PhD Equações Diferenciais Parciais e Aplicações 2023.1
Escola de Matemática Aplicada, Fundação Getulio Vargas
Professor Guilherme Tegoni Goedert
Monitor Lucas Machado Moschen Entrega 30/06/2023

Lista 3

Exercício 1 Considere o sistema de leis de conservação em uma dimensão

$$\begin{cases} u_t(x,t) + F(u(x,t))_x = 0 & (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{>0} \\ u(x,0) = g(x) & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

em que $F : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ são funções dadas e $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}^m$ é desconhecida. Uma solução $u \in L^\infty(R \times \mathbb{R}_{>0})$ é dita *solução integral* se

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty u(x,t) \cdot v_t(x,t) + F(u(x,t)) \cdot v_x(x,t)\, dx\, dt + \int_{-\infty}^\infty g(x) \cdot v(x,0)\, dx = 0$$

para toda função de teste $v : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}^m$ suave com suporte compacto.

(a) Seja u uma solução integral e assuma que $V \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{\geq 0}$ é uma região dividida por uma curva paramétrica suave γ de tal forma que u é suave à esquerda (região V_l) e à direita (região V_r) de γ. Aplicando uma abordagem similar ao caso de uma lei de conservação unidimensional, prove que

$$\int_\gamma [(F(u_l) - F(u_r))n_1 + (u_l - u_r)v_2] \cdot v\, dl = 0,$$

isto é, a integral sobre γ com respeito ao comprimento de arco é nula. Denotamos u_l e u_r como os limites à esquerda e à direita de u, respectivamente, com respeito ao comprimento de arco de γ, e $n = (n_1, n_2)$ o vetor normal unitário à curva γ. Calcule n para essa curva e conclua a *condição de salto Rankine-Hugoniot*

$$F(u_l) - F(u_r) = \gamma'(t)(u_l - u_r).$$

(b) As equações de Euler descrevem a conservação de massa, momento e energia de um fluído assumindo a não viscosidade. Elas são descritas matematicamente como

$$\begin{cases} \rho_t + (\rho v)_x = 0 & \text{(conservação de massa)}, \\ (\rho v)_t + (\rho v^2 + p)_x = 0 & \text{(conservação de momento)}, \\ (\rho E)_t + (\rho E v + p v)_x = 0 & \text{(conservação de energia)}, \end{cases}$$

em que ρ é a densidade, v é a velocidade e E é a energia total por unidade de massa. Assume-se em geral que $E = e + v^2/2$, sendo e a energia interna por unidade de massa. Também é comum assumirmos que a pressão p é uma função conhecida da densidade e da energia interna, o que se chama de relação constitutiva. Escreva as equações de Euler como um sistema de leis de conservação no formato geral.

(c) Encontre a condição de Rankine-Hugoniot para as equações de Euler no estudo da dinâmica de gases.

Exercício 2 Considere a equação

$$u_{xx} - 2\sin(x)u_{xy} - \cos^2(x)u_{yy} - \cos(x)u_y = 0.$$

(a) Mostre que a forma canônica dessa equação é $v_{st} = 0$ e encontre o sistema de coordenadas $s = s(x, y)$ e $t = t(x, y)$ correspondente.

(b) Dadas funções f e g, encontre uma solução que satisfaça $u(0, y) = f(y)$, $U_X(0, y) = g(y)$.

(c) Quais condições as funções f e g devem satisfazer para que a solução $u(x, y)$ seja clássica?

Exercício 3 Considere o problema que modela uma corda semi-infinita com condição de fronteira livre:

$$\begin{aligned} u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) &= 0, \quad (x,t) \in \mathbb{R}^2_{>0}, \\ u_x(0,t) &= 0, \quad t \in \mathbb{R}_{>0}, \\ u(x,0) &= f(x), \quad x \in \mathbb{R}_{\geq 0}, \\ u_t(x,0) &= g(x), \quad x \in \mathbb{R}_{\geq 0}, \end{aligned}$$

em que $f \in C^2(\mathbb{R}_{\geq 0})$ e $g \in C^1(\mathbb{R}_{\geq 0})$ satisfaçam $f'_+(0) = g'_+(0) = 0$.

(a) Encontre a solução $u(x, t)$.

(b) Resolva o problema para $f(x) = x^3 + x^6$ e $g(x) = \sin^3(x)$. A solução é clássica?

Exercício 4 Seja $u \in C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_{\geq 0})$ solução da seguinte equação da onda não homogênea:

$$\begin{aligned} u_{xx}(x,t) - u_{tt}(x,t) &= h(x,t), \quad (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{\geq 0}, \\ u(x,0) &= f(x), \quad x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x,0) &= g(x), \quad x \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

em que $f \in C^2(\mathbb{R}) \times L^2(\mathbb{R})$, $g \in C^1(\mathbb{R}) \times L^2(\mathbb{R})$ e $h \in C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_{\geq 0})$ são funções dadas. Para cada t, assuma que

$$\int_{\mathbb{R}} h(x,t)^2 \, dx \leq \left(\frac{1}{1+t^2} \right)^2$$

e que $u(\cdot, t)$ tenha suporte compacto. Defina a função de energia como

$$E(t) := \sqrt{\int_{\mathbb{R}} u_t^2(x,t) + u_x^2(x,t) \, dx}.$$

(a) Mostre que

$$\frac{d}{dt} E^2(t) = - \int_{\mathbb{R}} h(x,t) u_t(x,t) \, dx.$$

(b) Mostre que existe uma constante $C \in \mathbb{R}$ tal que para todo $t \geq 0$,

