Finanças Quantitativas: Lista 5

Lucas Moschen

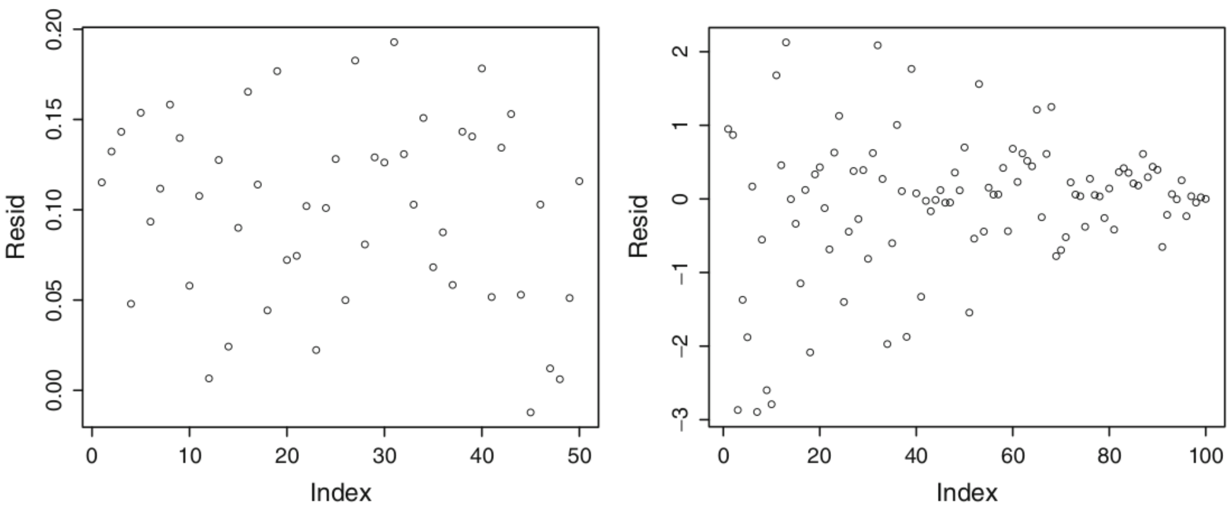
24 de maio de 2020

Exercício 1

Problema 4.1 (Carmona)

Item 1

Considere a seguinte imagem do livro.



Podemos observar que o plote da esquerda tem o eixo X marcado pelo índice de determinadas observações e o eixo Y valores, quase todos, estritamente positivos (com excessão aparente de um). Isso não é a característica de resíduos brutos, onde $\hat{\epsilon}_i = y - \hat{y}_i$, dado que a média desses resíduos é de longe 0. Como temos uma quantidade relativamente grande de observações e esperamos que os erros tenham média 0 ao modelarmos o erro quadrático, vemos que não é possível que esse plote represente isso.

Item 2

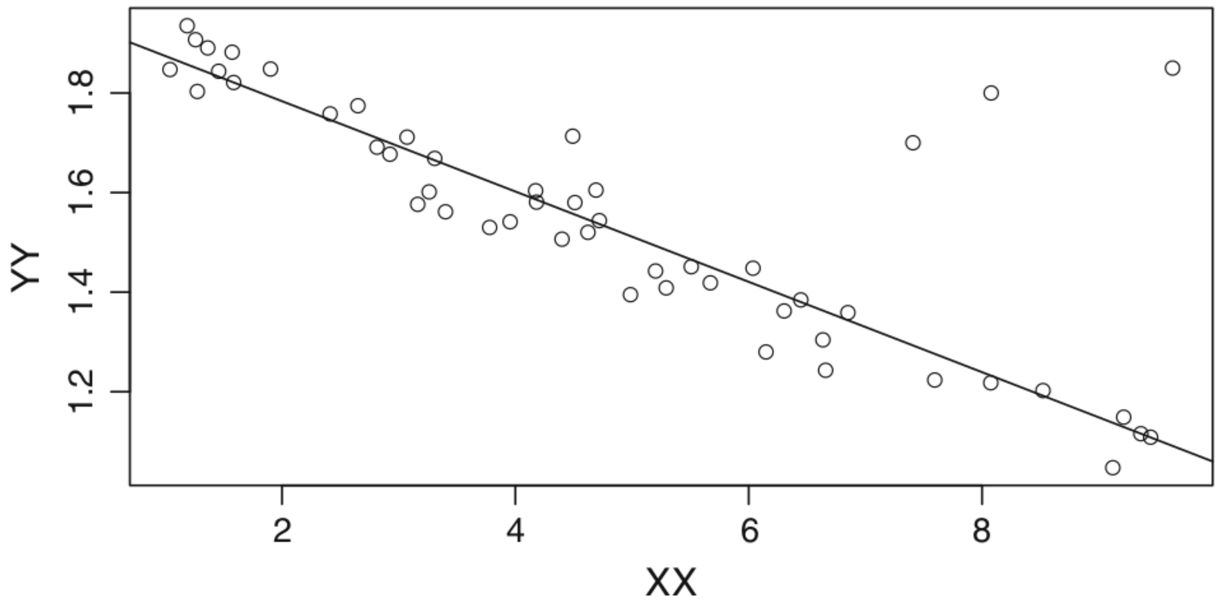
Ainda sobre a figura acima, obseve que quanto maior o índice, mais os resíduos se concentram em torno de 0. Como eles se concentram, podemos dizer, com base no gráfico que quanto maior o índice i, menor a variância em torno da média do resíduo. Conhecemos nesse capítulo que os resíduos tem desvio padrão

