Finanças Quantitativas: Lista 1

Lucas Machado Moschen

March 4, 2020

Problema 1.1

Assuma que $F_1(x)$ *e* $F_2(x)$ *são cdfs que satisfazem* $F_1(x) \leq F_2(x)$ *para todo* x.

1. *Qual das duas distribuições tem cauda inferior mais pesada? Explique.*

Resposta: Suponha que ambas as distribuições se extendem para $-\infty$. Se $X_i \sim F_i(x), i = 1, 2$, sabemos que $P[X_2 \leq \pi_p^{(2)}] = p = P[X_1 \leq \pi_p^{(1)}] \leq P[X_2 \leq \pi_p^{(1)}] \implies \pi_p^{(1)} \geq \pi_p^{(2)}$, onde $\pi_p^{(i)}$ é função quantil das distribuições $F_i(x), i = 1, 2$. Desta maneira, o quantil da primeira distribuição vai mais devagar para $-\infty$ e, portanto, a segunda curva tem cauda inferior mais pesada.

2. *Qual das duas distribuições tem cauda superior mais pesada? Explique.*

Resposta: Suponha que ambas as distribuições se extendem para ∞. Pelo mesmo argumento utilizado na primeira pergunta, podemos observar que quando $p \to 1$, o quantil da primeira curva cresce mais rapidamente e, consequentemente, a primeira curva terá causa superior mais pesada.

3. *Se estas duas distribuições são propostas para modelar o retorno de um dado portifolio no próximo mês e se você é perguntado para computar* $VaR_{0.01}$ *para este portifolio neste período, qual dessas duas distribuições resultaria o maior "value at risk".*

Resposta: Observe que se $P_{t+1}^i - P_t^i, i = 1, 2$ indica o retorno modeladado pela distribuição 1 e 2, respectivamente. Assim

$$P[P_{t+1}^2 - P_t^2 < -VaR_p^2] = p = P[P_{t+1}^1 - P_t^1 < -VaR_p^1] \leq P[P_{t+1}^2 - P_t^2 < -VaR_p^1]$$

Desta forma, como já observamos, $-VaR_p^2 \leq -VaR_p^1 \implies VaR_p^2 \geq VaR_p^1$ e obtemos que se calcularmos VaR_p utilizando a segunda distribuição, ele terá um resultado maior.

Problema 1.2

1. *Em R, gere uma* $N = 1024$ *amostras da distribuição exponencial com taxa* $r = 0.2$ *. Chame* X *o vetor com as amostras.* **Resposta:**

```r
# Gerando variável aleatória X:
U = runif(n = 1024, min = 0, max = 1)
# Usamos a universalidade da Uniforme e a distribuição F da exponencial
r = 0.2
```

```r
F <- function(x, r){
  return <-  1 - exp(-r*x)
}
invF <- function(x,r){
  return <- -1/r*log(1 - x)
}
X = invF(U,r)
print(X[0:10])
```

```
##  [1]  8.793111  5.327888  3.065792  0.776496  3.270815  1.129725 12.303119
##  [8]  5.627215  2.639249  6.810078
```

