Finanças Quantitativas: Lista 6

Lucas Moschen

07 de junho de 2020

Exercício 6.6

(i) $X_t - X_{t-1} = W_t - 1.5W_{t-1}$

(ii) $X_t - 0.8X_{t-1} = W_t - 0.5W_{t-1}$

$\{W_t\}_t \sim N(0, \sigma^2)$

1.

i) Temos que $\phi_1 = 1, \theta_1 = -1.5$

Modelo: $(1 - B)X_t = (1 - 1.5B)W_t$

$\phi(B) = 1 - B$

$\theta(B) = 1 - 1.5B$

ii) Temos que $\phi_1 = 0.8, \theta_1 = -0.5$

Modelo: $(1 - 0.8B)X_t = (1 - 0.5B)W_t$

$\phi(B) = 1 - 0.8B$

$\theta(B) = 1 - 0.5B$

2. Sabemos que em um modelo ARMA, a estacionaridade depende apenas do modelo AR e a invertibilidade depende apenas do modelo MA. Assim, se as raízes de $\phi(z)$ tem módulo maior do que 1, a série temporal é dita estacionária e se as raízes de $\theta(z)$ tem módulo maior do que 1, X é invertível. Consideremos cada modelo:

i) Temos que $\phi(B) = 0 \implies B = 1$ e $\theta(B) = 0 \implies B = 2/3$. Desta maneira, dada a explicação acima, vemos que o modelo não é estacionário, mas é invertível.

ii) Temos que $\phi(B) = 0 \implies B = 5/4$ e $\theta(B) = 0 \implies B = 2$. Desta maneira, dada a explicação acima, vemos que o modelo não é estacionário e não é invertível.

Exercício 6.11

Assumimos que $\{X_t\}_t$ é da forma $X_t = \phi_1 X_{t-1} + W_t$, para algum ruído branco forte de variância desconhecida σ^2.

1. Amostra da distribuição normal padrão e amostra para a série temporal.

```
set.seed(3)
N <- 5000
x <- w <- rnorm(n = N)
for (t in 2:N){
```

```
  x[t] <- x[t - 1] + w[t]
}
```

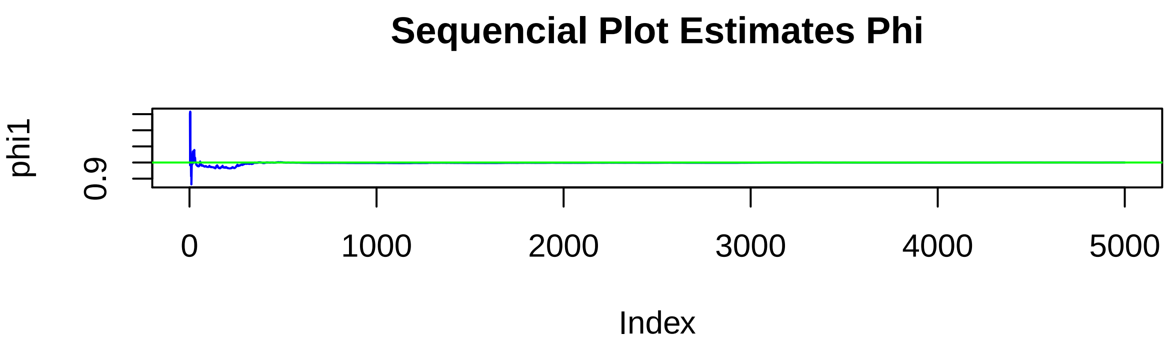
2.

