. M., e Nalebuff, B. J. (1996). *Co-opetition*. Currency.
- Bratvold, R. B., e Begg, S. (2010). *Making good decisions* (Vol. 207). Society of

Petroleum Engineers Richardson, Texas.

Bratvold, R. B., Bickel, J. E., Lohne, H. P., et al. (2009). Value of information in the oil and gas industry: past, present, and future. *SPE Reservoir Evaluation & Engineering*, 12(04), 630–638.

Brennan, M., e Schwartz, E. (1985). Evaluating natural resource investments. *Journal of business*, 135–157.

Brosch, R. (2001). *Portfolio-aspects in real options management* (Tech. Rep.). Working Paper Series: Finance & Accounting.

Calvette, L. d. M. D., e Pacheco, M. A. C. (2014). Genetic algorithms and real options on wildcat drilling optimal choice.

Chevalier-Roignant, B., Flath, C. M., Huchzermeier, A., e Trigeorgis, L. (2011). Strategic investment under uncertainty: A synthesis. *European Journal of Operational Research*, 215(3), 639–650.

Copeland, T., e Antikarov, V. (2001). *Real options* (No. BOOK). Texere New York.

Cortazar, G., e Casassus, J. (1998). Optimal timing of a mine expansion: Implementing a real options model. *The Quarterly Review of Economics and Finance*, 38(3), 755–769. doi: [https://doi.org/10.1016/S1062-9769\(99\)80100-8](https://doi.org/10.1016/S1062-9769(99)80100-8)

Cortazar, G., e Naranjo, L. (2006). An n-factor gaussian model of oil futures prices. *Journal of Futures Markets: Futures, Options, and Other Derivative Products*, 26(3), 243–268.

Cortazar, G., e Schwartz, E. (1997). Implementing a real option model for valuing an undeveloped oil field. *International Transactions in Operational Research*, 4(2), 125–137.

Cortazar, G., e Schwartz, E. (2003). Implementing a stochastic model for oil futures prices. *Energy Economics*, 25(3), 215–238.

Cortazar, G., Schwartz, E., e Casassus, J. (2003). Optimal exploration investments under price and geological—technical uncertainty: a real options model. In *Real r & d options* (pp. 149–165). Elsevier.

Cox, J. C., Ross, S. A., e Rubinstein, M. (1979). Option pricing: A simplified approach. *Journal of financial Economics*, 7(3), 229–263.

Dias, M. A. G. (1997). The timing of investment in e & p: Uncertainty, irreversibility, learning, and strategic consideration. In *Spe hydrocarbon economics and evaluation symposium*.

Dias, M. A. G. (2002). Investment in information in petroleum, real options and revelation. In *Proceedings of the 6th annual international conference on real options. real options group at cyprus, cyprus*.

Dias, M. A. G. (2004a). Real options, learning measures, and bernoulli revelation processes..

- Dias, M. A. G. (2004b). Valuation of exploration and production assets: an overview of real options models. *Journal of petroleum science and engineering*, 44(1-2), 93–114.
- Dias, M. A. G. (2005). *Opções reais híbridas com aplicações em petróleo*. 2005. 490 f (Unpublished doctoral dissertation). Tese.
- Dias, M. A. G. (2006). Real options theory for real asset portfolios: The oil exploration case. In *10th annual international conference on real options, june 14-17*.
- Dias, M. A. G. (2010). Calculating real option values. *Wiley Encyclopedia of Operations Research and Management Science*.
- Dias, M. A. G. (2015a). *Análise de investimentos com opções reais: Teoria e prática com aplicações em petróleo e em outros setores (vol. 2: Processos estocásticos e opções reais em tempo contínuo)*.
- Dias, M. A. G. (2015b). *Análise de investimentos com opções reais-teoria e prática com aplicações em petróleo e em outros setores-volume 1: Conceitos básicos e opções reais em tempo discreto*. Rio de Janeiro: Interciência.
- Dias, M. A. G., e Calvette, L. d. M. D. (2017). Portfolio of oil exploration assets: Learning options, sequential drilling options and defer options. In *Proceedings of the 21th annual international conference on real options. real options group at boston*.
- Dias, M. A. G., e Teixeira, J. P. (2009). Continuous-time option games: War of attrition and bargaining under uncertainty in oil exploration. *OPEC, Oil Prices and LNG (Energy Policies, Politics and Prices)*. Hauppauge, NY: Nova Science Publishers, 73–105.
- Dias, M. A. G., e Teixeira, J. P. (2010). Continuous-time option games: Review of models and extensions. *Multinational Finance Journal*, 14(3/4), 219–254.
- Dixit, A. K., e Pindyck, R. S. (1994). *Investment under uncertainty*. Princeton university press.
- Faiz, S., et al. (2000). Real options application: From successes in asset valuation to challenges for an enterprise-wide approach. In *Spe annual technical conference and exhibition*.
- Faúndez, P. I., Marquardt, C., Jara, J. J., e Guzmán, J. I. (2020). Valuation and prioritization of early-stage exploration projects: a case study of cu–ag and au-mineralized systems in the tiltill mining district, chile. *Natural Resources Research*, 1–26.
- Geman, H. (2005). *Commodities and commodity derivatives: modeling and pricing for agriculturals, metals and energy*. John Wiley & Sons.
- Ghemawat, P. (1997). *Games businesses play: cases and models*. MIT Press.
- Ghemawat, P., e Nalebuff, B. (1985). Exit. *The RAND Journal of Economics*,

