Finanças Quantitativas: Lista 3

Lucas Moschen

03 de maio de 2020

Exercise 1

Exercise 3.11 (Carmona)

Exercise 3.12 (Carmona)

Exercise 2

Let $X = (X_1, X_2) \sim N_d(\mu, \Sigma)$, *where* $X_1 = (X_{1,1}, ..., X_{1,p}), X_2 = (X_{2,1}, ..., X_{2,q}), d = p + q$. *Show that*

a. $X_1 \sim N_p(\mu_1, \Sigma_{1,1})$.

Resposta:

Tenho que provar que $\forall (l_1, l_2, ..., l_p) \in \mathbb{R}^p, \xi = l_1 X_{1,1} + ... + l_p X_{1,p}$ é Gaussiano. Suponha que não e que $(a_1, ..., a_p) \in \mathbb{R}^p$ seja tal que $a_1 X_{1,1} + ... + a_p X_{1,p}$ não tem distribuição normal. Nesse caso, considere o vetor $d - dimensional$ $(a_1, ..., a_p, 0, 0, ..., 0)$. Temos que, pela definição de Distribuição Normal Multivariada, X_1 tem distribuição normal e $a_1 X_{1,1} + ... + a_p X_{1,p} + 0 X_{2,1} + ... + 0 X_{2,p}$ tem distribuição normal, o que é um absurdo. Desta forma, provamos por contradição que $X_1 \sim N_p(m, sd)$.

Sabemos que $m = (E[X_{1,1}], ..., E[X_{1,p}])$ e que $sd_{i,j} = Cov(X_{1,i}, X_{1,j})$. Sabemos, entretanto, que $m = \mu_1$, pois $E[X_1] = (E[X_{1,1}], ..., E[X_{1,p}]) = \mu_1$. Também sabemos que $sd_{i,j} = \Sigma_{1,1}(i,j)$, pois as definições são as mesmas quando $1 \leq i, j \leq p$.

Concluimos, então, que $X_1 \sim N_p(\mu_1, \Sigma_{1,1})$.

b. $X_1 | X_2 = x_2 \sim N_p(\mu_{1|2}, \Sigma_{1|2})$, *where* $\mu_{1|2} = \mu_1 + \Sigma_{1,2}\Sigma_{2,2}^{-1}(x_2 - \mu_2)$ e $\Sigma_{1|2} = \Sigma_{1,1} - \Sigma_{1,2}\Sigma_{2,2}^{-1}\Sigma_{2,1}$.

Resposta:

Suponha que Σ é uma matriz invertível, considere $C = \Sigma_{1,2}\Sigma_{2,2}^{-1}$. Também considere as transformações $Y_1 = X_1 - CX_2$ e $Y_2 = X_2$. Dessa forma, teremos que Y_1 e Y_2 terão distribuição conjunta normal e matriz de covariância diagonal, que implica que elas serão independentes. Isso ajudará nas contas. Assim, primeiro vejamos que a distribuição conjunta é uma normal:

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} I & -C \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}, \ pela\ definicao \\
&\sim N_d\left(\begin{pmatrix} \mu_1 - C\mu_2 \\ \mu_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} I & -C \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Sigma_{1,1} & \Sigma_{1,2} \\ \Sigma_{2,1} & \Sigma_{2,2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ -C^T & I \end{pmatrix} \right) \\
&\sim N_d\left(\begin{pmatrix} \mu_1 - C\mu_2 \\ \mu_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \Sigma_{1,1} - C\Sigma_{2,1} & \Sigma_{1,2} - C\Sigma_{2,2} \\ \Sigma_{2,1} & \Sigma_{2,2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ -C^T & I \end{pmatrix} \right) \\
&\sim N_d\left(\begin{pmatrix} \mu_1 - C\mu_2 \\ \mu_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \Sigma_{1,1} - C\Sigma_{2,1} - \Sigma_{1,2}C^T + C\Sigma_{2,2}C^T & \Sigma_{1,2} - C\Sigma_{2,2} \\ \Sigma_{2,1} - \Sigma_{2,2}C^T & \Sigma_{2,2} \end{pmatrix} \right)
\end{aligned} \tag{1}
$$

Desta forma, Y_1 e Y_2 tem distrivuição conjunta, com média e matriz de variância especificada em 1. Sabemos que Σ é uma matriz onde $\Sigma_{1,2} = \Sigma 2, 1^T$, visto quo que $Cov(X_{1,i}, X_{2,j}) = Cov(X_{2,j}, X_{1,i})$. Também sabemos que $\Sigma_{i,i} = \Sigma_{i,i}^T, i = 1, 2$, isto é, é simétrica, pelo mesmo motivo. Desta forma:

