Finanças Quantitativas: Lista 3

Lucas Moschen

03 de maio de 2020

Exercise 1

Exercise 3.11 (Carmona)

Exercise 3.12 (Carmona)

Exercise 2

Let $X = (X_1, X_2) \sim N_d(\mu, \Sigma)$, *where* $X_1 = (X_{1,1}, ..., X_{1,p}), X_2 = (X_{2,1}, ..., X_{2,q}), d = p + q$. *Show that*

a. $X_1 \sim N_p(\mu_1, \Sigma_{1,1})$.

Resposta:

Tenho que provar que $\forall (l_1, l_2, ..., l_p) \in \mathbb{R}^p, \xi = l_1 X_{1,1} + ... + l_p X_{1,p}$ é Gaussiano. Suponha que não e que $(a_1, ..., a_p) \in \mathbb{R}^p$ seja tal que $a_1 X_{1,1} + ... + a_p X_{1,p}$ não tem distribuição normal. Nesse caso, considere o vetor $d - dimensional$ $(a_1, ..., a_p, 0, 0, ..., 0)$. Temos que, pela definição de Distribuição Normal Multivariada, X_1 tem distribuição normal e $a_1 X_{1,1} + ... + a_p X_{1,p} + 0X_{2,1} + ... + 0X_{2,p}$ tem distribuição normal, o que é um absurdo. Desta forma, provamos por contradição que $X_1 \sim N_p(m, sd)$.

Sabemos que $m = (E[X_{1,1}], ..., E[X_{1,p}])$ e que $sd_{i,j} = Cov(X_{1,i}, X_{1,j})$. Sabemos, entretanto, que $m = \mu_1$, pois $E[X_1] = (E[X_{1,1}], ..., E[X_{1,p}]) = \mu_1$. Também sabemos que $sd_{i,j} = \Sigma_{1,1}(i, j)$, pois as definições são as mesmas quando $1 \leq i, j \leq p$.

Concluimos, então, que $X_1 \sim N_p(\mu_1, \Sigma_{1,1})$.

b. $X_1 | X_2 = x_2 \sim N_p(\mu_{1|2}, \Sigma_{1|2})$, *where* $\mu_{1|2} = \mu_1 + \Sigma_{1,2}\Sigma_{2,2}^{-1}(x_2 - \mu_2)$ e $\Sigma_{1|2} = \Sigma_{1,1} - \Sigma_{1,2}\Sigma_{2,2}^{-1}\Sigma_{2,1}$.

Resposta:

Suponha que Σ é uma matriz invertível, considere $C = \Sigma_{1,2}\Sigma_{2,2}^{-1}$. Também considere as transformações $Y_1 = X_1 - CX_2$ e $Y_2 = X_2$. Dessa forma, teremos que Y_1 e Y_2 terão distribuição conjunta normal e matriz de covariância diagonal, que implica que elas serão independentes. Isso ajudará nas contas. Assim, primeiro vejamos que a distribuição conjunta é uma normal:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} I & -C \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}, \ pela\ definicao \\
&\sim N_d\left(\begin{pmatrix} \mu_1 - C\mu_2 \\ \mu_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} I & -C \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Sigma_{1,1} & \Sigma_{1,2} \\ \Sigma_{2,1} & \Sigma_{2,2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ -C^T & I \end{pmatrix} \right) \\
&\sim N_d\left(\begin{pmatrix} \mu_1 - C\mu_2 \\ \mu_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \Sigma_{1,1} - C\Sigma_{2,1} & \Sigma_{1,2} - C\Sigma_{2,2} \\ \Sigma_{2,1} & \Sigma_{2,2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ -C^T & I \end{pmatrix} \right) \\
&\sim N_d\left(\begin{pmatrix} \mu_1 - C\mu_2 \\ \mu_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \Sigma_{1,1} - C\Sigma_{2,1} - \Sigma_{1,2}C^T + C\Sigma_{2,2}C^T & \Sigma_{1,2} - C\Sigma_{2,2} \\ \Sigma_{2,1} - \Sigma_{2,2}C^T & \Sigma_{2,2} \end{pmatrix} \right)
\end{aligned} \tag{1}$$

