Marco Teórico

Programación Lineal

Definición

- La PL utiliza un modelo matemático para describir el problema.
- La PL trata la planificación de actividades para obtener un resultado óptimo, esto es, el resultado que mejor alcance la meta especificada (según el modelo matemático) entre todas las alternativas de solución.
- PL es una técnica cuantitativa ampliamente aplicada en sistemas que presenten relaciones lineales, para utilizar los recursos escasos de la mejor manera posible.

Historia

Las ideas básicas de la PL surgieron de un estudio acerca de problemas de asignación de recursos hechos por la fuerza aérea de los Estados Unidos durante la Segunda Guerra Mundial.

Descripción

Un problema de PL se refiere al **uso eficiente o distribución de recursos limitados** para alcanzar los objetivos deseados. Aunque esta es su aplicación más frecuente, la PL tiene muchas otras posibilidades.

Los problemas de PL se caracterizan por el gran número de soluciones que satisfacen las soluciones básicas de cada problema.

La elección de una solución en particular como la mejor solución del problema en estudio dependerá en cierto grado del objetivo global implícito en el enunciado del mismo; y esa será la **Solución Óptima**.

La PL es una herramienta poderosa, pues aún con aplicaciones parciales, se pueden obtener ahorros importantes.

Ámbito de aplicación

Proceso continuo. Alimentación. Transporte. Agricultura. Automotrices. Redes de servicio. Logística. Marketing. Etc.

Pasos para la elaboración del modelo matemático

1. ¿Qué es lo que se produce?
2. ¿Qué es lo que se desea calcular? (siempre debe cumplirse la condición de no negatividad de las variables)
3. ¿Cuál es el objetivo de la empresa? (definición de la función objetivo)

4. Definir las condiciones o restricciones (condiciones de ligaduras)

Supuestos de la Programación Lineal

- **Proporcionalidad**: requiere que la contribución de cada variable de decisión en la función objetivo, y sus requerimientos en las restricciones, sea directamente proporcional al valor de la variable.
- **Aditividad**: estipula que la contribución total de todas las variables en la función objetivo y sus requerimientos en las restricciones, sean la suma directa de las contribuciones o requerimientos individuales de cada variable.
- **Divisibilidad**: las variables de decisión pueden tomar cualquier valor continuo, es decir real mayor a cero.
- **Certidumbre**: cada valor de cada parámetro es un valor conocido y constante.
- **Objetivo único:** si se tiene múlitples objetivos, todos deben convergir en uno sólo.
- **No negatividad:** una restricción implícita es que las variables no pueden asumir valores negativos.

Pilares de la Programación Lineal

1. **<u>Condiciones de no negatividad xi >= 0.</u>** Las variables de decisión deben ser mayores o iguales a cero ya que representan situaciones o cosas del mundo real. (Ej.: no puede producir -4 artículos)
2. **<u>Existencia de una función objetivo z = F(x).</u>** Esta debe ser **única** (si hubieran varios objetivos todos deben subordinarse a uno solo), **lineal** y **optimizante** (se debe poder optimizar en algún sentido, maximizar o minimizar, para encontrar la solución al problema).
3. **<u>Existencia de condiciones de ligadura (restricciones).</u>** Son un conjunto de restricciones operativas que imponen el problema y deben cumplirse, con la forma $r_i \leq = \geq b_i$. Son inecuaciones.

Teorema de la Programación Lineal

El programa lineal debe cumplir dos condiciones:

- El espacio de soluciones tiene que ser un conjunto convexo.
- El número de puntos esquinas por revisar en la búsqueda del óptimo debe ser finito.

Planteo del modelo

El modelo de PL tiene tres componentes básicas:

- Las **variables** de decisión que se trata de determinar.
- El **objetivo** (meta) que se trata de optimizar.
- Las **restricciones** que se deben satisfacer.

La definición correcta de las variables de decisión es un primer paso esencial en el desarrollo del modelo. Una vez hecha, la tarea de construir la función objetivo y las restricciones se hace en forma mas directa.

1. $xj \geq 0; \ \forall j$ $\Rightarrow$ **Condición de no negatividad de las variables**

2. $Z = f(x) \implies MAX$ $\Rightarrow$ **Función Objetivo**

3. $\sum aij \ xj \leq bj$ $\Rightarrow$ **Restricciones**

Donde los:

aij = insumo de cada restricción por cada paquete de producto

bi = cantidad disponible de cada uno de los recursos

Si una restricción es de tipo "≤" entonces pueden darse dos casos: no existe cantidad ociosa o si existe sobrante. A esta cantidad sobrante desconocida se la indica como otra variable en la cual puede adoptar en este caso valores ≥ 0. A estas se las llaman variables de **slacks** o de **holgura**.

Las variables X_j, son las **variables de decisión** que en el modelo de PL llevan el nombre de variables **reales**.

Modelo general de Programación Lineal

Definición de variables:

Sea xj = #.... ; j = 1, 2, 3....n

Función objetivo:

Max. o Min. z = C1X1 + C2X2 + ... + CjXj + ... + CnXn

Sujeto a restricciones: i = 1, 2, 3, ... , m

a11X1 + a12X2 + ... + a1jXj + ... + a1nXn	≤ = ≥	**b1**
a21X1 + a22X2 + ... + a2jXj + ... + a2nXn	≤ = ≥	**b2**
.	.	
.	.	
ai1X1 + ai2X2 + ... + aijXj + ... + ainXn	≤ = ≥	**bi**
.	.	
.	.	
am1X1 + am2X2 + ... + amjXj + ... + amnXn	≤ = ≥	**bm**

Condiciones de signo para variables: **toda xj ≥ 0**

m = # total de restricciones,

n = # de variables de decisión (originales)

Cj, aij y bi son constantes (o parámetros) dados.

Transformaciones del modelo general de PROGRAMACIÓN LINEAL

Dado que el objetivo fundamental de la PL es el de optimizar una función lineal sujeta a una serie de restricciones lineales y variables no negativas.

Dependiendo de la situación, resulta ventajoso efectuar ciertas manipulaciones del modelo general para expresarlo en formas equivalentes que sean más fáciles de comprender, solucionar o analizar.

1. **<u>El objetivo puede cambiarse de maximización a minimización y viceversa.</u>**

La minimización de una función f(x), es matemáticamente equivalente a la maximización del negativo de tal función –f(x); complementariamente, la maximización de la función g(x) = -f(x), es matemáticamente equivalente a la minimización del negativo de la misma, -g(x).

$$MAX: F = 8X_1 + 14X_2 - 5X_3$$

Es matemáticamente equivalente a

$$MIN: G = -F = -8X_1 - 14X_2 + 5X_3$$

2. **<u>El sentido de una desigualdad puede invertirse.</u>** Cuando una desigualdad se multiplica por (-1), su sentido puede invertirse. Si es "≤" cambiar a "≥", si es "≥" cambia a "≤".

$$2X_1 + 9X_2 - 4X_3 \geq 9$$

Al multiplicar por (-1), se convierte en

$$-2X_1 - 9X_2 + 4X_3 \leq -9$$

3. **<u>Una ecuación puede transformarse a desigualdades.</u>** Esto se basa en el hecho de que toda ecuación puede reemplazarse por dos desigualdades en sentidos opuestos.

$$3X_1 + 5X_2 - 8X_3 = 10$$

Es matemáticamente equivalente a las dos siguientes desigualdades:

$$3X_1 + 5X_2 - 8X_3 \leq 10$$

$$3X_1 + 5X_2 - 8X_3 \geq 10$$

4. **<u>Una desigualdad "≤" puede transformarse a una ecuación</u>**, si se le suma al lado izquierdo una nueva variable, no negativa, llamada **variable de faltante** dado que solamente tomará valores positivos cuando el lado izquierdo sea menor al lado derecho.

$$9X_1 + 7X_2 - 3X_3 \leq 5$$

Puede reemplazarse por:

$$9X_1 + 7X_2 - 3X_3 + S_4 = 5$$
$$S_4 \geq 0$$

Es práctica común considerar como cero al coeficiente objetivo de la variable faltante.

5. **<u>Una desigualdad "≥" puede transformarse a ecuación</u>**, si se le resta al lado izquierdo una nueva **variable de sobrante**; tal nombre obedece a que dicha variable tomará un valor positivo, sólo cuando el lado izquierdo sea mayor que el derecho.

$$-5X_1 + 7X_2 - 2X_3 \geq 15$$

Puede reordenarse como:

$$-5X_1 + 7X_2 - 2X_3 - S_4 = 15$$
$$S_4 \geq 0$$

También es usual asignar un valor cero al coeficiente objetivo de la variable sobrante.

6. **<u>Una variable irrestricta en signo puede redefinirse en función de variables no negativas.</u>** El modelo general de la PROGRAMACIÓN LINEAL considera a todas las variables como no negativas. En ciertos problemas se involucran variables irrestrictas en signo, es decir que pueden tomar valores positivos, negativos o cero.

Generalmente dichas variables están asociadas a temperaturas, saldos, etc. Cuando en un problema se presenten variables irrestrictas, también llamadas variables libres, **deben substituirse por la diferencia de dos variables no negativas**.

$$X_7 = X_7^+ - X_7^-$$

$$X_7^+ \ y \ X_7^- \geq 0$$

Formato Canónico

Un modelo de PL está en formato canónico si todas las variables son no negativas y todas las restricciones son del tipo "≤" para un objetivo de maximización, o si todas las restricciones con del tipo "≥" para un objetivo de minimización. Este formato es de gran utilidad en el análisis del modelo de PROGRAMACIÓN LINEAL.

Caso de minimización	Caso de maximización
Minimizar $X_0 = \sum_{j=1}^{n} C_j X_j$	*Maximizar* $X_0 = \sum_{j=1}^{n} C_j X_j$
Sujeto a: $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j \geq b_i$	*Sujeto a:* $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j \leq b_i$
$X_j \geq 0$	$X_j \geq 0$
$\forall \quad j = 1,2,\ldots,m$	$\forall \quad j = 1,2,\ldots,m$

Formato Estándar

Un modelo de PROGRAMACIÓN LINEAL está en formato estándar si todas las variables son no negativas y todas las restricciones son igualdades, tanto en maximización como minimización. Este formato será siempre en la solución de problemas de PROGRAMACIÓN LINEAL.

Caso de minimización	Caso de maximización
Minimizar $X_0 = \sum_{j=1}^{n} C_j X_j$	*Maximizar* $X_0 = \sum_{j=1}^{n} C_j X_j$
Sujeto a: $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j = b_i$	*Sujeto a:* $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j = b_i$
$X_j \geq 0$	$X_j \geq 0$
$\forall \quad j = 1,2,\ldots,m$	$\forall \quad j = 1,2,\ldots,m$

Solución Gráfica (para dos variables)

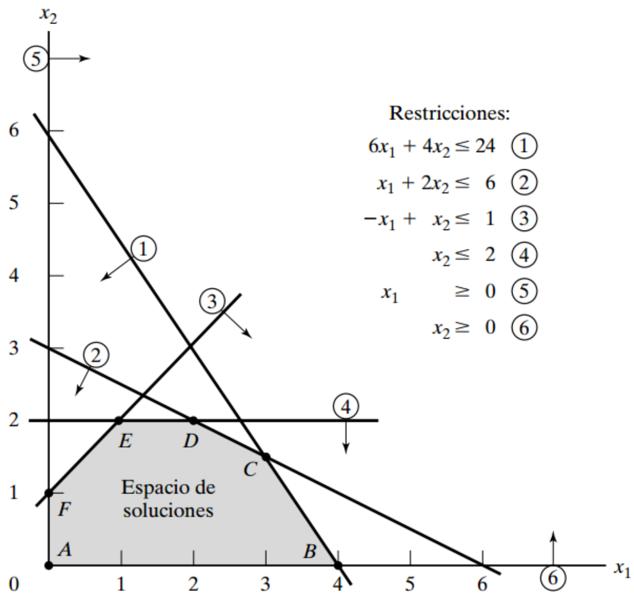
Empleado principalmente para PROGRAMACIÓN LINEAL con dos variables de decisión. Este método en la idea de obtener regiones de soluciones factibles (RSF), en las cuales se encontraría la combinación de variables de decisión que optimizan el modelo.
El procedimiento de solución gráfica comprende dos pasos:

1. **<u>Determinación del espacio de soluciones que define todas las soluciones factibles del modelo.</u>**

Primero se tendrá en cuenta las restricciones de no negatividad $X_1 \geq 0; X_2 \geq 0$. El eje horizontal X1 y el eje vertical X2 representan las variables. En consecuencia, las restricciones de no negatividad limitan el área del espacio de soluciones del primer cuadrante: arriba del eje X1 y a la derecha del eje X2.

Para tener en cuenta las demás restricciones, primero se sustituyen cada desigualdad con una ecuación, y se grafica la recta resultante, ubicando dos puntos diferentes en ella.

