

Finanças Quantitativas: Lista 3

Lucas Moschen

03 de maio de 2020

Exercise 1

Exercise 3.11 (Carmona)

Let us assume that $X \sim N(0, 1)$ and let us define the random variable Y by:

$$Y = \frac{1}{\sqrt{1 - 2/\pi}}(|X| - \sqrt{2/\pi})$$

1. Compute $\mathbb{E}\{|X|\}$

Resposta:

Calculemos através da integral o valor esperado e considere $\phi(x)$ a função densidade da distribuição normal padrão.:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(|X|) &= \int_{-\infty}^{\infty} |x| \phi(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^0 -x \phi(x) dx + \int_0^{\infty} x \phi(x) dx, \text{ make } y = -x \\ &= \int_0^{\infty} y \phi(y) dy + \int_0^{\infty} x \phi(x) dx \\ &= 2 \int_0^{\infty} x \phi(x) dx \\ &= 2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} x e^{-\frac{x^2}{2}} dx, \text{ make } \frac{x^2}{2} = y \\ &= 2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-y} dy \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\end{aligned}$$

2. Show that Y has mean zero, variance 1, and that it is uncorrelated with X .

Resposta:

Vejamos que $\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2/\pi}}(\mathbb{E}(|X|) - \sqrt{2/\pi}) = 0$. A primeira igualdade se deve a linearidade do valor esperado, enquanto a segunda igualdade se deve ao valor esperado calculado no item a.

Vamos calcular $E[Y^2]$. Temos, então:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Y^2] &= \frac{1}{1-2/\pi}(\mathbb{E}[X^2] - 2/\pi), \text{ linearidade de } \mathbb{E}() \\
&= \frac{1}{1-2/\pi}(\text{Var}[X] + (\mathbb{E}[X])^2 - 2/\pi) \\
&= \frac{1}{1-2/\pi}(1 - 2/\pi) = 1
\end{aligned}$$

Logo $\text{Var}[Y] = \mathbb{E}[Y^2] - (\mathbb{E}[Y])^2 = 1$.

Por fim, calcularemos a covariância entre as variáveis:

$$\begin{aligned}
\text{Cov}(X, Y) &= \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[XY] \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-2/\pi}}\mathbb{E}(X|X|) - \sqrt{2/\pi}\mathbb{E}(X) \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-2/\pi}}\left(\int_0^\infty x^2\phi(x)dx + \int_{-\infty}^0 (-x^2)\phi(x)dx\right), \text{ make } y = -x \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-2/\pi}}\left(\int_0^\infty x^2\phi(x)dx + \int_0^\infty (-y^2)\phi(y)dy\right) = 0
\end{aligned}$$

Assim, mostramos que $\mathbb{E}[Y] = 1$, $\text{Var}[Y] = 0$ e $\text{Cov}(X, Y) = 0$.

Exercise 3.12 (Carmona)

Let X and Y be continuous random variables with cdfs F_X and F_Y respectively, and with copula C . For each real number t , prove the following two equalities:

$$1. \mathbb{P}\{\max(X, Y) \leq t\} = C(F_X(t), F_Y(t))$$

Resposta:

Seja $F_{X,Y}(x, y)$ a distribuição conjunta dessas variáveis. Pelo Teorema de Sklar's, temos que $F_{X,Y}(x, y) = C(F_X(x), F_Y(y))$. Além do mais, esta cópula é única, pois as variáveis são contínuas. Desta forma:

$$\begin{aligned}
F_{X,Y}(t, t) &= \mathbb{P}[X \leq t, Y \leq t] = \mathbb{P}[\max(X, Y) \leq t] \\
F_{X,Y}(t, t) &= C(F_X(t), F_Y(t))
\end{aligned}$$

Logo, temos que $\mathbb{P}\{\max(X, Y) \leq t\} = C(F_X(t), F_Y(t))$

$$2. \mathbb{P}\{\min(X, Y) \leq t\} = F_X(t) + F_Y(t) - C(F_X(t), F_Y(t))$$

Resposta:

Utilizando o teorema acima citado, podemos calcular:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\{\min(X, Y) \leq t\} &= 1 - \mathbb{P}\{\min(X, Y) \geq t\} \\
&= 1 - \mathbb{P}\{X \geq t, Y \geq t\} \\
&= 1 - (1 - \mathbb{P}\{X \leq t, Y \leq t\} - \mathbb{P}\{X \leq t, Y \geq t\} - \mathbb{P}\{X \geq t, Y \leq t\}) \\
&= \mathbb{P}\{X \leq t, Y \leq t\} + \mathbb{P}\{X \leq t, Y \geq t\} + \mathbb{P}\{X \geq t, Y \leq t\} \\
&= \mathbb{P}\{X \leq t, Y \in \mathbb{R}\} + \mathbb{P}\{X \geq t, Y \leq t\} + \mathbb{P}\{X \leq t, Y \leq t\} - \mathbb{P}\{X \leq t, Y \leq t\} \\
&= \mathbb{P}\{X \leq t, Y \in \mathbb{R}\} + \mathbb{P}\{X \in \mathbb{R}, Y \leq t\} - \mathbb{P}\{X \leq t, Y \leq t\} \\
&= F_X(t) + F_Y(t) - C(F_X(t), F_Y(t))
\end{aligned} \tag{1}$$

como queríamos mostrar.

Exercise 2

Let $X = (X_1, X_2) \sim N_d(\mu, \Sigma)$, where $X_1 = (X_{1,1}, \dots, X_{1,p})$, $X_2 = (X_{2,1}, \dots, X_{2,q})$, $d = p + q$. Show that

- a. $X_1 \sim N_p(\mu_1, \Sigma_{1,1})$.

Resposta:

Tenho que provar que $\forall (l_1, l_2, \dots, l_p) \in \mathbb{R}^p$, $\xi = l_1 X_{1,1} + \dots + l_p X_{1,p}$ é Gaussiano. Suponha que não e que $(a_1, \dots, a_p) \in \mathbb{R}^p$ seja tal que $a_1 X_{1,1} + \dots + a_p X_{1,p}$ não tem distribuição normal. Nesse caso, considere o vetor d -dimensional $(a_1, \dots, a_p, 0, 0, \dots, 0)$. Temos que, pela definição de Distribuição Normal Multivariada, X_1 tem distribuição normal e $a_1 X_{1,1} + \dots + a_p X_{1,p} + 0 X_{2,1} + \dots + 0 X_{2,p}$ tem distribuição normal, o que é um absurdo. Desta forma, provamos por contradição que $X_1 \sim N_p(m, sd)$.

Sabemos que $m = (E[X_{1,1}], \dots, E[X_{1,p}])$ e que $sd_{i,j} = Cov(X_{1,i}, X_{1,j})$. Sabemos, entretanto, que $m = \mu_1$, pois $E[X_1] = (E[X_{1,1}], \dots, E[X_{1,p}]) = \mu_1$. Também sabemos que $sd_{i,j} = \Sigma_{1,1}(i, j)$, pois as definições são as mesmas quando $1 \leq i, j \leq p$.

Concluimos, então, que $X_1 \sim N_p(\mu_1, \Sigma_{1,1})$.

- b. $X_1|X_2 = x_2 \sim N_p(\mu_{1|2}, \Sigma_{1|2})$, where $\mu_{1|2} = \mu_1 + \Sigma_{1,2}\Sigma_{2,2}^{-1}(x_2 - \mu_2)$ e $\Sigma_{1|2} = \Sigma_{1,1} - \Sigma_{1,2}\Sigma_{2,2}^{-1}\Sigma_{2,1}$.

