Finanças Quantitativas: Lista 7

Lucas Moschen

14 de junho de 2020

Exercício 8.1

Suponha que X e σ^2 são duas variáveis aleatórias e que $X|\sigma^2 \sim N(0, \sigma^2)$. Prove que:

$$\frac{E[X^4]}{Var[X]^2} = 3\left[1 + \frac{Var[\sigma^2]}{E[\sigma^2]^2}\right]$$

Temos que:

$$\begin{aligned}
E[X^4|\sigma] &= \int_{\mathbb{R}} x^4 \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-x^2/2\sigma^2} dx \\
&= 2\int_0^\infty 4t^2\sigma^4 \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-t} \frac{\sigma^2}{\sqrt{2t}\sigma} dt \\
&= \frac{4\sigma^4}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty t^{3/2} e^{-t} \\
&= \frac{4\sigma^4}{\sqrt{\pi}} \Gamma(5/2) = \frac{4\sigma^4}{\sqrt{\pi}} \frac{3\sqrt{\pi}}{4} \\
&= 3\sigma^4
\end{aligned}$$

$$Var[X|\sigma] = \sigma^2$$

Logo, utilizando as seguintes propriedades da probabilidade:

$$E[X^4] = E[E[X^4|\sigma]] = 3E[\sigma^4]$$

$$Var[X]^2 = (E[Var[X|\sigma]] + Var[E[X|\sigma]])^2 = E[\sigma^2]^2$$

pois $E[X|\sigma] = 0$.
Portanto:

$$\frac{E[X^4]}{Var[X]^2} = 3\frac{E[\sigma^4]}{E[\sigma^2]^2} = 3\frac{Var[\sigma^2] + E[\sigma^2]^2}{E[\sigma^2]^2} = 3\frac{E[\sigma^4]}{E[\sigma^2]^2} = 3\left(1 + \frac{Var[\sigma^2]}{E[\sigma^2]^2}\right),$$

como queríamos mostrar.

Exercício 8.3

Assuma que $\{Y_t\}_t$ é uma série de log-retornos $GARCH(1,1)$ representada como:

$$Y_t = \sigma_t\tilde{\epsilon}_t \qquad \sigma_t^2 = c + b\sigma_{t-1}^2 + aY_{t-1}^2,$$

onde assumimos $\{\tilde{\epsilon}_t\}_t \sim N(0,1)$ fortemente e os coeficiente são tais que σ_t^2 é estacionário.

1. Seja $\epsilon_t = Y_t^2 - \sigma_t^2$. Assim, temos que $Y_t^2 - \epsilon_t = c + b(Y_{t-1}^2 - \epsilon_{t-1}) + aY_{t-1}^2$, logo
$$Y_t^2 = c + (a+b)Y_{t-1}^2 + \epsilon_t - b\epsilon_{t-1},$$
onde o erro é a diferença que explicitei. Se $Y_t|\sigma_t \sim N(0, \sigma_t^2)$, temos que $Y_t^2/\sigma_t^2|\sigma_t \sim \chi(1)$. Logo $\epsilon_t/\sigma_t^2 + 1 \mid \sigma_t \sim \chi(1)$.

Se $\alpha = E[\epsilon_t^2]$, temos que:
$$E[\epsilon_t^2|\sigma] = E[(Y_t^2 - \sigma_t^2)^2|\sigma] = E[Y_t^2|\sigma] - \sigma_t^2 = 0,$$
logo $\alpha = E[E[\sigma_t^2|\sigma]] = 0$ e não depende do tempo como já constatado.