Ejemplo: si se tiene la restricción $6X_1 + 4X_2 \leq 24$ se puede utilizar la recta $6X_1 + 4X_2 = 24$ para determinar dos puntos distintos, primero igualando X1 = 0 para obtener X2 = 6 y después igualando X2 = 0 para obtener X1 = 4.
A continuación, consideremos el efecto de la desigualdad. Todo lo que hace la desigualdad es dividir el plano (X1, X2) en dos semiespacios que en este caso son semiplanos. Solo una de esas dos mitades satisface la desigualdad. Para determinar cuál es la correcta, se elige cualquier punto de referencia del primer cuadrante, el (0,0) por ejemplo. Si satisface la desigualdad, el lado en el que esta es el semiplano factible. En caso contrario quiere decir que es el otro.

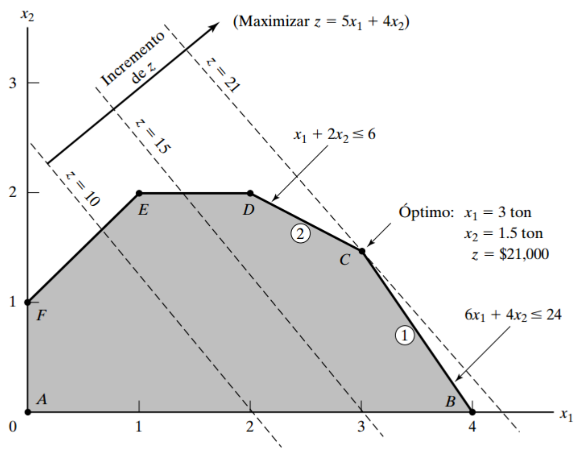


2. **Determinación de la solución óptima, entre todos los puntos factibles.**

El espacio factible está delimitado por los segmentos de rectas que unen los vértices. Todo punto dentro o en la frontera del espacio es factible, porque satisface todas las restricciones. Ya que el espacio factible está formado por una cantidad infinita de puntos se necesita un procedimiento sistemático para identificar la solución óptima.

Para identificar la solución óptima se requiere identificar la dirección en la que aumenta o disminuye la función objetivo. La solución óptima siempre se encuentre en un **punto de esquina** del espacio de soluciones, donde se cruzan dos líneas.

Gráficamente, dibujando la recta del funcional que pase por el punto (0,0) y luego trazando las paralelas hasta llegar a la que tenga mejor beneficio. Se obtiene una recta que pasa por el origen de ordenadas y se dibuja el funcional. Todas las rectas paralelas a la función objetivo tienen la misma pendiente.



Capacidad de producción

Es cuando se tiene una situación en la que la capacidad total de producción es del 100 % o bien de 1, y se distribuye esta capacidad entre las distintas variables de decisión.

<u>Por ejemplo:</u> se tiene una máquina (cuya capacidad es 1) que puede estampar tres tipos de circuitos. La cantidad de circuitos que puede estampar la máquina es N_A, N_B, N_C; para las clases A, B y C de circuitos, respectivamente. La cantidad de circuitos que se puede estampar por clase es:

$$X_A \leq N_A$$
$$X_B \leq N_B$$
$$X_C \leq N_C$$

Para estampar solo un tipo donde 1/NA es la capacidad de producir un circuito A.

$$R1: \frac{1}{N_A} X_A \leq 1$$

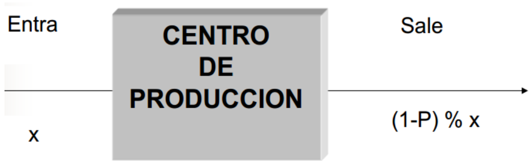
Para estampar los tres tipos:

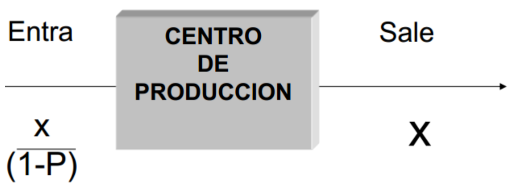
$$R1: \frac{1}{N_A} X_A + \frac{1}{N_B} X_B + \frac{1}{N_C} X_C \leq 1$$

Pérdida

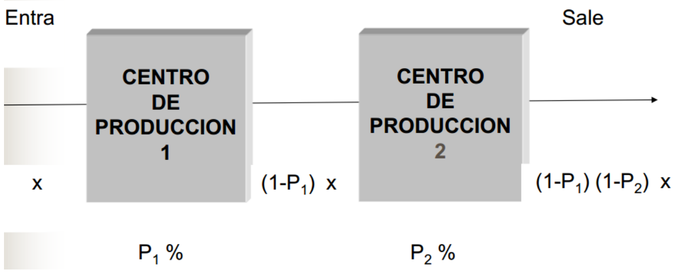
Situación que sucede habitualmente en la realidad, cuando se trabaja con porcentajes.

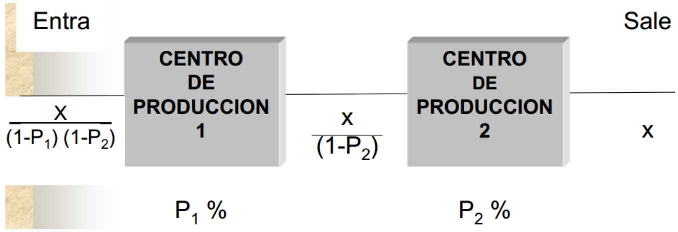
<u>Pérdida en un centro</u>





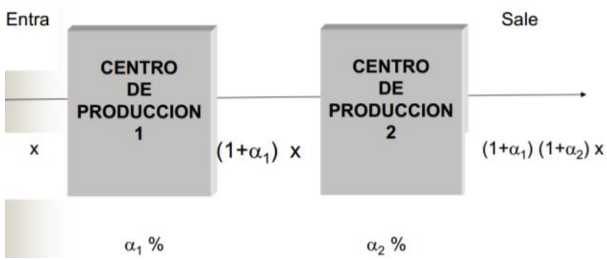
Pérdida en varios centros sucesivos

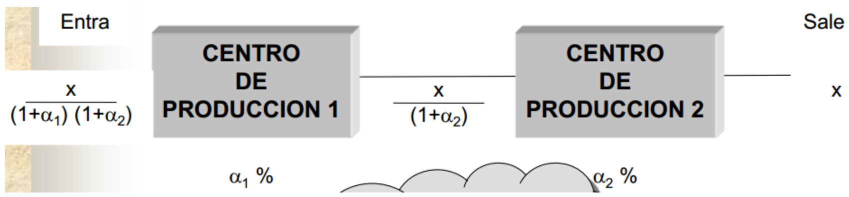




Agregado

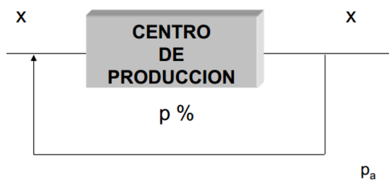
Agregado en varios centros sucesivos





Reciclaje

Por cada unidad x se pierde p, ese p que se pierde se lo hace ingresar nuevamente a la línea de proceso.



Por ejemplo: se tienen tres máquinas que producen tornillos; donde se sabe estadísticamente que un 10% en la máquina 1, 8% en la máquina 2 y 5% en la máquina 3 de la producción sale fallada. Se necesitan 800 tornillos semanalmente de un cierto tipo y las variables X1, X6 y X11 representan los tornillos que ingresan a las máquinas 1, 2 y 3; respectivamente.

Por lo tanto la restricción se puede expresar como:

$$R4\colon X_1(1-0{,}1)+X_6(1-0{,}08)+X_{11}(1-0{,}05)\geq 800$$

Mezcla

$$x_i \quad \begin{matrix}\leq \\ \geq\end{matrix} \quad \mathbf{P}\ \% \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)$$

Método Simplex

Es un método matemático que se emplea para resolver problemas de optimización, en palabras simples la PROGRAMACIÓN LINEAL busca asignar recursos limitados, entre actividades que compiten, de la forma más óptima posible.

Es un algoritmo del tipo iterativo en el cual se repite un procedimiento sistemático hasta obtener el resultado deseado.

El método simplex es un procedimiento algebraico en el que cada iteración contiene la solución de un sistema de ecuaciones para obtener una nueva solución a la que se le aplica la prueba de optimalidad. No obstante, también tiene una interpretación geométrica muy útil.

El método gráfico indica que la solución óptima de un problema lineal siempre está asociada con un punto esquina del espacio de soluciones. Este resultado es la clave del método simplex algebraico y general para resolver cualquier modelo de PROGRAMACIÓN LINEAL.

La transición de la solución del punto esquina geométrico hasta el método simplex implica un procedimiento de cómputo que determina en forma algebraica los puntos esquina. Esto se logra convirtiendo primero a todas las restricciones de desigualdad en ecuaciones, para después manipular esas ecuaciones en una forma sistemática.

El método simplex resuelve la PROGRAMACIÓN LINEAL en iteraciones. Cada iteración desplaza la solución a un nuevo punto esquina que tiene potencial de mejorar el valor de la función objetivo. El proceso termina cuando ya no se pueden obtener mejoras.

Este método implica cálculos tediosos y voluminosos, lo que hace que la computadora sea una herramienta esencial para resolver los problemas de PROGRAMACIÓN LINEAL.

Espacio de soluciones en forma de ecuación

Para estandarizar, la representación algebraica del espacio de soluciones de PROGRAMACIÓN LINEAL se forma bajo dos condiciones:

1. Todas las restricciones (excepto las de no negatividad) son ecuaciones con lado derecho no negativo.
2. Todas las variables son no negativas.

Para empezar el PPL debe estar expresado en **Formato Estandar**, para transformarlo se siguen los siguientes pasos:

1. **Conversión de desigualdades en igualdades de las ecuaciones.**
2. **Cambios de variables.** Trato de las variables no restringidas.
3. **Cambio en criterio de optimización**

Conversión de desigualdad a ecuaciones

Restricciones "≤". El lado derecho se puede imaginar cómo representando el límite de disponibilidad de un recurso, y en ese caso el lado izquierdo representaría el uso de ese recurso limitado por parte de las actividades (variables) del modelo. La diferencia entre el lado derecho y el lado izquierdo de las restricción "≤" representa la cantidad no usada u **holgura** del recurso.

Para convertir una desigualdad "≤" en ecuación, se agrega una variable de holgura al lado izquierdo de la restricción.

$$6x_1 + 4x_2 \leq 24$$
$$6x_1 + 4x_2 + s_1 = 24, \;\; s_1 \geq 0$$

Donde s_1 es la holgura o cantidad no usada.

Restricciones "≥". Establece un límite inferior para las actividades del modelo de PROGRAMACIÓN LINEAL. Como tal, la cantidad por la que el lado izquierdo es mayor que el límite mínimo (lado derecho) representa un **excedente**.

La conversión se logra restando una variable de excedencia, del lado izquierdo de la desigualdad.

$$x_1 + x_2 \geq 800$$
$$x_1 + x_2 - S_1 = 800, \;\; S_1 \geq 0$$

Es importante observar que las variables de holgura y de excedencia siempre son no negativas. El único requisito que queda es que el lado derecho de la ecuación que resulte sea no negativo. Esta condición se puede satisfacer siempre, si es necesario multiplicando ambos lados de la ecuación resultante por -1.

Todas las restricciones son de igualdad

Si en nuestro modelo aparece una inecuación con una desigualdad del tipo "≥", se deberá añadir una nueva variable, llamada variable de exceso, con la restricción "≥ 0". La nueva variable aparece con coeficiente cero en la función objetivo, y restando en las inecuaciones.

Surge ahora un problema, como el modelo está basado en que todas sus variables sean mayores o iguales a cero, cuando se haga la primera iteración con el método simplex, las variables básicas no estarán en la base y tomarán el valor cero, y el resto el valor que tengan. Por lo tanto no se cumplirá la condición de no negatividad.

Para solucionar este problema, se añade una nueva variable llamada **variable artificial**, que aparecerá con coeficiente cero en la función objetivo, y sumando en la inecuación de la restricción correspondiente.

$$2X_1 + 4X_2 \geq 12$$
$$2X_1 + 4X_2 - X_e + X_a = 12$$

Las variables artificiales aparecen cuando hay desigualdades del tipo "=" o "≥". En resumen:

Tipo de desigualdad	Tipo de variable que aparece
≥	- exceso + artificial
=	+ artificial
≤	+ holgura

Cambio del tipo de optimización

Si en nuestro modelo, deseamos minimizar, podemos dejarlo tal y como está, pero se deberá tener en cuenta nuevos criterios para la condición de parada (se deberá parar de realizar iteraciones cuando en la fila del valor de la función objetivo sean todos menores o iguales a 0), así como para la condición de salida de la fila. Con el objeto de no cambiar criterios, se puede convertir el objetivo de minimizar la función F por el de maximizar –F.