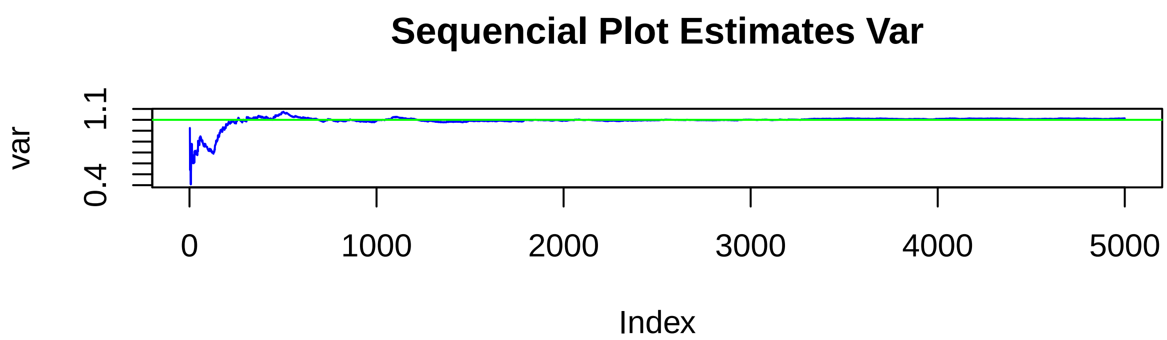
Primeiro declaremos as funções:

```
phi1_hat <- function(x){
  num <- sum(x[2:length(x)]*x[1:length(x)-1])
  den <- sum(x[1:length(x)-1]^2)
  return(num/den)
}
var_hat <- function(x,phi){
  num <- x[1]**2
  num <- num + sum((x[2:length(x)] - phi*x[1:length(x) - 1])^2)
  return(num/(length(x) - 1))
}
DF_test <- function(phi, var){
  return((phi - 1)/sqrt(var))
}
```

Agora, calculemos para cada n essas estatísticas:

```
phi1 <- array(NA, dim = N)
var <- array(NA, dim = N)
DF <- array(NA, dim = N)
for(n in 1:N){
  phi1[n] <- phi1_hat(x[1:n])
  var[n] <- var_hat(x[1:n], phi1[n])
  DF[n] <- DF_test(phi1[n], var[n])
}

par(mfrow = c(2,1))
plot(phi1, main = "Sequencial Plot Estimates Phi", type = 'l', col = 'blue')
abline(h = 1, col = 'green')
plot(var, main = "Sequencial Plot Estimates Var", type = 'l', col = 'blue')
abline(h = 1, col = 'green')
```





Observe de fato, a convergência para os valores que damos para cada parâmetro. Indico pela cor verde essa convergência.

3.

Vamos epetir o processo acima NS vezes para produzir amostras independentes.

```
N <- 1000
NS <- 500
XX <- matrix(NA, nrow = N, ncol = NS)

set.seed(100)
w <- matrix(rnorm(N*NS), nrow = N, byrow = TRUE)
XX[1,] <- w[1,]
for(n in 2:N){
  XX[n,] <- XX[n-1,] + w[n,]
}
```