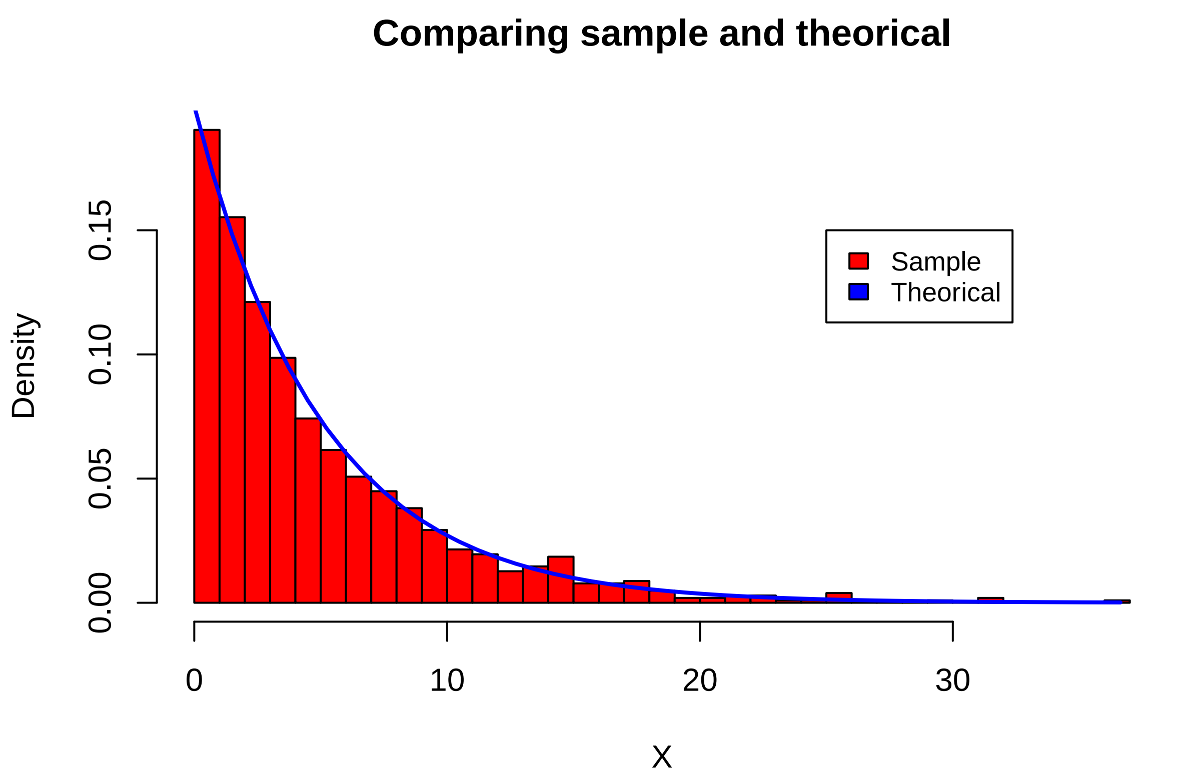
2. *Plote no mesmo gráfico a densidade exata de X e o histograma de X.*

Resposta:

```r
# Calculando o histograma
h <- hist(X, breaks = 30, freq = FALSE, col = 'red',
          main = 'Comparing sample and theorical')

xfit <- seq(0, max(X),length= 50)
# Calculando a distribuição exponencial
yfit <- dexp(xfit,rate = 0.2)

lines(xfit, yfit, col="blue", lwd = 2)
legend(25, 0.15, legend=c("Sample", "Theorical"),
       col=c("red", "blue"), fill = c('red', 'blue'), cex=0.8)
```