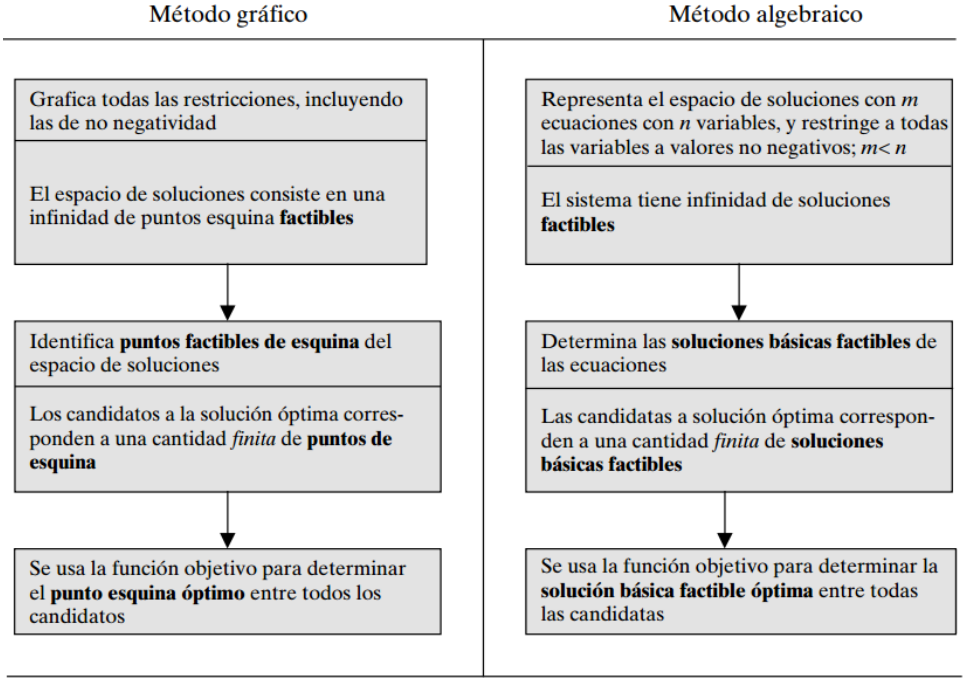
Ventajas: no deberemos preocuparnos por los criterios de parada, o condición de salida de filas, ya que se mantienen.

Inconvenientes: en el caso de que la función tenga todas sus variables básicas positivas, y además las restricciones sean de desigualdad "≤", al hacer el cambio se quedan negativas y en la fila del valor de la función objetivo se quedan positivos, por lo que se cumple la condición de parada, y por defecto el valor óptimo que se obtendría sería 0.

Solución: en la realidad no existe este tipo de problemas, ya que para que la solución quedara por encima de 0, alguna restricción debería tener la condición "≥", y entonces entraríamos en un modelo para el método de las Dos Fases.

Transición de solución gráfica a solución algebraica

La siguiente figura marca el paralelismo entre los dos métodos.



Se puede apreciar en forma visual por qué el espacio gráfico de soluciones tiene una cantidad infinita de puntos de solución. En el caso de la representación algebraica, la cantidad m de ecuaciones siempre es menor o igual a la cantidad de variables n.

Si se da el caso en que m > n, entonces al menos m – n ecuaciones deben ser redundantes. Si m = n, y si las ecuaciones son consistentes, el sistema sólo tiene una solución; pero si m < n (esto representa la mayor parte de los PPL), entonces el sistema de ecuaciones producirá una infinidad de soluciones.

Ya se demostró como representar el espacio de soluciones de un programa lineal en forma algebraica. Entonces los candidatos para la solución óptima, que son los puntos esquina, se determinan con las ecuaciones lineales simultaneas como sigue: en un conjunto de m x n ecuaciones (m < n), si se igualan a cero n – m variables, y a continuación se despejan las m variables restantes de las m ecuaciones, la solución resultante, si es única, debe corresponder a un punto esquina del espacio de soluciones.

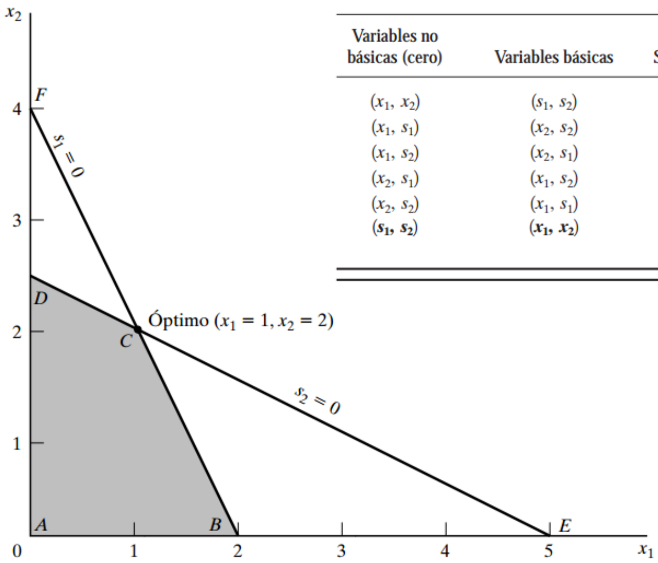
Es difícil determinar cuáles de las n – m variables se deben igualar a cero, para obtener determinado punto esquina. Es posible enumerar todos los posibles puntos esquinas del espacio de soluciones. Solo se debe tener en cuenta todas las combinaciones en las que n – m variables se igualan a cero, y se resuelven las ecuaciones que resulten. Una vez resueltas la solución óptima es el punto esquina factible que produce el mejor valor objetivo.

La cantidad máxima de puntos esquinas se puede calcular como:

$$C_m^n = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}$$

En la cual parte de estos puntos esquinas que se calculan pueden no ser factibles. Para hacer una transición completa hacia la solución algebraica necesitamos indicar los puntos esquinas por sus nombres algebraicos. En forma específica, las n – m variables que se igualan a cero se llaman **variables no básicas**. Si las m variables restantes tienen una solución única, se llaman **variables básicas** y su solución (al resolver las m ecuaciones) se llama **solución básica**.

Ejemplo:



Variables no básicas (cero)	Variables básicas	Solución básica	Punto esquina asociado	¿Factible?	Valor objetivo, z
(x_1, x_2)	(s_1, s_2)	(5, 4)	*A*	Sí	0
(x_1, s_1)	(x_2, s_2)	(4, −3)	*F*	No	—
(x_1, s_2)	(x_2, s_1)	(2.5, 1.5)	*D*	Sí	7.5
(x_2, s_1)	(x_1, s_2)	(2, 3)	*B*	Sí	4
(x_2, s_2)	(x_1, s_1)	(5, −6)	*E*	No	—
$(\mathbf{s_1}, \mathbf{s_2})$	$(\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2})$	**(1, 2)**	***C***	**Sí**	**8 (óptimo)**

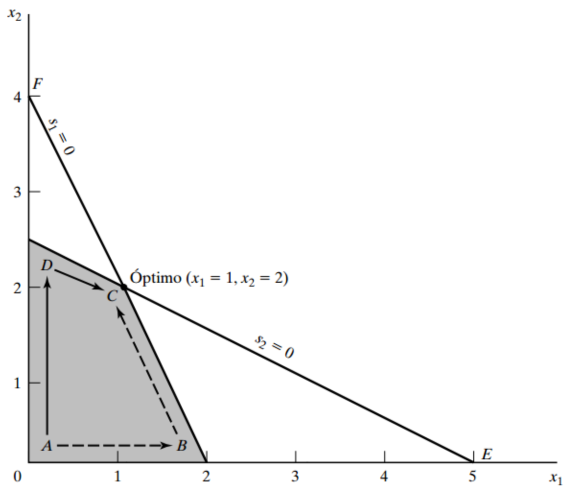
A medida que aumenta el tamaño del problema (esto es, a medida que m y n se hacen grandes), el problema de enumerar todos los puntos esquina es demasiado complicado, computacionalmente. Por ejemplo, para m = 10 y n = 20 sería necesario resolver $C_{10}^{20} = 184.756$ conjuntos de 10 x 10 ecuaciones.

El Método Simplex

Más que enumerar todas las soluciones básicas (puntos esquinas) del problema de programación lineal, el método simplex sólo investiga “unas pocas selectas” entre ellas.

Naturaleza iterativa del método simplex

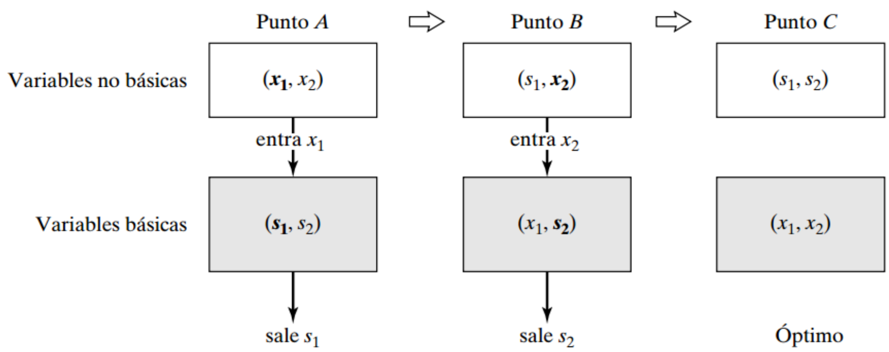
Normalmente, el método simplex comienza en el origen (punto A), donde $x_1 = x_2 = 0$. En este punto de inicio, el valor de la función objetivo z es cero, y la pregunta lógica es si ese valor mejora con un aumento en x_1 y/o x_2 no básicas respecto a sus valores actuales de cero. Esto se responde analizando la función objetivo. El diseño del método simplex se estipula aumentar las variables una por una.



Las iteraciones simplex siempre se mueven por los bordes del espacio de soluciones, y eso quiere decir que el método no puede atravesar ese espacio para ir en forma directa de un punto esquina a otro.

Es posible que nos preguntemos si hay una ruta específica para decidir cuál variable no básica (cero) debe aumentarse en determinado punto esquina. Sin embargo, el método simplex proporciona una regla definida, principalmente para facilitar el desarrollo de un programa de cómputo. En forma específica, como se está maximizando, **la variable que tenga el coeficiente positivo en la función objetivo más grande es la que se selecciona para aumentar**. Si hay un empate, la selección se hace en forma arbitraria. Téngase en cuenta que solo se trata de una regla fácil que, de acuerdo con la experiencia de cómputo, generalmente (pero no siempre) conduce a la menor cantidad de iteraciones.

Esta sección termina con una descripción de los cambios en las variables básicas y no básicas, a medida que el método simplex se mueve de un punto esquina al siguiente.



En la figura se puede ver que cuando se aumenta x_1 en el punto A respecto a cero (porque mejora el valor de z) se llega al punto de esquina B, con lo que cambia el estado de x_1 de no básica a básica. En forma simultánea, la variable s_1, que era básica en el punto A, se transforma en no básica y asume un valor cero en el punto B. De esta forma se produce un "intercambio" entre las variables para formar una nueva solución. Se dice entonces que en A, x_1 entra a la solución básica y s_1 sale de ella, o la deja. En la terminología del método simplex, x_1 y s_1 en el punto A se llaman variables de entrada y de salida.

Detalles del cálculo simplex

Se explicará los detalles de una iteración simplex, que incluyen las reglas para determinar las variables de entrada y salida, así como para detener los cálculos cuando se ha llegado a la solución óptima.

$$\text{Maximizar } z = 5x_1 + 4x_2 + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3 + 0s_4$$

sujeta a

$$\begin{aligned}
6x_1 + 4x_2 + s_1 &= 24 \quad \text{(materia prima } M1\text{)}\\
x_1 + 2x_2 + s_2 &= 6 \quad \text{(materia prima } M2\text{)}\\
-x_1 + x_2 + s_3 &= 1 \quad \text{(límite de demanda)}\\
x_2 + s_4 &= 2 \quad \text{(límite de demanda)}\\
x_1, x_2, s_1, s_2, s_3, s_4 &\geq 0
\end{aligned}$$

Siendo la función objetivo:

$$z - 5x_1 - 4x_2 = 0$$

La tabla simplex se puede expresar como sigue:

Básica	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	Solución	
z	1	−5	−4	0	0	0	0	0	Renglón z
s_1	0	6	4	1	0	0	0	24	Renglón s_1
s_2	0	1	2	0	1	0	0	6	Renglón s_2
s_3	0	−1	1	0	0	1	0	1	Renglón s_3
s_4	0	0	1	0	0	0	1	2	Renglón s_4

En el diseño de la tabla se especifica el conjunto de variables básicas y no básicas, y también se muestra la solución asociada con la iteración de inicio. Las iteraciones simplex comienzan en el origen $(x_1, x_2) = (0,0)$. En este caso se tiene:

Variables no básicas (cero): x1, x2
Variables básicas: s1, s2, s3, s4

Dado que las variables no básicas son las de decisión y al observar el arreglo especial 0-1 de los coeficientes de las variables básicas (s_1, s_2, s_3, s_4) en la tabla, se dispone de inmediato de la siguiente solución:

$$z = 0$$
$$(s_1, s_2, s_3, s_4) = (24, 6, 1, 2)$$

La tabla define el punto esquina actual especificando sus variables básicas y sus valores, así como el valor correspondiente para la función objetivo, z. Las variables no básicas (las que no aparecen en la lista Básicas) siempre son igual a cero.

