Finanças Quantitativas: Lista 2

Lucas Moschen

10 de abril de 2020

Execício 1

Calcule a média da distribuição GPD e use essa informação para mostrar que a mean excess function $e(l)$ é linear em l.

Resposta:

Seja $X \sim GPD(m, \lambda, \xi)$, onde $m \in \mathbb{R}, \lambda > 0, \xi \in \mathbb{R}$. Assim, a distribuição acumulada de X é:

$$F_{m,\lambda,\xi}(x) = \begin{cases} 1 - (1 + \xi\frac{x-m}{\lambda})^{-\frac{1}{\xi}}, \xi \neq 0 \\ 1 - \exp(-\frac{x-m}{\lambda}), \xi = 0 \end{cases}$$

E a pdf da distribuição é

$$f_{m,\lambda,\xi}(x) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda}(1 + \xi\frac{x-m}{\lambda})^{-\frac{1}{\xi}-1}, \xi \neq 0 \\ \frac{1}{\lambda}\exp(-\frac{x-m}{\lambda}), \xi = 0 \end{cases}$$

Considere o caso em que $1 > \xi > 0$. Desta forma a média será finita.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= \int_m^\infty x f_{m,\lambda,\xi}(x)dx && (1) \\
&= \int_m^\infty x(\frac{1}{\lambda}(1+\xi\frac{x-m}{\lambda})^{-\frac{1}{\xi}-1})dx && (2) \\
&= -x \cdot (1+\xi\frac{x-m}{\lambda})^{-\frac{1}{\xi}}\Big|_m^\infty + \int_m^\infty (1+\xi\frac{x-m}{\lambda})^{-\frac{1}{\xi}}dx && (3) \\
&= \lim_{x\to\infty} -\frac{x}{(1+\xi\frac{x-m}{\lambda})^{-\frac{1}{\xi}}} + m + \int_m^\infty (1+\xi\frac{x-m}{\lambda})^{-\frac{1}{\xi}}dx && (4)
\end{aligned}$$

Note que esse limite é 0, bastando aplicar L'Hôspital, e notando que $\frac{1}{\xi} > 1$. Fazendo a substituição $u = 1 + \xi\frac{x-m}{\lambda} \implies \frac{\lambda}{\xi}du = dx$. Portanto:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= m + \frac{\lambda}{\xi}\int_1^\infty u^{-\frac{1}{\xi}}dx && (5) \\
&= m + \frac{\lambda}{\xi}\frac{\xi}{-1+\xi}u^{-\frac{1}{\xi}+1}\Big|_1^\infty && (6) \\
&= m + \frac{\lambda}{-1+\xi}[\lim_{u\to\infty} u^{\frac{\xi-1}{\xi}} - 1^{\frac{\xi-1}{\xi}}] && (7) \\
&= m + \frac{\lambda}{1-\xi} && (8)
\end{aligned}$$

No caso em que $\xi = 0$, o cálculo fica relativamente mais fácil. Utilizando o mesmo processo, chagamos que $E[X] = m - \lambda[\exp(-\frac{x-m}{\lambda})]_m^\infty = m + \lambda$, como esperávamos.

Sabemos que se a distribuição de uma variável aleatória X é $GDP(m, \lambda, \xi)$, então a distribuição excesso $F_l(x)$, dado um nível l, será uma distribuição $GDP(0, \lambda + \xi(l-m), \xi)$. Desta maneira, a função de excesso médio é uma função linear em l, utilizando o valor esperado dessa distriibuição, como vimos acima:

$$e(l) = \mathbb{E}[F_l(x)] = 0 + \frac{\lambda + \xi(l-m)}{1-\xi} = \frac{\lambda - m\xi}{1-\xi} + \frac{\xi}{1-\xi} \cdot l = C + D \cdot l \tag{9}$$

Além disso, ela será constante caso $\xi = 0$.

Problema 2.2

1. *For this first question we assume that* X *is a random variable with standard Pareto distribution with shape parameter* ξ *(location parameter* $m = 0$ *, scale parameter* $\lambda = 1$*).*

1.1. *Give a formula for the c.d.f. of* X*. Explain*

Resposta:

Utilizando a distribuição da GDP encontrada no exercício 1, temos que a cdf da distribuição de pareto padrão pode ser escrita como:

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 1 - (1+\xi x)^{-\frac{1}{\xi}}, \xi \neq 0 \\ 1 - \exp(-x), \xi = 0 \end{cases}$$

O suporte para $\xi \geq 0$ é formado pelos reais não negativos. Caso contrário, será $0 \leq x \leq -\frac{1}{\xi}$. Observe que ela será uma CDF, visto que é uma função contínua (combinação de funções contínuas), $\lim_{x\to-\infty} F_\xi(x) = 0$ e $\lim_{x\to\infty} F_\xi(x) = 1 - \lim_{x\to\infty} \frac{1}{(1+\xi x)^{\frac{1}{\xi}}} = 1$, como desejamos de uma CDF. Em particular já sabíamos que isso aconteceria por ser um caso especial da ditribuição GPD.