Além disso, se $u_t = \epsilon_t + a\epsilon_{t-1} - b(a+b)\epsilon_{t-2}$ e $Y_{t-1} = c + (b+a)Y_{t-2}^2 + \epsilon_{t-1} - b\epsilon_{t-2}$,
$$\begin{aligned}Y_t^2 &= c + (b+a)(c + (b+a)Y_{t-2}^2 + \epsilon_{t-1} - b\epsilon_{t-2}) + \epsilon_t - b\epsilon_{t-1}\\ &= c(1+a+b) + (b+a)^2Y_{t-2}^2 + \epsilon_t + a\epsilon_{t-1} - b(b+a)\epsilon_{t-2}\\ &= c(1+a+b) + (b+a)^2Y_{t-2}^2 + u_t\end{aligned}$$

2. Temos que $\beta = E[u_t^2] = Var[u_t] + E[u_t]^2$. Assim:
$$\begin{aligned}Var[u_t] &= Var[\epsilon_t + a\epsilon_{t-1} - b(a+b)\epsilon_{t-2}]\\ &= Var[\epsilon_t] + a^2Var[\epsilon_{t-1}] + b^2(a+b)^2Var[\epsilon_{t-2}], \text{dado que são independentes}\\ &= 1 + a^2 + b^2(a+b)^2, \text{dado que identicamente distribuidas}\end{aligned}$$
$$E[u_t] = 0, \text{dado que as variáveis são i.i.d.}$$
Logo,
$$\beta = 1 + a^2 + b^2(a+b)^2,$$
que não depende do tempo. Além disso, se $k > 1$
$$\begin{aligned}E[u_tu_{t-2k}] &= E[(\epsilon_t + a\epsilon_{t-1} - b(a+b)\epsilon_{t-2})(\epsilon_{t-2k} + a\epsilon_{t-1-2k} - b(a+b)\epsilon_{t-2-2k})]\\ &= E[\epsilon_t\epsilon_{t-2k}] + aE[\epsilon_t\epsilon_{t-1-2k}] - b(a+b)E[\epsilon_t\epsilon_{t-2-2k}] +\\ &+ aE[\epsilon_{t-1}\epsilon_{t-2k}] + a^2E[\epsilon_{t-1}\epsilon_{t-1-2k}] - ab(a+b)E[\epsilon_{t-1}\epsilon_{t-2-2k}] -\\ &- b(a+b)E[\epsilon_{t-2}\epsilon_{t-2k}] - abE[\epsilon_{t-2}\epsilon_{t-1-2k}] + b^2(a+b)^2E[\epsilon_{t-2}\epsilon_{t-2-2k}]\\ &= 0, \text{dado que as variáveis são independentes (k > 1 garante isso!)}\end{aligned}$$
Mas se $k = 1$, $E[u_tu_{t-2k}] = -b(a+b)E[\epsilon_{t-2}^2] = -b(a+b)$, logo:
$$\frac{E[u_tu_{t-2}]}{E[u_t^2]} = -\frac{b(a+b)}{1 + a^2 + b^2(a+b)^2}$$

3. Considere a expressão:
$$v_t = \frac{1}{1 - \lambda B^2}u_t,$$
onde B é o *backward shift operator*. Reescrevemos esse modelo como ARMA(1,1) em: $v_t + 0v_{t-1} - \lambda v_{t-2} = \epsilon_t + a\epsilon_{t-1} - b(a+b)\epsilon_{t-2}$
$$\begin{aligned}E[v_{2t}v_{2t-2s}] &= E[(\lambda v_{2t-2} + u_{2t})v_{2t-2s}]\\ &= \lambda E[v_{2t-2}v_{2t-2s}] + E[u_{2t}v_{2t-2s}]\\ &= \lambda E[v_{2t-2}v_{2t-2s}]\\ &...\\ &= \lambda^{s-1}E[v_{2t-2s+2}v_{2t-2s}]\\ &= \lambda^{s-1}E[v_tv_{t-2}], \text{pois a série temporal é WN}\end{aligned}$$

Além disso, temos que:

$$\begin{aligned}
E[u_t^2] &= E[v_t^2 - 2\lambda v_t v_{t-2} + \lambda^2 v_{t-2}^2] \\
&= E[v_t^2] - 2\lambda E[v_t v_{t-2}] + \lambda^2 E[v_t^2], \text{pois a série temporal é WN} \\
&\Rightarrow \\
E[v_t v_{t-2}] &= \frac{1}{2\lambda}\left((1+\lambda^2)E[v_t^2] - E[u_t^2]\right)
\end{aligned}$$