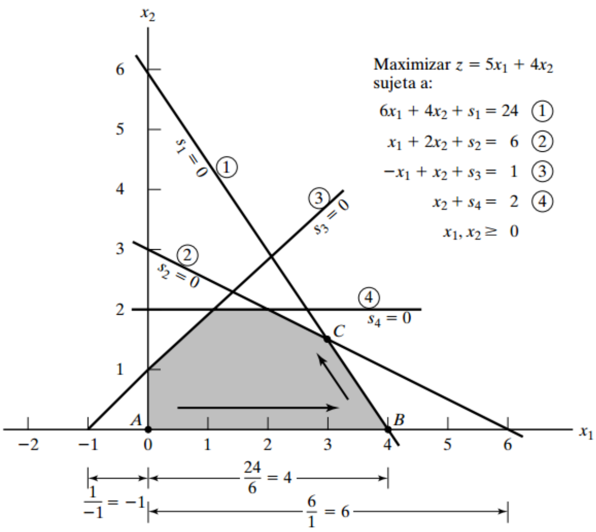
¿Es óptimo la solución de inicio? La variable no básica con el coeficiente más positivo en una función objetivo de maximización se selecciona para entrar a la solución básica, esto si la función objetivo esta expresado de manera estándar ($z = 5x_1 + 4x_2$).

Como la tabla simplex expresa la función objetivo en la forma $z - 5x_1 - 4x_2 = 0$, la variable de entrada es x_1, porque tiene el coeficiente más negativo en la función objetivo, que es de maximización. Si fuera el caso que todos los coeficientes de la función objetivo fueran ≥ 0, no sería posible mejorar z y eso querría decir que se habría llegado al óptimo.

Para determinar la variable de salida, en forma directa con la tabla, se calculan las intersecciones, coordenadas (x1) al origen, de todas las restricciones con la dirección no negativa del eje x1 (que es la variable de entrada). Esas intersecciones son las **razones** del lado derecho de las ecuaciones (columna *Solución*) entre los coeficientes de restricciones correspondientes, abajo de la variable x1.

Básica	Entra x_1	Solución	Razón (o intersección)
s_1	6	24	$x_1 = \frac{24}{6} = \mathbf{4} \leftarrow$ mínimo
s_2	1	6	$x_1 = \frac{6}{1} = 6$
s_3	-1	1	$x_1 = \frac{1}{-1} = -1$ (Ignorar)
s_4	0	2	$x_1 = \frac{2}{0} = \infty$ (Ignorar)

Como se ve en la figura siguiente las razones no negativas son iguales a las intersecciones en la dirección de x1 creciente. Las razones (intersecciones) que corresponden a s3 y s4 no se toman en cuenta, porque no limitan a x1 en la dirección no negativa.



La razón no negativa mínima corresponde a s1 básica, y quiere decir que esta es la variable de salida (su valor es cero en la nueva iteración). El valor de la variable de entrada x1 en la nueva solución también es igual a la razón mínima (x1 = 4).

Ahora se deben manipular las ecuaciones de la última tabla de modo que la columna *Básica* y la columna *Solución* identifiquen la nueva solución en el punto B. El proceso se llama **operaciones de renglón de Guass-Jordan**.

En la siguiente figura de la tabla de inicio se asocia a la **columna pivote** y al **renglón pivote** con las variables de entrada y de salida, respectivamente. A la intersección de la columna pivote con el renglón pivote se le llama **pivote** o **elemento pivote**.

	Básica	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	Solución	
	z	1	-5	-4	0	0	0	0	0	
←	s_1	**0**	**6**	**4**	**1**	**0**	**0**	**0**	**24**	**Renglón pivote**
	s_2	**0**	**1**	**2**	**0**	**1**	**0**	**0**	**6**	
	s_3	**0**	**−1**	**1**	**0**	**0**	**1**	**0**	**1**	
	s_4	**0**	**0**	**1**	**0**	**0**	**0**	**1**	**2**	
			Columna pivote							

Los cálculos de Gauss-Jordan necesarios para obtener la nueva solución básica son de dos tipos

1. *Renglón pivote*

Nuevo renglón pivote = Renglón pivote actual ÷ Elemento pivote

2. *Todos los demás renglones, incluyendo z*

Nuevo renglón = (Renglón actual) – (Su coeficiente en la columna pivote) × (Nuevo renglón pivote)

En el ejemplo:

1. **Nuevo renglón pivote x_1 = Renglón pivote s_1 actual ÷ 6**
2. **Nuevo renglón z = Renglón z actual – (–5) × Nuevo renglón pivote**
3. **Nuevo renglón s_1 = Renglón s_2 actual – (1) × Nuevo renglón pivote**
4. **Nuevo renglón s_3 = Renglón s_3 actual – (–1) × Nuevo renglón pivote**
5. **Nuevo renglón s_4 = Renglón s_4 actual – (0) × Nuevo renglón pivote**

Tabla resultante:

	Básica	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	Solución
	z	1	0	$-\frac{2}{3}$	$\frac{5}{6}$	0	0	0	20
	x_1	**0**	**1**	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$	**0**	**0**	**0**	**4**
←	s_2	**0**	**0**	$\frac{4}{3}$	$-\frac{1}{6}$	**1**	**0**	**0**	**2**
	s_3	**0**	**0**	$\frac{5}{3}$	$\frac{1}{6}$	**0**	**1**	**0**	**5**
	s_4	0	0	1	0	0	0	1	2

La última tabla identifica a x2 y s2 como las variables de entrada y salida, respectivamente. Al examinar la tabla se ve que no es óptimo, porque la variable no básica x2 tiene un coeficiente negativo en el renglón z. Por lo tanto es benéfico un aumento en x2 respecto a su valor actual de cero, porque hará aumentar el valor de z, y por consiguiente x2 es la variable de entrada.

Básica	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	Solución
z	1	0	0	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	0	0	21
x_1	0	1	0	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	0	0	3
x_2	0	0	1	$-\frac{1}{8}$	$\frac{3}{4}$	0	0	$\frac{3}{2}$
s_3	0	0	0	$\frac{3}{8}$	$-\frac{5}{4}$	1	0	$\frac{5}{2}$
s_4	0	0	0	$\frac{1}{8}$	$-\frac{3}{4}$	0	1	$\frac{1}{2}$

Como ninguno de los coeficientes del renglón z asociados con las variables no básicas s1 y s2 son negativos, esta última tabla es óptima.

La solución se puede leer de la siguiente manera:

Variable de decisión	Valor óptimo	Recomendación
x_1	3	Producir 3 toneladas diarias de pintura para exteriores
x_2	$\frac{3}{2}$	Producir 1.5 toneladas diarias de pintura para interiores
z	21	La utilidad diaria es $21,000

La tabla simplex muestra una gran cantidad de información adicional, que comprende:

1. El estado de los recursos.
2. El valor por unidad (precios duales) de los recursos.
3. Todos los datos necesarios para efectuar un análisis de sensibilidad con la solución óptima.

Si la variable de holgura es cero, el recurso se usa por completo, y el recurso es escaso. En caso contrario, una holgura positiva indica que el recurso es abundante.

Recurso	Variable de holgura	Estado o condición
Materia prima, *M1*	$s_1 = 0$	Escasa
Materia prima, *M2*	$s_2 = 0$	Escasa
Límite de demanda 1	$s_3 = \frac{5}{2}$	Abundante
Límite de demanda 2	$s_4 = \frac{1}{2}$	Abundante

En una minimización, la selección de las variables de salida es igual que en el caso de las maximización. Para la variable de entrada, ya que max z = min(-z), el caso de minimización selecciona la variable de entrada como la variable no básica con el coeficiente objetivo más positivo, y se llega a z mínima cuando todos los coeficientes del renglón z son no positivos.

Las reglas para seleccionar las variables de entrada y de salida se llaman condiciones de optimalidad y de factibilidad.

Condición de optimalidad

La variable de entrada en un problema de maximización (minimización) es la varaible no básica que tenga el coeficiente más negativo (positivo) en el renglón de z. Los empates se rompen en forma arbitraria. Se llega al óptimo en la iteración en la que todos los coeficientes de las variables no básicas en el renglón z son no negativos (no positivos).

Condición de factibilidad

En los problemas de maximización y de minimización, la variable de salida es la variable básica asociada con la mínima razón no negativa (con denominador estrictamente positivo). Los empates se rompen en forma arbitraria.

Los pasos del método simplex son los siguientes:

- **Paso 0.** Determinar una solución básica factible de inicio.
- **Paso 1.** Seleccionar una variable de entrada aplicando la condición de optimalidad. Detenerse si no hay variable de entrada; la última solución es la óptima.
- **Paso 2.** Seleccionar una variable de salida aplicando la condición de factibilidad.
- **Paso 3.** Determinar la nueva solución básica con los cálculos adecuados de Gauss-Jordan. Ir al paso 1.

Solución artificial de inicio

Los programas lineales en los que todas las restricciones son "≤" con lados derechos no negativos ofrecen una cómoda solución factible básica de inicio con todas las holguras. Los modelos donde intervienen restricciones del tipo "=" o "≥" no poseen esta propiedad.

El procedimiento para iniciar programas lineales "de mal comportamiento" con restricciones "=" y "≥" es permitir que variables artificiales desempeñen el trabajo de holguras en la primera iteración, para después, en alguna iteración posterior, desecharlas en forma legítima. Hay dos formas: el método M y el método de dos fases.

Método M

Este método comienza con la PL en forma de ecuación. Una ecuación i que no tenga una holgura se aumenta con una variable artificial, Ri, para formar una solución de inicio parecida a la solución básica con todas las holguras. Sim embargo, las variables artificiales son ajenas al modelo de PROGRAMACIÓN LINEAL, se utiliza un mecanismo para hacer como si esas variables nunca hubieran existido en primer lugar.

El resultado se obtiene penalizando las variables artificiales en la función objetivo. Dado M, un valor positivo suficientemente grande ($M \to \infty$), el coeficiente objetivo de una variable artificial representa una penalización adecuada si:

$$\text{Coeficiente objetivo de la variable artificial} = \begin{cases} -M, & \text{en problemas de maximización} \\ M, & \text{en problemas de minimización} \end{cases}$$

Al usar esta penalización, el proceso de optimización forzará en forma automática a las variables artificiales para que sean cero (siempre que el problema tenga solución factible).

Ejemplo:

$$\text{Minimizar } z = 4x_1 + x_2$$

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 &= 3 \\ 4x_1 + 3x_2 &\geq 6 \\ x_1 + 2x_2 &\leq 4 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\text{Minimizar } z = 4x_1 + x_2$$

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 \qquad\qquad &= 3 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 \qquad &= 6 \\ x_1 + 2x_2 \qquad + x_4 &= 4 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

Se agregan las variables artificiales R1 y R2:

$$\text{Minimizar } z = 4x_1 + x_2 + MR_1 + MR_2$$

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 \qquad + R_1 \qquad\qquad &= 3 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 \qquad + R_2 \qquad &= 6 \\ x_1 + 2x_2 \qquad\qquad\qquad + x_4 &= 4 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, R_1, R_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

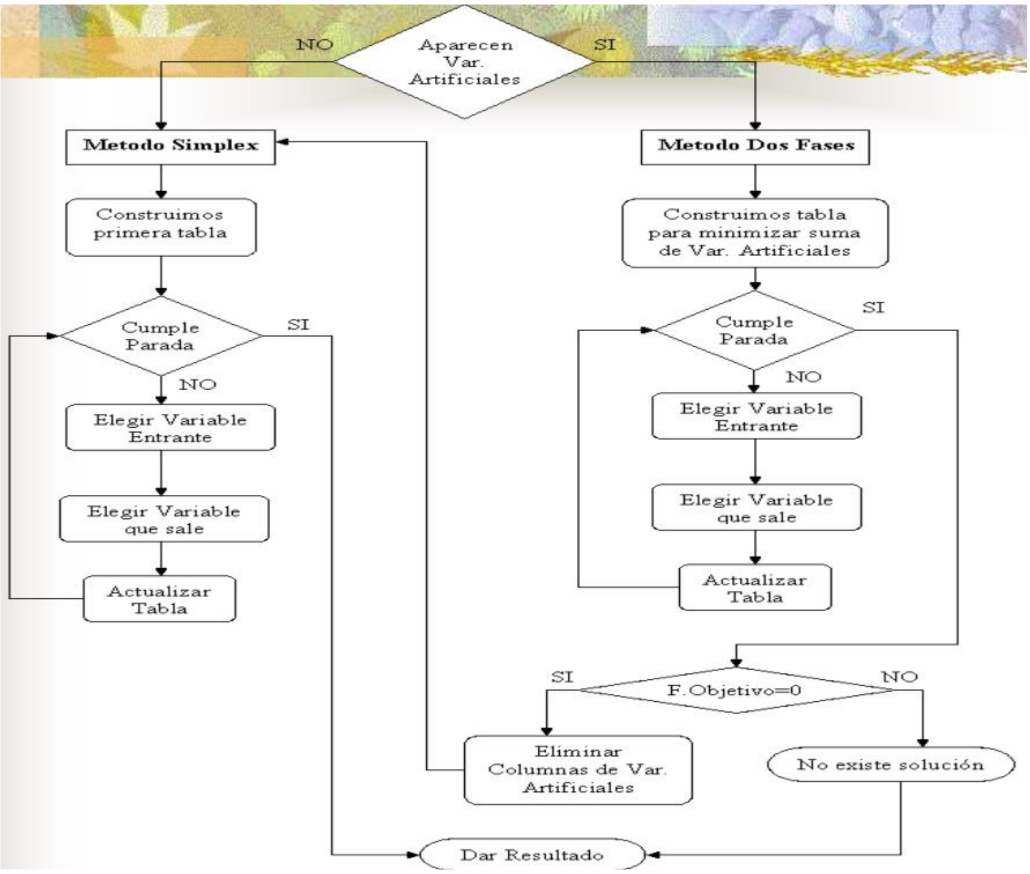
Básica	x_1	x_2	x_3	R_1	R_2	x_4	Solución
z	-4	-1	0	$-M$	$-M$	0	0
R_1	3	1	0	1	0	0	3
R_2	4	3	-1	0	1	0	6
x_4	1	2	0	0	0	1	4

Método de dos fases

Debido al impacto potencial adverso del error de redondeo sobre la exactitud del método M, donde se manipulan en forma simultánea coeficientes grandes y pequeños, el método de dos fases reduce el problema eliminando por completo la constante M. La primera fase trata de determinar una solución básica factible de inicio y, si se encuentra, se invoca la fase II para resolver el problema original.