$$\sigma_{\epsilon_i} = \sigma\sqrt{1 - h_{i,i}}$$

Assim, $h_{i,i}$ tem um comportamento crescente em relação ao índice, isto é, a diagonal tem termos em uma sequência crescente.

Item 3

Agora considere essa imagem:



Parece-me que essa linha é uma **regressão linear com desvios absolutos**, visto que ela não se influencia tanto com os três *outliers* na parte de cima do gráfico. Isto acontece, pois a regressão $\mathcal{L}_1$ é menos sensível a *outliers*.

Problema 4.11 (Carmona)

Neste exercício, pretendemos analizar um exemplo de regressão não linear. Os dados são de uma droga *Puromycin* e possui uma tabela com três variáveis de um experimento biomédico em células, tratadas ou não. Denotamos y como a velocidade inicial da reação, enquanto x é a concentração da enzima. Pela relação de Michaelis-Menten, onde V_a é a velocidade assintótica e K uma constante:

$$y = \phi(x) = V_a \frac{x}{x + K}$$

Itens 1 e 2

```r
data("Puromycin", Puromycin)
attach(Puromycin)
y = Puromycin[state == "treated",]$rate
x = Puromycin[state == "treated",]$conc
plot(x,y, xlab = "Concentração da Enzima", ylab = "Velocidade de Reação (counts/min/min)",
    main = "Relação não linear")

y_fit = nls(y ~ Va*(x/(x + K)), start = c(Va = 200, K = 0.1))
print("These are the estimated parameters:")
```