Desta forma, Y_1 e Y_2 tem distrivuição conjunta, com média e matriz de variância especificada em 1. Sabemos que Σ é uma matriz onde $\Sigma_{1,2} = \Sigma 2, 1^T$, visto quo que $Cov(X_{1,i}, X_{2,j}) = Cov(X_{2,j}, X_{1,i})$. Também sabemos que $\Sigma_{i,i} = \Sigma_{i,i}^T, i = 1, 2$, isto é, é simétrica, pelo mesmo motivo. Desta forma:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} &\sim N_d\left(\begin{pmatrix} \mu_1 - C\mu_2 \\ \mu_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \Sigma_{1,1} - C\Sigma_{2,1} - \Sigma_{1,2}C^T + C\Sigma_{2,2}C^T & \Sigma_{1,2} - C\Sigma_{2,2} \\ \Sigma_{2,1} - \Sigma_{2,2}C^T & \Sigma_{2,2} \end{pmatrix}\right) \\
&\sim N_d\left(\begin{pmatrix} \mu_1 - C\mu_2 \\ \mu_2 \end{pmatrix}, \right. \\
&\left. \begin{pmatrix} \Sigma_{1,1} - (\Sigma_{1,2}\Sigma_{2,2}^{-1})\Sigma_{2,1} - \Sigma_{1,2}(\Sigma_{1,2}\Sigma_{2,2}^{-1})^T + (\Sigma_{1,2}\Sigma_{2,2}^{-1})\Sigma_{2,2}(\Sigma_{1,2}\Sigma_{2,2}^{-1})^T & \Sigma_{1,2} - (\Sigma_{1,2}\Sigma_{2,2}^{-1})\Sigma_{2,2} \\ \Sigma_{2,1} - \Sigma_{2,2}(\Sigma_{1,2}\Sigma_{2,2}^{-1})^T & \Sigma_{2,2} \end{pmatrix}\right) \\
&\sim N_d\left(\begin{pmatrix} \mu_1 - C\mu_2 \\ \mu_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \Sigma_{1,1} - (\Sigma_{1,2}\Sigma_{2,2}^{-1})\Sigma_{2,1} - \left[\Sigma_{1,2} + \Sigma_{1,2}(\Sigma_{2,2}^{-1}\Sigma_{2,2})\right](\Sigma_{1,2}\Sigma_{2,2}^{-1})^T & \Sigma_{1,2} - \Sigma_{1,2}(\Sigma_{2,2}^{-1}\Sigma_{2,2}) \\ \Sigma_{2,1} - (\Sigma_{2,2}^T(\Sigma_{2,2}^{-1})^T)\Sigma_{1,2}^T & \Sigma_{2,2} \end{pmatrix}\right) \\
&\sim N_d\left(\begin{pmatrix} \mu_1 - C\mu_2 \\ \mu_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \Sigma_{1,1} - (\Sigma_{1,2}\Sigma_{2,2}^{-1})\Sigma_{2,1} - \left[\Sigma_{1,2} + \Sigma_{1,2}(\Sigma_{2,2}^{-1}\Sigma_{2,2})\right](\Sigma_{1,2}\Sigma_{2,2}^{-1})^T & \Sigma_{1,2} - \Sigma_{1,2}(\Sigma_{2,2}^{-1}\Sigma_{2,2}) \\ \Sigma_{2,1} - (\Sigma_{2,2}^T(\Sigma_{2,2}^{-1})^T)\Sigma_{1,2}^T & \Sigma_{2,2} \end{pmatrix}\right) \\
&\sim N_d\left(\begin{pmatrix} \mu_1 - C\mu_2 \\ \mu_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \Sigma_{1,1} - (\Sigma_{1,2}\Sigma_{2,2}^{-1})\Sigma_{2,1} & 0 \\ 0 & \Sigma_{2,2} \end{pmatrix}\right)
\end{aligned} \tag{2}$$

Com isso, provamos que Y_1 e Y_2 são independentes, isto é $X_1 - CX_2$ é independente de X_2. Isso é interessante, porque a distribuição condicional de $Y_1|Y_2 = y_2$, isto é $X_1 - CX_2|X_2 = x_2$ tem a mesma distribuição de $X_1 - Cx_2$. Mas pelos cálculos em 2 e o resultado obtido na primeira questão, inferimos que $X_1 - CX_2 \sim N_p(\mu_1 - C\mu_2, \Sigma_{1,1} - C\Sigma_{2,1})$.

Concluimos que:

$$\begin{aligned}
X_1|X_2 = x_2 &\sim N_p(\mu_1 - C\mu_2 + Cx_2, \Sigma_{1,1} - C\Sigma_{2,1}) \\
&\sim N_p(\mu_1 + \Sigma_{1,2}\Sigma_{2,2}^{-1}(x_2 - \mu_2), \Sigma_{1,1} - \Sigma_{1,2}\Sigma_{2,2}^{-1}\Sigma_{2,1})
\end{aligned} \tag{3}$$

como queríamos provar.

Exercise 3

Let $X \sim Exp(r)$, i.e $f_X(x) = re^{-rx}$ for $x > 0$ and $Y \sim Pareto(\alpha)$, i.e., $f_Y(y) = \left(1 + \frac{y}{\alpha}\right)^{-(1+\alpha)}$, for $y > 0$. Couple these two random variables with Gumpel copula with parameter θ:

$$C_{G_u}(u, v|\theta) = exp\{-((-\ln u)^\theta + (-\ln v)^\theta)^{1/\theta}, 1 \leq \theta$$

a. *Derive the joint cdf of X_1 and X_2.*

Resposta:

b. *What happens to the dependence structure when $\theta = 1$? And when $\theta \to \infty$.*

Resposta:

c. *Generate data from the joint distribution of X_1 and X_2.*

Resposta: