

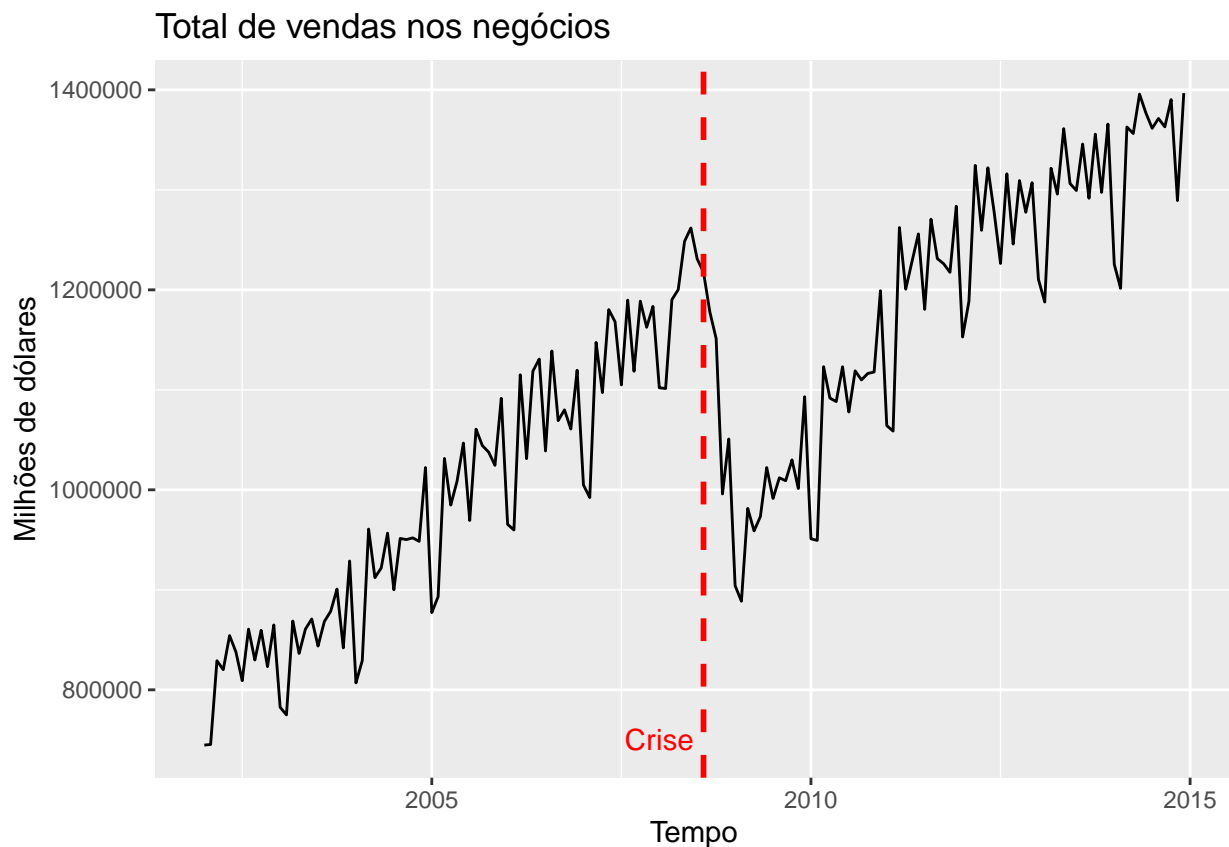
Análise de intervenção e previsão de atividade econômica

Lucas Emanuel Resck Domingues*

Lucas Machado Moschen†

Dados

A série temporal a seguir é o total de vendas mensais nos negócios em milhões de dólares, obtido em Fred, Federal Reserve Bank of St. Louis. A janela de observações está entre Janeiro de 2002 e Dezembro de 2014. Os últimos dois anos serão utilizados para a validação do modelo de previsão.



Vamos separar os últimos dois anos para validação do modelo e portanto, não usaremos no treinamento do modelo.

Vamos considerar que houve uma intervenção (a crise do subprime) em julho de 2008.

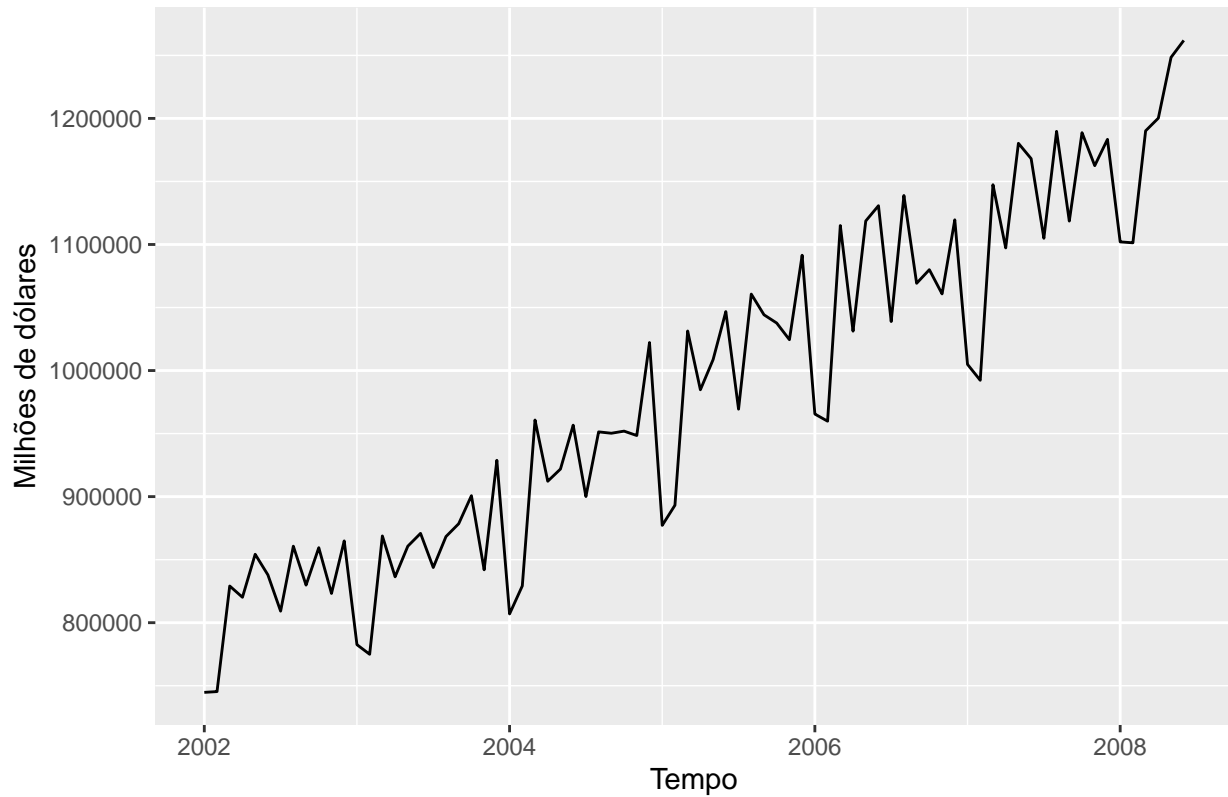
*Escola de Matemática Aplicada

†Escola de Matemática Aplicada

1. Modelagem pré-intervenção

Vamos realizar uma modelagem pré-intervenção, isso é, vamos fazer a modelagem do processo antes da crise. Assim, poderemos verificar que de fato houve efeito pós intervenção.