Temos também que:

$$\begin{aligned}
E[v_t^2] &= E[u_t^2] + 2\lambda E[v_{t-2}u_t] + \lambda^2 E[v_t^2] \\
&\Rightarrow \\
E[v_t^2] &= \frac{1}{1-\lambda^2}\left(E[u_t^2] + 2\lambda \cancel{E[\lambda v_{t-4}u_t]} + 2\lambda E[u_{t-2}u_t]\right)
\end{aligned}$$

Por fim:

$$\begin{aligned}
E[v_t v_{t-2}] &= \frac{1}{2\lambda}\left((1+\lambda^2)E[v_t^2] - E[u_t^2]\right) \\
&= \frac{1}{2\lambda}\left((1+\lambda^2)(\frac{1}{1-\lambda^2}\left(E[u_t^2] + 2\lambda E[u_{t-2}u_t]\right)) - E[u_t^2]\right) \\
&= \frac{1}{2\lambda(1-\lambda^2)}\left(\cancel{E[u_t^2]} + \lambda^2 E[u_t^2] + 2(1+\lambda^2)\lambda E[u_{t-2}u_t] \cancel{- E[u_t^2]} + \lambda^2 E[u_t^2]\right) \\
&= \frac{1}{1-\lambda^2}\left(\lambda E[u_t^2] + (1+\lambda^2)E[u_t u_{t-2}]\right) \\
&\Rightarrow \\
E[v_{2t}v_{2t-2s}] &= \frac{\lambda^{s-1}}{1-\lambda^2}[\lambda E[u_t^2] + (1+\lambda^2)E[u_t u_{t-2}]]
\end{aligned}$$

como queríamos demonstrar.

4. Considere λ a raiz da equação:
$$\frac{\lambda}{1+\lambda^2} = \frac{b(a+b)}{1+a^2+b^2(a+b)^2}$$
então $\lambda(1+a^2+b^2(a+b)^2) = (1+\lambda^2)b(a+b)$ e, pelo que caculamos em 2, $\lambda E[u_t^2] = -(1+\lambda^2)E[u_t u_{t-2}]$, portanto, se fizermos a substituição $x = t+s$, e usarmos a expressão calculada em 3, temos:
$$E[v_{2x-2s}v_{2x}] = 0, s \geq 1$$
Além disso:
$$\begin{aligned}
E[v_{2t}^2] &= E[u_t^2] + \lambda^2 E[v_{2t-2}^2] + 2\lambda E[u_{2t}v_{2t-2}] \\
&= E[u_t^2] + \lambda^2 E[v_{2t}^2] + 2\lambda(E[u_{2t}v_{2t-2}] + E[\lambda v_{2t-2}^2]) - E[\lambda v_{2t-2}^2]) \\
&= E[u_t^2] + \lambda^2 E[v_{2t}^2] + 2\lambda(E[(u_{2t} + \lambda v_{2t-2})v_{2t-2}] - \lambda E[v_{2t}^2]) \\
&= E[u_t^2] + \lambda^2 E[v_{2t}^2] - 2\lambda^2 E[v_{2t}^2] + 2\lambda \cancel{E[v_{2t}v_{2t-2}]} \\
&\Rightarrow \\
E[v_{2t}^2] &= \frac{1}{1+\lambda^2}E[u_t^2] = \frac{\beta}{1+\lambda^2},
\end{aligned}$$
como queríamos demonstrar.

5. Se $\overline{Y_t} = Y_{2t}$, temos que $\overline{Y_t}^2 \sim ARMA(1,1)$ e que a série $\{\overline{Y_t}\}_t$ admite a representação GARCH$(1,1)$.

Temos que $Y_{2t}^2 = c(1+b+a) + (b+a)^2 Y_{2t-2}^2 + u_{2t}$ como monstramos no item 1. Logo:

$$\overline{Y_t}^2 = c(1+b+a) + (b+a)^2 \overline{Y_{t-1}}^2 + u_{2t} = c(1+b+a) + (b+a)^2 \overline{Y_{t-1}}^2 + v_t,$$

onde $v_t = u_{2t}$ indica a variável de erro. Note que essa essa é a representação ARMA(1,1). Nesse sentido, podemos expressar $\overline{Y_t}$ como o modelo GARCH(1,1)$ de forma equivalente.