Fase I. El problema se impone en forma de ecuación y se agregan a las restricciones las variables artificiales necesarias (exactamente como el método M) para asegurar una solución básica de inicio. A continuación se determina una solución básica de las ecuaciones resultantes, que minimice la suma de las variables artificiales. Si el valor mínimo de la suma es positivo, el PPL no tiene solución factible, y termina el proceso (una variable artificial positiva significa que no se satisface una restricción original). En caso contrario, se prosigue a la fase II.

Fase II. Se usa la solución factible de la fase I como solución factible de inicio para el problema original.



Ejemplo:

Fase I.

$$\text{Minimizar } r = R_1 + R_2$$

sujeta a

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 + R_1 &= 3 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 + R_2 &= 6 \\ x_1 + 2x_2 + x_4 &= 4 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, R_1, R_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

La tabla asociada es la siguiente:

Básica	x_1	x_2	x_3	R_1	R_2	x_4	Solución
r	0	0	0	−1	−1	0	0
R_1	3	1	0	1	0	0	3
R_2	4	3	−1	0	1	0	6
x_4	1	2	0	0	0	1	4

Como en el método M, se eliminan R1 y R2 por sustitución en el renglón de r, usando los siguientes cálculos:

$$\text{Nuevo renglón } r = \text{Renglón } r \text{ anterior} + [1 \times \text{Renglón } R_1 + 1 \times \text{Renglón } R_2)$$

Por lo tanto se obtiene la siguiente tabla:

Básica	x_1	x_2	x_3	R_1	R_2	x_4	Solución
r	0	0	0	−1	−1	0	0
x_1	1	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$-\frac{1}{5}$	0	$\frac{3}{5}$
x_2	0	1	$-\frac{3}{5}$	$-\frac{4}{5}$	$\frac{3}{5}$	0	$\frac{6}{5}$
x_4	0	0	1	1	−1	1	1

Como mínimo de r = 0, la fase I produce la solución factible de la tabla. Por lo tanto las variables artificiales ya cumplieron su misión y se puede eliminar de la tabla las columnas y pasar a la fase II.

Fase II. Después de eliminar las columnas artificiales, el problema original se escribe así:

$$\text{Minimizar } z = 4x_1 + x_2$$

Sujeto a

$$\begin{aligned} x_1 \quad + \tfrac{1}{5}x_3 \qquad &= \tfrac{3}{5} \\ x_2 - \tfrac{3}{5}x_3 \qquad &= \tfrac{6}{5} \\ x_3 + x_4 &= 1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

Y se continúa resolviendo normalmente.

La salida de las columnas de las variables artificiales al terminar la fase I sólo se hace cuando todas ellas sean no básicas. Sin embargo, es posible que las variables artificiales sigan siendo básicas pero a nivel cero al final de la fase I. En ese caso, esas variables forman, por necesidad, parte de la solución básica de inicio para la fase II.

En consecuencia, se deben modificar los cálculos en la fase II para asegurar que una variable artificial nunca se haga positiva durante las iteraciones en la fase II.

Las reglas para garantizar que una variable artificial que es cero al final de la fase I nunca se vuelva positiva durante la fase II, son las siguientes:

1. Si en la columna pivote el coeficiente de restricción correspondiente a la variable básica artificial es positivo, definirá el elemento pivote en forma automática (porque corresponde a la razón mínima de cero) y, como se busca, la variable artificial se vuelve no básica en la siguiente iteración.
2. Si el elemento de la columna pivote es cero, la siguiente iteración dejará la variable artificial inalterada, en el nivel cero.
3. Si el elemento de la columna pivote es negativo, la razón mínima no se asociará con la variable artificial básica (cero). En este caso, si la razón mínima resultante resulta ser positiva, la variable artificial asumirá un valor positivo en la siguiente iteración y se necesitará evitar que eso suceda de cualquier modo. Si se observa que la variable artificial está en el nivel cero, la eliminación de la solución básica no afectará la factibilidad de las variables básicas restantes.

Resumiendo, la regla de la fase II indica obligar a la variable artificial a salir de la solución básica en cualquier momento en que su coeficiente de restricción en la columna de pivote sea positivo o negativo. De hecho, esta regla se puede aplicar al final de la fase I, para eliminar las variables artificiales cero de la solución básica, antes de siquiera comenzar con la fase II.

Degeneración

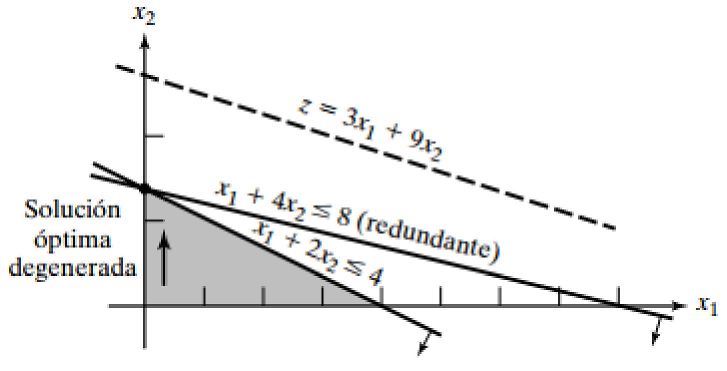
Al aplicar la condición de factibilidad del método simplex, se puede romper un empate en la razón mínima en forma arbitraria. Cuando se presenta un empate, al menos una variable básica será cero en la siguiente iteración, y se dice que la nueva solución es degenerada.

Dadas las siguientes iteraciones:

Iteración	Básica	x_1	x_2	x_3	x_4	Solución
0	z	-3	-9	0	0	0
entra x_2	x_3	1	4	1	0	8
sale x_3	x_4	1	2	0	1	4
1	z	$-\frac{3}{4}$	0	$\frac{9}{4}$	0	18
entra x_1	x_2	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{1}{4}$	0	2
sale x_4	x_4	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	1	0
2	z	0	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	18
(óptima)	x_2	0	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	2
	x_1	1	0	-1	2	0

En la iteración de inicio empatan x3 y x4 como variable de salida. Es la razón por la que la variable básica x4 es cero en la iteración 1, y se obtiene así una solución básica degenerada. Se alcanza el óptimo después de una iteración más.

La degeneración implica que una de las restricciones es redundante. En la práctica, el solo conocer que algunos recursos son superfluos puede ser valioso durante la implementación de la solución, como también permitir descubrir irregularidades en la construcción del modelo.



Desde el punto de vista teórico, la degeneración tiene dos implicaciones. La primera que es fenómeno de **ciclos** o **círculos**. Aunque hay métodos para eliminar los ciclos, éstos conducen a retardos drásticos en los cálculos.

El segundo aspecto teórico surge al examinar las iteraciones 1 y 2. Las dos, aunque difieren en la clasificación de las variables en básica y no básica, producen valores idénticos para todas las variables y el objetivo. No es posible detener los cálculos de una iteración cuando aparece la degeneración por primera vez aun cuando no sea óptima, ya que la solución puede ser **temporalmente** degenerada.

Identificando caso anómalos y soluciones

Obtención de la solución

Cuando se ha dado la condición de parada, obtenemos el valor de las variables básicas que están en la base y el valor óptimo que toma la función que están en la base mirando la columna de los términos independientes de cada restricción. En el caso que estemos minimizando, se multiplizará por "-1" el valor óptimo.

Infinitas soluciones

Cumplida la condición de parada, si se observa que alguna variable que no está en la base tiene un 0 en la fila Z, quiere decir que existe otra solución que da el mismo valor óptimo para la función objetivo. Si estamos ante este caso, estamos ante un problema que admite infinitas soluciones, todas ellas comprendidas dentro del segmento (o porción del plano, o región del espacio, dependiendo del número de variables del problema). Si se desea se puede hacer otra iteración haciendo entrar en la base a la variable que tiene el 0 en la fila Z, y se obtendrá otra solución.

Solución ilimitada

Si al intentar buscar la variable que debe abandonar la base, nos encontramos que toda la columna de la variable entrante tiene todos sus elementos negativos o nulos, estamos ante un problema que tiene solución ilimitada. No hay valor óptimo concreto, ya que al aumentar el valor de las variables se aumenta el valor de la función objetivo, y no viola ninguna restricción.

No existe solución

En el caso que no exista solución, seguro que se deberá realizar las dos fases, por lo que al término de la primera sabremos si estamos en tal situación.

Empate de variable entrante

Se puede optar por cualquiera de ellas, sin que afecte a la solución final, el inconveniente que presenta es que según por cual se opte se harán más o menos iteraciones. Se aconseja que se opte a favor de variables básicas, ya que son aquellas las que quedarán en la base cuando se alcance la solución con estos métodos.

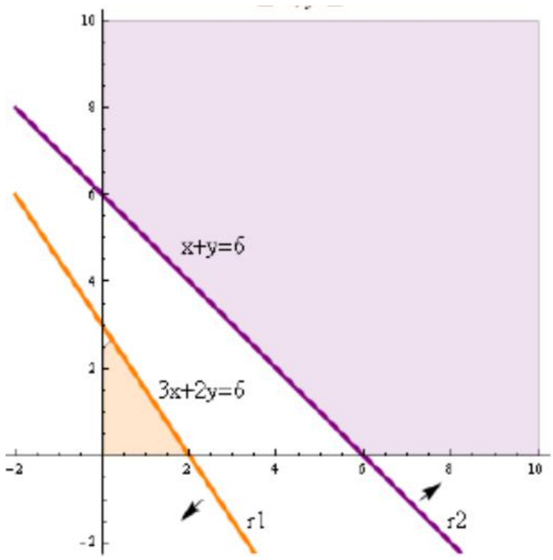
Curiosidad Fase I

Al finalizar la fase I, si el problema original tiene solución, todas la variables artificiales en la fila Z deben tener el valor "1".

Casos Especiales

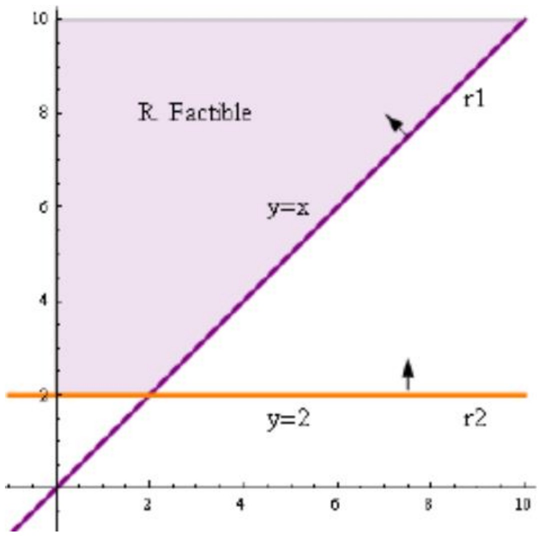
Problema infactible

Se trata de problemas en los que no se puede determinar la región factible, es decir no hay ningún punto que satisface todas las restricciones. Este caso suele presentarse cuando nos hemos equivocado al formular el problema lineal.



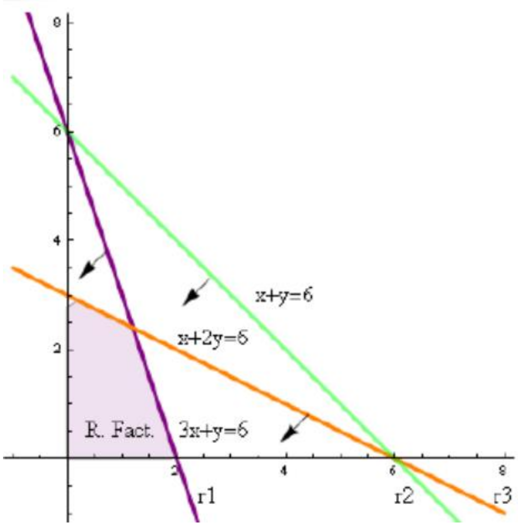
Región no acotada, pero objetivo acotado

Este caso se presenta cuando no es posible elegir un punto de la región factible como punto óptimo ya que siempre es posible encontrar otro punto que mejore el valor de la función objetivo obtenido con el punto anterior.