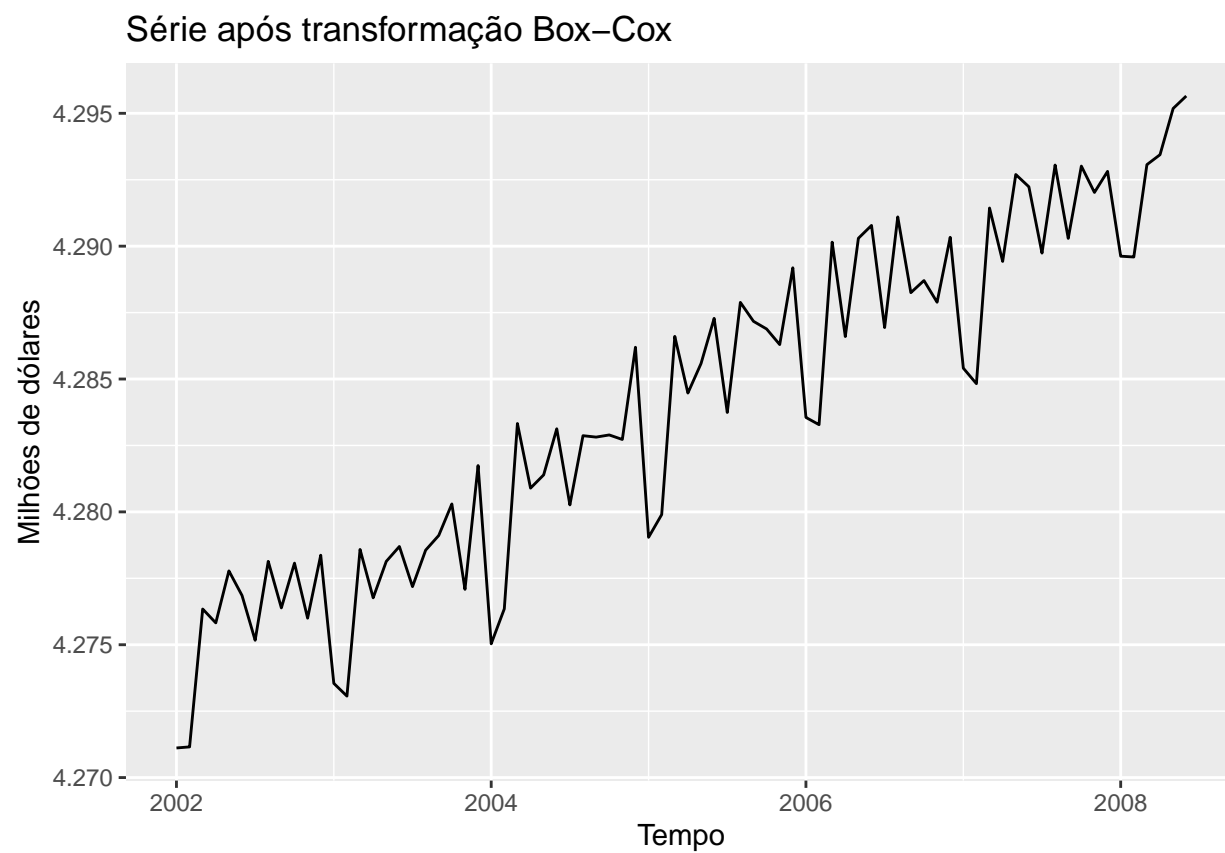
Série pré-intervenção



1. Modelagem manual Box-Jenkins

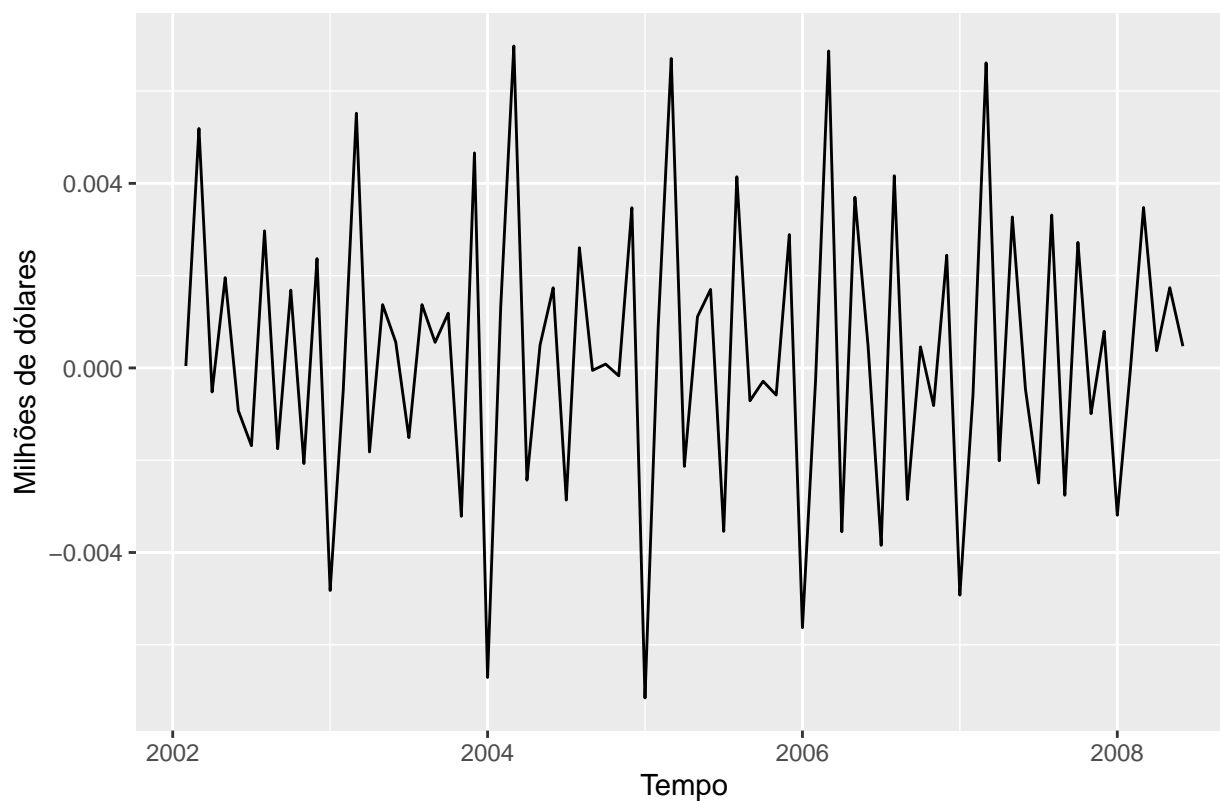
Vamos seguir a metodologia Box-Jenkins. Primeiro, faremos uma transformação Box-Cox na série, se utilizando do λ que minimiza o coeficiente de variação para subséries da série.

```
## [1] "Obtemos lambda = -0.222584674825719"
```



Agora, vamos remover a tendência diferenciando a série.

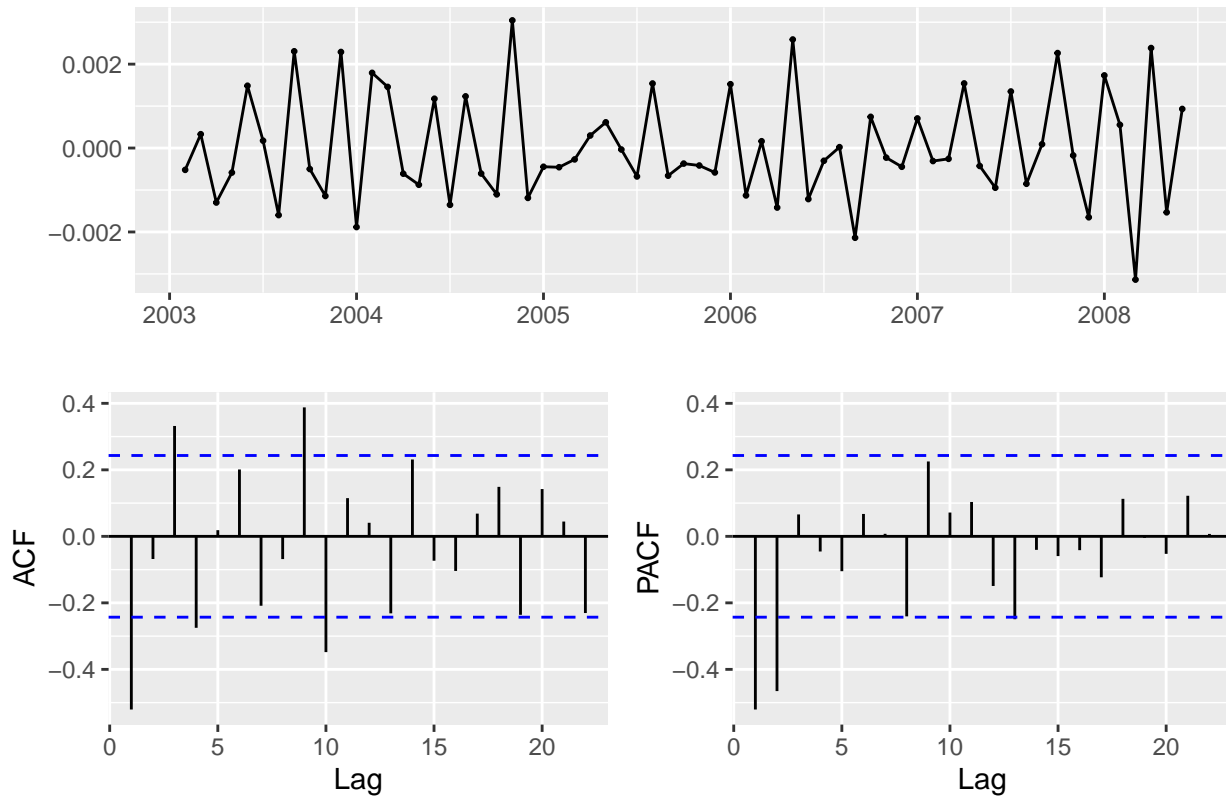
Diferença mensal de vendas nos negócios



Com a série diferenciada, vamos checar a sazonalidade anual, como sugerido:

```
##  
## Kruskal-Wallis rank sum test  
##  
## data: pre_intervention.d and cycle(pre_intervention.d)  
## Kruskal-Wallis chi-squared = 66.041, df = 11, p-value = 6.862e-10
```

O p-valor é pequeno, então rejeitamos a hipótese nula do teste, o que nos dá suporte para diferenciar a série sazonalmente. Após a diferenciação, podemos ver que a ACF e a PACF não apresentam picos nos lags múltiplos de 12.



Assim, com o teste ADF rejeitando a não estacionariedade, podemos partir para a identificação do modelo.

```
## Warning in adf.test(pre_intervention.bc): p-value smaller than printed p-value
##
## Augmented Dickey-Fuller Test
##
## data: pre_intervention.bc
## Dickey-Fuller = -4.191, Lag order = 4, p-value = 0.01
## alternative hypothesis: stationary
```

Vemos uma ACF decaindo exponencialmente (em senóides amortecidas) e uma PACF morrendo após o lag 2. Assim imaginamos um modelo AR com grau não maior do que 3. Vamos testar essa ideia com os critérios de informação. Além disso, não percebemos nenhum LAG significativo sazonal, o que pode indicar um MA(1) ou não ter componentes autorregressivos ou de média móvel sazonais. Vamos testar esses modelos também com os critérios de informação. O modelo de teste ARIMA(3,1,3) teve problema de estacionariedade e foi retirado da análise.

A tabela mostra vários critérios de informação para os modelos $ARMA(p, q)[12]$ e $ARMA(p, q)[12]$ com uma média movel sazonal (S).

Podemos observar que, sem componente MA sazonalidade, o melhor modelo segundo os três critérios de informação foi $ARMA(2,0)$, algo esperado dadas as nossas considerações anteriormente. Considerando MA sazonal, o melhor modelo fica, entre todos, $ARIMA(2,1,0)(0,1,1)[12]$.