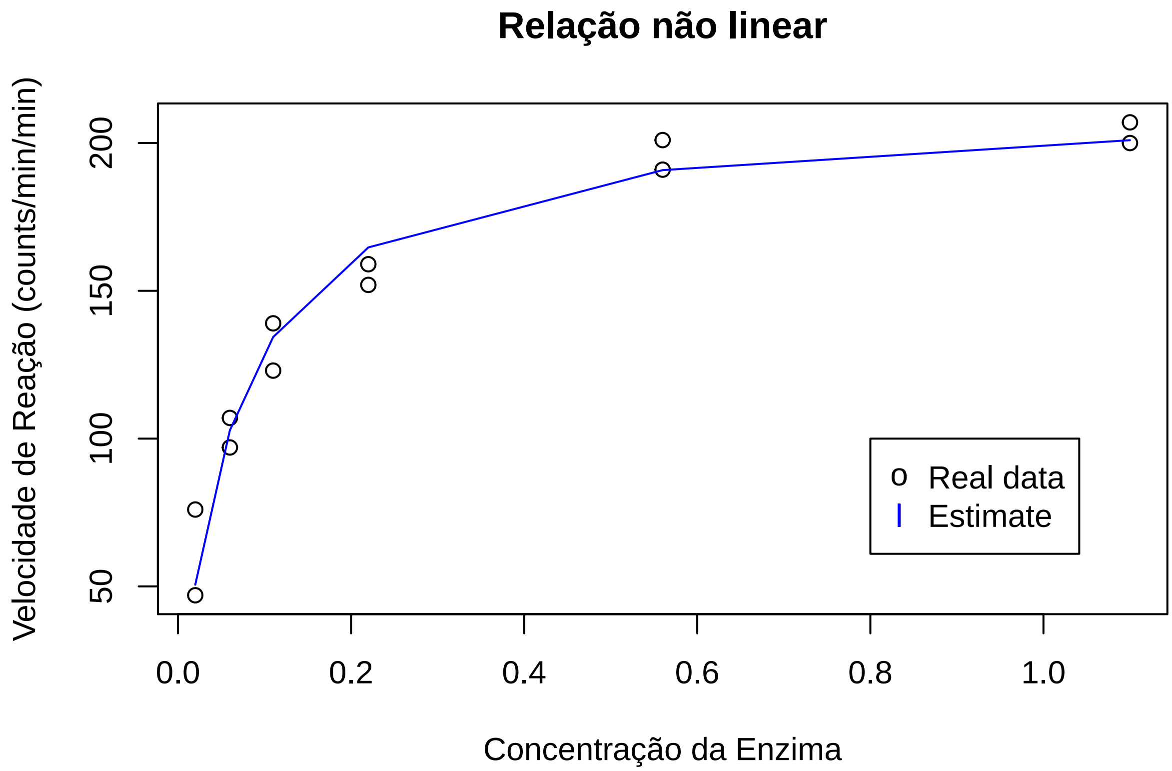
```
## [1] "These are the estimated parameters:"
```

```r
print(coef(y_fit))
```

```
##          Va           K
## 212.6836296   0.0641211
```

```r
lines(x, fitted(y_fit), col = "blue")

legend(0.8, 100, legend = c("Real data","Estimate"), pch = c("o","l"), col = c("black", "blue"))
```



Problema 4.12 (Carmona)

Nesse exercício, usadmos a família generalizada Vasicek para parametrizar o termo estrutural da taxa de juros. Definimos $Y_{GV}(x, \theta)$ como:

$$Y_{GC}(x, \theta) = \theta_1 - \theta_2\theta_4 \frac{1 - e^{-x/\theta_4}}{x} + \theta_3\theta_4 \frac{(1 - e^{-x/\theta_4})^2}{4x}$$

Item 1

Item 2

Item 3

Exercício 2

Considere o modelo de regressão linear múltipla:

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X}\beta + \epsilon$$

E o custo associado a β, que queremos minimizar, é:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_2(\beta) &= ||\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{X}\beta||^2 = \langle \boldsymbol{Y} - \boldsymbol{X}\beta, \boldsymbol{Y} - \boldsymbol{X}\beta \rangle \\
&= \langle \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Y} \rangle - 2\langle \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{X}\beta \rangle + \langle \boldsymbol{X}\beta, \boldsymbol{X}\beta \rangle \\
&= \langle \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Y} \rangle - 2\langle \boldsymbol{X}\beta, \boldsymbol{Y} \rangle + \langle \boldsymbol{X}\beta, \boldsymbol{X}\beta \rangle \\
&= \boldsymbol{Y}^T\boldsymbol{Y} - 2\beta^T\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{Y} + \beta^T\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{X}\beta
\end{aligned}$$

Para minimizar esse valor, primeiro procuramos os pontos críticos. Nesse caso, veja que a primeira expressão independe do vetor β e, portanto, sua derivada será 0. A segunda expressão, temos uma combinação dos elementos do vetor β, logo, ao derivar parcialmente em relação a cada valor, obtemos a expressão equivalente e, por isso, a derivação é linear. Na última expressão, veja que $\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{X}$ é uma expressão com os valores de β quadráticos e, portanto, a expressão se segue:

$$\frac{d}{d\beta}\mathcal{L}_2(\hat{\beta}) = -2\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{Y} + 2\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{X}\hat{\beta} = 0$$

Desta forma, como o posto de $\boldsymbol{X}$ é completo $\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{X}$ tem colunas linearmente independentes e é, portanto, invertível. Desta maneita, temos uma solução única e:

$$\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{X}\hat{\beta} = \boldsymbol{X}^T\boldsymbol{Y} \implies \hat{\beta} = (\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{Y}$$