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} &\sim N_d\left(\begin{pmatrix} \mu_1 - C\mu_2 \\ \mu_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \Sigma_{1,1} - C\Sigma_{2,1} - \Sigma_{1,2}C^T + C\Sigma_{2,2}C^T & \Sigma_{1,2} - C\Sigma_{2,2} \\ \Sigma_{2,1} - \Sigma_{2,2}C^T & \Sigma_{2,2} \end{pmatrix}\right) \\
&\sim N_d\left(\begin{pmatrix} \mu_1 - C\mu_2 \\ \mu_2 \end{pmatrix}, \right. \\
&\left. \begin{pmatrix} \Sigma_{1,1} - (\Sigma_{1,2}\Sigma_{2,2}^{-1})\Sigma_{2,1} - \Sigma_{1,2}(\Sigma_{1,2}\Sigma_{2,2}^{-1})^T + (\Sigma_{1,2}\Sigma_{2,2}^{-1})\Sigma_{2,2}(\Sigma_{1,2}\Sigma_{2,2}^{-1})^T & \Sigma_{1,2} - (\Sigma_{1,2}\Sigma_{2,2}^{-1})\Sigma_{2,2} \\ \Sigma_{2,1} - \Sigma_{2,2}(\Sigma_{1,2}\Sigma_{2,2}^{-1})^T & \Sigma_{2,2} \end{pmatrix}\right) \\
&\sim N_d\left(\begin{pmatrix} \mu_1 - C\mu_2 \\ \mu_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \Sigma_{1,1} - (\Sigma_{1,2}\Sigma_{2,2}^{-1})\Sigma_{2,1} - \left[\Sigma_{1,2} + \Sigma_{1,2}(\Sigma_{2,2}^{-1}\Sigma_{2,2})\right](\Sigma_{1,2}\Sigma_{2,2}^{-1})^T & \Sigma_{1,2} - \Sigma_{1,2}(\Sigma_{2,2}^{-1}\Sigma_{2,2}) \\ \Sigma_{2,1} - (\Sigma_{2,2}^T(\Sigma_{2,2}^{-1})^T)\Sigma_{1,2}^T & \Sigma_{2,2} \end{pmatrix}\right) \\
&\sim N_d\left(\begin{pmatrix} \mu_1 - C\mu_2 \\ \mu_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \Sigma_{1,1} - (\Sigma_{1,2}\Sigma_{2,2}^{-1})\Sigma_{2,1} - \left[\Sigma_{1,2} + \Sigma_{1,2}(\Sigma_{2,2}^{-1}\Sigma_{2,2})\right](\Sigma_{1,2}\Sigma_{2,2}^{-1})^T & \Sigma_{1,2} - \Sigma_{1,2}(\Sigma_{2,2}^{-1}\Sigma_{2,2}) \\ \Sigma_{2,1} - (\Sigma_{2,2}^T(\Sigma_{2,2}^{-1})^T)\Sigma_{1,2}^T & \Sigma_{2,2} \end{pmatrix}\right) \\
&\sim N_d\left(\begin{pmatrix} \mu_1 - C\mu_2 \\ \mu_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \Sigma_{1,1} - (\Sigma_{1,2}\Sigma_{2,2}^{-1})\Sigma_{2,1} & 0 \\ 0 & \Sigma_{2,2} \end{pmatrix}\right)
\end{aligned} \tag{2}
$$

Com isso, provamos que Y_1 e Y_2 são independentes, isto é $X_1 - CX_2$ é independente de X_2. Isso é interessante, porque a distribuição condicional de $Y_1|Y_2 = y_2$, isto é $X_1 - CX_2|X_2 = x_2$ tem a mesma distribuição de $X_1 - Cx_2$. Mas pelos cálculos em 2 e o resultado obtido na primeira questão, inferimos que $X_1 - CX_2 \sim N_p(\mu_1 - C\mu_2, \Sigma_{1,1} - C\Sigma_{2,1})$.

Concluimos que:

$$
\begin{aligned}
X_1|X_2 = x_2 &\sim N_p(\mu_1 - C\mu_2 + Cx_2, \Sigma_{1,1} - C\Sigma_{2,1}) \\
&\sim N_p(\mu_1 + \Sigma_{1,2}\Sigma_{2,2}^{-1}(x_2 - \mu_2), \Sigma_{1,1} - \Sigma_{1,2}\Sigma_{2,2}^{-1}\Sigma_{2,1})
\end{aligned} \tag{3}
$$

como queríamos provar.