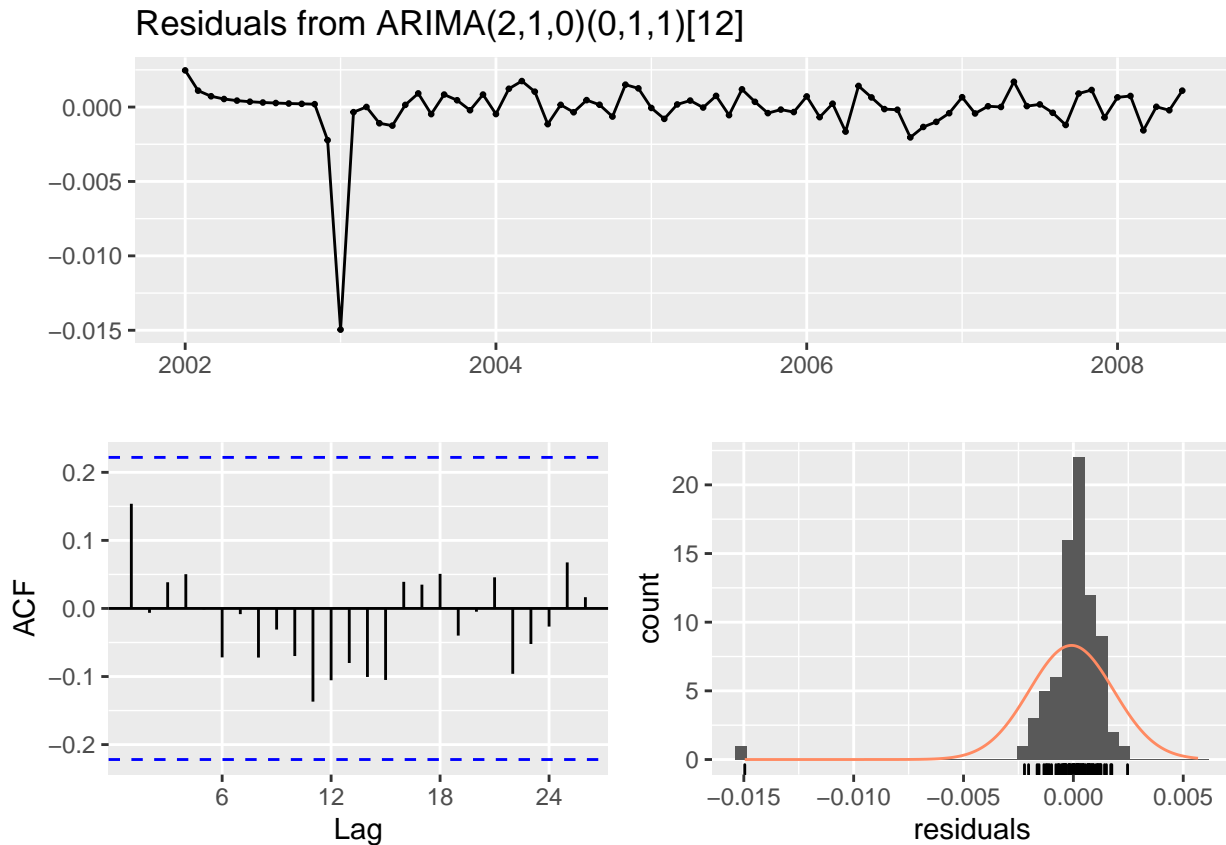
##	p	q	AIC	BIC	AICc	AIC (S)	BIC (S)	AICc (S)
## 1	0	0	-679.1115	-676.9371	-679.0480	-677.4750	-673.1262	-677.2815
## 2	0	1	-706.1459	-701.7971	-705.9524	-705.4041	-698.8809	-705.0106
## 3	0	2	-706.7266	-700.2034	-706.3331	-708.4334	-699.7359	-707.7668
## 4	1	0	-697.5741	-693.2253	-697.3805	-695.6333	-689.1101	-695.2398
## 5	1	1	-705.8174	-699.2942	-705.4240	-706.0822	-697.3846	-705.4155

```
## 6 1 2 -704.7680 -696.0705 -704.1014 -706.4932 -695.6212 -705.4762
## 7 2 0 -710.9575 -704.4343 -710.5640 -717.9966 -709.2990 -717.3299
## 8 2 1 -709.3628 -700.6653 -708.6962 -716.5123 -705.6404 -715.4953
## 9 2 2 -707.3870 -696.5151 -706.3700 -714.5490 -701.5027 -713.1007
## 10 3 0 -709.2816 -700.5841 -708.6150 -716.4277 -705.5558 -715.4108
## 11 3 1 -707.3690 -696.4970 -706.3520 -714.5186 -701.4722 -713.0703
## 12 3 2 -707.3121 -694.2658 -705.8638 -712.8482 -697.6275 -710.8833
```

Agora que já identificamos o modelo, podemos estimá-lo.

```
## Series: pre_intervention
## ARIMA(2,1,0)(0,1,1)[12]
## Box Cox transformation: lambda= -0.2225847
##
## Coefficients:
##          ar1      ar2      sma1
##      -0.8633 -0.6094 -0.6911
## s.e.   0.0961  0.0994  0.2242
##
## sigma^2 estimated as 4.585e-06: log likelihood=363
## AIC=-718 AICc=-717.33 BIC=-709.3
##
## Training set error measures:
##              ME      RMSE      MAE      MPE      MAPE      MASE
## Training set -1902.353 38156.23 18285.63 -0.2765078 1.947999 0.2891937
##              ACF1
## Training set 0.1325941
```

Agora com o modelo treinado, podemos fazer uma checagem sobre os resíduos:



```
##
##  Ljung-Box test
##
## data:  Residuals from ARIMA(2,1,0)(0,1,1)[12]
## Q* = 9.3584, df = 13, p-value = 0.7454
##
## Model df: 3.   Total lags used: 16
##
##  Jarque Bera Test
##
## data:  model1$residuals
## X-squared = 6926.5, df = 2, p-value < 2.2e-16
```

Observamos que existe um resíduo bem deslocado que no ano de 2003 quando houve uma queda que o modelo não conseguiu capturar. Além disso, o resíduo não aparenta normalidade; inclusive, a curtose e o *skewness* da normal foram rejeitados pelo teste Jarque-Bera. Por fim, as correlações estão bem interessantes, dentro das margens e, o teste de Ljung-Box não rejeitou a hipótese de decorrelação. Isso é um bom indício, porém a não normalidade dos dados indica algum problema.

2. Modelo auto.arima

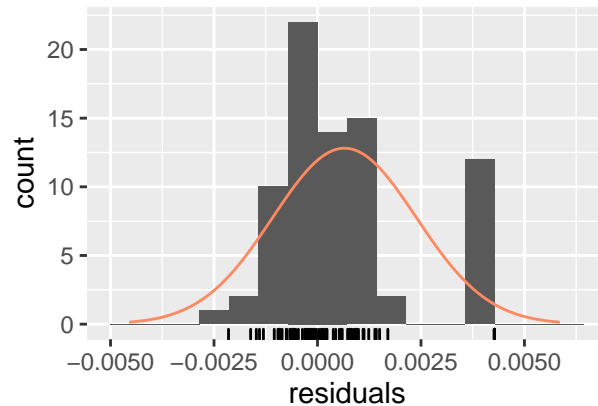
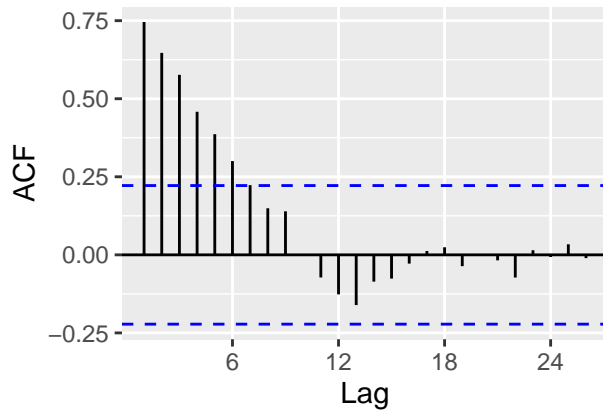
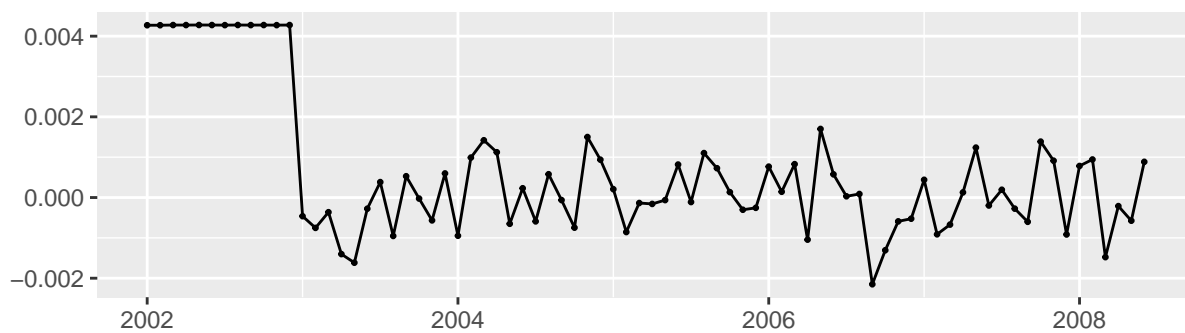
Vamos averiguar uma segunda opção de modelo que pode ser encontrada automaticamente, utilizando a função `auto.arima`. Assim, vemos que o modelo estimado tem drift e é do tipo

ARIMA(3,0,0)(2,1,0)[12].

```
## Series: pre_intervention
## ARIMA(3,0,0)(2,1,0)[12] with drift
```

```
## Box Cox transformation: lambda= -0.2225847
##
## Coefficients:
##      ar1      ar2      ar3      sar1      sar2  drift
##      0.1015  0.1235  0.5118 -0.3434 -0.4384 3e-04
## s.e.  0.1104  0.1156  0.1119  0.1419  0.1616 2e-04
##
## sigma^2 estimated as 4.413e-06:  log likelihood=371.16
## AIC=-728.32  AICc=-726.39  BIC=-712.99
##
## Training set error measures:
##      ME      RMSE      MAE      MPE      MAPE      MASE      ACF1
## Training set 10721.76 32202.53 23457.97 1.270498 2.547099 0.370996 0.6357849
```

Residuals from ARIMA(3,0,0)(2,1,0)[12] with drift



```
##
## Ljung-Box test
##
## data: Residuals from ARIMA(3,0,0)(2,1,0)[12] with drift
## Q* = 159.32, df = 10, p-value < 2.2e-16
##
## Model df: 6. Total lags used: 16
##
## Jarque Bera Test
##
## data: model2$residuals
## X-squared = 17.463, df = 2, p-value = 0.0001614
```


Pela ACF, os erros certamente tem correlação, a princípio uma correlação autorregressiva, e também existe uma assimetria no histograma. Esses fatos são confirmados com os testes, dado que rejeitamos ambas as hipóteses nulas, isto é, temos evidência para assegurar que não há normalidade e existe correlação nos resíduos. As medidas dos erros de treinamento também não são melhores do que o modelo 1.