184–194.

Gibbons, R. S. (1992). *Game theory for applied economists*. Princeton University Press.

Gibson, R., e Schwartz, E. (1990). Stochastic convenience yield and the pricing of oil contingent claims. *The Journal of Finance*, 45(3), 959–976.

Grenadier, S. R. (1996). The strategic exercise of options: Development cascades and overbuilding in real estate markets. *The Journal of Finance*, 51(5), 1653–1679.

Grenadier, S. R. (2000). Option exercise games: the intersection of real options and game theory. *Journal of Applied Corporate Finance*, 13(2), 99–107.

Guedes, J., e Santos, P. (2016). Valuing an offshore oil exploration and production project through real options analysis. *Energy Economics*, 60, 377–386.

Hammerstein, P., e Parker, G. A. (1982). The asymmetric war of attrition. *Journal of Theoretical Biology*, 96(4), 647–682.

Hammerstein, P., e Selten, R. (1994). Game theory and evolutionary biology. *Handbook of game theory with economic applications*, 2, 929–993.

Harvey, A. C. (1990). *Forecasting, structural time series models and the kalman filter*. Cambridge university press.

Haug, E. G. (2007). *Option pricing formulas*. McGraw-Hill, New York.

Hendricks, K., Weiss, A., e Wilson, C. (1988). The war of attrition in continuous time with complete information. *International Economic Review*, 663–680.

Huisman, K. J., Kort, P. M., et al. (1999). *Effects of strategic interactions on the option value of waiting*. Tilburg University Netherlands.

Jafarizadeh, B., e Bratvold, R. B. (2015). Oil and gas exploration valuation and the value of waiting. *The Engineering Economist*, 60(4), 245–262.

Joe, H. (1997). *Multivariate models and multivariate dependence concepts*. CRC Press.

Kapur, S. (1995). Markov perfect equilibria in an n-player war of attrition. *Economics Letters*, 47(2), 149–154.

Kloeden, P. E., e Platen, E. (1992). *Numerical solution of stochastic differential equations* (Vol. 23). Springer Science & Business Media.

Krishna, V., e Morgan, J. (1997). An analysis of the war of attrition and the all-pay auction. *journal of economic theory*, 72(2), 343–362.

Lander, D. M., e Pinches, G. E. (1998). Challenges to the practical implementation of modeling and valuing real options. *The quarterly review of economics and finance*, 38(3), 537–567.

Lawrence, D. B. (1999). *The economic value of information*. new york: Springer-verlag. Inc.