Resposta:

Suponha que Σ é uma matriz invertível, considere $C = \Sigma_{1,2}\Sigma_{2,2}^{-1}$. Também considere as transformações $Y_1 = X_1 - CX_2$ e $Y_2 = X_2$. Dessa forma, teremos que Y_1 e Y_2 terão distribuição conjunta normal e matriz de covariância diagonal, que implica que elas serão independentes. Isso ajudará nas contas. Assim, primeiro vejamos que a distribuição conjunta é uma normal:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} I & -C \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}, \text{ pela definicao} \\ &\sim N_d \left(\begin{pmatrix} \mu_1 - C\mu_2 \\ \mu_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} I & -C \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Sigma_{1,1} & \Sigma_{1,2} \\ \Sigma_{2,1} & \Sigma_{2,2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ -C^T & I \end{pmatrix} \right) \\ &\sim N_d \left(\begin{pmatrix} \mu_1 - C\mu_2 \\ \mu_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \Sigma_{1,1} - C\Sigma_{2,1} & \Sigma_{1,2} - C\Sigma_{2,2} \\ \Sigma_{2,1} & \Sigma_{2,2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ -C^T & I \end{pmatrix} \right) \\ &\sim N_d \left(\begin{pmatrix} \mu_1 - C\mu_2 \\ \mu_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \Sigma_{1,1} - C\Sigma_{2,1} - \Sigma_{1,2}C^T + C\Sigma_{2,2}C^T & \Sigma_{1,2} - C\Sigma_{2,2} \\ \Sigma_{2,1} - \Sigma_{2,2}C^T & \Sigma_{2,2} \end{pmatrix} \right) \end{aligned} \quad (2)$$

Desta forma, Y_1 e Y_2 tem distrivuição conjunta, com média e matriz de variância especificada em 2. Sabemos que Σ é uma matriz onde $\Sigma_{1,2} = \Sigma_{2,1}^T$, visto que $Cov(X_{1,i}, X_{2,j}) = Cov(X_{2,j}, X_{1,i})$. Também sabemos que $\Sigma_{i,i} = \Sigma_{i,i}^T$, $i = 1, 2$, isto é, é simétrica, pelo mesmo motivo. Desta forma:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} &\sim N_d \left(\begin{pmatrix} \mu_1 - C\mu_2 \\ \mu_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \Sigma_{1,1} - C\Sigma_{2,1} - \Sigma_{1,2}C^T + C\Sigma_{2,2}C^T & \Sigma_{1,2} - C\Sigma_{2,2} \\ \Sigma_{2,1} - \Sigma_{2,2}C^T & \Sigma_{2,2} \end{pmatrix} \right) \\
&\sim N_d \left(\begin{pmatrix} \mu_1 - C\mu_2 \\ \mu_2 \end{pmatrix}, \right. \\
&\quad \left. \begin{pmatrix} \Sigma_{1,1} - (\Sigma_{1,2}\Sigma_{2,2}^{-1})\Sigma_{2,1} - \Sigma_{1,2}(\Sigma_{1,2}\Sigma_{2,2}^{-1})^T + (\Sigma_{1,2}\Sigma_{2,2}^{-1})\Sigma_{2,2}(\Sigma_{1,2}\Sigma_{2,2}^{-1})^T & \Sigma_{1,2} - (\Sigma_{1,2}\Sigma_{2,2}^{-1})\Sigma_{2,2} \\ \Sigma_{2,1} - \Sigma_{2,2}(\Sigma_{1,2}\Sigma_{2,2}^{-1})^T & \Sigma_{2,2} \end{pmatrix} \right) \\
&\sim N_d \left(\begin{pmatrix} \mu_1 - C\mu_2 \\ \mu_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \Sigma_{1,1} - (\Sigma_{1,2}\Sigma_{2,2}^{-1})\Sigma_{2,1} - [\Sigma_{1,2} + \Sigma_{1,2}(\Sigma_{2,2}^{-1}\Sigma_{2,2})] (\Sigma_{1,2}\Sigma_{2,2}^{-1})^T & \Sigma_{1,2} - \Sigma_{1,2}(\Sigma_{2,2}^{-1}\Sigma_{2,2}) \\ \Sigma_{2,1} - (\Sigma_{2,2}^T(\Sigma_{2,2}^{-1})^T)\Sigma_{1,2}^T & \Sigma_{2,2} \end{pmatrix} \right) \\
&\sim N_d \left(\begin{pmatrix} \mu_1 - C\mu_2 \\ \mu_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \Sigma_{1,1} - (\Sigma_{1,2}\Sigma_{2,2}^{-1})\Sigma_{2,1} - [\Sigma_{1,2} + \Sigma_{1,2}(\Sigma_{2,2}^{-1}\Sigma_{2,2})] (\Sigma_{1,2}\Sigma_{2,2}^{-1})^T & \Sigma_{1,2} - \Sigma_{1,2}(\Sigma_{2,2}^{-1}\Sigma_{2,2}) \\ \Sigma_{2,1} - (\Sigma_{2,2}^T(\Sigma_{2,2}^{-1})^T)\Sigma_{1,2}^T & \Sigma_{2,2} \end{pmatrix} \right) \\
&\sim N_d \left(\begin{pmatrix} \mu_1 - C\mu_2 \\ \mu_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \Sigma_{1,1} - (\Sigma_{1,2}\Sigma_{2,2}^{-1})\Sigma_{2,1} & 0 \\ 0 & \Sigma_{2,2} \end{pmatrix} \right)
\end{aligned} \tag{3}$$