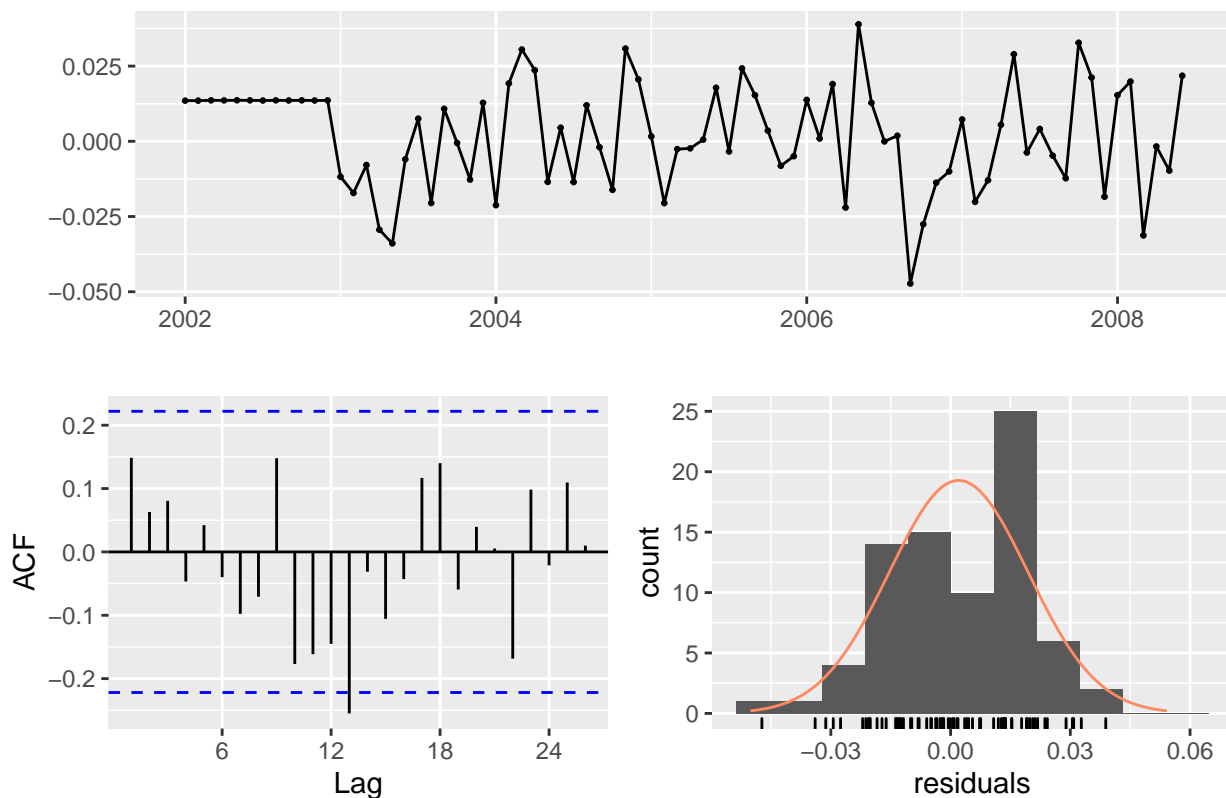
3. Modelo auto.arima adaptado manualmente

Fazendo algumas experimentações com o `auto.arima` podemos chegar num fato interessante colocando $\lambda = 0$.

```
## Series: pre_intervention
## ARIMA(3,0,0)(2,1,0)[12] with drift
## Box Cox transformation: lambda= 0
##
## Coefficients:
##          ar1      ar2      ar3      sar1      sar2      drift
##          0.1055  0.1302  0.5103  -0.3279  -0.4297  0.0055
## s.e.      0.1105  0.1088  0.1116   0.1425   0.1418  0.0004
##
## sigma^2 estimated as 0.0003932:  log likelihood=168.3
## AIC=-322.59   AICc=-320.66   BIC=-307.27
##
## Training set error measures:
##              ME      RMSE      MAE      MPE      MAPE      MASE      ACF1
## Training set 1907.311 17686.81 14286.31 0.1881717 1.442845 0.225943 0.106949
```

Conseguimos um modelo com todas as medidas de erro menores e, além disso:

Residuals from ARIMA(3,0,0)(2,1,0)[12] with drift



```
##
## Ljung-Box test
```

```
##
## data: Residuals from ARIMA(3,0,0)(2,1,0)[12] with drift
## Q* = 21.302, df = 10, p-value = 0.01908
##
## Model df: 6. Total lags used: 16

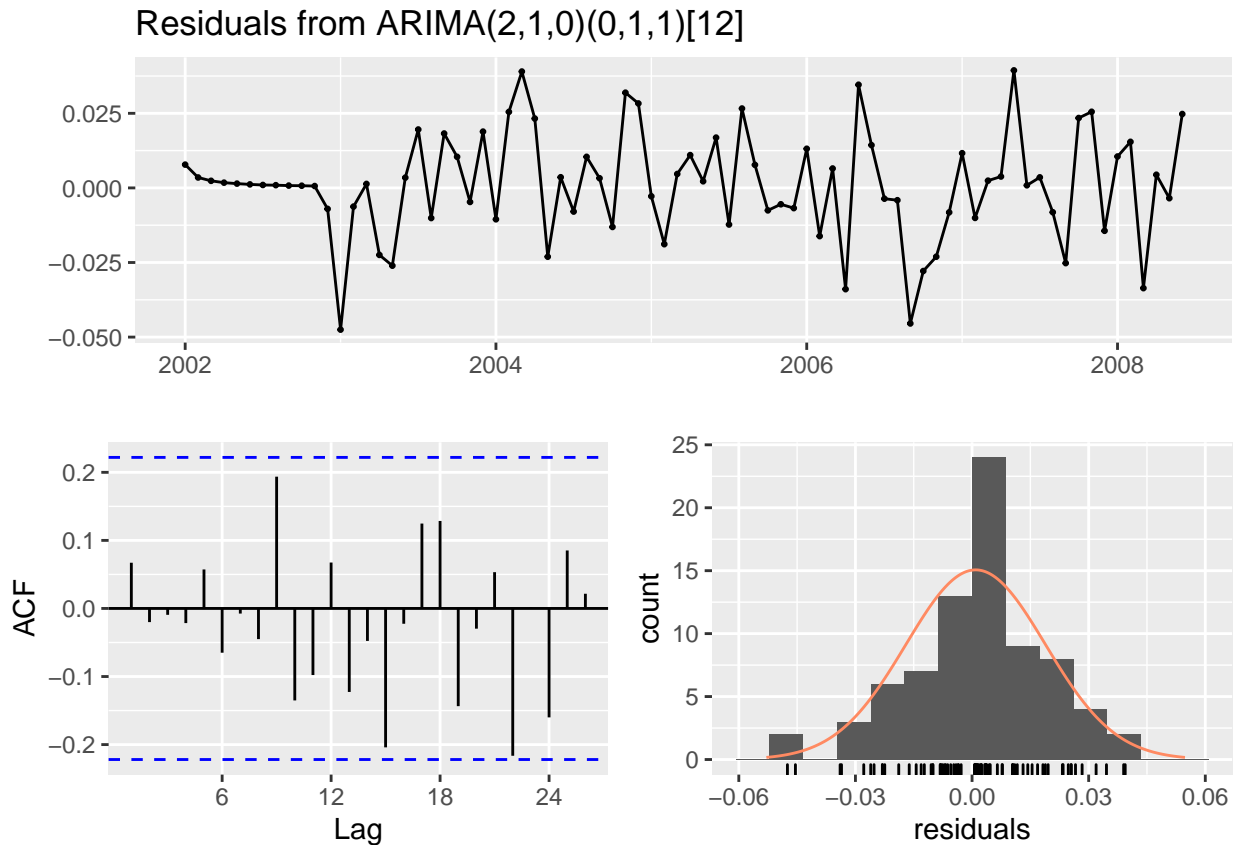
##
## Jarque Bera Test
##
## data: model3$residuals
## X-squared = 1.7383, df = 2, p-value = 0.4193
```

Note que os resíduos aparentam muito mais uma normalidade do que antes, o que também é indicado pelo teste Jarque Bera. Porém o teste Ljung-Box rejeita a hipótese nula, o que mostra que ainda existe uma correlação nos resíduos.

4. Modelo manual com variação

Utilizando o modelo inicial com a variação de λ , temos:

```
## Series: pre_intervention
## ARIMA(2,1,0)(0,1,1)[12]
## Box Cox transformation: lambda= 0
##
## Coefficients:
##          ar1          ar2          sma1
##      -0.8617   -0.6038   -0.6408
## s.e.    0.0971    0.1003    0.2063
##
## sigma^2 estimated as 0.0004012: log likelihood=163.05
## AIC=-318.1   AICc=-317.44   BIC=-309.41
##
## Training set error measures:
##              ME      RMSE      MAE      MPE      MAPE      MASE      ACF1
## Training set 1017.575 18230.79 13580.72 0.07746272 1.3489 0.2147838 0.05014901
```