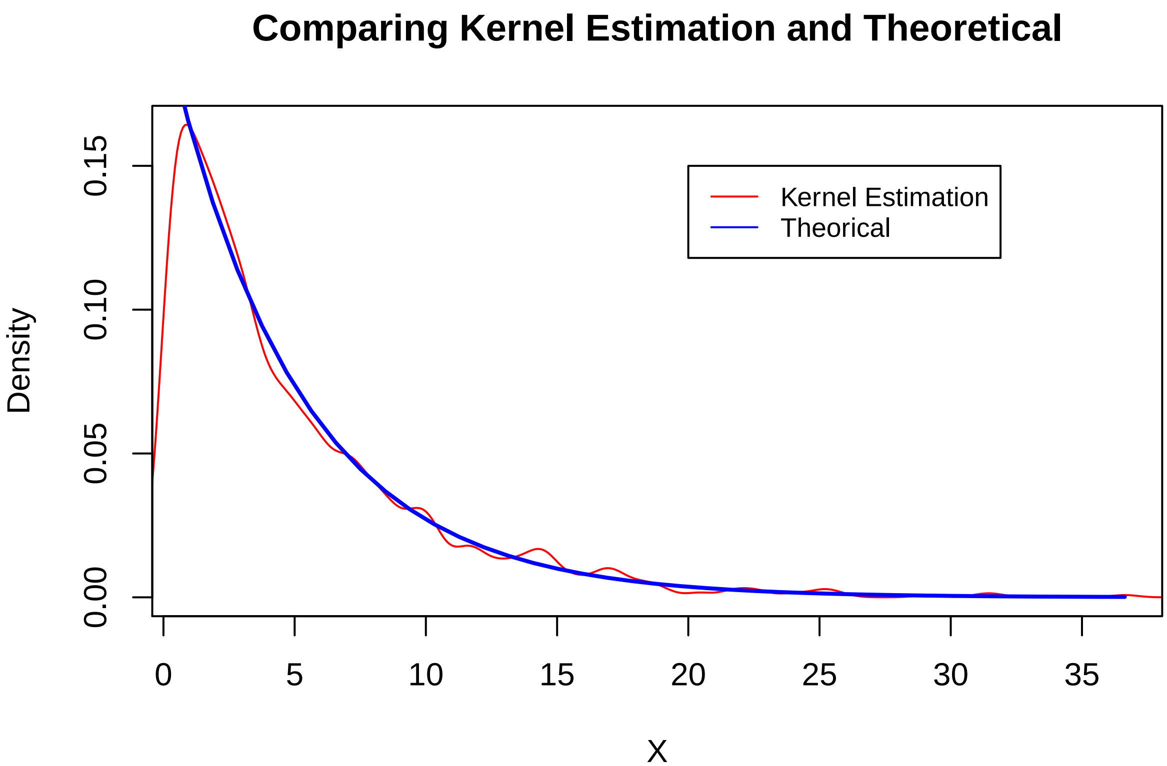


3. *Plote no mesmo gráfico a densidade exata de X e uma estimativa da densidade kernel de X.*

```
xfit <- seq(0, max(X),length= 40)

# A distribuição exponencial
yfit <- dexp(xfit,rate = 0.2)
# A estimação da densidade kernel
yden <- density(X, bw = 0.5)
#Plotes
plot(yden$x, yden$y, col='red', xlim = c(1,max(X)), type = 'l',
     main = "Comparing Kernel Estimation and Theoretical",
     xlab = "X", ylab = "Density")
lines(xfit, yfit, col="blue", lwd = 2)

legend(20, 0.15, legend=c("Kernel Estimation", "Theorical"),
       col=c("red", "blue"), lty=1:1, cex=0.8)
```



4. *Compare os dois plotes e explique as razões das diferenças. Diga qual estimativa você prefere, e explique porquê.*

Resposta: Observe que tanto o histograma quanto a estimação kernel da densidade se utilizam dos N dados. O histograma pode ser escrito em forma de uma função kernel, só que uma descontínua, já que tem um valor caso x, o valor da função, e x_i, uma amostra, estão no mesmo bin, e 0 caso não estejam. No caso da estimação kernel, essa diferença é suave, bastando escolher uma função suave. Os saltos da aproximação no caso do histograma é determinado pelo número de bins, enquanto no caso da estimação kernel é o parâmetro "bandwidth", logo podemos ter uma função tão suave quanto queremos. Desta maneira, é preferível essa estimação kernel, pois suavizamos a função e podemos obter resultados mais precisos com a densidade almejada.