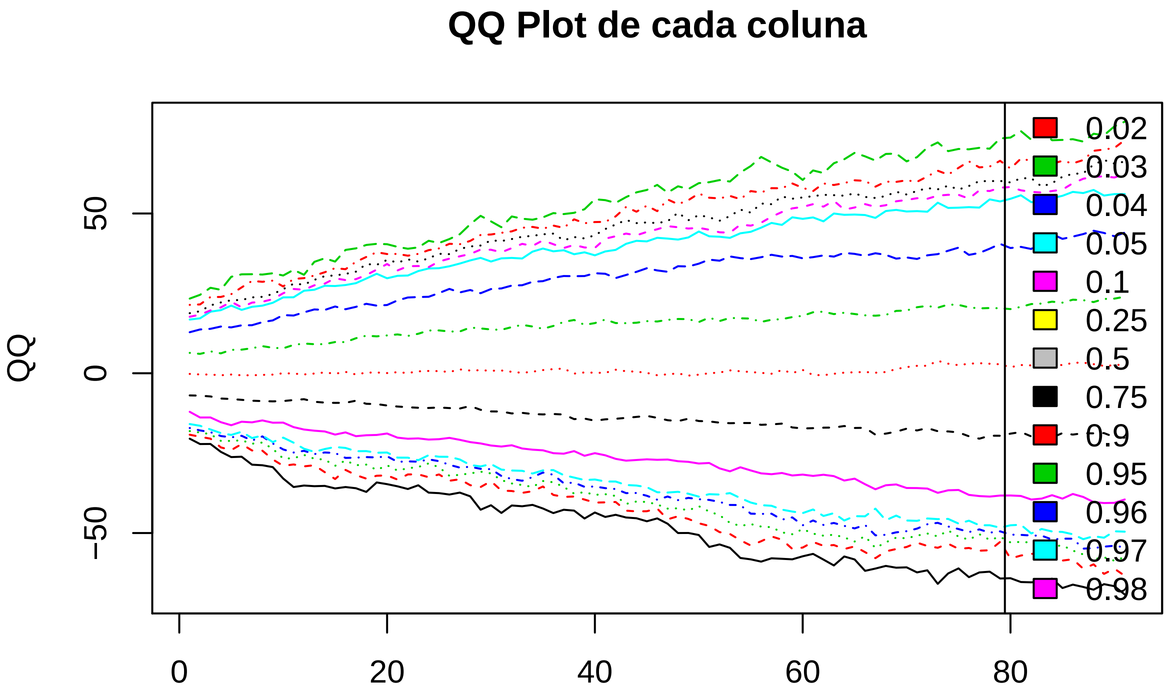
Agora, para cada $n = 100, 110, 120, ..., 1000$, vamos computar os valores dos quantis da amostra de tamanho NS dada pela $n-th$ linha da matriz.

```
q <- c(0.01, 0.02, 0.03, 0.04, 0.05, 0.1, 0.25, 0.5, 0.75, 0.9, 0.95, 0.96, 0.97, 0.98, 0.99)
n_list <- seq(100,N,by = 10)

QQ <- matrix(NA, nrow = length(n_list), ncol = length(q))

for(i in 1:length(n_list)){
  QQ[i,] <- quantile(XX[n_list[i],], probs = q)
}
colnames(QQ) <- q
```

4.

Considere o plot das colunas de QQ

```r
matplot(QQ, type = 'l', main = "QQ Plot de cada coluna")
legend("right", legend = colnames(QQ), col = seq_len(ncol(QQ)), fill = seq_len(ncol(QQ)))
```



5.

Consideraremos o data set com os preços diários das ações Calpine para investigas estacionaridade.

```r
library(tseries)
```

Exercício 6.13

Assumimos que $X_t = \mu + X_{t-1} + W_t, t = 1, 2, ...,$ onde μ é chamada de *drift* E $X_0 = x_0$ é conhecida.

1. Mostrarei por Indução.

Caso base $t = 1 : X_1 = \mu + X_0 + W_1 = x_0 + \mu * 1 + W_1$, como queríamos.

Hipótese de Indução: Suponha que valha para t. Assim:

$$X_{t+1} = \mu + X_t + W_{t+1} = \mu + x_0 + \mu t + \sum_{i=1}^{t} W_i + W_{t+1} = x_0 + \mu(t+1) + \sum_{i=1}^{t+1} W_i$$

Logo a identidade é válida por indução, commo queríamos demonstrar.

2. Computemos média, variância e auto-covariância:

$$\mu_X(t) = E[X_t] = x_0 + \mu t + \sum_{i=1}^{t+1} E[W_i] = x_0 + \mu t$$

$$\sigma_X^2(t) = Var(X_t) = \sum_{i=1}^{t} Var[W_i] = t\sigma^2$$

$$
\begin{aligned}
\gamma_X(s,t) = Cov(X_s, X_t) &= E[X_sX_t] - (x_0 + \mu s)(x_0 + \mu t) \\
&= x_0^2 + x_0\mu(t+s) + x_0E[\sum_{i=1}^{t} W_i + \sum_{i=1}^{s} W_i] \\
&+ \mu^2 st + \mu(sE[\sum_{i=1}^{t} W_i] + tE[\sum_{i=1}^{s} W_i]) + E[\sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{s} W_iW_j] - x_0^2 - x_0\mu(t+s) - \mu^2 st \\
&= \sum_{i=i}^{t}\sum_{j=1}^{s} E[W_iW_j] = \min(s,t)\sigma^2
\end{aligned}
$$

