Equação do calor

Lucas Monteiro (fc52849@alunos.fc.ul.pt)

Resolução da equação do calor em regime estacionário utilizando o método dos elementos finitos lineares, em formulação fraca com método de Garlekin e representando o problema na sua forma matricial. Comparação com a solução analítica.

Introdução

Neste trabalho pretende-se resolver o equação do calor para o regime estacionário de uma barra metálica unidimensional de tamanho $\boldsymbol{L}$ com coeficiente de difusão térmico α, tanto analiticamente como numericamente, e comparar os resultados. A barra está num meio em temperatura ambiente $\boldsymbol{T_a}$ e em contato com um reservatório de calor a temperatura $\boldsymbol{T_R}$ numa das suas extremidades.

Toma-se que $T_R > T_a$ logo a barra dissipa para o ambiente a energia que adquire do reservatório. Tanto o reservatório como o meio são considerados *infinitos*, ou seja, a sua temperatura vai se manter constante mesmo quando a barra transfere energia entre os sistemas.

$$\frac{\partial u(x)}{\partial t} = \alpha\Big(\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x^2}\Big) - \mu u(x) \tag{1}$$

A equação para a variação de temperatura é dada em (1), onde $\boldsymbol{u(x)} = T(x) - T_a$, sendo $\boldsymbol{T(x)}$ a temperatura da barra a uma distância $\boldsymbol{x}$ do reservatório, e μ a taxa de perda para a atmosfera. Considerando o estado estacionário obtém-se (2).

$$\frac{\partial u(x)}{\partial t} = 0 \;\Rightarrow\; \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x^2} = ku(x)\ ,\ \ \boldsymbol{k} = \frac{\mu}{\alpha} \tag{2}$$

Sabe-se que equações diferenciais da forma $u'' = ku$, $u \equiv u(x)$, apresentam solução analítica da forma:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x) = ku(x) \;\Rightarrow\; u(x) = Ae^{\sqrt{k}x} + Be^{-\sqrt{k}x}$$

Sabendo a forma da solução e definindo $k = 1$ e $T_R = 2T_a$ consegue-se, pela definição de u(x), calcular as, e o problema ás, condições de fronteira obtendo a solução analítica (3) do problema. A barra vai ter temperatura T_R em $x = 0$ e T_a em $x = L$, logo:

$$\begin{cases} u(0) = T_a \\ u(L) = 0 \end{cases} \Rightarrow\; u(x) = \Big(\frac{T_a}{e^{2L} - 1}\Big)(e^{2L-x} - e^x) \tag{3}$$

Para calcular o problema, de forma $u'' - u = 0$, numericamente vai ser utilizado o método do elementos finitos, que é um método numérico particularmente utilizado para resolver equações diferenciais parciais, nomeadamente problemas ás condições de fronteira.

Começa por expandir a função numa série de bases de funções $\boldsymbol{u_i(x)}$, no entanto para uma função ser equivalente á sua expansão, esta tem de ser infinita, o que corresponde a um problema de infinitas incógnitas, impossível de resolver numericamente.

Logo, o método aproxima $u(x)$ a $\boldsymbol{\tilde{u}(x)}$, subdividido o domínio do problema em $\boldsymbol{N+1}$ nodos distanciados por $\boldsymbol{\Delta} = \frac{L}{N}$, logo de espaço discretizado. Cada nodo é colocado em $\boldsymbol{x_i} = i \cdot \Delta$, logo, neste caso, o nodo $i = 0$ está na extremidade em contacto com o reservatório de calor e o nodo $i = N$ está em $x = L$. Quanto maior o N, ou menor o Δ, mais nodos terá o problema, logo mais próxima estará $\tilde{u}$ de u.

Deste modo consegue-se resolver o problema calculando os valores das incógnitas $\boldsymbol{a_i}$, que não dependem de x, definindo uma base de funções. A sua escolha é muito importante no método dos elementos finitos. Neste trabalho vão ser utilizadas funções lineares, nomeadamente funções triangulares de altura 1 e base 2Δ, pela simplicidade do cálculo das suas derivadas e por serem localizadas, ou seja um cálculo que se realize num certo elemento só vai depender do próprio ou dos adjacentes a ele.

