Finanças Quantitativas: Lista 5

Lucas Moschen

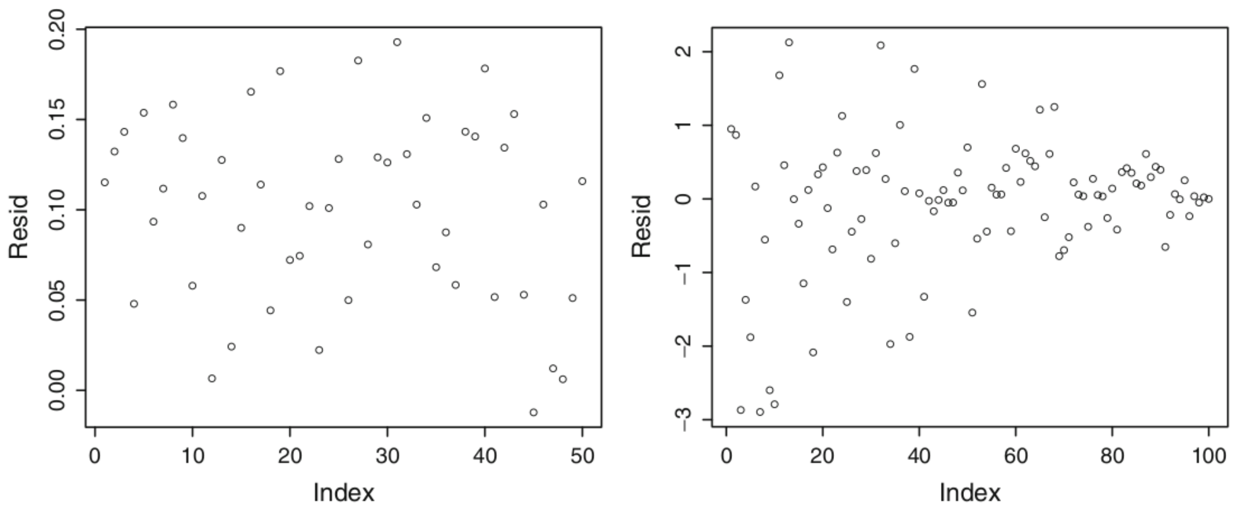
24 de maio de 2020

Exercício 1

Problema 4.1 (Carmona)

Item 1

Considere a seguinte imagem do livro.



Podemos observar que o plote da esquerda tem o eixo X marcado pelo índice de determinadas observações e o eixo Y valores, quase todos, estritamente positivos (com excessão aparente de um). Isso não é a característica de resíduos brutos, onde $\hat{\epsilon}_i = y - \hat{y}_i$, dado que a média desses resíduos é de longe 0. Como temos uma quantidade relativamente grande de observações e esperamos que os erros tenham média 0 ao modelarmos o erro quadrático, vemos que não é possível que esse plote represente isso.

Item 2

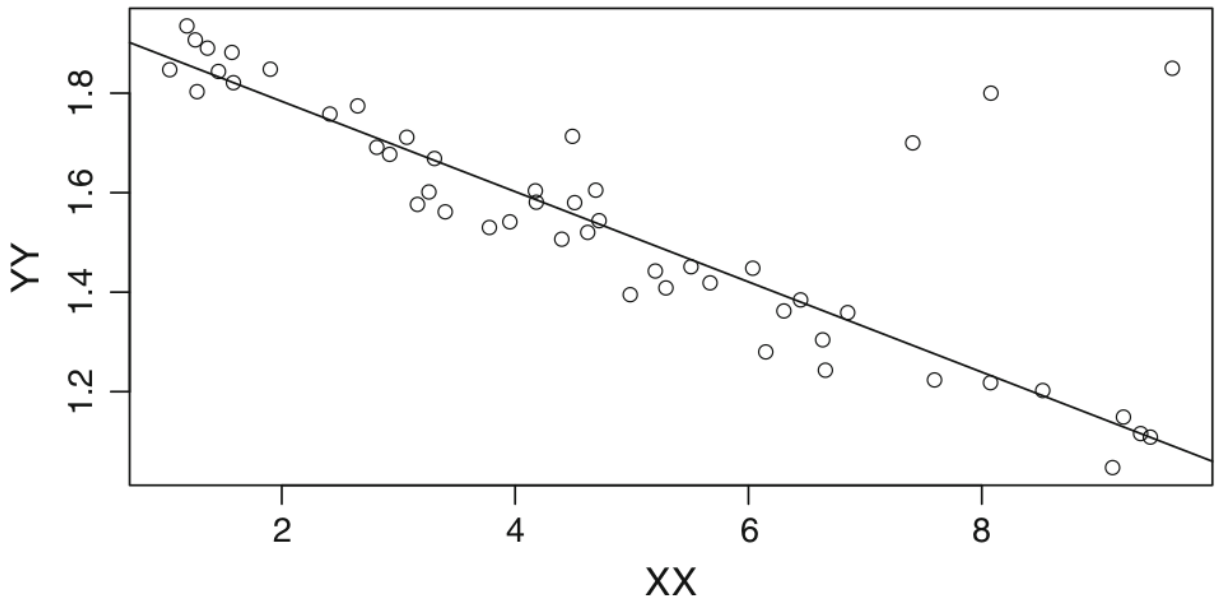
Ainda sobre a figura acima, obseve que quanto maior o índice, mais os resíduos se concentram em torno de 0. Como eles se concentram, podemos dizer, com base no gráfico que quanto maior o índice i, menor a variância em torno da média do resíduo. Conhecemos nesse capítulo que os resíduos tem desvio padrão

