

Finanças Quantitativas: Lista 5

Lucas Moschen

24 de maio de 2020

Exercício 1

Problema 4.1 (Carmona)

Problema 4.11 (Carmona)

Problema 4.12 (Carmona)

Exercício 2

Considere o modelo de regressão linear múltipla:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}\beta + \epsilon$$

E o custo associado a β , que queremos minimizar, é:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_2(\beta) &= \|\mathbf{Y} - \mathbf{X}\beta\|^2 = \langle \mathbf{Y} - \mathbf{X}\beta, \mathbf{Y} - \mathbf{X}\beta \rangle \\ &= \langle \mathbf{Y}, \mathbf{Y} \rangle - 2\langle \mathbf{Y}, \mathbf{X}\beta \rangle + \langle \mathbf{X}\beta, \mathbf{X}\beta \rangle \\ &= \langle \mathbf{Y}, \mathbf{Y} \rangle - 2\langle \mathbf{X}\beta, \mathbf{Y} \rangle + \langle \mathbf{X}\beta, \mathbf{X}\beta \rangle \\ &= \mathbf{Y}^T \mathbf{Y} - 2\beta^T \mathbf{X}^T \mathbf{Y} + \beta^T \mathbf{X}^T \mathbf{X} \beta\end{aligned}$$

Para minimizar esse valor, primeiro procuramos os pontos críticos. Nesse caso, veja que a primeira expressão independe do vetor β e, portanto, sua derivada será 0. A segunda expressão, temos uma combinação dos elementos do vetor β , logo, ao derivar parcialmente em relação a cada valor, obtemos a expressão equivalente e, por isso, a derivação é linear. Na última expressão, veja que $\mathbf{X}^T \mathbf{X}$ é uma expressão com os valores de β quadráticos e, portanto, a expressão se segue:

$$\frac{d}{d\beta} \mathcal{L}_2(\hat{\beta}) = -2\mathbf{X}^T \mathbf{Y} + 2\mathbf{X}^T \mathbf{X} \hat{\beta} = 0$$

Desta forma, como o posto de \mathbf{X} é completo $\mathbf{X}^T \mathbf{X}$ tem colunas linearmente independentes e é, portanto, invertível. Desta maneira, temos uma solução única e:

$$\mathbf{X}^T \mathbf{X} \hat{\beta} = \mathbf{X}^T \mathbf{Y} \implies \hat{\beta} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{Y}$$

Nesse obtemos que $\hat{\beta}$ é um ponto crítico. Para averiguar se é argumento mínimo, façamos:

$$\frac{d^2}{d\beta^2} \mathcal{L}_2(\hat{\beta}) = 2\mathbf{X}^T \mathbf{X}$$

A matriz $\mathbf{X}^T \mathbf{X}$ é simétrica e, $\forall x \in \mathbb{R}^{p+1}$, $x^T \mathbf{X}^T \mathbf{X} x = \langle \mathbf{X}x, \mathbf{X}x \rangle \geq 0$ e será igual a 0 somente se $\mathbf{X}x = 0$. Como \mathbf{X} tem posto completo, ele tem espaço anulado com dimensão 0 e, portanto, $\text{anul}(\mathbf{X}) = \{0\}$ e, se $\mathbf{X}x = 0$, $x = 0$. Concluo, então que essa matriz é estritamente positiva e, desta maneira, $\hat{\beta}$ é de fato um mínimo da expressão.

Exercício 3