$$E(t) \leq E(0) + C.$$

(c) Considere a seguinte modificação da equação da onda

$$u_{xx} - u_{tt} = 2\beta u_t,$$

em que $\beta > 0$ é o coeficiente de amortecimento. Note que h nesse caso não é função dada. Defina uma função de energia $\tilde{E}$ apropriada para essa equação e mostre que ela é decrescente no tempo. Conclua que essa modificação preserva a estabilidade da equação da onda segundo a energia, isto é,

$$\tilde{E}(t) \leq \tilde{E}(0), \forall t \geq 0.$$

Exercício 5 Considere o problema com condição inicial

$$\begin{aligned} u_{tt}(x,t) - \Delta u(x,t) + f(u(x,t)) = 0, &\quad (x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_{\geq 0} \\ u(x,0) = g(x), &\quad x \in \mathbb{R}^n \\ u_t(x,0) = h(x), &\quad x \in \mathbb{R}^n, \end{aligned} \tag{1}$$

em que $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, $g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $h \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ são funções dadas com g e h tendo suporte compacto e $f(0) = 0$. Defina a função

$$F(z) := \int_0^z f(u)\,du, z \in \mathbb{R}.$$

(a) Suponha que u é uma solução suave para (1) e que $u(\cdot, t)$ tenha suporte compacto para cada tempo t. Defina a energia

$$E(t) := \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} u_t(x,t)^2 + \|\nabla u(x,t)\|^2 + 2F(u(x,t))\,dx.$$

e mostre que $E(\cdot)$ é constante no tempo.

(b) Seja $n = 3$. Mostre que existe $T > 0$ e uma única solução suave u para o problema (1) em $\mathbb{R}^3 \times (0,T)$.

(c) Seja $T^* = \sup\{T > 0 \mid \exists$ solução suave u para o problem (1) em $\mathbb{R}^3 \times (0,T)\}$. Chamamos T^* de tempo maximal. Mostre que se $T^* < \infty$, então

$$\lim_{t \to T^*} \|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} = \infty.$$

Dica: Procure por uma solução da forma $u = v + w$ em que v é solução do problema homogêneo e w tem condições de fronteira 0. Encontre w como função de u e defina $A[u](x,t) = v(x,t) + w(u(x,t))$. Mostre que $A[u]$ é uma contração para T suficientemente pequeno e aplique o Teorema da Contração de Banach. Para estimar a norma L^∞, use a desigualdade de Gronwall.

Exercício 6 Considere a equação da onda em três dimensões para o caso não homogêneo:

$$\begin{aligned} u_{tt}(x,t) - \Delta u(x,t) &= h(x,t), \quad x \in \mathbb{R}^3, t > 0, \\ u(x,0) &= f(x), \quad x \in \mathbb{R}^3, \\ u_t(x,0) &= g(x), \quad x \in \mathbb{R}^3, \end{aligned}$$

em que f, g, h são funções suficientemente suaves.

(a) Encontre uma solução para o caso em que f e g são identicamente nulas.

(b) Fixe $T > 0$. Seja u uma solução suave para $t \in (0,T)$ quando h é identicamente nula. Mostre que existe uma constante K tal que

$$|u(x,t)| \leq \frac{K}{t} U(0), \forall t \in (0,T), x \in \mathbb{R}^3,$$

onde

$$U(t) = \int_{R^3} |u(x,t)| + |u_t(x,t)| + |\nabla u(x,t)| + |\nabla u_t(x,t)| + |\nabla^2 u(x,t)|\, dx.$$

(c) Considere h sendo identicamente nula e substitua as condições iniciais do problem, i.e., $u = f$ e $u_x = g$ em $\mathbb{R} \times \{0\}$, pela condição

$$\lim_{t \to \infty} \frac{U(t)}{t} = 0.$$

Mostre que $u \equiv 0$ em $\mathbb{R}^3 \times (0, \infty)$.

Exercício 7 Seja L um operador linear do tipo

$$L = \sum_{k=1}^{n} a_k(x) D^{\alpha_k},$$

em que, para $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ e $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ suficientemente suave,

$$D^\alpha \varphi = \frac{\partial^{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}} \varphi.$$

Considere o seguinte problema de segunda ordem:

$$\begin{cases} (\partial_{tt} - L)u(x,t) = f(x,t), & x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n, t > 0, \\ u(x,0) = 0, & x \in \Omega, \\ u_t(x,0) = 0, & x \in \Omega, \end{cases}$$

onde Ω é um conjunto aberto. Prove que a solução para esse problema é

$$u(x,t) = \int_0^t v(x,t;s)\, ds,$$

em que, para cada $s > 0$, $v(x,t;s)$ é solução do problema auxiliar

$$\begin{cases} (\partial_{tt} - L)v(x,t;s) = 0, & x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n, t > s, \\ v(x,s;s) = 0, & x \in \Omega, \\ v_t(x,s;s) = f(x,s), & x \in \Omega. \end{cases}$$