Exercise 3

Let $X \sim Exp(r)$, i.e $f_X(x) = re^{-rx}$ for $x > 0$ and $Y \sim Pareto(\alpha)$, i.e., $f_Y(y) = \left(1 + \frac{y}{\alpha}\right)^{-(1+\alpha)}$, for $y > 0$. Couple these two random variables with Gumpel copula with parameter θ:

$$C_{G_u}(u, v|\theta) = exp\{-((-\ln u)^\theta + (-\ln v)^\theta)^{1/\theta}\}, 1 \leq \theta$$

a. *Derive the joint cdf of X and Y.*

Resposta:

Pelo Teorema de Sklar's, como F_X e F_Y são distribuições univariadas, temos que $F_{X,Y}$ é dada pela expressão:

$$
\begin{aligned}
F_{X,Y}(x, y \mid \theta) &= C(F_X(x), F_Y(y) \mid \theta) \\
&= exp\{-[(-\ln F_X(x))^\theta + (-\ln F_Y(y))^\theta]^{1/\theta}\} \\
&= exp\left\{-\left[(-\ln(1 - e^{-rx}))^\theta + \left(-\ln\left(1 - \left(1 + \frac{y}{\alpha}\right)^{-\alpha}\right)\right)^\theta\right]^{1/\theta}\right\}
\end{aligned} \tag{4}
$$

b. *What happens to the dependence structure when $\theta = 1$? And when $\theta \to \infty$.*

Resposta:

Se $\theta = 1$, observamos que $F_{X,Y}(x, y \mid \theta = 1)$:

$$
\begin{aligned}
F_{X,Y}(x,y) &= exp\left\{-\left[(-\ln(1-e^{-rx})) + \left(-\ln\left(1-\left(1+\frac{y}{\alpha}\right)^{-\alpha}\right)\right)\right]\right\} \\
&= exp\left\{\ln(1-e^{-rx})\right\} exp\left\{\ln\left(1-\left(1+\frac{y}{\alpha}\right)^{-\alpha}\right)\right\} \\
&= (1-e^{-rx})\left(1-\left(1+\frac{y}{\alpha}\right)^{-\alpha}\right) \\
&= F_X(x)F_Y(y)
\end{aligned}
\tag{5}
$$

Como isso ocorre independente de x e y, temos que as variáveis são independentes, isto é, a estrutura de dependência é inexistente. No próximo caso, observaremos um contraponto a esse fato.

Se $\theta \to \infty$, observamos que tanto $-\ln F_X(x)$ quanto $-\ln F_Y(y)$ são sempre positivos, visto que a distribuição cumulativa tem imagem em $[0, 1]$. Dessa forma, podemos aplicar o conhecimento de que $\lim_{\theta\to\infty} ||x||_p = ||x||_\infty$. Também utilizo que a função logaritmo é crescente, logo, se em um dado ponto, o logaritmo de uma função é menor do que o logaritmo de outra, então esse ponto será menor também. Desta forma:

$$
\begin{aligned}
\lim_{\theta\to\infty} F_{X,Y}(x,y) &= \lim_{\theta\to\infty} exp\left\{-\left[(-\ln(1-e^{-rx}))^\theta + \left(-\ln\left(1-\left(1+\frac{y}{\alpha}\right)^{-\alpha}\right)\right)^\theta\right]^{1/\theta}\right\} \\
&= exp\left\{-\lim_{\theta\to\infty}\left[(-\ln(1-e^{-rx}))^\theta + \left(-\ln\left(1-\left(1+\frac{y}{\alpha}\right)^{-\alpha}\right)\right)^\theta\right]^{1/\theta}\right\} \\
&= exp\left\{-\max\left[(-\ln(1-e^{-rx})), \left(-\ln\left(1-\left(1+\frac{y}{\alpha}\right)^{-\alpha}\right)\right)\right]\right\} \\
&= exp\left\{\min\left[\ln(1-e^{-rx}), \ln\left(1-\left(1+\frac{y}{\alpha}\right)^{-\alpha}\right)\right]\right\} \\
&= exp\left\{\ln(\min\left[1-e^{-rx}, 1-\left(1+\frac{y}{\alpha}\right)^{-\alpha}\right])\right\} \\
&= \min\left[1-e^{-rx}, 1-\left(1+\frac{y}{\alpha}\right)^{-\alpha}\right] \\
&> (1-e^{-rx})(1-\left(1+\frac{y}{\alpha}\right)^{-\alpha})
\end{aligned}
$$

A última desigualdade acontece porque nenhuma distribuição atinge os valores extremos do intervalo $[0, 1]$, desta forma, o menor desses valores multiplicado por o maior que é menor do que um obtém um resultado menos. Desta forma, concluímos que $F_{X,Y}(x, y) \neq F_X(x)F_Y(y)$ e as variáveis **não** são independentes, pela definição de independência. Além do mais, a dependência é conectada com a comparação dos valores das duas ditribuições em cada ponto, isto é, se em uma parte da curva uma distribuição for mais que a outra, a distribuição conjunta será a menor.

