Sistema de EDOs

$$x_i' = f_i(t, x_1, \dots, x_n), \quad 1 \le i \le n.$$

Em geral assume-se que $f_i \in C^\infty$

- O sistema é autônomo se f_i não depende de t explicitamente, $1 \le i \le n$
- Se $F(X_0) = 0 \Rightarrow X_0$ é ponto de equilíbrio

Nesse caso $X(t) \equiv X_0$ é solução constante.

Sistema Linear Planar

$$\begin{aligned} x' &= ax + by \\ y' &= cx + dy \end{aligned} \Rightarrow X' = AX, \quad A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

Proposição:

1. Existe um único ponto de equilíbrio se $\det A \neq 0$.
2. Se $A \neq 0$, uma reta forma o conjunto de pontos de equilíbrio se $\det A = 0$.

Obs.: Se λ é autovalor de A, $X(t) = e^{\lambda t} V_0$ é solução, onde V_0 é o autovetor correspondente.

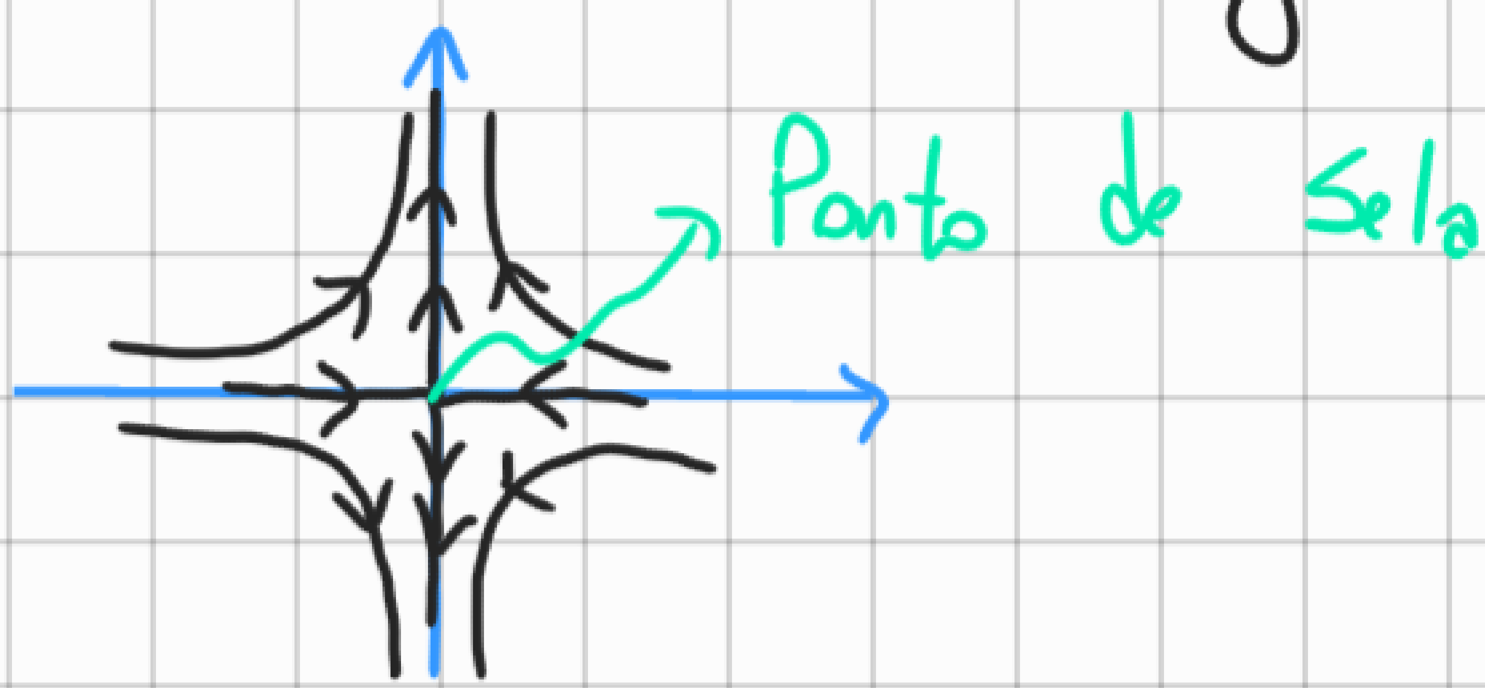
$$X'(t) = \lambda e^{\lambda t} V_0 = e^{\lambda t} A V_0 = AX(t)$$