Problem 1.3

Dê a interpretação de cada um dos seguintes Q-Q-plots

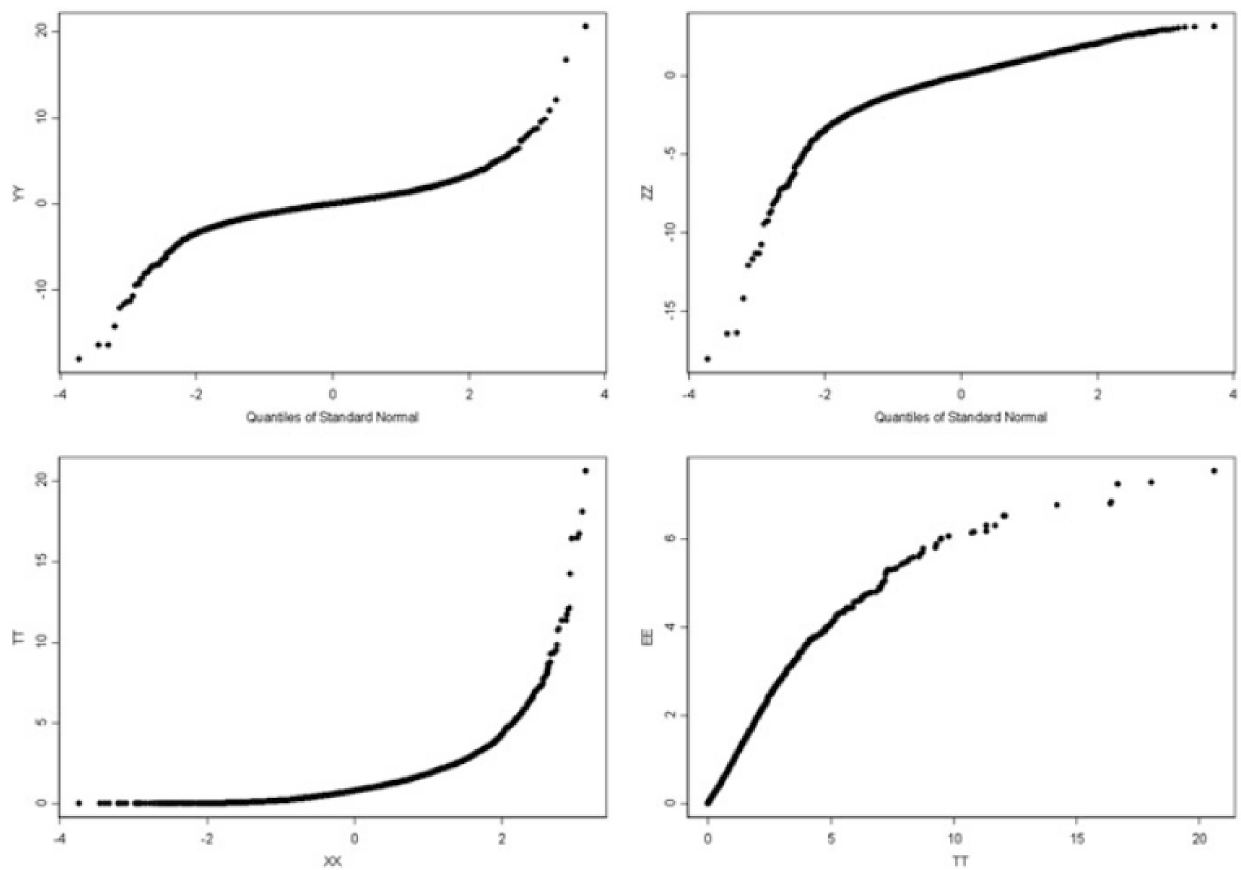


Figure 1: Q-Q-Plot obtidos como print da imagem do livro

Resposta:

1. Observe quando $p \to 0$, o plote está abaixo da diagonal, o que significa que a distribuição Normal tem cauda menos pesada do que a YY, pois a função quantil está mais lenta ao tender a $-\infty$. No mesmo sentido, quando $p \to 1$, a curva fica acima da diagonal, logo a função quantil de YY cresce mais rápido, e ela tem curva superior mais pesada. Além disso, a escala dos dois eixos é muito diferente.

2. Temos uma distribuição onde os q-quantis estão em grande parte na parte negativa, logo já podemos observar que essa distribuição esta deslocada para os valores negativos e, portanto, tem cauda mais pesada do que a Normal. O mesmo ocorre quando $p \to 1$, visto que o plote também está abaixo da diagonal. Assim, imagina-se qua distribuição tenha se deslocado para a esquerda e a normal tenha ficado com cauda mais pesada na parte superior.