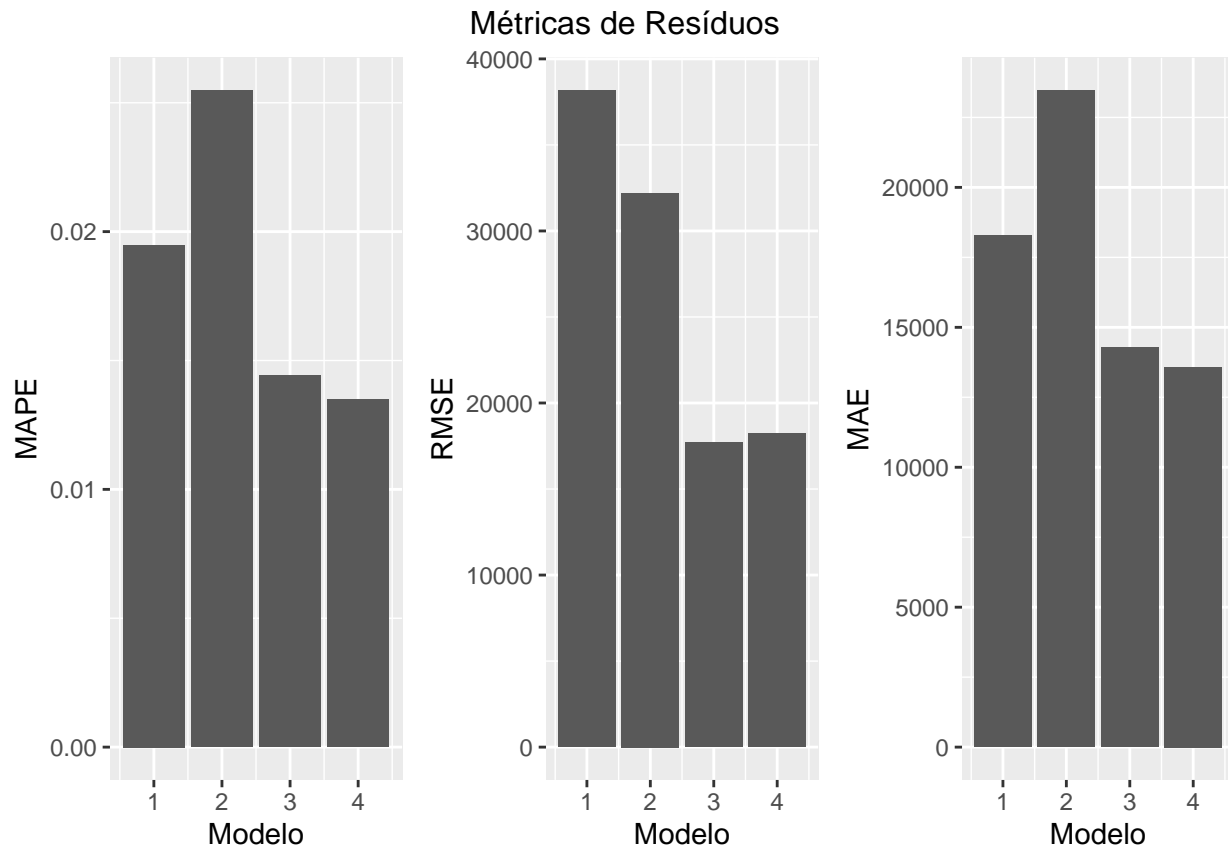


```
##
##  Ljung-Box test
##
## data:  Residuals from ARIMA(2,1,0)(0,1,1)[12]
## Q* = 13.505, df = 13, p-value = 0.4096
##
## Model df: 3.    Total lags used: 16
##
##  Jarque Bera Test
##
## data:  model4$residuals
## X-squared = 1.0435, df = 2, p-value = 0.5935
```

Temos resíduos mais parecidos com uma normal, se comparados aos casos anteriores, e a ACF está dentro das faixas de confiança, indicando um processo decorrelacionado. Tanto Jarque Bera quanto Ljung Box não rejeitam suas hipóteses nulas, o que nos dá evidência para confirmar que os resíduos formam algo similar a um ruído branco. Os erros de treino também aparentam estar bem em relação ao modelo inicial.

Desta forma, fica claro que o modelo 4 é o mais indicado para representar a série antes da intervenção.

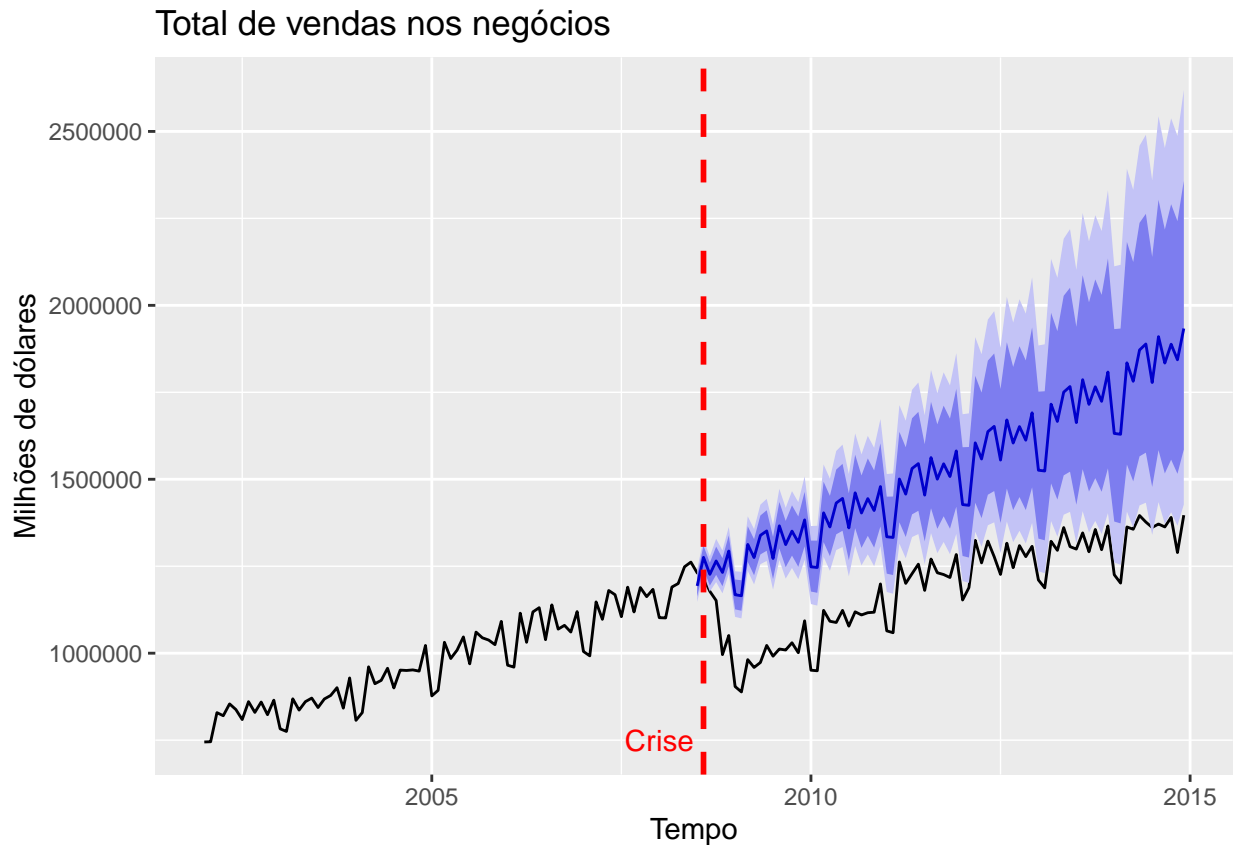
Podemos averiguar a comparação de três métricas para os erros:



Assim, além de o terceiro e o quarto modelos terem os menores erros, o quarto modelo vence em duas das métricas e, portanto, faz sentido ser escolhido (em adição aos seus resíduos terem um comportamento levemente melhor, como vimos).

Previsões do modelo e comparação pós-intervenção

Vejamos uma comparação entre o dado real e aquele previsto pelo modelo, ambos pós-crise.



Observamos que as previsões de nosso modelo ficam em um patamar mais alto do que os dados reais e por isso tomamos como hipótese nula de que a crise não foi significativa. Consideramos os procedimentos sugeridos por Box e Tiao (1976) com a checagem do erro de previsão.

Considere a estatística

$$Q = \sum_{j=1}^m a_j^2 / \hat{\sigma}_a^2$$

onde $a_j = Z_j - \hat{Z}_{j-1}(1)$, $j = 1, \dots, m$. Sabemos que Q segue uma distribuição $\chi^2(m)$ quando m é grande. Portanto rejeitamos a hipótese nula com nível de significância α_0 se $Q > F^{-1}(1 - \alpha_0)$, onde F é a distribuição acumulada de uma chi-quadrado com m graus de liberdade. Ao observar $Q = q$, o p-valor será dado por $\alpha_0 = 1 - F(q)$.

```
## [1] "p-valor = 0 , Estatística Q = 262043736328174"
```

Como o p-valor é pequeno, em particular < 0.05 , rejeitamos a hipótese nula, o que nos dá evidência para confirmar o efeito da crise subprime. Podemos, então, partir para a modelagem da intervenção.

Modelagem com intervenção

Consideramos o modelo de intervenção dado por uma série que muda de nível abruptamente, dado a quebra do sistema bancário que tem efeito rápido e com um decaimento do efeito exponencial, dado que a economia se autoregula. Vamos supor que não haja outras intervenções, como governamental, e que elas devem ser incorporadas no modelo. Se nossa série atual é N_t , vamos modelar Z_t :

$$Z_t = v(B)X_t + N_t$$

sendo X_t “temporário” e

$$v(B) = \omega_0 + \frac{\omega_1}{1 - \delta B}$$

Portanto,

$$h_t = v(B)X_t = \begin{cases} 0, & t < \text{jul 2008} \\ \omega_0 + \omega_1, & t = \text{jul 2008} \\ \delta^k \omega_1, & t = \text{jul 2008} + k, \quad k = 1, 2, \dots \end{cases}$$