Com isso, provamos que Y_1 e Y_2 são independentes, isto é $X_1 - CX_2$ é independente de X_2 . Isso é interessante, porque a distribuição condicional de $Y_1|Y_2 = y_2$, isto é $X_1 - CX_2|X_2 = x_2$ tem a mesma distribuição de $X_1 - CX_2$. Mas pelos cálculos em 3 e o resultado obtido na primeira questão, inferimos que $X_1 - CX_2 \sim N_p(\mu_1 - C\mu_2, \Sigma_{1,1} - C\Sigma_{2,1})$.

Concluimos que:

$$\begin{aligned}
X_1|X_2 = x_2 &\sim N_p(\mu_1 - C\mu_2 + Cx_2, \Sigma_{1,1} - C\Sigma_{2,1}) \\
&\sim N_p(\mu_1 + \Sigma_{1,2}\Sigma_{2,2}^{-1}(x_2 - \mu_2), \Sigma_{1,1} - \Sigma_{1,2}\Sigma_{2,2}^{-1}\Sigma_{2,1})
\end{aligned} \tag{4}$$

como queríamos provar.

Exercise 3

Let $X \sim \text{Exp}(r)$, i.e $f_X(x) = re^{-rx}$ for $x > 0$ and $Y \sim \text{Pareto}(\alpha)$, i.e., $f_Y(y) = (1 + \frac{y}{\alpha})^{-(1+\alpha)}$, for $y > 0$. Couple these two random variables with Gumpel copula with parameter θ :

$$C_{G_u}(u, v|\theta) = \exp\{ -((-\ln u)^\theta + (-\ln v)^\theta)^{1/\theta} \}, 1 \leq \theta$$

a. Derive the joint cdf of X and Y .

Resposta:

Pelo Teorema de Sklar's, como F_X e F_Y são distribuições univariadas, temos que $F_{X,Y}$ é dada pela expressão:

$$\begin{aligned}
F_{X,Y}(x, y | \theta) &= C(F_X(x), F_Y(y) | \theta) \\
&= \exp\{ -[(-\ln F_X(x))^\theta + (-\ln F_Y(y))^\theta]^{1/\theta} \} \\
&= \exp \left\{ - \left[(-\ln(1 - e^{-rx}))^\theta + \left(-\ln \left(1 - \left(1 + \frac{y}{\alpha} \right)^{-\alpha} \right) \right)^\theta \right]^{1/\theta} \right\}
\end{aligned} \tag{5}$$

b. What happens to the dependence structure when $\theta = 1$? And when $\theta \rightarrow \infty$.

Resposta:

Se $\theta = 1$, observamos que $F_{X,Y}(x, y \mid \theta = 1)$:

$$\begin{aligned}
F_{X,Y}(x, y) &= \exp \left\{ - \left[(-\ln(1 - e^{-rx})) + \left(-\ln \left(1 - \left(1 + \frac{y}{\alpha} \right)^{-\alpha} \right) \right) \right] \right\} \\
&= \exp \{ \ln(1 - e^{-rx}) \} \exp \left\{ \ln \left(1 - \left(1 + \frac{y}{\alpha} \right)^{-\alpha} \right) \right\} \\
&= (1 - e^{-rx}) \left(1 - \left(1 + \frac{y}{\alpha} \right)^{-\alpha} \right) \\
&= F_X(x) F_Y(y)
\end{aligned} \tag{6}$$

Como isso ocorre independente de x e y , temos que as variáveis são independentes, isto é, a estrutura de dependência é inexistente. No próximo caso, observaremos um contraponto a esse fato.