3. Esse caso é oposto ao 2, o gráfico está quase todo a cima da diagonal, o que indica que quando $p \to 0$, a cauda da distribuição XX é mais pesada do que TT. Isso também é corroborado com

o fato de TT ser uma distribuição com suporte positivo, pelo menos sua grande parte de área. Entretanto, quando $p \to 1$, a distribuição de TT terá curva mais pesada, analogamente.

4. Neste último caso, vemos duas distribuições em suma com suporte positivo. A escala dos eixos, como de todas as anteriores, são bem diferentes. Nesse caso, a diagonal emcobre toda a curva, mas não faz tanto sentido em falar cauda inferior mais pesada. Já quando $p \to 1$, a distribuição TT é mais rápida, o que siginifica que ela é uma distribuição com cauda superior mais pesada.

Problema 1.4

1. *Articule propriedades das distribuições XX e YY que você pode inferir com esses plotes.*

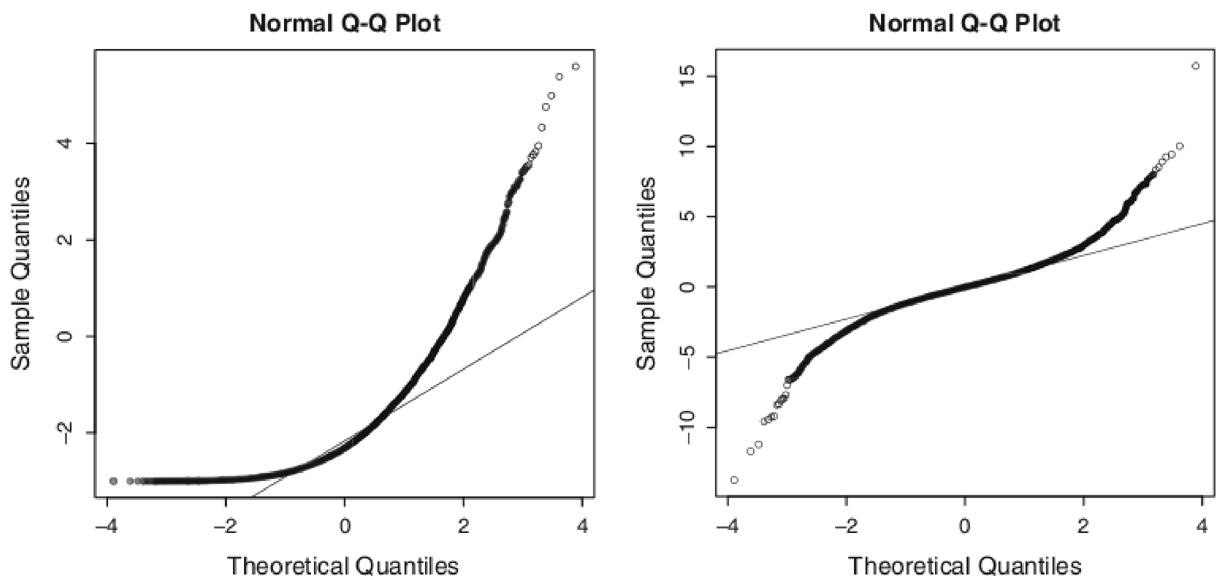


Figure 2: Q-Q-Plot obtidos como print da imagem do livro

Resposta:

- Distribuição XX: Primeiro podemos inferir que a escala da distribuição é similar a da normal, com alta probabilidade. Quando $p \to 0$, a curva está acima da reta $y = x$, logo podemos inferir que a distribuição normal tem cauda inferior mais pesada do que a distribuição em questão. Também podemos inferir que quando $p \to 1$, pela curva estar a cima da curva $y = x$, corrobora com o fato da distribuição ter cauda superior mais pesada do que a normal. (Observo que a reta plotada **não** é $y = x$.). Também podemos inferir que a distribuição esta concentrada em torno do quantil -2, já que quase metade metade da área da normal está concentrada ao redor desse ponto.