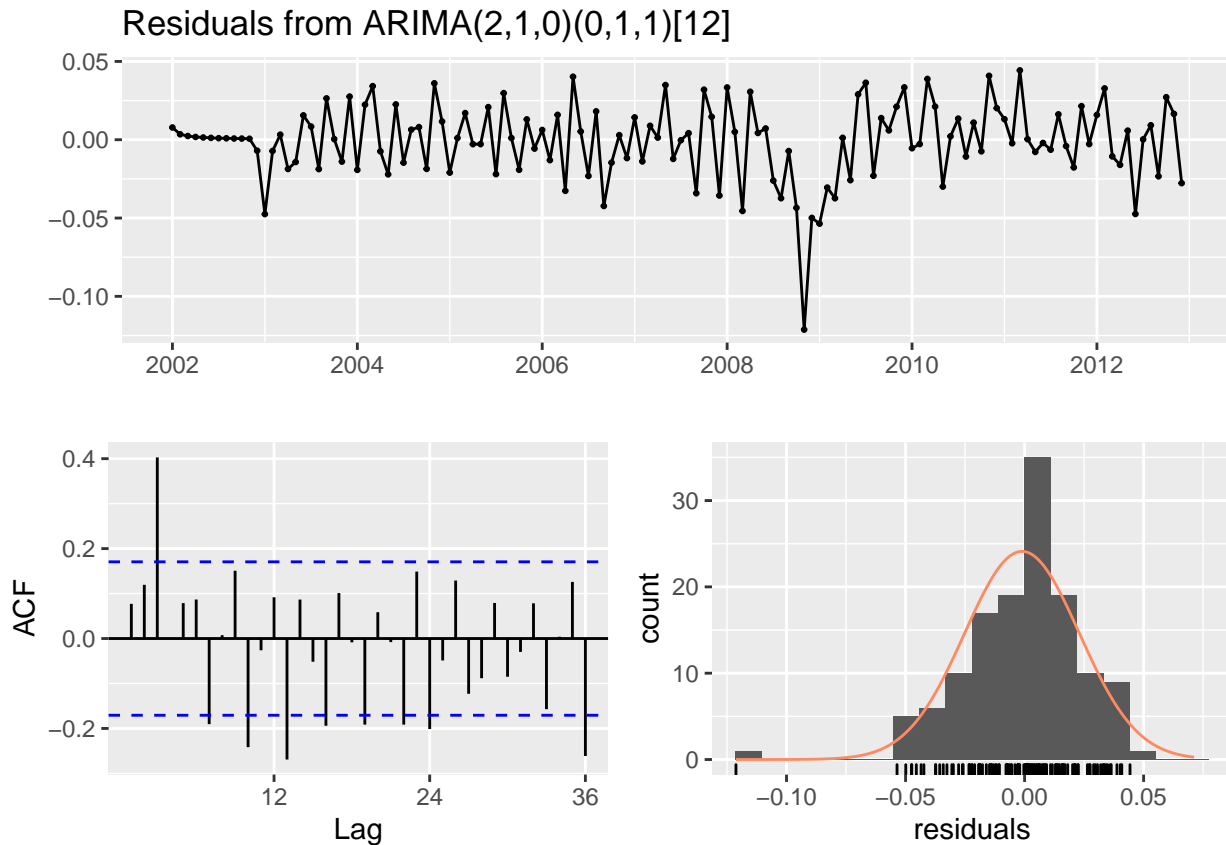
Estimaremos a série com intervenção, ou seja, também estimaremos os parâmetros δ , ω_0 e ω_1 .

```
##
## Call:
## arimax(x = tbs_train.bc, order = c(2, 1, 0), seasonal = c(0, 1, 1), xtransf = data.frame(Crise_a = 1
##      (seq(tbs_train) == (n + 1))), Crise_b = 1 * (seq(tbs_train) == (n + 1))),
##      transfer = list(c(0, 0), c(1, 0)))
##
## Coefficients:
##          ar1          ar2          sma1  Crise_a-MA0  Crise_b-AR1  Crise_b-MA0
##      -0.3451  -0.1775  -1.0000         1.9101        -0.0071        -1.8502
## s.e.   0.0927   0.1012   0.0984        16.0066         0.0593        16.0041
##
## sigma^2 estimated as 0.0006207:  log likelihood = 256.12,  aic = -500.24
##
## Training set error measures:
##              ME          RMSE          MAE          MPE          MAPE          MASE
## Training set -0.001089494 0.02403536 0.01773138 -0.008024588 0.127861 0.3515152
##              ACF1
## Training set 0.07713119
```

Podemos fazer o teste z sobre os coeficientes para ver a significância. O resultado não foi positivo para os coeficientes, que não são significantes.

```
##
## z test of coefficients:
##
##              Estimate Std. Error  z value  Pr(>|z|)
## ar1          -0.3450618  0.0927030  -3.7222 0.0001975 ***
## ar2          -0.1775324  0.1011763  -1.7547 0.0793135 .
## sma1         -0.9999726  0.0983539 -10.1671 < 2.2e-16 ***
## Crise_a-MA0   1.9101428 16.0065655   0.1193 0.9050100
## Crise_b-AR1  -0.0070504  0.0592617  -0.1190 0.9052983
## Crise_b-MA0  -1.8501634 16.0041321  -0.1156 0.9079653
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

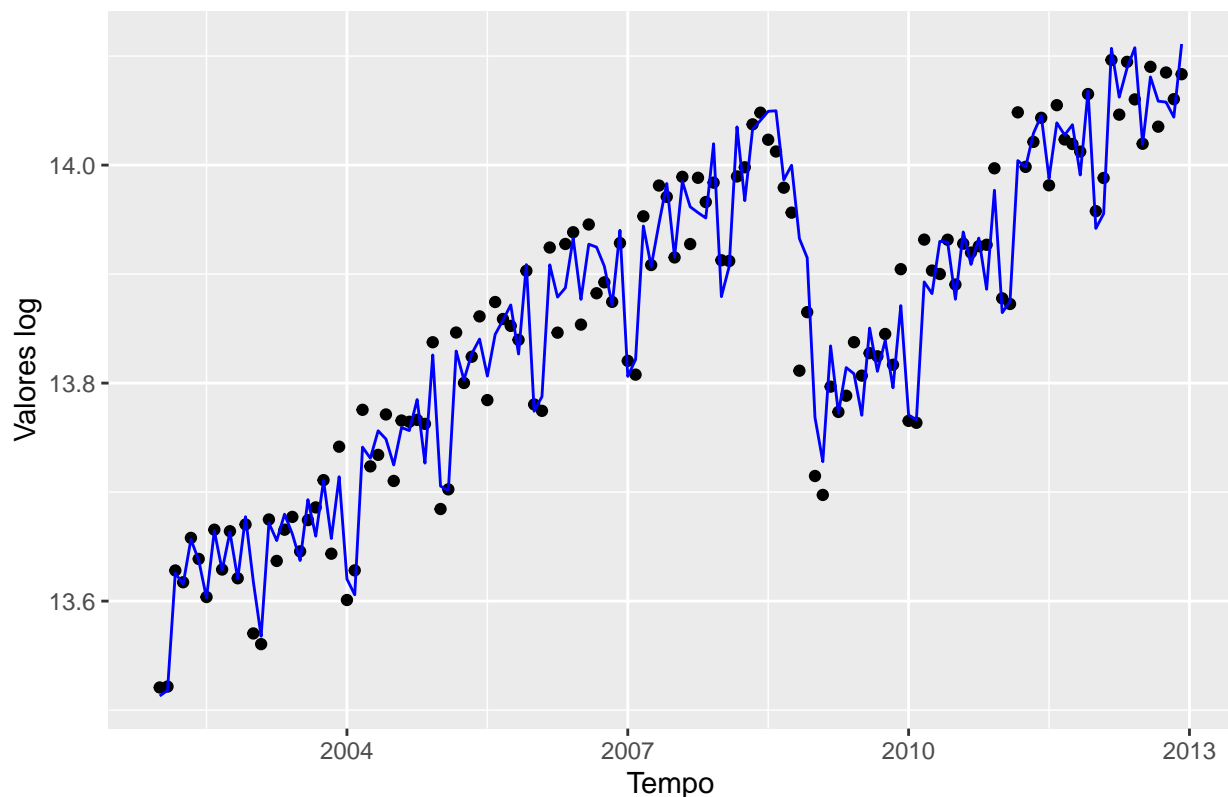
Vamos ver como se comportam os resíduos do modelo.



```
##
##  Ljung-Box test
##
## data:  Residuals from ARIMA(2,1,0)(0,1,1)[12]
## Q* = 87.137, df = 18, p-value = 4.698e-11
##
## Model df: 6.   Total lags used: 24
##
##  Jarque Bera Test
##
## data:  mod.arimax$residuals[-1]
## X-squared = 88.23, df = 2, p-value < 2.2e-16
```

O resíduo não parece ser resultado de uma normal, pois justamente na intervenção há uma distorção bem grande. A ACF dos resíduos e a PACF estão com picos, o que indica que ainda existe uma correlação não capturada. Vamos ver como o modelo fitado se compara com os dados reais na escala log, dada a transformação BoxCox com $\lambda = 0$ que fizemos.

Comparação dos dados reais com o modelo

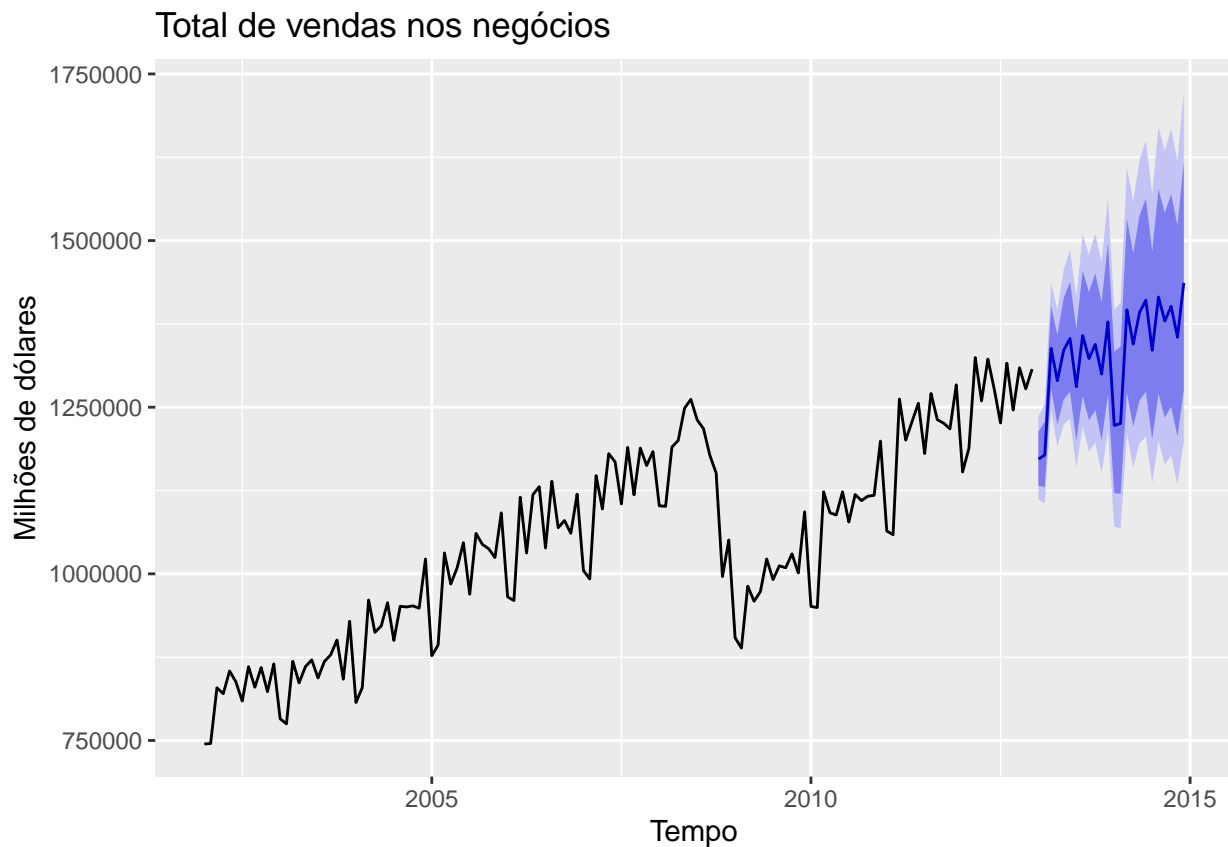


Em geral o modelo parece capturar bem a intervenção.

Previsão com o modelo de intervenção

Vamos agora realizar a previsão até 24 passos à frente. Para isso precisamos usar a estimativa de δ dada pelo `arimax` para o cálculo dos regressores $\omega_0 X_t$ e $\frac{\omega_1}{1-\delta B} X_t$ da função `Arima`, a qual podemos utilizar para fazer previsões através da função `forecast`.