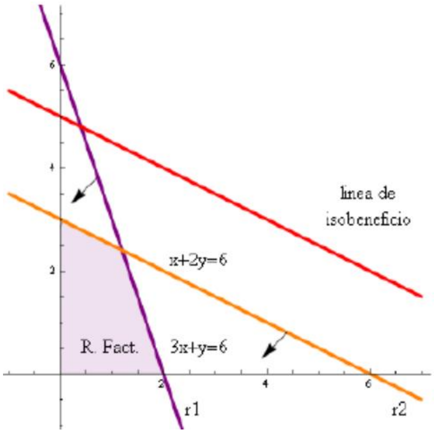
Problemas con restricciones redundantes

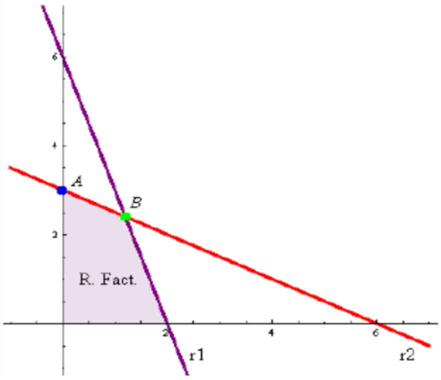
Este caso se prensenta cuando el problema tiene restricciones que no intervienen en la determinación de la región factible. Una restricción redundante no influye en la solución de un problema pero si puede dificultar su resolución ya que aumenta el tamaño del mismo.



Múltiples soluciones

Este caso se presenta cuando una de las restricciones es paralela a la función objetivo.





Hay infinitas soluciones óptimas en los puntos comprendidos dentro de la recta AB.

Conclusiones

Un PPL puede tener:

- 0 soluciones (si el problema es factible)
- 1 solución
- Infinitas soluciones

Lo que no es posible es que el problema tenga un número finito de soluciones diferentes de uno.

Representanción matricial del simplex

Se puede tener una visión más profunda de la teoría y del potencial del método simplex mediante el análisis de su forma matricial.

$$\text{Maximizar } z = \mathbf{CX}, \text{ sujeta a } \mathbf{AX} = \mathbf{b}, \mathbf{X} \geq \mathbf{0}$$

El problema se puede escribir en forma equivalente como sigue:

$$\begin{pmatrix} 1 & -\mathbf{C} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ \mathbf{X} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{b} \end{pmatrix}$$

Donde

- A: matriz de coeficientes tecnológicos.
- C: matriz vector fila de los coeficientes de la función objetivo.
- X: matriz vector fila de las variables de decisión.
- b: matriz vector columna de los recursos.

Supongamos que existe una base B tal que su determinante también existe, se obtendrá su matriz inversa B^{-1}, en donde $B^{-1}.B = I$, que es la matriz identidad que la asociamos a una solución de un problema de PROGRAMACIÓN LINEAL.

Es decir:

- B: matriz de elementos asociados a las variables que estan en la base (coeficientes tecnológicos).
- N: matriz de elementos asociados a las variables que NO estan en la base (coeficientes tecnológicos).
- C_B: vector fila de los coeficientes de la función objetivo asociados a la variable que esta en la base.
- C_N: vector fila de los coeficientes de la función objetivo asociados a la variable que NO esta en la base.

$C_N - C_B.B^{-1}.N$: coeficientes de las variables no básicas en la función objetivo.
$C_B.B^{-1}.b$: lado derecho de la fila z.

La base será factible si: $B^{-1} * b \geq 0$

Si la base es factible, este será óptimo si

- Si se maximiza: $C_N - C_B.B^{-1} \leq 0$.
- Si se minimiza: $C_N - C_B.B^{-1} \geq 0$.

Si se tiene que P_j es el j-ésimo vector de A, la columna de la tabla simplex asociada con la variable x_j se puede representar como sigue:

Básica	x_j	Solución
z	$\mathbf{C}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{P}_j - c_j$	$\mathbf{C}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$
$\mathbf{X}_B$	$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{P}_j$	$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$

Una propiedad importante de esta tabla es que la inversa B^{-1}, es el único elemento que cambia de un cuadro al siguiente, y que todo el cuadro se puede generar una vez conocido B^{-1}.

Costo de Oportunidad y Valor Marginal

Los indicadores $zj - cj$ tienen nombes especiales. Cuando el $zj - cj$ pertenece a un producto lo llamaremos **costo de oportunidad**, cuando pertenece a una holgura que mide el sobrante de un recurso, lo llamaremos **valor marginal**.

Costo de Oportunidad

Nos indica cuanto disminuirá el funcional si se fabrica una unidad de ese producto. Por supuesto, para aquellos productos que están en la base, el costo de oportunidad es cero, porque ya se estan fabricando.

Para aquellos productos que no están en la base, es decir su Xi vale cero, el costo de oportunidad puede ser

- ***Cero***: lo que indica soluciones alternativas, pues se tiene igual valor de funcional con dicha variable en la base que con la base actual, que no la contiene.
- ***Negativo***: una disminución negativa del funcional es un aumento del mismo, estamos en el caso en el que esa variable es cadidata de entrar en la base.
- ***Positivo***: si nos obligamos a producir una unidad de ese producto nuestro funcional disminuiría en un valor igual al producto entre la cantidad de unidades fabricadas y dicho costo de oportunidad.

Valor Marginal

El valor marginal de los recursos indica cuál sería el aumento del funcional si tuvieramos una unidad más de ese recurso disponible.

Entonces si se tuviera que pagar para obtener una unidad de ese recurso no se pagaría más de esa cifra porque sino se perdería dinero. Así, bien se ve porque el valor marginal de los recursos cuyas variables están en la base es igual a cero. Si están en la base es porque tienen sobrante y no se esta dispuesto a pagar por tener más de algo que en realidad nos sobra.

En el caso de los recursos saturados, cuyas variables no figuran en la base, el valor marginal puede ser:

- ***Cero*:** alternativas
- ***Negativo*:** candidato a entrar en la base.
- ***Positivo*:** se esta dispuesto a pagar ese valor marginal para obtener el recurso.

Análisis de Dualidad y Sensibilidad

INTRODUCCIÓN

La solución óptima de un problema lineal se basa en una toma instantánea de las condiciones que prevalecen en el momento de formular y resolver el modelo. En el mundo real, los ambientes de decisión rara vez permanecen estáticos, y es esencial determinar cómo cambia la solución óptima cuando cambian los parámetros del modelo.

Eso es el **análisis de sensibilidad**, proporciona técnicas de cómputo eficientes para estudiar el comportamiento dinámico de la solución óptima que resulta al hacer cambios en los parámetros del modelo. Para esto se utilizará la **teoría de dualidad** para presentar un tratamiento algebraico de este importante aspecto práctico.

El análisis de sensibilidad es una de las partes más importantes en la PL, sobre todo para la toma de decisiones; pues permite determinar cuándo una solución sigue siendo óptima, dados algunos cambios ya sea en el entorno del problema, en la empresa o en los datos del problema mismo.

Este análisis consiste en determinar qué tan sensible es la respuesta óptima del Método Simplex, al cambio de algunos datos como las ganancias o costos unitarios (coeficientes de la función objetivo) o la disponibilidad de los recursos (términos independientes de las restricciones).

La variación en estos datos del problema se analizará individualmente, es decir, se analiza la sensibilidad de la solución debido a la modificación de un dato a la vez, asumiendo que todos los demás permanecen sin alteración algún. Esto es importante porque estamos hablando de que la sensibilidad es estática y no dinámica, pues solo contempla el cambio de un dato a la vez y no el de varios.

OBJETIVO PRINCIPAL DEL ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD

Establecer un intervalo de números reales en el cual el dato que se analiza puede estar contenido, de tal manera que la solución sigue siendo óptima siempre que el dato pertenezca a dicho intervalo. Los análisis más importantes son:

1. Los coeficientes de la función objetivo.
2. Los términos independientes de las restricciones.
3. Los coeficientes de las restricciones.

DEFINICIÓN DEL PROBLEMA DUAL

El problema dual es una programación lineal definida en forma directa y sistemática a partir del modelo original (o primal) de programación lineal. Los dos problemas están relacionados en forma tan estrecha que la resolución óptima de un problema produce en forma automática la resolución óptima del otro.

Para definir el problema dual se requiere expresar el problema primal en forma de ecuaciones: todas las restricciones son ecuaciones, con lado derecho no negativo y todas las variables son no negativas. En consecuencia, todo resultado obtenido a partir de la solución primal óptima se aplican en forma directa al problema dual asociado.

Para mostrar cómo se forma el problema dual, se define el primal en forma de ecuación como sigue:

$$\text{Maximizar o minimizar } z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

sujeta a

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i,\ i = 1, 2, \ldots, m$$

$$x_j \geq 0,\ j = 1, 2, \ldots, n$$

Las variables x_j, $j = 1, 2, \ldots, n$, incluyen las variables excedentes, holguras y artificiales, si las hay.

Pasos:

1. Se define una variable dual por cada ecuación primal (restricción).
2. Se define una restricción dual por cada variable primal.
3. Los coeficientes de restricción (columna) de una variable primal definen los coeficientes en el lado izquierdo de la restricción dual, y su coeficiente objetivo define el lado derecho.
4. Los coeficientes objetivo del dual son iguales al lado derecho de las ecuaciones de restricción primal.

TABLA 4.1 Construcción del dual a partir del primal

	Variables primales						
	x_1	x_2	$\cdots$	x_j	$\cdots$	x_n	
Variables duales	c_1	c_2	$\cdots$	c_j	$\cdots$	c_n	
y_1	a_{11}	a_{12}	$\cdots$	a_{1j}	$\cdots$	a_{1n}	b_1
y_2	a_{21}	a_{22}	$\cdots$	a_{2j}	$\cdots$	a_{2n}	b_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
y_m	a_{m1}	a_{m2}	$\cdots$	a_{mj}	$\cdots$	a_{mn}	b_m
				↑ *j*-ésima restricción dual			↑ Coeficientes objetivo duales

Las reglas para determinar el sentido de la optimización, el tipo de restricción y el signo de las variables duales (siempre no restringido) se resumen en la siguiente tabla:

TABLA 4.2 Reglas para construir el problema dual

Objetivo del problema primal[a]	*Problema dual*		
	Objetivo	*Tipo de restricciones*	*Signo de variables*
Maximización	Minimización	≥	No restringido
Minimización	Maximización	≤	No restringido

[a] Todas las restricciones primales son ecuaciones con lado derecho no negativo, y todas las variables son no negativas.

Nótese que el sentido de la optimización en el dual siempre es el opuesto al del primal. Una forma fácil de recordar el tipo de restricción (es decir, ≤ o ≥) en el dual es que si el objetivo del dual es minimización (es decir, "apunta hacia abajo"), las restricciones son todas del tipo ≥ (es decir, "apuntan hacia arriba"). Cuando el objetivo del dual es maximización lo contrario es válido.

Ejemplo:

Ejemplo 4.1-1

Primal	Primal en forma de ecuación	Variables duales
Maximizar $z = 5x_1 + 12x_2 + 4x_3$	Maximizar $z = 5x_1 + 12x_2 + 4x_3 + 0x_4$	
sujeta a	sujeta a	
$x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 10$	$x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 10$	y_1
$2x_1 - x_2 + 3x_3 = 8$	$2x_1 - x_2 + 3x_3 + 0x_4 = 8$	y_2
$x_1, x_2, x_3 \geq 0$	$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$	

Problema dual

$$\text{Minimizar } w = 10y_1 + 8y_2$$

sujeta a

$$\begin{aligned} y_1 + 2y_2 &\geq 5 \\ 2y_1 - y_2 &\geq 12 \\ y_1 + 3y_2 &\geq 4 \\ \left.\begin{aligned} y_1 + 0y_2 &\geq 0 \\ y_1, y_2 \text{ sin restricción} \end{aligned}\right\} &\Rightarrow (y_1 \geq 0,\ y_2 \text{ sin restricción}) \end{aligned}$$

Ejemplo 4.1-2

Primal	Primal en forma de ecuación	Variables duales
Minimizar $z = 15x_1 + 12x_2$	Minimizar $z = 15x_1 + 12x_2 + 0x_3 + 0x_4$	
sujeta a	sujeta a	
$x_1 + 2x_2 \geq 3$	$x_1 + 2x_2 - x_3 + 0x_4 = 3$	y_1
$2x_1 - 4x_2 \leq 5$	$2x_1 - 4x_2 + 0x_3 + x_4 = 5$	y_2
$x_1, x_2 \geq 0$	$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$	

Problema dual

$$\text{Maximizar } w = 3y_1 + 5y_2$$

sujeta a

$$\begin{aligned} y_1 + 2y_2 &\leq 15 \\ 2y_1 - 4y_2 &\leq 12 \\ \left.\begin{aligned} -y_1 &\leq 0 \\ y_2 &\leq 0 \\ y_1, y_2 \text{ sin restricción} \end{aligned}\right\} &\Rightarrow (y_1 \geq 0,\ y_2 \leq 0) \end{aligned}$$

Ejemplo 4.1-3

Primal	Primal en forma de ecuación	Variables duales
	Sustituir $x_1 = x_1^+ - x_1^-$	
Maximizar $z = 5x_1 + 6x_2$	Maximizar $z = 5x_1^+ - 5x_1^- + 6x_2$	
sujeta a	sujeta a	
$x_1 + 2x_2 = 5$	$x_1^+ - x_1^- + 2x_2 = 5$	y_1
$-x_1 + 5x_2 \geq 3$	$-x_1^+ + x_1^- + 5x_2 - x_3 = 3$	y_2
$4x_1 + 7x_2 \leq 8$	$4x_1^+ - 4x_1^- + 7x_2 + x_4 = 8$	y_3
x_1 no restringida, $x_2 \geq 0$	$x_1^+, x_1^-, x_2 \geq 0$	