Autovalores Reais Distintos: $\lambda_i \neq 0$

1. $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$
2. $0 < \lambda_1 < \lambda_2$
3. $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$

① $\begin{cases} x' = \lambda_1 x \\ y' = \lambda_2 y \end{cases} \Rightarrow X(t) = \alpha e^{\lambda_1 t} e_1 + \beta e^{\lambda_2 t} e_2$

Como $\lambda_1 < 0$, $\alpha e^{\lambda_1 t} e_1$ fica no eixo x e tende a $(0,0)$ quando $t \to \infty$. Já $\lambda_2 > 0$, portanto $\beta e^{\lambda_2 t} \to \infty$. Assim a solução no eixo y se distancia da origem.



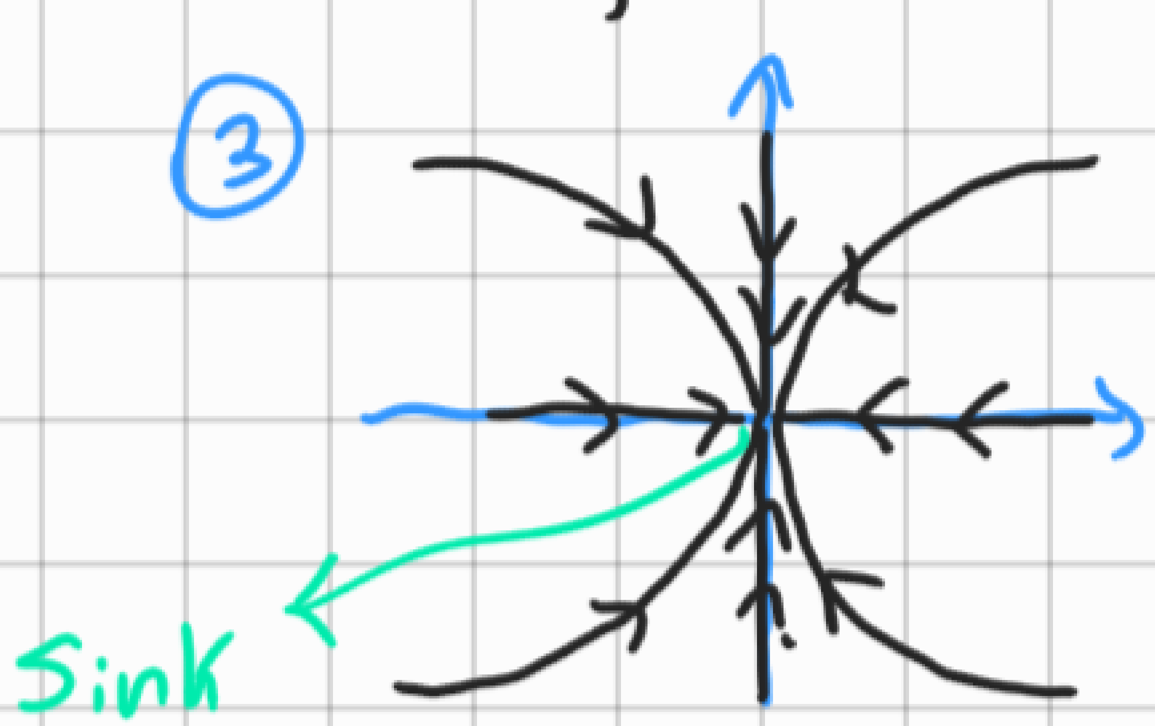
②,③ O mesmo sistema anterior, mas agora $X(t) \to (0,0)$.