Desta maneira, concluímos que no primeiro caso há independência, enquanto no segundo, não há independência.

c. *Generate data from the joint distribution of X_1 and X_2.*

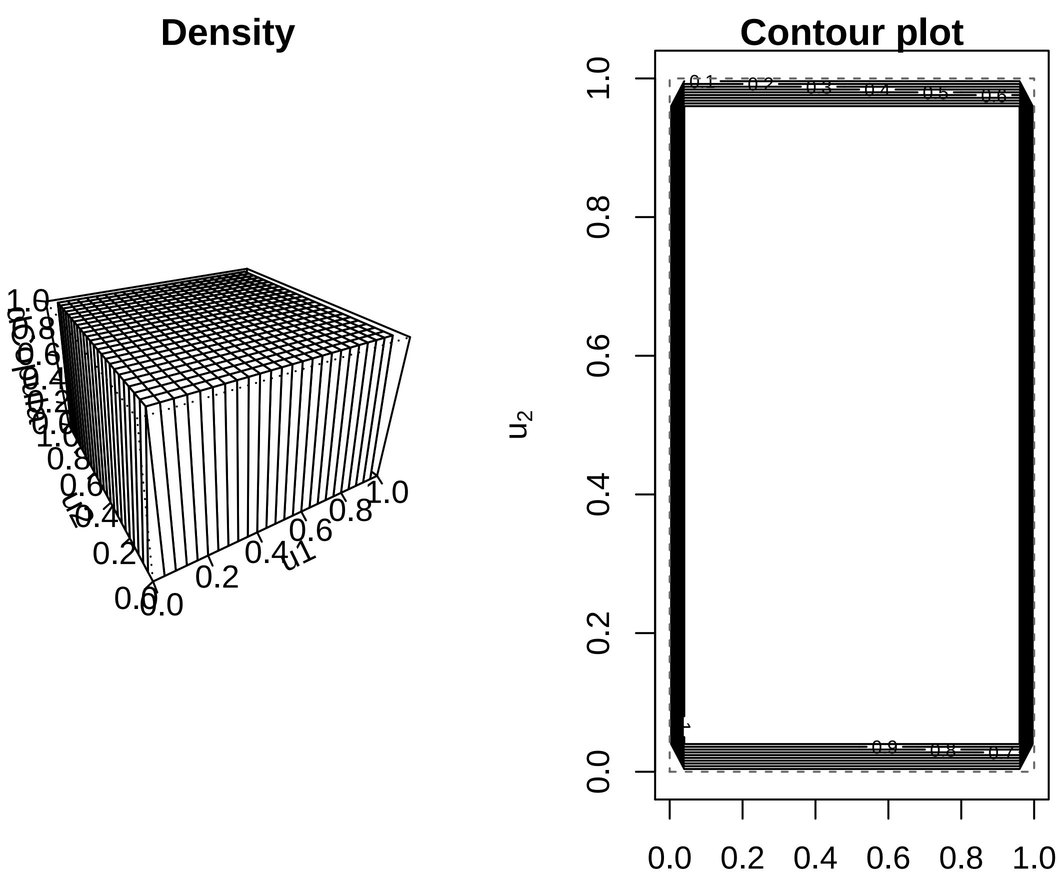
Resposta:

Primeiro, vamos importar a biblioteca e considerar o caso onde $\theta = 1$, para observar o comportamento da independência.

```
library(copula)
if(require(actuar)==0){
  install.packages("actuar")
}
library(actuar)

theta = 1
C_gumbel = gumbelCopula(param = theta)

par(mar=c(2,4,1,2), mfrow=c(1,2))
persp(C_gumbel, dCopula, main ="Density", lwd=1)
contour(C_gumbel, dCopula, xlim = c(0, 1), ylim=c(0, 1), main = "Contour plot")
```



Agora, vamos gerar os dados:

```
r = 1
alpha = 1
multivariate_dist = mvdc(copula = C_gumbel,
                         margins = c("exp", "pareto"),
                         paramMargins = list(list(rate = r),
                                             list(shape = alpha, scale = 1)))
gen_data = rMvdc(n = 1000, mvdc = multivariate_dist)

theta = 5
C_gumbel2 = gumbelCopula(param = theta)
```

```r
r = 1.5
alpha = 3
multivariate_dist2 = mvdc(copula = C_gumbel2,
                          margins = c("exp", "pareto"),
                          paramMargins = list(list(rate = r),
                                              list(shape = alpha, scale = 1)))
gen_data2 = rMvdc(n = 1000, mvdc = multivariate_dist2)

plot(gen_data[,1], gen_data[,2], xlab = "X ~ Exp(r)", ylab = "Y ~ Pareto(a)",
     main = "Dados gerados pela distribuição conjunta", col = "green")
points(gen_data2[,1], gen_data2[,2], col = "blue")
legend("topright", legend = c("r = a = theta = 1", "r = 1.5, a = 3, theta = 5"),
       fill = c("green", "blue"), cex = 0.8)
```