3. Não. $\{X_t\}_t$ são é estacionário porque as estatísticas variam com o tempo, inclusive a média, o que já não permite nem uma estacionaridade fraca.
4. $\nabla X_t = X_t - X_{t-1} = \mu + W_t$. Logo:

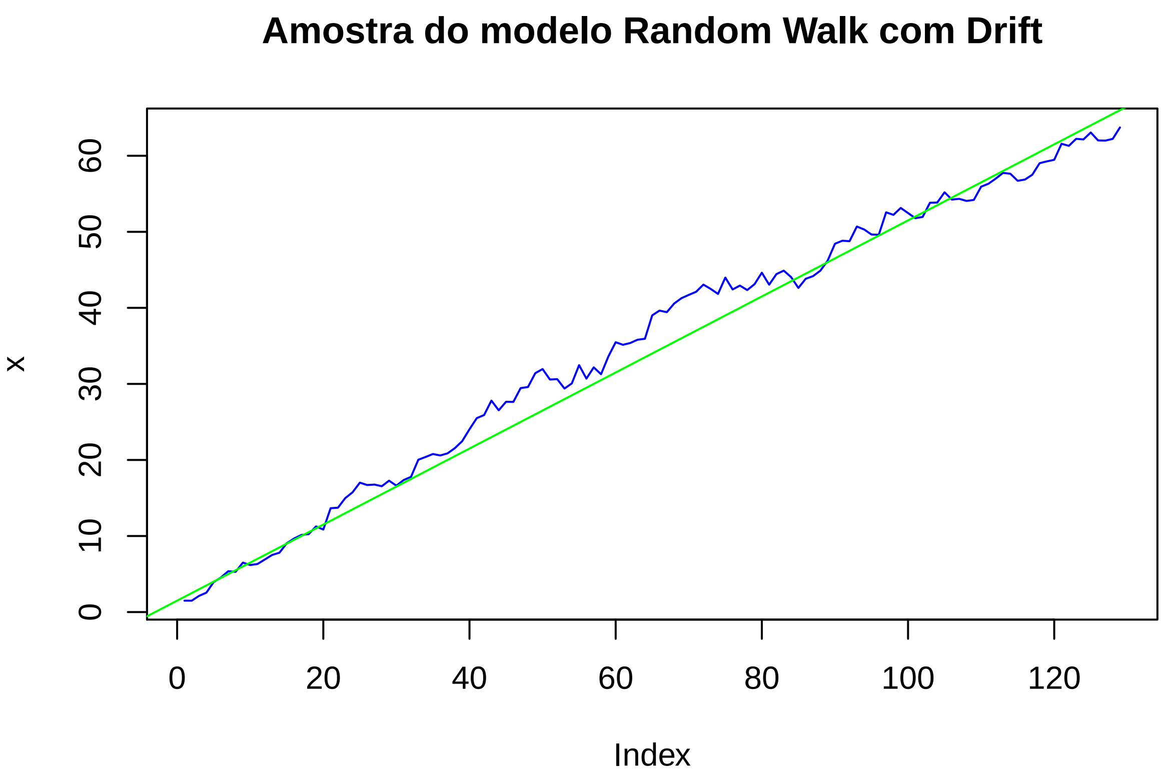
$$\mu_X(t) = E[\nabla X_t] = \mu$$

$$\sigma_X^2(t) = Var[\nabla X_t] = Var[W_t] = \sigma^2$$

$$\gamma_X(s,t) = Cov(X_s, X_t) = E[X_sX_t] - \mu^2 = \mu^2 + \mu E[W_t + W_s] + E[W_tW_s] - \mu^2 = \sigma^2 \mathbb{1}_{s=t}$$