A questão é: como se aproximam?

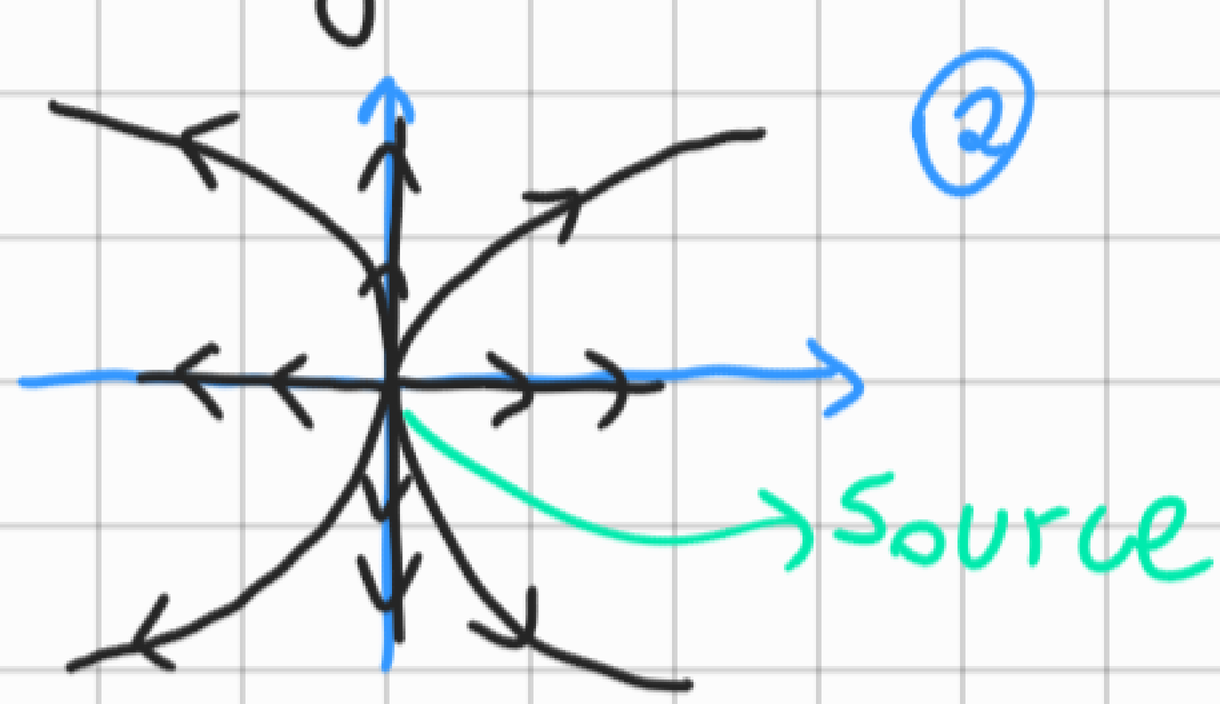
$$\frac{dy}{dx} = \frac{\lambda_2 \beta e^{\lambda_2 t}}{\lambda_1 \alpha e^{\lambda_1 t}} = \frac{\lambda_2 \beta}{\lambda_1 \alpha} e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t}$$

Como $\lambda_2 > \lambda_1 \Rightarrow dy/dx \to \pm\infty$, isto é, as soluções tendem a tangenciar o eixo y.

③



②



Autovalores Complexos

(1) $\lambda = \alpha + \beta i$, $\alpha = 0$, $\beta \neq 0$
(2) $\alpha < 0$
(3) $\alpha > 0$

(1) $A = \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ -\beta & 0 \end{pmatrix}$