```
## Series: tbs_train
## Regression with ARIMA(2,1,0)(0,1,1)[12] errors
## Box Cox transformation: lambda= 0
##
## Coefficients:
##          ar1          ar2          sma1  omega_0  omega_1
##        -0.3453   -0.1781   -1.0000    1.9602   -1.9000
## s.e.    0.0927    0.1012    0.0983    3.5875    3.5772
##
## sigma^2 estimated as 0.0006689:  log likelihood=256.12
## AIC=-500.24  AICc=-499.49  BIC=-483.56
##
## Training set error measures:
##              ME      RMSE      MAE      MPE      MAPE      MASE
## Training set -1149.52 25955.71 18936.31 -0.1381633 1.780901 0.2222798
##              ACF1
## Training set 0.06494747
```

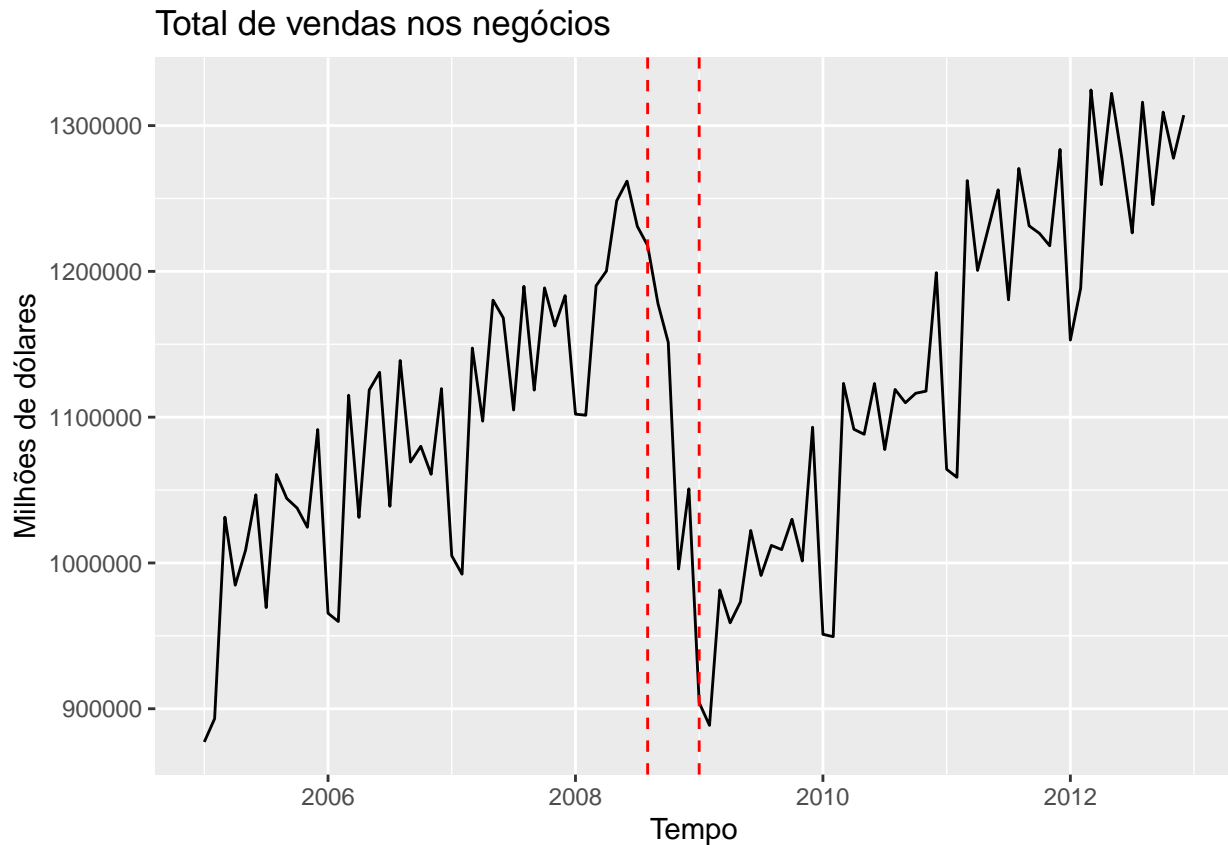



Vamos verificar o MAPE da nossa previsão, comparando com os dados reais de teste:

```
## [1] 0.01713681
```

Nos parece um resultado razoável.

Deste modo, como forma de experimentação, vamos propor um modelo alternativo com uma intervenção que chamaremos de efeito temporário: não é uma intervenção permanente, mas é um impacto com efeito não apenas imediato. Para isso o valor $X_t = 1$ se $\text{jul } 2008 \leq t \leq \text{jul } 2008 + 6$ e 0 caso contrário.



Vamos modelar a mesma intervenção, porém permitindo que ela dure mais tempo, por 6 meses (desde jul 2008 até dez 2008). A função de transferência será

$$v(B) = \frac{\omega_0 + \omega_1 B}{1 - \delta B}$$

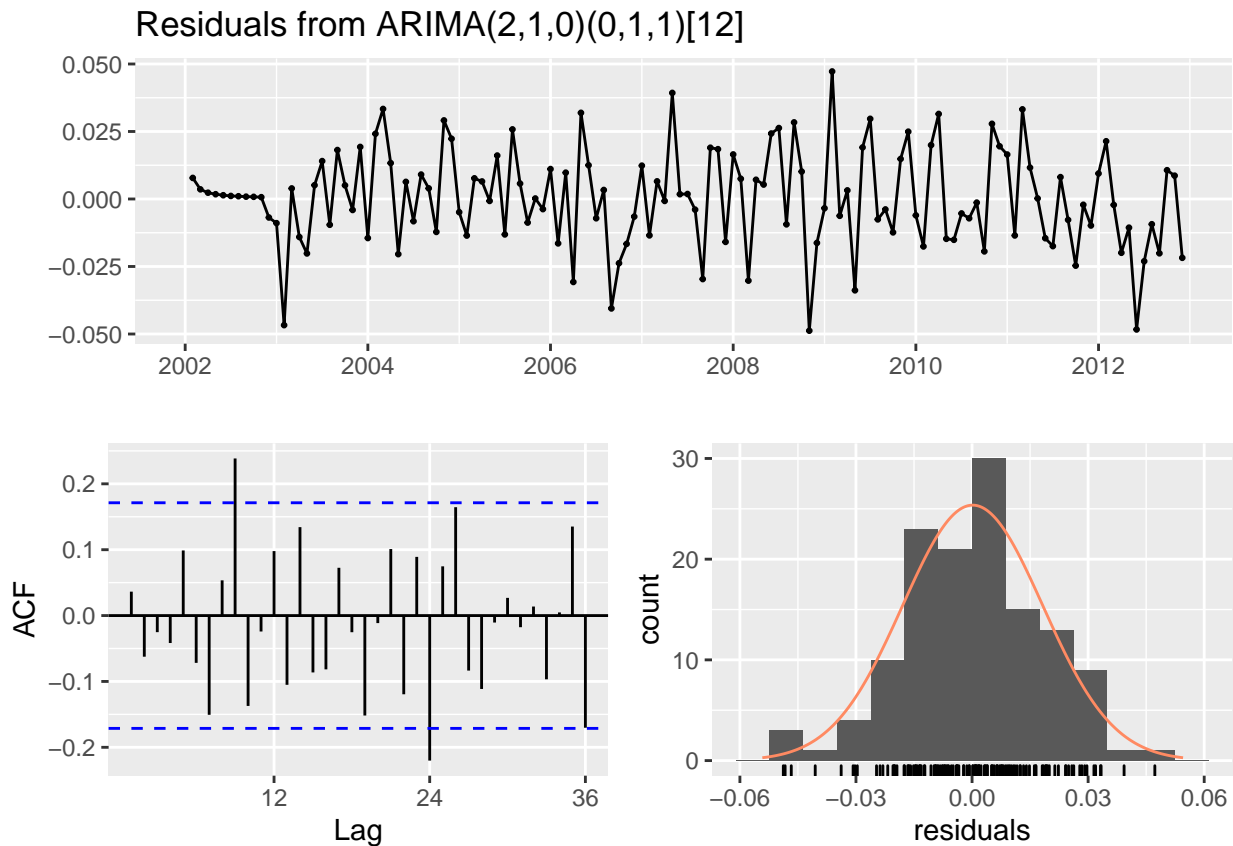
```
##
## Call:
## arimax(x = tbs_train.bc, order = c(2, 1, 0), seasonal = c(0, 1, 1), method = "ML",
##   xtransf = data.frame(Crise = 1 * ((seq(tbs_train) >= n + 1) & seq(tbs_train) <=
##     n + 1 + 6)), transfer = list(c(1, 1)))
##
## Coefficients:
##          ar1          ar2          sma1  Crise-AR1  Crise-MA0  Crise-MA1
##       -0.7628   -0.5484   -0.9998     0.9937     0.0018    -0.0462
## s.e.    0.0776    0.0789    0.1271     0.0086     0.0106     0.0106
##
## sigma^2 estimated as 0.0003415:  log likelihood = 288.78,  aic = -565.56
##
## Training set error measures:
##              ME      RMSE      MAE      MPE      MAPE      MASE
## Training set 0.0001661301 0.0180541 0.01420959 0.001178527 0.1024515 0.2816975
##              ACF1
## Training set 0.03633095
```

Podemos ver a significância dos parâmetros estimados. Nesse caso, houve significância em dois dos parâmetros.