Se $\theta \rightarrow \infty$, observamos que tanto $-\ln F_X(x)$ quanto $-\ln F_Y(y)$ são sempre positivos, visto que a distribuição cumulativa tem imagem em $[0, 1]$. Dessa forma, podemos aplicar o conhecimento de que $\lim_{\theta \rightarrow \infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$. Também utilizo que a função logaritmo é crescente, logo, se em um dado ponto, o logaritmo de uma função é menor do que o logaritmo de outra, então esse ponto será menor também. Desta forma:

$$\begin{aligned}
\lim_{\theta \rightarrow \infty} F_{X,Y}(x, y) &= \lim_{\theta \rightarrow \infty} \exp \left\{ - \left[(-\ln(1 - e^{-rx}))^\theta + \left(-\ln \left(1 - \left(1 + \frac{y}{\alpha} \right)^{-\alpha} \right) \right)^\theta \right]^{1/\theta} \right\} \\
&= \exp \left\{ - \lim_{\theta \rightarrow \infty} \left[(-\ln(1 - e^{-rx}))^\theta + \left(-\ln \left(1 - \left(1 + \frac{y}{\alpha} \right)^{-\alpha} \right) \right)^\theta \right]^{1/\theta} \right\} \\
&= \exp \left\{ - \max \left[(-\ln(1 - e^{-rx})), \left(-\ln \left(1 - \left(1 + \frac{y}{\alpha} \right)^{-\alpha} \right) \right) \right] \right\} \\
&= \exp \left\{ \min \left[\ln(1 - e^{-rx}), \ln \left(1 - \left(1 + \frac{y}{\alpha} \right)^{-\alpha} \right) \right] \right\} \\
&= \exp \left\{ \ln(\min \left[1 - e^{-rx}, 1 - \left(1 + \frac{y}{\alpha} \right)^{-\alpha} \right]) \right\} \\
&= \min \left[1 - e^{-rx}, 1 - \left(1 + \frac{y}{\alpha} \right)^{-\alpha} \right] \\
&> (1 - e^{-rx}) \left(1 - \left(1 + \frac{y}{\alpha} \right)^{-\alpha} \right)
\end{aligned}$$

A última desigualdade acontece porque nenhuma distribuição atinge os valores extremos do intervalo $[0, 1]$, desta forma, o menor desses valores multiplicado por o maior que é menor do que um obtém um resultado menos. Desta forma, concluímos que $F_{X,Y}(x, y) \neq F_X(x) F_Y(y)$ e as variáveis **não** são independentes, pela definição de independência. Além do mais, a dependência é conectada com a comparação dos valores das duas ditribuições em cada ponto, isto é, se em uma parte da curva uma distribuição for mais que a outra, a distribuição conjunta será a menor.

Desta maneira, concluímos que no primeiro caso há independência, enquanto no segundo, não há independência.

c. *Generate data from the joint distribution of X_1 and X_2 .*

Resposta:

Primeiro, vamos importar a biblioteca e considerar o caso onde $\theta = 1$, para observar o comportamento da independência.