Leahy, J. V. (1993). Investment in competitive equilibrium: The optimality of

- myopic behavior. *The Quarterly Journal of Economics*, 108(4), 1105–1133.
- Markowitz, H. (1959). Portfolio selection: Efficient diversification of investments, wiley, new york, new york.
- Maskin, E., e Tirole, J. (1988). A theory of dynamic oligopoly, i: Overview and quantity competition with large fixed costs. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, 549–569.
- Merton, R. C. (1973). Theory of rational option pricing. *The Bell Journal of economics and management science*, 141–183. doi: 10.2307/3003143
- Murtha, J. (1995). Estimating reserves and success for a prospect with geologically dependent layers. In *Spe hydrocarbon economics and evaluation symposium*.
- Myerson, R. B. (2009). Learning from schelling's strategy of conflict. *Journal of Economic Literature*, 47(4), 1109–25.
- Nash, J. (1951). Non-cooperative games. *Annals of mathematics*, 286–295.
- Nash, J. (1953). Two-person cooperative games. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, 128–140.
- Paddock, J. L., Siegel, D. R., e Smith, J. (1988). Option valuation of claims on real assets: The case of offshore petroleum leases. *The Quarterly Journal of Economics*, 103(3), 479–508.
- Peteraf, M. A., e Barney, J. B. (2003). Unraveling the resource-based tangle. *Managerial and decision economics*, 24(4), 309–323.
- Pindyck, R. S. (1999). The long-run evolution of energy prices. sl: Mit center for energy and environmental policy research.
doi: <https://doi.org/10.5547/ISSN0195-6574-EJ-Vol20-No2-1>
- Pindyck, R. S. (2001). The dynamics of commodity spot and futures markets: a primer. *The energy journal*, 22(3). doi: <https://doi.org/10.5547/ISSN0195-6574-EJ-Vol22-No3-1>
- Rose, P. R. (2000). Taking the risk out of petroleum exploration-the adoption of systematic risk analysis by oil and gas corporations during the 1990s.
- Rose, P. R. (2001). *Risk analysis and management of petroleum exploration ventures* (Vol. 12). American Association of Petroleum Geologists Tulsa, OK.
- Saito, R., De Castro, G., Mezzomo, C., e Schiozer, D. J. (2001). Value assessment for reservoir recovery optimization. *Journal of Petroleum Science and engineering*, 32(2-4), 151–158.
- Schwartz, E. (1997). The stochastic behavior of commodity prices: Implications for valuation and hedging. *The journal of finance*, 52(3), 923–973.
- Schwartz, E. (1998). Valuing long-term commodity assets. *Journal of Energy Finance & Development*, 3(2), 85–99. doi: [https://doi.org/10.1016/S1085-7443\(99\)80070-2](https://doi.org/10.1016/S1085-7443(99)80070-2)
- Schwartz, E. (2013). The real options approach to valuation: Challenges and

- opportunities. *Latin american journal of economics*, 50(2), 163–177.
- Schwartz, E., e Smith, J. (2000). Short-term variations and long-term dynamics in commodity prices. *Management Science*, 46(7), 893–911.
- Seppi, D. J., e Ronn, E. (2002). Risk-neutral stochastic processes for commodity derivative pricing: An introduction and survey. *Real Options and Energy Management Using Options Methodology to Enhance Capital Budgeting Decisions*, 3–60.
- Shumway, R. H., e Stoffer, D. S. (2017). *Time series analysis and its applications: with r examples*. Springer.
- Slade, M. E. (2001). Valuing managerial flexibility: An application of real-option theory to mining investments. *Journal of Environmental Economics and Management*, 41(2), 193–233.
- Smit, H. T., e Trigeorgis, L. (2006). Real options and games: Competition, alliances and other applications of valuation and strategy. *Review of Financial Economics*, 15(2), 95–112.
- Smith, e Thompson, R. (2008). Managing a portfolio of real options: Sequential exploration of dependent prospects. *The Energy Journal*, 43–61.
- Smith, J. E., e McCardle, K. F. (1998). Valuing oil properties: integrating option pricing and decision analysis approaches. *Operations Research*, 46(2), 198–217.
- Smith, J. M. (1974). The theory of games and the evolution of animal conflicts. *Journal of theoretical biology*, 47(1), 209–221.
- Smith, J. M. (1976). The theory of games: In situations characterized by conflict of interest, the best strategy to adopt depends on what others are doing. *Am. Sci*, 64, 41–45.
- Smith, J. M. (1982). *Evolution and the theory of games*. Cambridge university press.
- Smith, J. M., e Price, G. R. (1973). The logic of animal conflict. *Nature*, 246(5427), 15–18.
- Stabell, C. B., et al. (2000). Alternative approaches to modeling risks in prospects with dependent layers. In *Spe annual technical conference and exhibition*.
- Tavella, D. (2003). *Quantitative methods in derivatives pricing: an introduction to computational finance* (Vol. 158). John Wiley & Sons.
- Teece, D. J., Pisano, G., e Shuen, A. (1997). Dynamic capabilities and strategic management. *Strategic management journal*, 18(7), 509–533.
- Titman, S. (1985). Urban land prices under uncertainty. *The American Economic Review*, 75(3), 505–514.
- Tourinho, O. A. F. (1979). *The valuation of reserves of natural resources: an option pricing approach*. 1979 (Unpublished doctoral dissertation). PhD Dissertation (Doctoral)-University of California, Berkeley (CA).
- Tourinho, O. A. F. (2013). Revisiting the tourinho real options model: outstanding

- issues 30 years later. *The European Journal of Finance*, 19(7-8), 591–603.
- Trigeorgis, L. (1993). The nature of option interactions and the valuation of investments with multiple real options. *Journal of Financial and quantitative Analysis*, 28(1), 1–20.
- Trigeorgis, L. (1996). *Real options: Managerial flexibility and strategy in resource allocation*. MIT press.
- Trigeorgis, L. (1999). Real options: a primer. In *The new investment theory of real options and its implication for telecommunications economics* (pp. 3–33). Springer.
- Vassolo, R. S., Anand, J., e Folta, T. B. (2004). Non-additivity in portfolios of exploration activities: A real options-based analysis of equity alliances in biotechnology. *Strategic Management Journal*, 25(11), 1045–1061.
- Wilmott, P. (2006). *Paul wilmott on quantitative finance* (2nd ed.).
- Zan, K., e Bickel, J. E. (2013). Components of portfolio value of information. *Decision Analysis*, 10(2), 171–185.