Nesse obtemos que $\hat{\beta}$ é um ponto crítico. Para averiguar se é argumento mínimo, façamos:

$$\frac{d^2}{d\beta^2}\mathcal{L}_2(\hat{\beta}) = 2\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{X}$$

A matriz $\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{X}$ é simétrica e, $\forall x \in \mathbb{R}^{p+1}, x^T\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{X}x = \langle \boldsymbol{X}x, \boldsymbol{X}x \rangle \geq 0$ e será igual a 0 somente se $\boldsymbol{X}x = 0$. Como X tem posto completo, ele tem espaço anulado com dimensão 0 e, poranto, $anul(X) = \{0\}$ e, se $\boldsymbol{X}x = 0, x = 0$. Concluo, então que essa matriz é estritamente positiva e, desta maneira, $\hat{\beta}$ é de fato um mínimo da expressão.

Exercício 3

```r
library(BatchGetSymbols) # get financial data
```

Item a

Esses são os *trading symbols* das componentes que integram a Ibovespa, segundo a página oficial.

```r
df.ibov <- GetIbovStocks()
first.date <- Sys.Date() - 130
last.date <- Sys.Date() - 100

print(df.ibov$tickers)
```

```
##  [1] "ABEV3"  "AZUL4"  "B3SA3"  "BBAS3"  "BBDC3"  "BBDC4"  "BBSE3"  "BEEF3"
##  [9] "BPAC11" "BRAP4"  "BRDT3"  "BRFS3"  "BRKM5"  "BRML3"  "BTOW3"  "CCRO3"
## [17] "CIEL3"  "CMIG4"  "COGN3"  "CPFE3"  "CRFB3"  "CSAN3"  "CSNA3"  "CVCB3"
## [25] "CYRE3"  "ECOR3"  "EGIE3"  "ELET3"  "ELET6"  "EMBR3"  "ENBR3"  "ENGI11"
## [33] "EQTL3"  "FLRY3"  "GGBR4"  "GNDI3"  "GOAU4"  "GOLL4"  "HAPV3"  "HGTX3"
## [41] "HYPE3"  "IGTA3"  "IRBR3"  "ITSA4"  "ITUB4"  "JBSS3"  "KLBN11" "LAME4"
## [49] "LREN3"  "MGLU3"  "MRFG3"  "MRVE3"  "MULT3"  "NTCO3"  "PCAR3"  "PETR3"
## [57] "PETR4"  "QUAL3"  "RADL3"  "RAIL3"  "RENT3"  "SANB11" "SBSP3"  "SULA11"
## [65] "SUZB3"  "TAEE11" "TIMP3"  "TOTS3"  "UGPA3"  "USIM5"  "VALE3"  "VIVT4"
## [73] "VVAR3"  "WEGE3"  "YDUQ3"
```

Item b

Tomo os dados históricos do período de 100 dias anteriores ao dia 22 de maio de 2020 de cada uma das 75 ações da Ibovespa. Integro elas em uma lista que conterá também a informação dos dados do índice da Ibovespa.

```r
df <- BatchGetSymbols("^BVSP", first.date = first.date, last.date = last.date)
stocks <- data.frame(BVSP = df$df.tickers$price.close)

for (ticker in df.ibov$tickers) {
  tickerSA = paste(ticker, ".SA", sep = "")
  df <- BatchGetSymbols(tickerSA, first.date =   first.date, last.date = last.date)
  stocks <- cbind(stocks, df$df.tickers$price.close)
}

# Removing NA values
stocks <- stocks[complete.cases(stocks),]
```

Item c

```r
# Primeiro, vamos calcular os log-retornos de cada ação.
stocks <- data.frame(diff(log(as.matrix(stocks))))

# Vou supor que o portfolio de mercado é dado pelo índice da Ibovespa.
# Vou considerar a taxa de juros predominante nesse período e tomar o excess return.
r = 0.00018985
stocks <- stocks - r

# Renomear corretamente
names(stocks) <- append(c("BVSP"), df.ibov$tickers)

# Regressão Linear de Mínimos Quadrados
coefficients <- data.frame(BVSP = c(0,1))
for(i in 2:length(names(stocks))){
  model <- lsfit(stocks$BVSP, stocks[names(stocks)[i]])
  coefficients[names(stocks)[i]] = model$coefficients
}
```