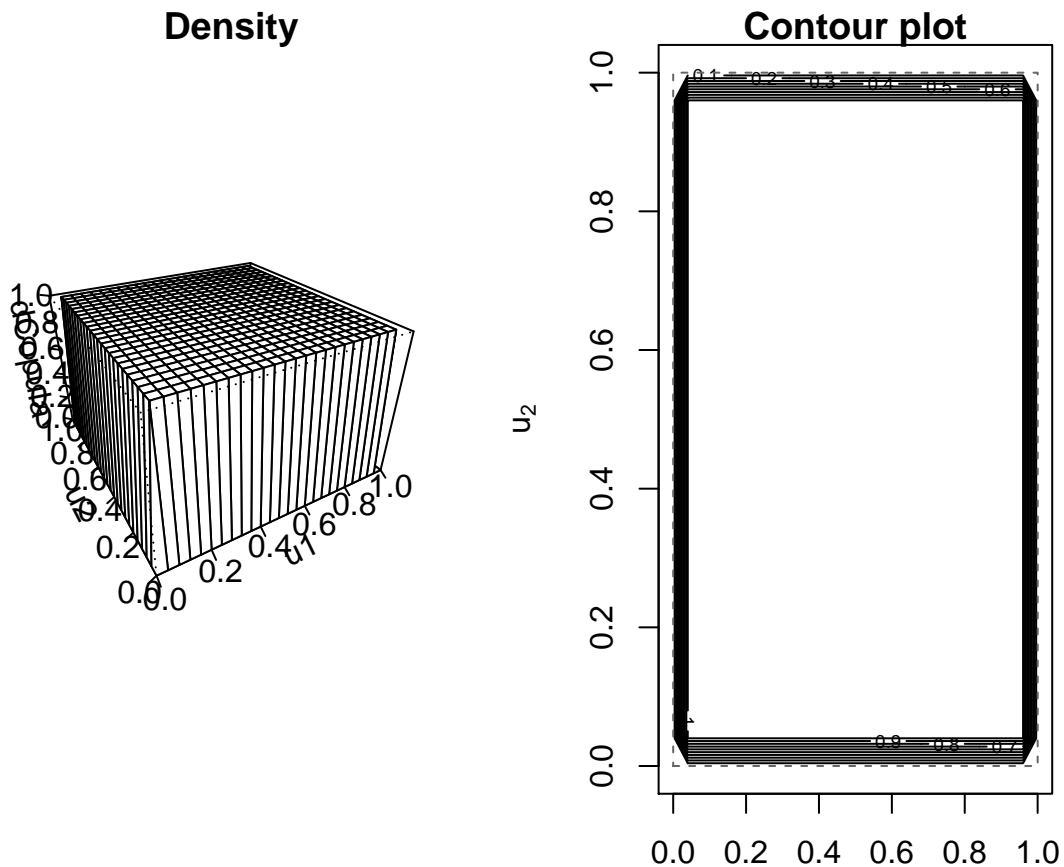
```

library(copula)
if(require(actuar)==0){
  install.packages("actuar")
}
library(actuar)

theta = 1
C_gumbel = gumbelCopula(param = theta)

par(mar=c(2,4,1,2), mfrow=c(1,2))
persp(C_gumbel, dCopula, main="Density", lwd=1)
contour(C_gumbel, dCopula, xlim = c(0, 1), ylim=c(0, 1), main = "Contour plot")

```



Agora, vamos gerar os dados:

```

r = 1
alpha = 1
multivariate_dist = mvdc(copula = C_gumbel,
  margins = c("exp", "pareto"),
  paramMargins = list(list(rate = r),
    list(shape = alpha, scale = 1)))
gen_data = rMvdc(n = 1000, mvdc = multivariate_dist)

theta = 5
C_gumbel2 = gumbelCopula(param = theta)
r = 3
alpha = 1.5

```

```

multivariate_dist2 = mvdc(copula = C_gumbel2,
                          margins = c("exp", "pareto"),
                          paramMargins = list(list(rate = r),
                                              list(shape = alpha, scale = 1)))
gen_data2 = rMvdc(n = 1000, mvdc = multivariate_dist2)

plot(gen_data[,1], gen_data[,2], xlab = "X ~ Exp(r)", ylab = "Y ~ Pareto(a)",
     main = "Dados gerados pela distribuição conjunta", col = "green")
points(gen_data2[,1], gen_data2[,2], col = "blue")
legend("topright", legend = c("r = a = theta = 1", "r = 3, a = 1.5, theta = 5"),
     fill = c("green", "blue"), cex = 0.8)

```

Dados gerados pela distribuição conjunta

