Finanças Quantitativas: Lista 2

Lucas Moschen

10 de abril de 2020

Execício 1

Calcule a média da distribuição GPD e use essa informação para mostrar que a mean excess function $e(l)$ é linear em l.

Resposta:

Seja $X \sim GPD(m, \lambda, \xi)$, onde $m \in \mathbb{R}, \lambda > 0, \xi \in \mathbb{R}$. Assim, a distribuição acumulada de X é:

$$F_{m,\lambda,\xi}(x) = \begin{cases} 1 - (1 + \xi\frac{x-m}{\lambda})^{-\frac{1}{\xi}}, \xi \neq 0 \\ 1 - \exp(-\frac{x-m}{\lambda}), \xi = 0 \end{cases}$$

E a pdf da distribuição é

$$f_{m,\lambda,\xi}(x) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda}(1 + \xi\frac{x-m}{\lambda})^{-\frac{1}{\xi}-1}, \xi \neq 0 \\ \frac{1}{\lambda}\exp(-\frac{x-m}{\lambda}), \xi = 0 \end{cases}$$

Considere o caso em que $1 > \xi > 0$. Desta forma a média será finita.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= \int_m^\infty x f_{m,\lambda,\xi}(x) dx && (1) \\
&= \int_m^\infty x(\frac{1}{\lambda}(1 + \xi\frac{x-m}{\lambda})^{-\frac{1}{\xi}-1})dx && (2) \\
&= -x \cdot (1 + \xi\frac{x-m}{\lambda})^{-\frac{1}{\xi}}\Big|_m^\infty + \int_m^\infty (1 + \xi\frac{x-m}{\lambda})^{-\frac{1}{\xi}} dx && (3) \\
&= \lim_{x\to\infty} -\frac{x}{(1 + \xi\frac{x-m}{\lambda})^{-\frac{1}{\xi}}} + m + \int_m^\infty (1 + \xi\frac{x-m}{\lambda})^{-\frac{1}{\xi}} dx && (4)
\end{aligned}$$

Note que esse limite é 0, bastando aplicar L'Hôspital, e notando que $\frac{1}{\xi} > 1$. Fazendo a substituição $u = 1 + \xi\frac{x-m}{\lambda} \implies \frac{\lambda}{\xi}du = dx$. Portanto:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= m + \frac{\lambda}{\xi}\int_1^\infty u^{-\frac{1}{\xi}} dx && (5) \\
&= m + \frac{\lambda}{\xi}\frac{\xi}{-1+\xi}u^{-\frac{1}{\xi}+1}\Big|_1^\infty && (6) \\
&= m + \frac{\lambda}{-1+\xi}[\lim_{u\to\infty} u^{\frac{\xi-1}{\xi}} - 1^{\frac{\xi-1}{\xi}}] && (7) \\
&= m + \frac{\lambda}{1-\xi} && (8)
\end{aligned}$$

No caso em que $\xi = 0$, o cálculo fica relativamente mais fácil. Utilizando o mesmo processo, chagamos que $E[X] = m - \lambda[\exp(-\frac{x-m}{\lambda})]_m^\infty = m + \lambda$, como esperávamos.

Sabemos que se a distribuição de uma variável aleatória X é $GDP(m, \lambda, \xi)$, então a distribuição excesso $F_l(x)$, dado um nível l, será uma distribuição $GDP(0, \lambda + \xi(l - m), \xi)$. Desta maneira, a função de excesso médio é uma função linear em l, utilizando o valor esperado dessa distriibuição, como vimos acima:

$$e(l) = \mathbb{E}[F_l(x)] = 0 + \frac{\lambda + \xi(l - m)}{1 - \xi} = \frac{\lambda - m\xi}{1 - \xi} + \frac{\xi}{1 - \xi} \cdot l = C + D \cdot l \tag{9}$$

Além disso, ela será constante caso $\xi = 0$.

Problema 2.2

1. *For this first question we assume that X is a random variable with standard Pareto distribution with shape parameter ξ (location parameter $m = 0$, scale parameter $\lambda = 1$).*

1.1. *Give a formula for the c.d.f. of X. Explain*

Resposta:

Utilizando a distribuição da GDP encontrada no exercício 1, temos que a cdf da distribuição de pareto padrão pode ser escrita como:

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 1 - (1 + \xi x)^{-\frac{1}{\xi}}, \xi \neq 0 \\ 1 - \exp(-x), \xi = 0 \end{cases}$$

O suporte para $\xi \geq 0$ é formado pelos reais não negativos. Caso contrário, será $0 \leq x \leq -\frac{1}{\xi}$.

1.2. *Derive a formula for the quantile function of X.*

1.3. *How would you generate Monte Carlo samples from the distribution of X if you only had a random generator for the uniform distribution on $[0, 1]$ at your disposal?*

2. *Give a formula for the density $f_Y(y)$ of a random variable Y which is equal to an exponential random variable with mean 2 with probability 1/3 and to the negative of a classical Pareto random variable with shape parameter $\psi = 1/2$ (location $m = 0$ and scale $\lambda = 1$) with probability 2/3. Explain.*

3. *How would you generate Monte Carlo samples from the distribution of Y?*

Problema 2.3

Problema 2.4

Problema 2.6

Problema 2.8