Problema dual

$$\text{Minimizar } z = 5y_1 + 3y_2 + 8y_3$$

sujeta a

$$\left.\begin{array}{r} y_1 - y_2 + 4y_3 \geq 5 \\ -y_1 + y_2 - 4y_3 \geq -5 \end{array}\right\} \Rightarrow (y_1 - y_2 + 4y_3 = 5)$$

$$2y_1 + 5y_2 + 7y_3 \geq 6$$

$$\left.\begin{array}{r} -y_2 \geq 0 \\ y_3 \geq 0 \\ y_1, y_2, y_3 \text{ sin restricción} \end{array}\right\} \Rightarrow (y_1 \text{ sin restricción, } y_2 \leq 0,\ y_3 \geq 0)$$

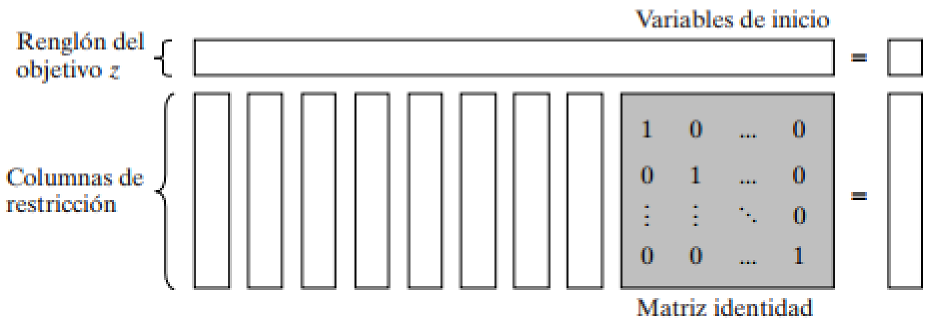
Las restricciones primera y segunda se sustituyen por una ecuación. La regla general en este caso es que una variable primal no restringida corresponde siempre a una restricción dual de igualdad. A la inversa, una ecuación primal produce una variable dual no restringida.

RELACIONES PRIMAL – DUAL

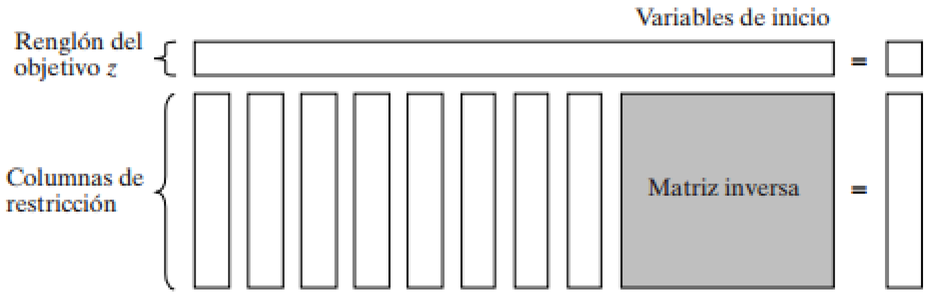
Los cambios que se hacen en el modelo original de programación lineal afectan a los elementos de la tabla óptima actual (el que se tenga en el momento), que a su vez pueda afectar la optimalidad y/o la factibilidad de la solución actual. Por esta razón estudiaremos cómo se recalculan los elementos de la tabla simplex óptimo para reflejar los nuevos cambios.

Planteamiento de la tabla Simplex

La figura siguiente es una representación esquemática de las tablas simplex de inicio y general. En la tabla de inicio, los coeficientes de las restricciones abajo de las variables de inicio forman una **matriz identidad**: todos los elementos de la diagonal principal iguales a 1 y fuera de la diagonal principal iguales a cero. Con este arreglo, las demás iteraciones de la tabla simplex, generadas con las operaciones de renglón de Gauss-Jordan modificarán los elementos de la matriz identidad para producir la llamada **matriz inversa**. La matriz inversa es la clave del cálculo de todos los elementos de la tabla simplex asociada.



(Tabla de inicio)



(Tabla general)

Solución dual óptima
Las soluciones primal y dual se relacionan en forma tan estrecha que la solución óptima del problema primal produce en forma directa (con unos pocos de cálculos adicionales) la solución óptima del dual. A continuación se describen dos métodos para calcular este resultado.

Método 1

$$\begin{pmatrix}\text{Valores óptimos}\\ \text{de las variables } \textit{duales}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{Vector renglón de los coeficientes}\\ \text{objetivos originales de las}\\ \text{variables básicas óptimas } \textit{primales}\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}\text{Inversa } \textit{primal}\\ \text{óptima}\end{pmatrix}$$

Los elementos del vector renglón de los coeficientes objetivos del primal original deben aparecer en el mismo orden que aparecen las variables básicas en la columna Básica de la tabla simplex.

Método 2
La solución dual óptima se puede determinar resolviendo las siguientes ecuaciones:

$$\begin{pmatrix}\text{Coeficiente } z\text{-}\textit{primal} \text{ óptimo (costo}\\ \text{reducido) de cualquier variable } x_j\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{Lado izquierdo de la}\\ j\text{-ésima restricción } \textit{dual}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\text{Lado derecho de la}\\ j\text{-ésima restricción } \textit{dual}\end{pmatrix}$$

Observe con cuidado que, como el dual del problema dual es en sí mismo el problema primal, los métodos presentados se pueden aplicar en forma simétrica para determinar la solución óptima del primal a partir de la del dual. Esto podría implicar ventajas de cómputo si la cantidad de variables en el primal fuera bastante menor que la cantidad de restricciones. Ya que la cantidad de cálculos simplex depende mucho de la cantidad de restricciones, en este caso es más eficiente resolver el dual, a partir del cual se pueda determinar entonces la solución del primal.

Cálculos con la tabla simplex
En esta sección se indica cómo se puede generar toda la tabla simplex en cualquier iteración, a partir de los datos originales del problema y la inversa asociada con la iteración. Usando la distribución de la tabla de la sección "planteamiento de la tabla simplex" se pueden dividir los cálculos en dos tipos:

1. Columnas de restricción (lados izquierdo y derecho).
2. Renglón objetivo z.

Cálculos de columnas de restricción. En cualquier iteración simplex, una columna del lado izquierdo o derecho se calcula como sigue:

$$\begin{pmatrix}\text{Columna de restric-}\\ \text{ción en iteración } i\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{Inversa en la}\\ \text{iteración } i\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}\text{Columna original}\\ \text{de restricción}\end{pmatrix} \qquad (\textit{Fórmula } 1)$$

Cálculos del renglón objetico z. En cualquier iteración simplex, el coeficiente de x_j en la función objetivo se calcula como sigue:

$$\begin{pmatrix}\text{Coeficiente de la variable}\\ x_j \text{ en la ecuación } \textit{primal}\\ \text{de } z \text{ (costo reducido)}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{Lado izquierdo de}\\ \text{la restricción } \textit{dual}\\ \text{correspondiente}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\text{Lado derecho de}\\ \text{la restricción } \textit{dual}\\ \text{correspondiente}\end{pmatrix} \qquad (\textit{Fórmula } 2)$$

La fórmula 2 es igual a la que se usó anteriormente en el método 2.

Valor objetivo primal y dual
En los problemas primal-dual, si uno es de maximización el otro debe ser de minimización. Desde este punto de vista, los valores objetivo en los dos problemas se relacionan de la siguiente manera:

Para cualquier par de soluciones primales y duales *factibles*,

$$\begin{pmatrix}\text{Valor objetivo en el}\\ \text{problema de } \textit{maximización}\end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix}\text{Valor objetivo en el}\\ \text{problema de } \textit{minimización}\end{pmatrix}$$

En el óptimo, la relación es válida estrictamente como ecuación.

Obsérvese que la relación no especifica cuál problema es primal y cuál es dual. En este caso sólo importa el sentido de la optimización (maximización o minimización).

La relación indica que para todas las soluciones primales y duales factibles, el valor objetivo en el problema de minimización establece siempre una cota superior del valor objetivo en el problema de maximización. **Dado que las iteraciones sucesivas del problema de maximización obtienen valores crecientes de z, y las del problema de minimización obtienen valores decrecientes de w, al final, en el curso de las iteraciones, se llegará a un punto de equilibrio donde los valores objetivo de maximización y de minimización deben ser iguales; esto es, z=w**.

INTERPRETACIÓN ECONÓMICA DE LA DUALIDAD

El problema de programación lineal se puede considerar como modelo de asignación de recursos, en el que el objetivo es maximizar los ingresos o las utilidades, sujetos a recursos limitados. Si se aprecia el problema desde este punto de vista, el problema dual asociado ofrece interpretaciones económicas interesantes del modelo de programación lineal de asignación de recursos.

Para formalizar la descripción se considerará la siguiente representación de los problemas generales primal y dual, en donde el primal asume el papel de un modelo de asignación de recursos:

Primal	Dual
Maximizar $z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$	Minimizar $w = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$
sujeta a	sujeta a
$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i,\ i = 1, 2, \ldots, m$	$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j,\ j = 1, 2, \ldots, n$
$x_j \geq 0,\ j=, 2, \ldots, n$	$y_i \geq 0,\ i = 1, 2, \ldots, m$

Desde el punto de vista de modelo de asignación de recursos, el problema primal tiene n actividades económicas y m recursos. El coeficiente c_j del primal representa la utilidad por unidad de actividad j. El recurso i, cuya disponibilidad máxima es b_i, se consume con la tasa de a_{ij} unidades por unidad de actividad j.

Interpretación económica de las variables duales

En la sección anterior se indicó que para dos soluciones factibles primal y dual cualquiera, los valores de las funciones objetivo, cuando son finitos, deben satisfacer la siguiente desigualdad:

$$z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \leq \sum_{i=1}^{m} b_i y_i = w$$

La igualdad estricta, z = w, es válida cuando las soluciones primal y dual son óptimas ambas.

Se examinará primero la condición óptima z = w. Como el problema primal representa un modelo de asignación de recursos, se puede imaginar que z representa la utilidad monetaria. Teniendo en cuenta que la utilidad es lo mismo que los ingresos. Por lo tanto se puede expresar:

$$z = w$$

$$z = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

$$\$ = \sum_{i} (\text{unidades del recurso } i) \times (\$ \text{ por unidad del recurso } i)$$

Eso quiere decir que las variables duales y_i representan el **valor por unidad** de recurso i. En las publicaciones, las variables y_i se conocen con el nombre abstracto de **precios duales**. Otros nombres son **precios sombra** y **multiplicadores simplex**.

Con la misma lógica, la desigualdad z < w asociada con dos soluciones asociadas, primal y dual, se interpreta como sigue:

$$(\text{Utilidad}) < (\text{Valor de los recursos})$$

Según esta relación, siempre que los ingresos totales por todas las actividades sean menores que el valor de los recursos, las soluciones primal y dual correspondientes no son óptimas.

La optimalidad (retorno máximo) sólo se alcanza cuando se han explotado los recursos por completo, lo que sólo puede suceder cuando los datos (valor de los recursos) son iguales a los resultados ($ de utilidad). En términos económicos se dice que el sistema permanece inestable (no óptimo) cuando los datos (valor de los recursos) son mayores que el resultado (retorno o ingreso). La estabilidad sólo se obtiene cuando las dos cantidades son iguales.

Interpretación económica de restricciones duales

Se pueden interpretar las restricciones duales, usando la fórmula 2 mencionada anteriormente, que indica que en cualquier iteración primal.

$$(\text{Coeficiente objetivo de } x_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i - c_j$$

La utilidad c_j por unidad de actividad j está en $ por unidad. Además, la cantidad $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i$ también debe estar en $ por unidad. Además, como c_j representa una utilidad, la cantidad $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i$, que aparece en la ecuación con signo contrario debe representar un costo.

$$\$ \text{ costo} = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i = \sum_{i=1}^{m} \begin{pmatrix} \text{Consumo del recurso } i \\ \text{por unidad de la actividad } j \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \text{Costo por unidad} \\ \text{del recurso } i \end{pmatrix}$$

Al mismo tiempo, como a_{ij} es la cantidad del recurso i que usa la actividad j, las variables duales y_i deben representar al **costo imputado** por unidad de recurso i y se puede considerar que la cantidad $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i$ es el *costo imputado de todos los recursos necesarios para producir una unidad de actividad j*.

$$(\text{Coeficiente objetivo de } x_j) = \begin{pmatrix} \text{Costo imputado de} \\ \text{recursos por unidad} \\ \text{de actividad } j \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \text{Utilidad por unidad} \\ \text{de actividad } j \end{pmatrix}$$

La condición de optimalidad de maximización del método simplex indica que un aumento en la cantidad de una actividad j no usada (no básica) puede mejorar la utilidad sólo en caso de que su coeficiente objetivo ($\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i - c_j$) sea negativo. En función de la interpretación anterior, esta condición establece:

$$\begin{pmatrix} \text{Costo imputado de} \\ \text{recursos por unidad} \\ \text{de actividad } j \end{pmatrix} < \begin{pmatrix} \text{Utilidad por unidad} \\ \text{de actividad } j \end{pmatrix}$$

Así, la condición de optimalidad de maximización indica que es económicamente bueno aumentar una actividad a un valor positivo si su utilidad unitaria es mayor que su costo imputado unitario.