$$\sigma_{\epsilon_i} = \sigma\sqrt{1 - h_{i,i}}$$

Assim, $h_{i,i}$ tem um comportamento crescente em relação ao índice, isto é, a diagonal tem termos em uma sequência crescente.

Item 3

Agora considere essa imagem:



Parece-me que essa linha é uma regressão linear com desvios absolutos, visto que ela não se influencia tanto com os três outliers na parte de cima do gráfico. Isto acontece, pois a regressão $\mathcal{L}_1$ é menos sensível a *outliers*.

Problema 4.11 (Carmona)

Problema 4.12 (Carmona)

Exercício 2

Considere o modelo de regressão linear múltipla:

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X}\beta + \epsilon$$

E o custo associado a β, que queremos minimizar, é:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_2(\beta) &= ||\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{X}\beta||^2 = \langle \boldsymbol{Y} - \boldsymbol{X}\beta, \boldsymbol{Y} - \boldsymbol{X}\beta \rangle \\
&= \langle \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Y} \rangle - 2\langle \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{X}\beta \rangle + \langle \boldsymbol{X}\beta, \boldsymbol{X}\beta \rangle \\
&= \langle \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Y} \rangle - 2\langle \boldsymbol{X}\beta, \boldsymbol{Y} \rangle + \langle \boldsymbol{X}\beta, \boldsymbol{X}\beta \rangle \\
&= \boldsymbol{Y}^T\boldsymbol{Y} - 2\beta^T\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{Y} + \beta^T\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{X}\beta
\end{aligned}$$

Para minimizar esse valor, primeiro procuramos os pontos críticos. Nesse caso, veja que a primeira expressão independe do vetor β e, portanto, sua derivada será 0. A segunda expressão, temos uma combinação dos elementos do vetor β, logo, ao derivar parcialmente em relação a cada valor, obtemos a expressão equivalente e, por isso, a derivação é linear. Na última expressão, veja que $\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{X}$ é uma expressão com os valores de β quadráticos e, portanto, a expressão se segue:

$$\frac{d}{d\beta}\mathcal{L}_2(\hat{\beta}) = -2\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{Y} + 2\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{X}\hat{\beta} = 0$$

Desta forma, como o posto de $\boldsymbol{X}$ é completo $\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{X}$ tem colunas linearmente independentes e é, portanto, invertível. Desta maneita, temos uma solução única e:

$$\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{X}\hat{\beta} = \boldsymbol{X}^T\boldsymbol{Y} \implies \hat{\beta} = (\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{Y}$$

Nesse obtemos que $\hat{\beta}$ é um ponto crítico. Para averiguar se é argumento mínimo, façamos:

$$\frac{d^2}{d\beta^2}\mathcal{L}_2(\hat{\beta}) = 2\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{X}$$

A matriz $\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{X}$ é simétrica e, $\forall x \in \mathbb{R}^{p+1}, x^T\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{X}x = \langle \boldsymbol{X}x, \boldsymbol{X}x \rangle \geq 0$ e será igual a 0 somente se $\boldsymbol{X}x = 0$. Como X tem posto completo, ele tem espaço anulado com dimensão 0 e, poranto, $anul(X) = \{0\}$ e, se $\boldsymbol{X}x = 0, x = 0$. Concluo, então que essa matriz é estritamente positiva e, desta maneira, $\hat{\beta}$ é de fato um mínimo da expressão.

Exercício 3