- Distribuição YY: Nesse caso já vemos uma grande diferença de escala das duas distribuições, o que indica que a normal é mais concentrada do que a distribuição YY. Também observamos que a cauda da da distribuição YY é mais pesada, tanto na parte inferior quando na parte superior. Por fim, observe que através da reta descrita no gráfico, existe um intervalo em que a curva pode ser praticamente descrita por uma reta. Isto significa que ao dobrar o quantil da normal, com a mesma área, dobraremos o quantil da distribuição, logo elas são semelhantes nessa intervalo, dada uma transformação linear.

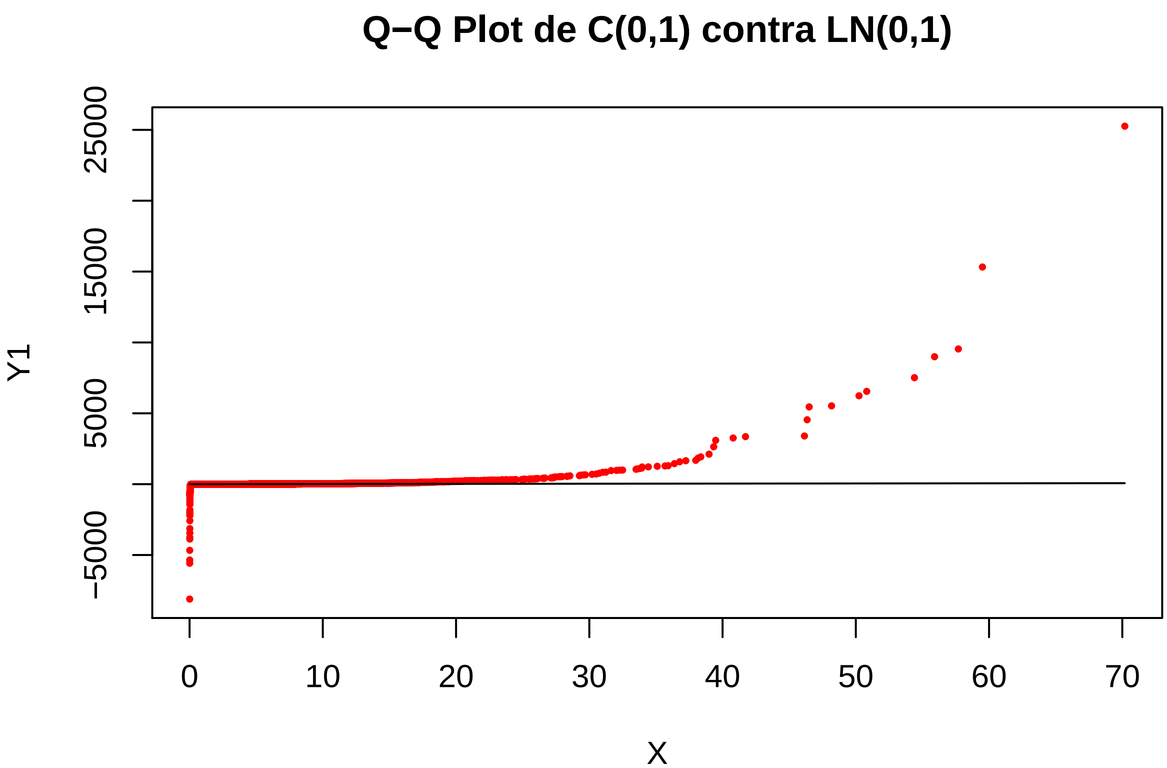
2. *Agora assuma que $x_1, x_2, ..., x_m$ e $y_1, y_2, ..., y_n$ são amostras univariadas de possivelmente duas distribuições diferentes. Em cada uma das seguintes situações, desenhe o Q-Q plote de Y contra X como dado pelo comando qqplot(X,Y) quando:*

```
X = rlnorm(100000, 0, 1)
Y1 = rcauchy(100000, 0, 1)
Y2 = rnorm(100000, 0, 1)
```