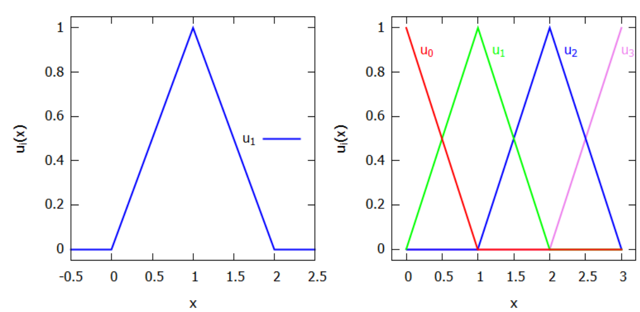

Figura 1. Gráfico de uma função triangular $u_1(x)$ e da base de funções $u_i(x)$ com $x \in [0, 3]$. Em ambas $\Delta = 1$.

As funções base são então deslocadas de modo a que a cada nodo i corresponda uma, como se observa na Figura 1. A expansão em série de $\tilde{u}(x)$ na base escolhida está representada em (4). No caso em estudo as soluções de a_i vão aproximar-se de $u(x_i)$.

$$\tilde{u}(x) = \sum_{i=0}^{N} a_i u_i(x)\ ,\ \ u_i(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{i-1}}{\Delta},\ x \in [x_{i-1}, x_i] \\ \frac{x_{i+1} - x}{\Delta},\ x \in [x_i, x_{i+1}] \\ \ 0\ \ ,\ x \notin [x_{i-1}, x_{i+1}] \end{cases} \tag{4}$$

A equação vai ser resolvida na sua formulação fraca, ou seja, a equação diferencial vai ser multiplicada por funções peso $\omega_j(x)$ e integrada no seu domínio, que é mais fácil de resolver. Também vai ser utilizado o método de Garlekin onde as funções peso são iguais ás da base.

$$\int_0^L [u'' - u]\omega_j(x)dx \overset{\omega_j \equiv u_j}{\approx} \sum_{i=0}^{N} a_i \int_0^L [u_i'' - u_i]u_j dx = 0$$

Nota-se que o integral pode ser representado na forma matricial e, integrando por partes de modo a reduzir a derivada de maior ordem, obtém-se (5).

$$\int_0^L [u_i''-u_i]u_j dx = [u_i'u_j]_0^L - \int_0^L u_i'u_j' dx - \int_0^L u_i u_j dx \Rightarrow$$

$$\sum_{i=0}^{N} a_i A_{ij} = 0\ ,\quad A_{ij} = -\int_0^L (u_i'u_j' + u_i u_j) dx \qquad (5)$$

Com $[u_i'u_j]_0^L = 0$, $\forall_{i,j}$, visto que u_i é localizada, ou seja, apenas os termos onde $j = i$ e $j = i \pm 1$ não são nulos. De (3) sabe-se as soluções dos nodos na fronteira, $a_0 = T_a$ e $a_N = 0$, logo, substituindo em $i = 0, N$ reduz-se o problema para (6), onde $\boldsymbol{b_j}$ é o conjunto dos resíduos.

$$\sum_{i=1}^{N-1} a_i A_{ij} = T_a\Big(\int_0^L u_0'u_j' dx + \int_0^L u_0 u_j dx\Big) = b_j \qquad (6)$$

Como u_i é localizada tem-se que $b_j = 0\ \forall_{i>1}$ e:

$$b_1 = T_a\Big(\int_0^\Delta \frac{-1}{\Delta}\frac{1}{\Delta} dx + \int_0^\Delta \frac{\Delta - x}{\Delta}\frac{x}{\Delta} dx\Big) = T_a\Big(\frac{\Delta}{6} - \frac{1}{\Delta}\Big)$$

Tem-se então um problema na forma matricial $A\vec{a} = \vec{b}$, com $N-1$ incógnitas a_i. Na matriz A apenas os elementos A_{ii} e $A_{ii\pm1}$ são não nulos e dados por:

$$A_{ii} = -\int_{x_{i-1}}^{x_i} \Big[\frac{1}{\Delta^2} + \Big(\frac{x - x_{i-1}}{\Delta}\Big)^2\Big] dx - \int_{x_i}^{x_{i+1}} \Big[\Big(\frac{-1}{\Delta}\Big)^2 + \Big(\frac{x_{i+1} - x}{\Delta}\Big)^2\Big] dx = -2\int_0^\Delta \Big(\frac{1}{\Delta^2} + \frac{y^2}{\Delta^2}\Big) dy = -2\Big(\frac{1}{\Delta} + \frac{\Delta}{3}\Big)$$