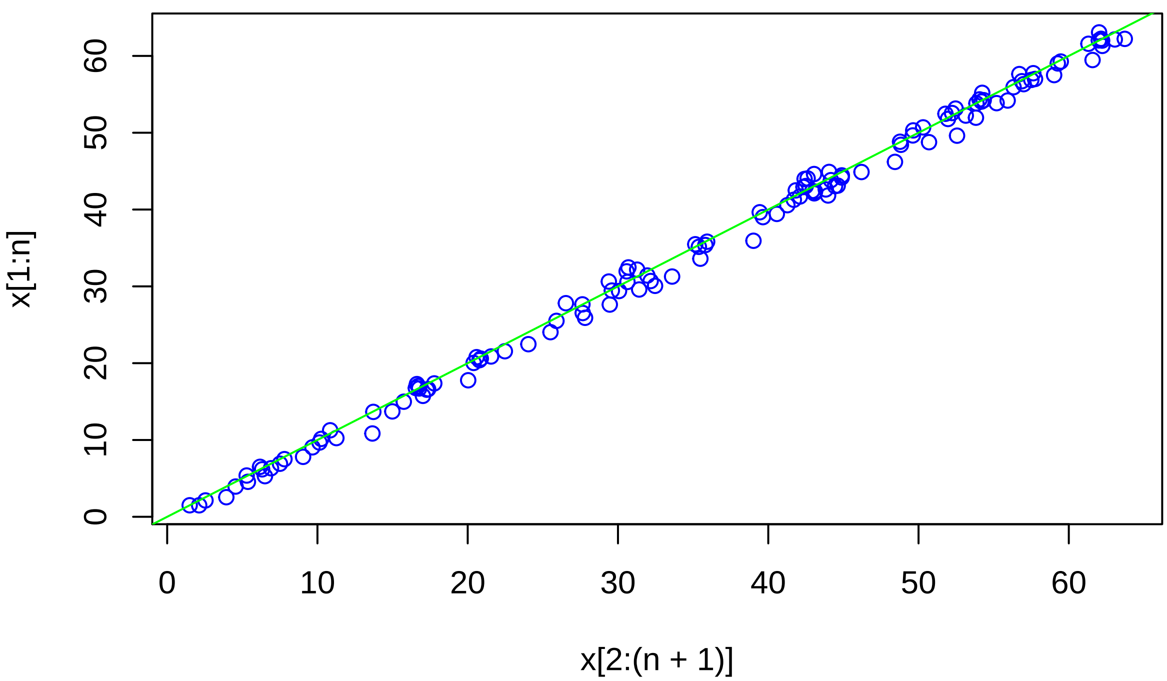
5. Ainda não posso garantir que o processo é estacionário, mas posso garantir, baseado na questão 4, que esse processo é, pelo menos, fracamente estacionário.
6. Seja $x_0 = 1.5, \mu = 0.5, n = 128$. Assuma o ruído branco como Gaussiano.

```r
n <- 128
mu <- 0.5
x0 <- 1.5
set.seed(100)
w <- rnorm(n = n, mean = 0, sd = 1)
x <- array(NA, dim = n+1)
x[1] <- x0
for(i in 2:(n+1)){
  # note que tomo w[i-1], pois a sequência de x começa em x0
  x[i] <- mu + x[i-1] + w[i-1]
}
plot(x, main = 'Amostra do modelo Random Walk com Drift', col = 'blue', type = 'l')
abline(a = x0, b = mu, col = 'green')
```



Observamos que, como mostrado na reta verde, que tem intercepto $a = x_0$ e inclinação $b = \mu$, esses parâmetros indicam a reta que melhor se encaixa nos dados de random walk com drift. Isto é, lemos μ como a inclinação da melhor reta para os dados (claro que eles tem uma variação natural do processo) e x_0 como o intercepto, o que também já era esperado.

```
plot(x[2:(n+1)], x[1:n], col = 'blue')
abline(a = 0, b = 1, col = 'green')
```



Nesse plot, podemos ver uma reta $x = y$. Isso acontece pela construção de nosso modelo, onde $y = x + \mu + e$, onde $\mu + e$ é basicamente uma constante que, mesque mude com o tempo, varia como uma normal.