A

A - Portfólio Sem Risco

O ativo base segue um MGB segundo a equação diferencial estocástica abaixo:

$$dP = \mu P dt + \sigma P dz \quad (\text{A-1})$$

Para o derivativo, que será o valor do projeto $V(P, t)$, utiliza-se a fórmula de Itô-Doeblin para encontrar sua dinâmica:

$$dV = V_t dt + V_P dP + \frac{1}{2} V_{PP} d[P, P](t) \quad (\text{A-2})$$

Sendo V_P e V_{PP} a primeira e segunda derivada de V em relação a P , V_t a derivada de V em relação ao tempo e $d[P, P](t)$ a covariação quadrática de P . Esse último termo é de ordem dt , sendo no MGB igual a $\sigma^2 P^2 dt$.

Monta-se um portfólio em que não há risco, sendo que sua variação rende a taxa livre de risco. Assim, o portfólio pode ser desenhado como comprado no derivativo V e vendido em Δ no ativo base P :

$$\phi = V - \Delta P \quad (\text{A-3})$$

E a variação desse portfólio é igual a:

$$d\phi = (dV + \pi(P, t)dt) - \Delta(dP + \delta P dt) = r\phi dt$$

Caso o derivativo já tenha um fluxo de caixa, ele vai gerar $\pi(P, t)$ em dt . O ativo base P paga dividendo δP em dt . Substituindo dV :

$$d\phi = \left(V_t dt + V_P dP + \frac{1}{2} V_{PP} \sigma^2 P^2 dt + \pi(P, t) dt \right) - \Delta (dP + \delta P dt)$$

Substituindo dP :

$$d\phi = V_t dt + V_P \mu P dt + V_P \sigma P dz + \frac{1}{2} V_{PP} \sigma^2 P^2 dt + \pi(P, t) dt - \Delta \mu P dt - \Delta \sigma P dz - \Delta \delta P dt$$

Agrupando dt e dz :

$$d\phi = \left(V_t + V_P \mu P - \Delta \mu P + \frac{1}{2} V_{PP} \sigma^2 P^2 + \pi(P, t) - \Delta \delta P \right) dt + (V_P - \Delta) \sigma P dz$$

Tornando o portfólio neutro ao risco, os termos dz devem ser iguais a

zero, ou seja:

$$(V_P - \Delta) \sigma P dz = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \Delta = V_P$$

Assim, a equação $d\phi$ acima fica, cortando também $V_P \mu P dt$:

$$d\phi = V_t + \frac{1}{2} \sigma^2 P^2 V_{PP} dt + \pi(P, t) dt - \delta P V_P dt$$

Como foi visto, a variação de portfólio é igual ao rendimento livre de risco ($d\phi = r\phi dt$), assim:

$$V_t + \frac{1}{2} \sigma^2 P^2 V_{PP} + \pi(P, t) - \delta P V_P = r\phi$$

O portfólio ϕ foi montado na equação (A-3), contudo agora sabe-se o delta hedge ($\Delta = V_P$), portanto:

$$V_t + \frac{1}{2} \sigma^2 P^2 V_{PP} + \pi(P, t) - \delta P V_P = r(V - P V_P)$$

Chegamos na equação diferencial do valor do projeto, como pode ser visto abaixo:

$$V_t + \frac{1}{2} \sigma^2 P^2 V_{PP} + \pi(P, t) - \delta P V_P - rV + rP V_P = 0$$

Arrumando os termos:

$$V_t + \frac{1}{2} \sigma^2 P^2 V_{PP}(P) + (r - \delta) P V_P(P) - rV(P, t) + \pi(P, t) = 0 \quad (\text{A-4})$$

Caso considere que a planta não gera fluxo de caixa, como é a situação de projetos exploratórios, $\pi(P, t)$ é zero, convertendo em uma equação diferencial parcial igual ao trabalho de [Black e Scholes \(1973\)](#).