```
##
## z test of coefficients:
```

```
##
##           Estimate Std. Error  z value  Pr(>|z|)
## ar1      -0.7627701  0.0776346  -9.8251 < 2.2e-16 ***
## ar2      -0.5483974  0.0788645  -6.9537 3.559e-12 ***
## sma1     -0.9997728  0.1271195  -7.8648 3.696e-15 ***
## Crise-AR1  0.9937131  0.0086036 115.4991 < 2.2e-16 ***
## Crise-MA0  0.0017729  0.0106447   0.1665  0.8677
## Crise-MA1 -0.0462362  0.0106244  -4.3519 1.350e-05 ***
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

Vamos ver como se comportam os resíduos do modelo.

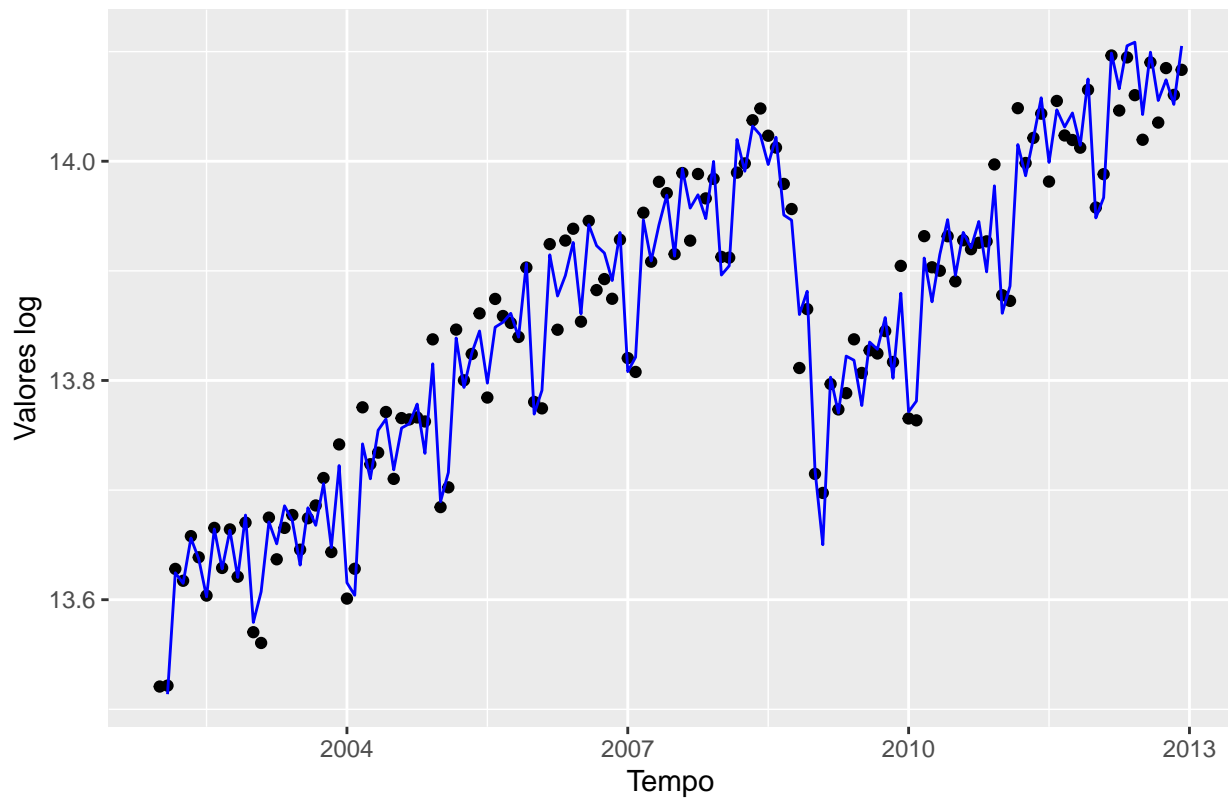


```
##
## Ljung-Box test
##
## data: Residuals from ARIMA(2,1,0)(0,1,1)[12]
## Q* = 43.034, df = 18, p-value = 0.0007915
##
## Model df: 6. Total lags used: 24
##
## Jarque Bera Test
##
## data: mod2.arimax$residuals[-1]
## X-squared = 0.59643, df = 2, p-value = 0.7421
```

Visualmente, os resíduos se comportam de forma melhor que anteriormente: a distorção na intervenção foi amenizada e a ACF se comporta melhor. Observamos um histograma razoável, porém ainda temos alguns

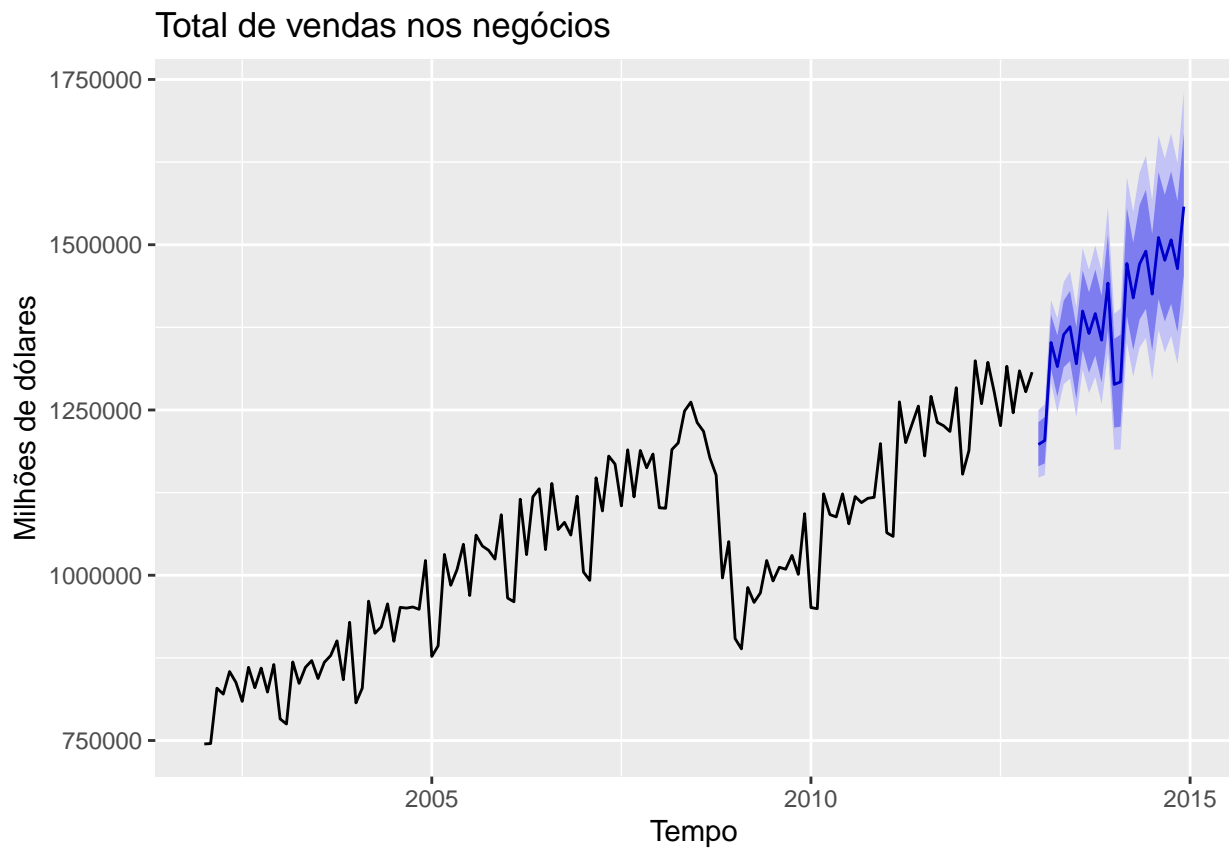
picos na ACF. O teste de Ljung-Box rejeitou a hipótese de decorrelação, o que não é um bom sinal. Mas o Jarque-Bera não rejeita as características da normal.

Comparação dos dados reais com o modelo



Previsão com o modelo de intervenção

```
## Series: tbs_train
## Regression with ARIMA(2,1,0)(0,1,1)[12] errors
## Box Cox transformation: lambda= 0
##
## Coefficients:
##          ar1      ar2      sma1      xreg
##      -0.6978  -0.4927  -1.0000  -0.0417
## s.e.   0.0806   0.0811   0.1102   0.0039
##
## sigma^2 estimated as 0.0004309:  log likelihood=282.51
## AIC=-555.02  AICc=-554.49  BIC=-541.13
##
## Training set error measures:
##              ME      RMSE      MAE      MPE      MAPE      MASE
## Training set 31.39099 21226.29 16008.42 -0.01941927 1.491723 0.1879115
##              ACF1
## Training set 0.1518024
```



Vamos verificar o MAPE da nossa previsão, comparando com os dados reais de teste:

```
## [1] 0.05490601
```

O MAPE ficou bem maior do que o outro modelo, o que significa que, de fato, esse modelo se comporta pior do que o primeiro.