1.2. *Derive a formula for the quantile function of* X*.*

Resposta:

Seja $Q(p)$ a função quantil. Quando $\xi = 0$, basta que $Q(p) = F_\xi^{-1}(x) = -\log(1-p) = \log\frac{1}{1-p}$.

Se $\xi \neq 0$, seja $F_\xi(x) = p$. Assim $p = 1 - (1+\xi x)^{-\frac{1}{\xi}} \implies (1+\xi x) = (1-p)^{-\xi} \implies Q(p) = \frac{1}{\xi}((1-p)^{-\xi} - 1)$.

Agora podemos agrupar e temos que em $0 \leq p < 1$, a função quantil é:

$$Q(p) = \begin{cases} \frac{1}{\xi}((1-p)^{-\xi} - 1), \xi \neq 0 \\ \log\frac{1}{1-p}, \xi = 0 \end{cases}$$

1.3. *How would you generate Monte Carlo samples from the distribution of* X *if you only had a random generator for the uniform distribution on* $[0, 1]$ *at your disposal?*

Resposta:

Primeiro gere uma amostra de tamanho n da distribuição uniforme. Ao usar a universalidade da uniforme, podemos aplicar a função quantil encontrada a cada ponto da amostra e assim teremos uma amostra Monte Carlo da distribuição de X.

2. *Give a formula for the density $f_Y(y)$ of a random variable Y which is equal to an exponential random variable with mean 2 with probability 1/3 and to the negative of a classical Pareto random variable with shape parameter $\xi = 1/2$ (location $m = 0$ and scale $\lambda = 1$) with probability 2/3. Explain.*

Resposta:

Seja $X_1 \sim Exp(\frac{1}{2})$ e $X_2 \sim Pareto(\frac{1}{2})$. Assim, pela lei da probabilidade total:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y \leq y) &= \mathbb{P}(Y \leq y | Y = X_1)\mathbb{P}(Y = X_1) + \mathbb{P}(Y \leq y | Y = -X_2)\mathbb{P}(Y = -X_2) && (10)\\
&= (1 - \exp(-\frac{1}{2}y)) \cdot \frac{1}{3} + \mathbb{P}(X_2 \geq -y) \cdot \frac{2}{3} && (11)\\
&= \frac{1}{3}(1 - \exp(-\frac{1}{2}y)) + \frac{2}{3}(1 - \frac{y}{2})^{-2} && (12)
\end{aligned}$$

Porém, temos que nos ater aos suportes dessas distribuições. Se $y < 0$, teremos que a $\mathbb{P}(X_1 \leq y) = 0$, logo $\mathbb{P}(Y \leq y) = \frac{2}{3}(1 - \frac{y}{2})^{-2}$. Agora, se $y \geq 0$, temos que $\mathbb{P}(X_2 \geq -y) \geq \mathbb{P}(X_2 \geq 0) = 1$, logo:

$$F_Y(y) = \begin{cases} \frac{2}{3}(1 - \frac{y}{2})^{-2}, y < 0 \\ \frac{1}{3}(1 - \exp(-\frac{1}{2}y)) + \frac{2}{3}, y \geq 0 \end{cases}$$

Observe que os limites ao infinito, de ambos os lados ocorrem conforme esperávamos e que essa função é contínua em todos os pontos. Logo é uma CDF bem determinada. Além disso, ela é diferenciável em todos os pontos, com excessão do 0, pois as derivadas laterais são diferetes. Portanto

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{2}{3}(1 - \frac{y}{2})^{-3}, y < 0 \\ \frac{1}{6}(\exp(-\frac{1}{2}y)), y > 0 \end{cases}$$

3. *How would you generate Monte Carlo samples from the distribution of Y?*

Resposta:

Gero uma amostra de tamanho n da distribuição uniforme no intervalo $[0, 1]$, inicicialmente. Como a densidade é sempre positiva, a distribuição acumulada é invertível. Após a expressão da função quantil, para cada ponto da amostra, calculo a função. Pela universalidade da uniforme, terei uma amostra Monte Carlo dessa distribuição. Confira a função quantil:

$$Q(p) = \begin{cases} 2 - (\frac{8}{3p})^{\frac{1}{2}}, 0 < p \leq \frac{2}{3} \\ \log(\frac{1}{(3-3p)^2}), \frac{2}{3} < p < 1 \end{cases}$$

Problema 2.3

In this problem, we study the loss distribution of a portfolio over a fixed period whose length does not play any role in the analysis. Loss is understood as the negative part of the return defined as $L = \max(0, -R)$. We assume that a fixed level $\alpha \in (0, 1)$ is given, and we denote by VaR_α the Value at Risk (VaR) at the level α of the portfolio over the period in question. In the present context, this VaR is the $100(1 - \alpha)$ -percentile of the loss distribution. This is consistent with the definition used in the text. The purpose of the problem is to derive a formula for the expected loss given that the loss is assumed to be larger than the value at risk.