Se tiene que:

$$z_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i$$

Que representa el costo imputado de los recursos usados, por unidad de actividad j. La notación $z_j - c_j$ es el coeficiente objetivo de x_j en la tabla simplex y se llama con frecuencia **costo reducido** de la actividad j. En realidad, en algunos libros se usa $z_j - c_j$ para calcular en forma directa el coeficiente de la ecuación objetivo (en lugar de usar operaciones de renglón de Gauss-Jordan).

OTROS ALGORITMOS SIMPLEX PARA PROGRAMACIÓN LINEAL

En el algoritmo simplex de la unidad 2, el problema se inicia en una solución básica factible. Las iteraciones sucesivas siguen siendo básicas y factibles, pero avanzan hacia la optimalidad, hasta llegar al óptimo en la última iteración. A veces se llama método simplex primal a este algoritmo.

En esta sección se presenta dos algoritmos más: el simplex dual y el simplex generalizado.

En el simplex dual, la programación lineal se inicia en una solución básica que es (mejor que la) óptima, pero no es factible, y las iteraciones sucesivas siguen siendo básica y (mejores que la) óptima, a medida que se acercan a la factibilidad. En la última iteración se encuentra la solución factible (óptima).

En el método simplex generalizado se combinan los métodos simplex primal y dual en un solo algoritmo. Maneja problemas que comienzan siendo no óptimos y no factibles a la vez. En este algoritmo se asocian las iteraciones sucesivas con soluciones básicas (factibles o no factibles). En la iteración final la solución es óptima y no factible al mismo tiempo (suponiendo, claro está, que exista una).

Método dual simplex

Como en el método simplex (primal), la base el método simplex dual es que cada iteración siempre esté asociada a una solución básica. Las condiciones de optimalidad y factibilidad se establecen para preservar la optimalidad de las soluciones básicas y al mismo tiempo mover las iteraciones de la solución hacia la factibilidad.

Condición dual de factibilidad. La variable de salida x_r es la variable básica que tiene el valor más negativo (los empates se rompen en forma arbitraria). Si todas las variables básicas son no negativas, termina el algoritmo.

Condición dual de optimalidad. La variable de entrada se determina entre las variables no básicas, como la que corresponde a

$$\min_{\text{No básica } x_j} \left\{ \left| \frac{z_j - c_j}{\alpha_{rj}} \right|, \ \alpha_{rj} < 0 \right\}$$

Donde $z_j - c_j$ es el coeficiente objetivo del renglón z en la tabla, y α_{rj} es el coeficiente negativo de la restricción de la tabla, asociado con el renglón de la variable de salida x_r, y con la variable x_j no básica. Los empates se rompen arbitrariamente.

La condición de optimalidad dual garantiza que se mantendrá la optimalidad en todas las iteraciones.

Para que el inicio de una PL sea óptima y no factible a la vez, se deben satisfacer dos requisitos:

1. La función objetivo debe satisfacer la condición de optimalidad del método simplex primal.
2. Todas las restricciones deben ser del tipo "≤".

Por la segunda condición se requiere convertir toda "≥" a "≤", solo multiplicando ambos lados por (-1). Si en la programación lineal hay restricciones de "=" se puede reemplazar la ecuación con dos desigualdades. Por ejemplo:

$$x_1 + x_2 = 1$$

Equivale a

$$x_1 + x_2 \leq 1, x_1 + x_2 \geq 1$$

O bien

$$x_1 + x_2 \leq 1, -x_1 - x_2 \leq -1$$

Después de convertir todas las restricciones en "≤", la programación lineal tendrá una solución de inicio no factible si, y sólo si al menos uno de los lados derechos de las desigualdades es estrictamente negativo. En caso contrario, si z es óptima y ninguno de los lados derechos es negativo no habrá necesidad de aplicar el método simplex dual, porque la solución de inicio ya es óptima y factible.

Algoritmos simplex generalizado
El algoritmo simplex (primal) inicia siendo factible, pero no óptimo. El simplex dual comienza mejor que el óptimo, pero no factible. ¿Y si un modelo de programación lineal iniciara no óptimo y no factible al mismo tiempo? Hemos visto que el simplex primal tiene en cuenta la no factibilidad de la solución de inicio usando variables artificiales. En forma parecida, el simplex dual tiene en cuenta la no optimalidad usando restricciones artificiales.

Aunque esos procedimientos tienen por objeto ampliar el cómputo automático, los detalles pueden hacer perder de vista lo que realmente implica el algoritmo simplex, que es que la solución óptima de una programación lineal siempre se asocia con una solución de punto de esquina (o básica). Con base en esta observación el lector debería poder "adaptar" su propio algoritmo simplex para modelos de programación lineal que inician siendo no óptimos y no factibles a la vez.

El método simplex no es rígido. En las publicaciones abundan las variaciones del método simplex (por ejemplo, el método primal-dual, el método simétrico, el método entrecruzado y el método múltiplex) que dan la impresión que cada uno es distinto, cuando en realidad todos buscan una solución de punto esquina, con inclinación hacia los cálculos automáticos y quizá hacia la eficiencia de cómputo.

ANÁLISIS POST-ÓPTIMO O DE SENSIBILIDAD

El análisis de sensibilidad investiga el cambio de la solución óptima que resulta de hacer cambios en los parámetros del modelo de programación lineal.

La tabla siguiente contiene todos los casos posibles que pueden surgir en el análisis de sensibilidad, así como las acciones necesarias para obtener la nueva solución (suponiendo que exista):

Condición resultante de los cambios	Acción recomendada
La solución actual queda ótima y factible.	No es necesaria acción alguna.
La solución actual se vuelve no factible.	Usar el símplex dual para recuperar la factibilidad.
La solución actual se vuelve no óptima.	Usar el símplex primal para recuperar la optimalidad.
La solución actual se vuleve no óptima y no factible, al mismo tiempo.	Usar el método símplex generalizado para obtener una nueva solución.

<u>Cambios que afectan la factibilidad</u>

La factibilidad de la solución óptima en el momento sólo puede variar si 1) cambia el lado derecho de las restricciones, o 2) se agrega al modelo una restricción nueva. En ambos casos se tiene no factibilidad cuando al menos un elemento del lado derecho en la tabla óptima se hace negativo; esto es, una o más de las variables básicas actuales se vuelve negativa.

Cambios en el lado derecho. Estos cambios requieren volver a calcular el lado derecho de la tabla, usando la Fórmula 1:

$$\begin{pmatrix}\text{Nuevo lado derecho de}\\ \text{la tabla en la iteración } i\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{Inversa en}\\ \text{la iteración } i\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}\text{Nuevo lado derecho de}\\ \text{la iteración } i\end{pmatrix}$$

Recuerde que el lado derecho de la tabla expresa los valores de las variables básicas.

Intervalo de factibilidad de los elementos del lado derecho. Otra forma de examinar el efecto de cambiar la disponibilidad de los recursos (es decir, el vector del lado derecho) es determinar el intervalo para el cual la solución actual o del momento permanece factible.

Adición de nuevas restricciones. La adición de una nueva restricción a un modelo existente puede llevar a uno de los dos casos siguientes:

1. La nueva restricción es redundante, lo que quiere decir que se satisface con la solución óptima actual y, por consiguiente, se puede eliminar por completo del modelo.
2. La solución actual viola la nueva restricción, y en este caso se puede aplicar el método simplex dual para recuperar la factibilidad.

Observe que la adición de una nueva restricción, como en el caso 2, nunca puede mejorar el valor objetivo óptimo actual.

Cambios que afectan la optimalidad

Cambios en los coeficientes de la función objetivo. Esos cambios sólo afectan la optimalidad de la solución. Por consiguiente requieren recalcular los coeficientes del renglón z, con el siguiente procedimiento:

1. Calcular los valores duales con los métodos 1 y 2.
2. Usar los nuevos valores duales en la fórmula 2, para determinar los nuevos coeficientes en el renglón z.

Se presentarán dos casos:

1. El nuevo renglón de z satisface la condición de optimalidad, y la solución permanece sin cambio (sin embargo, el valor objetivo óptimo puede cambiar).
2. La condición de optimalidad no se satisface, y en ese caso se aplica el método simplex (primal) para recuperar la optimalidad.

Intervalo de optimalidad de los coeficientes objetivos. Otra forma de investigar el efecto de los cambios en los coeficientes de la función objetivo es calcular el intervalo para el que cada coeficiente individual mantenga la solución óptima actual. Esto se hace reemplazando el c_j actual con $c_j + d_j$, donde d_j representa la cantidad (positiva o negativa) de cambio.

Adición de una nueva actividad. La adición de una nueva actividad en un modelo de programación lineal equivale a agregar una nueva variable. En forma intuitiva, la adición de una nueva actividad sólo es deseable si es rentable, esto es, si mejora el valor óptimo de la función objetivo. Esta condición se puede verificar aplicando la fórmula 2, a la nueva actividad. Como esa nueva actividad no es todavía parte de la solución, se puede considerar como una variable no básica. Eso quiere decir que los valores duales asociados con la solución actual permanecen invariables.

Si la fórmula 2 indica que la nueva actividad satisface la condición de optimalidad, la actividad no es rentable. En caso contrario, es mejor tener en cuenta la nueva actividad.

El caso de agregar una actividad nueva también abarca al caso en el que se hicieron cambios en los usos de los recursos, en una actividad existente. En forma específica se puede considerar a x7 como si al principio tuviera un coeficiente de objetivo cero y uso cero de los tres recursos, y que esos valores cero se cambiaron a los nuevos valores que se dan para x7. Por esta razón no se describirá por separado el caso de cambiar los coeficientes de restricción de una variable existente.

TEOREMA DE HOLGURAS COMPLEMENTARIAS

Uno de los teoremas principales en la teoría de dualidad en Programación Lineal es el Teorema de Holguras Complementarias. Dicho teorema nos permite encontrar la solución óptima del problema dual cuando conocemos la solución óptima del problema primal (y viceversa) a través de la resolución de un sistema de ecuaciones conformado por las variables de decisión (primales y duales) y las restricciones (del modelo primal y dual).

La importancia de este teorema radica en que facilita la resolución de los modelos de optimización lineal, permitiendo a quién los resuelve buscar el modelo más sencillo para abordar (desde el punto de vista algorítmico) dado que de cualquier forma podrá obtener los resultados del modelo equivalente asociado (sea éste el modelo primal o dual).

Ejemplo:
Consideremos el siguiente modelo de Programación Lineal (en adelante primal) en 2 variables cuya solución óptima es X1 = 14/5 y X2 = 8/5 con valor óptimo z = 20,8.

$$MAX\ z = 4x_1 + 6x_2$$

S. A.

$$2x_1 + 4x_2 \leq 12$$
$$4x_1 + 3x_2 \leq 16$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

El modelo dual asociado al modelo primal es:

$$MIN\ w = 12y_1 + 16y_2$$

S. A.

$$2y_1 + 4y_2 \geq 4$$
$$4y_1 + 3y_2 \geq 6$$
$$y_1, y_2 \geq 0$$

Luego, el teorema de holguras complementarias plantea las siguientes relaciones:

$$(2x_1 + 4x_2 - 12)y_1 = 0$$
$$(4x_1 + 3x_2 - 16)y_2 = 0$$
$$(2y_1 + 4y_2 - 4)x_1 = 0$$
$$(4y_1 + 3y_2 - 6)x_2 = 0$$

Como sabemos X1 = 14/5 y X2 = 8/5 (solución básica factible óptima del modelo primal). Si reemplazamos estos valores de X1 e X2 en la tercera y cuarta ecuación generamos un sistema de ecuaciones de 2×2 en términos de Y1 y Y2 cuya solución corresponde a Y1 = 6/5 y Y2 = 2/5 (solución óptima del modelo dual). Si posteriormente evaluamos en la función objetivo del problema dual dicha solución obtenemos: w = 12(6/5) + 16(2/5) = 20,8 que es similar al valor óptimo del problema primal.

Siendo Y1 = 6/5 y Y2 = 2/5 una solución factible para el problema dual, ésta es la solución óptima de dicho problema.

Observaciones: Notar que la restricción 1 y 2 del problema primal son activas en el óptimo, es decir, se cumplen en igualdad. Esto permite descartar que Y1 y Y2 (variables duales asociadas a dichas restricciones) son iguales a cero. Si por ejemplo, la restricción 1 del modelo primal no fuese activa en el óptimo se podría afirmar que Y1 es igual a cero en el dual.

PROGRAMACIÓN LINEAL PARAMÉTRICA

La PL paramétrica es una extensión de los procedimientos de análisis de sensibilidad. Investiga el efecto de variaciones continuas predeterminadas en los coeficientes de la función objetivo, y el lado derecho de las restricciones, sobre la función óptima. En el análisis paramétrico se reemplazan la función objetivo ***C*** y lo vectores del lado derecho ***b*** por las funciones parametrizadas ***C(t)*** y ***b(t)***, siendo t el parámetro de variación.