, onde $y = \pm(x_{i\pm1} - x)$ é a mudança de variável utilizada para calcular o integral entre x_i e $x_{i\pm1}$. Em $A_{ii\pm1}$ só se vai integrar num intervalo pois todos os outros são nulos:

$$A_{ii\pm1} = \mp\int_{x_i}^{x_{i\pm1}} \Big[\frac{-1}{\Delta}\frac{1}{\Delta} + \Big(\frac{x_{i\pm1} - x}{\Delta}\Big)\Big(\frac{x - x_i}{\Delta}\Big)\Big] dx$$

$$= -\int_0^\Delta \Big[\frac{-1}{\Delta^2} + \frac{y}{\Delta}\frac{\Delta - y}{\Delta}\Big] dy = \frac{1}{\Delta} - \frac{\Delta}{6}$$

Tem-se então todos os elementos necessários para calcular as soluções a_i, resolvendo a equação matricial (6) com os valores de A_{ij} e b_j obtidos.

1. Resolução numérica da equação do calor

Para descobrir a solução da equação matricial $A\vec{a} = \vec{b}$ foi utilizada a biblioteca *SparseLib++* no *C++*, que resolve este tipo de equações numericamente de uma maneira iterativa. Tem como parâmetros a matriz A e os vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$, que dependem de Δ logo de N e L; uma precisão ϵ e um número máximo de iterações $k_{\text{máx}}$.

Definiu-se $L = 10$ e calculou-se a solução analítica de u utilizando (3), para comparar com a solução numérica.

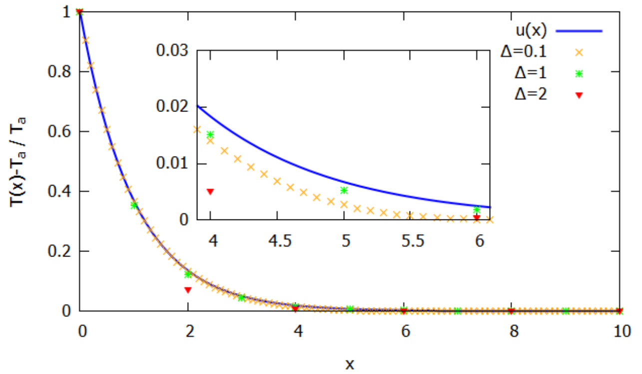

Figura 2. Comparação da solução de $u(x)$ analítica e numérica para $L = 10$ e diferentes Δ, com $\epsilon = 10^{-4}$ e $k_{\text{máx}} = 10^4$.

Calculou-se a solução numérica com $\epsilon = 10^{-4}$, $k_{\text{máx}} = 10^4$ e variando Δ. Parecia que as soluções de a_i eram semelhantes aos respetivos pontos na curva da solução analítica para Δs pequenos, no entanto uma análise mais profunda revelou que estes eram ligeiramente menores. Não se esperava este resultado no entanto resolveu-se a discrepância aumentando a precisão do solucionador matricial iterativo. Experimentou-se então calcular soluções para $\epsilon = 10^{-8}$ e Δs menores, mantendo $k_{\text{máx}}$. Os resultados estão representados nas Figuras 2 e 3.

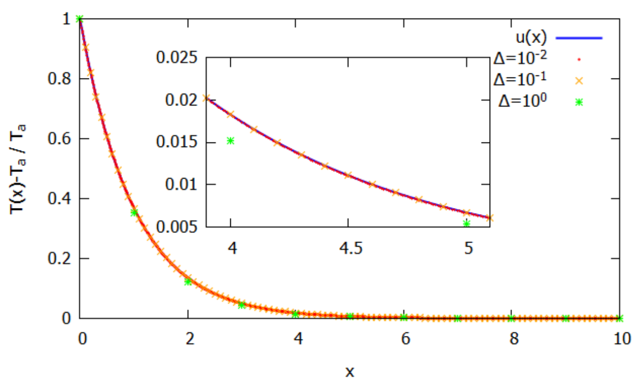

Figura 3. Comparação da solução de $u(x)$ analítica e numérica para $L = 10$ e diferentes Δ, com $\epsilon = 10^{-8}$ e $k_{\text{máx}} = 10^4$.

Conclusão

Resolveu-se numericamente de maneira eficiente e simples a solução da equação do calor em regime estacionário utilizando o método dos elementos finitos lineares. Para isso foi essencial escolher uma base de funções localizadas e admitir a equação na forma integral e, posteriormente, matricial de modo encontrar a solução de uma maneira iterativa, mais simples.

Ao comparar com a solução analítica conclui-se como esperado, que quanto mais o sistema é subdividido, maior a sua aproximação aos valores analíticos, tendo o cuidado de definir corretamente a precisão necessária.