2.1 *$x_1, x_2, ..., x_m$ é uma amostra da distribuição log-normal $LN(0,1)$, e $y_1, y_2, ..., y_n$ é uma amostra da distribuição de Cauchy $C(0,1)$.*

Resposta:

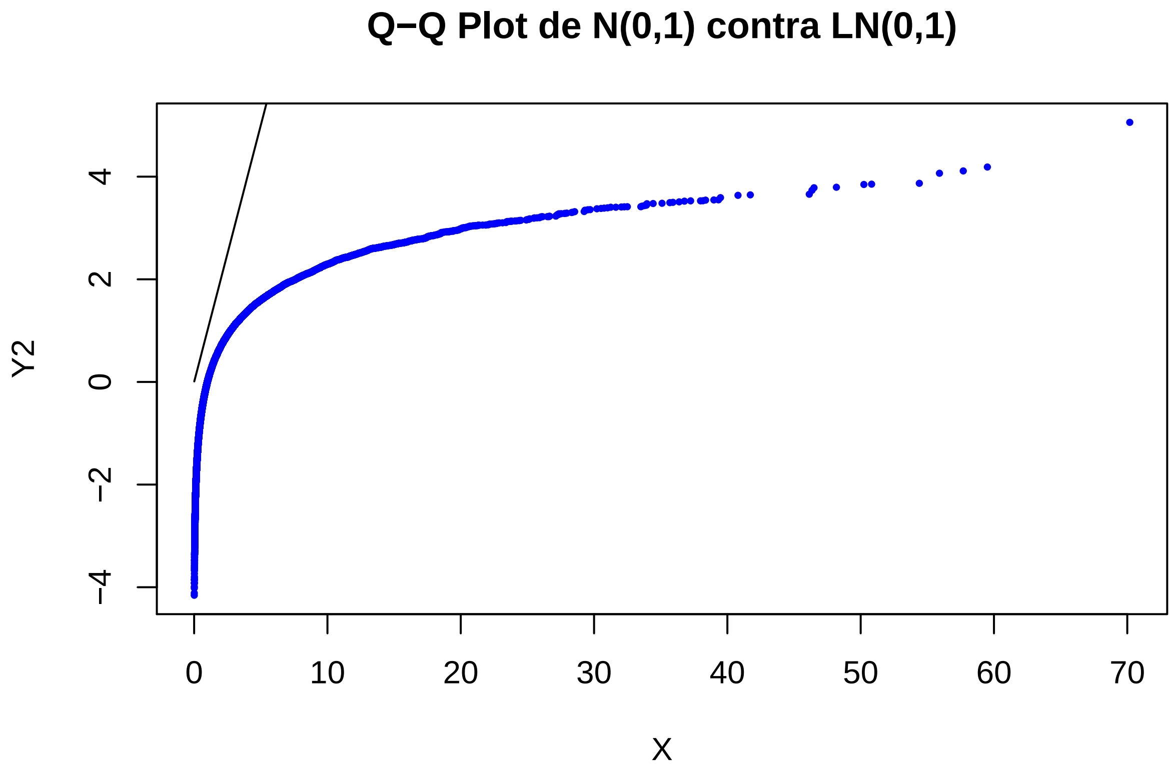
```
qqplot(X,Y1, main = 'Q-Q Plot de C(0,1) contra LN(0,1)', col = 'red', pch = 16, cex = 0.5)
x <- seq(min(X), max(X), 0.01)
lines(x,x)
```



2.2 *$x_1, x_2, ..., x_m$ é uma amostra da distribuição log-normal $LN(0,1)$, e $y_1, y_2, ..., y_n$ é uma amostra da distribuição de Gaussiana $N(0,1)$.*

Resposta:

```
qqplot(X,Y2,  main = 'Q-Q Plot de N(0,1) contra LN(0,1)', col = 'blue', pch = 16, cex = 0.5)
lines(x,x)
```



Problema 1.9