1. *For this question, we assume that the loss distribution is exponential with rate r.*

1.1. *Give a formula for the c.d.f. of L. Explain.*

Resposta:

Se $L \sim Exp(r)$, então a sua cdf, descrita pela função F_L:

$$F_L(x) = \begin{cases} 1 - \exp(-rx), x \geq 0 \\ 0, x < 0 \end{cases}$$

1.2. *Derive a formula for* VaR_α.

Resposta:

Nesse exercício, VaR_α é $100(1-\alpha)$ percentil da distribuição de perda. Desta forma:

$$VaR_\alpha = \inf\{x; F(x) \geq (1-\alpha)\} = F^{-1}(1-\alpha) = -\frac{1}{r}\log(\alpha)$$

.

1.3. *Give a formula for the expected loss given that the loss is larger than* VaR_α.

Resposta:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[L|L > -\frac{1}{r}\log(\alpha)] &= \int_{-\infty}^{\infty} x f_{L|L>VaR_\alpha}(x)dx && (13) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x f_L(x - VaR_\alpha)dx && (14) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (u + VaR_\alpha) f_L(u)du && (15) \\ &= \mathbb{E}[L] + VaR_\alpha = \frac{1}{r}[1 - \log(\alpha)] && (16) \end{aligned}$$

A segunda igualdade é válida, pois a distribuição exponencial apenas foi deslocada em VaR_α, inalterando o formato da curva em si. Essa propriedade é conhecida por *memoryless.*

2. *For this question, we assume that the loss distribution is the standard Pareto distribution with shape parameter* ξ, *location parameter* $m = 0$ *and scale parameter* $\lambda = 1$.

2.1. *Give a formula for the c.d.f. of L. Explain.*

Resposta:

Como já destacado anteriormente:

$$F_L(x) = \begin{cases} 1 - (1+\xi x)^{-\frac{1}{\xi}}, \xi \neq 0 \\ 1 - \exp(-x), \xi = 0 \end{cases}$$

2.2. *Derive a formula for* VaR_α.

Resposta:

Utilizando a função quantile da Distribuição de Pareto encontrada no exercício anterior:

$$VaR_\alpha = \inf\{x; F_L(x) \geq (1-\alpha)\} = F^{-1}(1-\alpha) = \frac{1}{\xi}(\alpha^{-\xi} - 1)$$

2.3. *Give a formula for the expected loss given that the loss is larger than* VaR_α.

Resposta:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[L|L > VaR_\alpha] &= \int_0^\infty x f_{L|L>VaR_\alpha}(x)dx && (17)\\
&= \int_{VaR_\alpha}^\infty x f_L(x) \cdot \frac{1}{\mathbb{P}[L > VaR_\alpha]} dx && (18)\\
&= \frac{1}{\alpha} \cdot [VaR_\alpha \cdot \alpha - \int_{VaR_\alpha}^\infty (1 - F_L(x))dx] && (19)\\
&= \frac{1}{\alpha} \cdot [VaR_\alpha \cdot \alpha - (1 + \xi VaR_\alpha)^{1-\frac{1}{\xi}} \cdot \frac{1}{\xi - 1}] && (20)\\
&= VaR_\alpha - (1 + \xi VaR_\alpha) \cdot \frac{1}{\xi - 1} && (21)\\
&= \frac{VaR_\alpha + 1}{1 - \xi} && (22)\\
&= \frac{1 - \xi - \alpha^{-\xi}}{\xi(\xi - 1)} && (23)
\end{aligned}$$

3. *The expected short fall (also known as the conditional VaR) at the level α is the expected loss conditioned by the fact that the loss is greater than or equal to VaR_α. The goal of this question is to quantify the differences obtained when using it as a measure of risk in the two loss models considered in questions 1 and 2.*

3.1. *For each $\alpha \in (0, 1)$, derive an equation that the rate parameter r and the shape parameter ξ must satisfy in order for the values of VaR_α computed in questions 1.2 and 2.2 to be the same.*

Resposta:

Queremos que $\frac{\alpha^\xi - 1}{\xi} = -\frac{\log(\alpha)}{r} \implies r = \xi \frac{\log(\alpha)}{1 - \alpha^{-\xi}}$. De fato, para cada $\alpha \in (0, 1)$, essa é uma equação que, para cada ξ, r deve satisfazer, e vice-versa.

3.2. *Assuming that the parameters r and ξ satisfy the relationship derived in question 3.1 above, compare the corresponding values of the expected short fall in the models of questions 1 and 2 and comment on the differences.*

Resposta:

Suponha que r satisfaça a equação acima. Então, no caso da questão 1, se definirmos E_1 como o "expected short fall", $E_1 = \frac{1}{r}[1 - \log(\alpha)] = \frac{1-\alpha^{-\xi}}{\xi \log(\alpha)}[1 - \log(\alpha)]$. Da mesma forma $E_2 = \frac{1-\xi-\alpha^{-\xi}}{\xi(\xi-1)}$. No primeiro caso, teremos uma componente que cresce menos com com α, isto é, se α crescer, o E_1 vai crescer menos do que E_2. Observo tamvém que as expressões são bem diferentes, sendo a segunda linear em $\alpha^{-\xi}$.

Problema 2.4

Problema 2.6

Problema 2.8