B

B - Diferenças Finitas

Os métodos de diferenças finitas podem ser classificados em :

- Diferenças Finitas Explícitas
- Diferenças Finitas Implícitas
- Método de Crank-Nicolson

A equação diferencial do MGB, apresentado em [Black e Scholes \(1973\)](#), mas com ativo S_t que paga dividendos (δ):

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (r - \delta) \frac{\partial f}{\partial S} S + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 = r f \quad (\text{B-1})$$

Diferenças Finitas Explícitas

Diferenciação *forward*. Tempo só move para frente, sendo j(tempo) e i(valor) :

$$\frac{\partial f}{\partial t} \approx \frac{f_{j+1,i} - f_{j,i}}{\Delta t} \quad (\text{B-2})$$

Para o delta e gama, utiliza-se a aproximação da diferenciação central. Valor pode mover para qualquer direção.

$$\frac{\partial f}{\partial S} \approx \frac{f_{j+1,i+1} - f_{j+1,i-1}}{2\Delta S} \quad (\text{B-3})$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \approx \frac{f_{j+1,i+1} - 2f_{j+1,i} + f_{j+1,i-1}}{\Delta S^2} \quad (\text{B-4})$$

Aplicando as aproximações (B-2,B-3 e B-4) na equação (B-1), temos:

$$\begin{aligned} \frac{f_{j+1,i+1} - f_{j+1,i-1}}{2\Delta S} + (r - \delta) \frac{f_{j+1,i+1} - 2f_{j+1,i} + f_{j+1,i-1}}{\Delta S^2} S \\ + \frac{1}{2} \frac{f_{j+1,i+1} - 2f_{j+1,i} + f_{j+1,i-1}}{\Delta S^2} \sigma^2 S^2 = r f_{i,j} \end{aligned} \quad (\text{B-5})$$

Essa equação pode ser reescrita como:

$$f_{i,j} = \frac{1}{1 + r\Delta t} (p_u f_{j+1,i+1} + p_m f_{j+1,i} + p_d f_{j+1,i-1}) \quad (\text{B-6})$$

Onde,

$$p_u = \frac{1}{2} [\sigma^2 i^2 + i(r - \delta)] \Delta t \quad (\text{B-7})$$

$$p_m = 1 - \sigma^2 i^2 \Delta t \quad (\text{B-8})$$

$$p_d = \frac{1}{2} [\sigma^2 i^2 - i(r - \delta)] \Delta t \quad (\text{B-9})$$

Na implementação do algoritmo, é necessário ter um valor máximo de S . [Wilmott \(2006, Cap.77, p.1202\)](#) recorda da equação de Black-Scholes, onde há integração de zero a infinito dos possíveis valores no vencimento. Porém, ressalta que não precisa ser um valor tão alto. Primeiro, ainda que a soma seja até infinito, a probabilidade de ocorrência é baixa para valores altos. Segundo, quando maior a malha, mais consumo de tempo de máquina. Assim, recomenda valores no máximo 3 ou 4 vezes o S inicial. [Dias \(2015a, Cap.26, p. 408\)](#) sugere o uso de uma porcentagem acima do gatilho da opção perpétua, já que a opção perpétua tem gatilho sempre acima da opção com vencimento. Também atenta a questão da estabilidade, vinculando a discretização S com o tempo, assim como [Haug \(2007, Chap.7, p.337\)](#) e [Tavella \(2003, Cap.7, p.225\)](#).

B.0.0.0**Solução Numérica**

Result: *Op. Americana de Compra e Gatilho - DF Explícita*

Definição do S_{max} ;

Definição dos passos ΔS (M) e Δt (N) ;

Localização do S de entrada no vetor S_{Grid} ;

Cálculo da taxa de desconto;

for j em M - *cálculo no vencimento* **do**

 Cálculo do vetor S;

$F_{N,j} = \max[0; S_j - I]$;

end

Gatilho no vencimento = I;

for i em $N-1$ - *backward* **do**

for j em M **do**

$F_{i,j}$ = ponderação da opção no tempo posterior (F_{i+1}), em
diferentes valores de V (F_{j-1}, F_j e F_{j+1}) por p_u, p_m e p_d ,
descontado pela taxa livre de risco;

if ($F_{i,j}$ for maior que $S_j - I$) e ($F_{i,j-1}$ for menor $S_{j-1} - I$) **then**
 | Gatilho = Média de V_j e S_{j-1}

end

$F_{i,j} = \max[F_{i,j}; S_j - I]$

end

end

Vetor Gatilho;

Opção Hoje = $F_{0, S_{Grid}}$.

Algorithm 1: DF Explícita - Opção de Compra e Gatilho