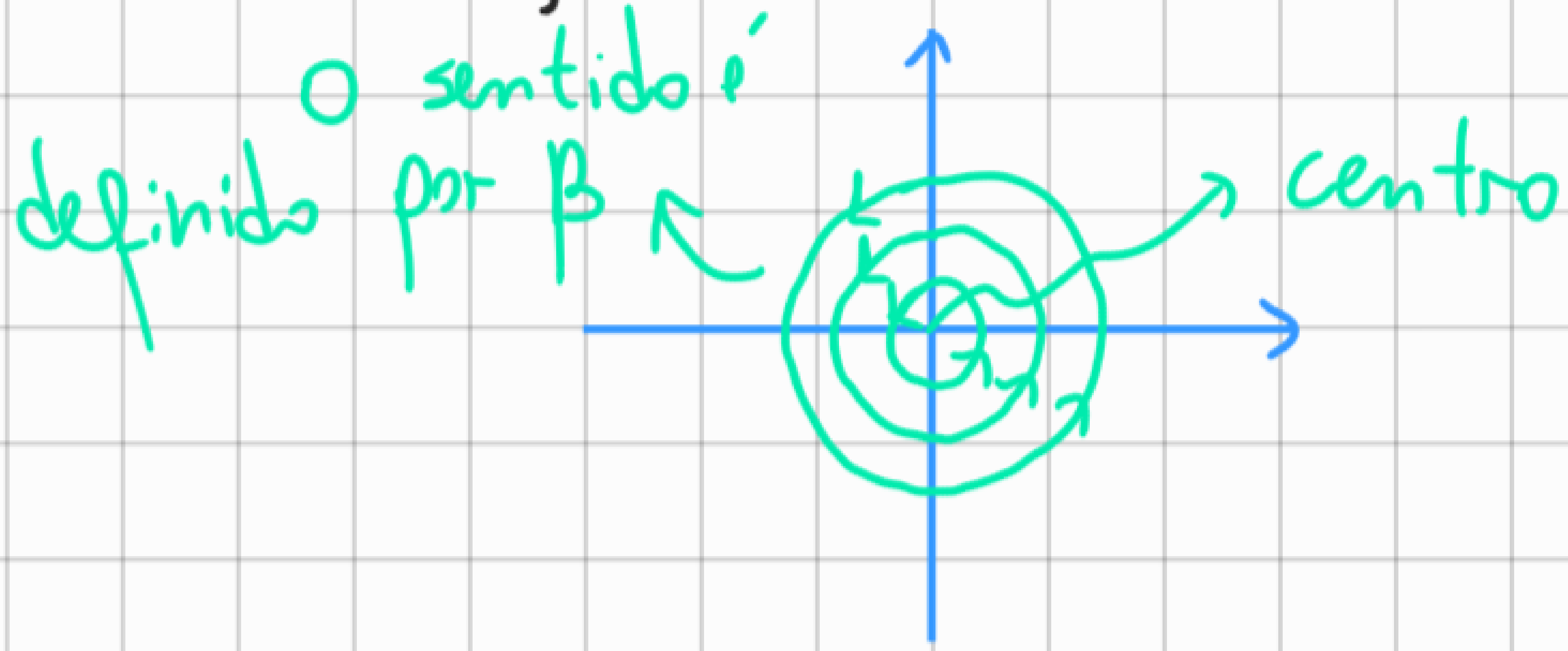
Logo $X(t) = e^{i\beta t}(1, i)$ é solução complexa de $\dot{X} = AX$.

Como $X(t) = X_{Real}(t) + i X_{ima}(t)$
$= (\cos \beta t + i \operatorname{sen} \beta t, -\operatorname{sen} \beta t + i \cos \beta t)$

Onde

$X_{Real}(t) = (\cos \beta t, -\operatorname{sen} \beta t)$
$X_{ima}(t) = (\operatorname{sen} \beta t, \cos \beta t)$

são soluções reais do sistema original.



(2,3) $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$, $X(t) = e^{(\alpha + i\beta)t}(1, i)$

$X(t) = e^{\alpha t}(\cos \beta t + i \operatorname{sen} \beta t)(1, i)$

O valor de α converte a circunferência em espirais.

Autovalores Repetidos

① $A = \lambda I$

② $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$

① $X(t) = \alpha e^{\lambda t} v_1 + \beta e^{\lambda t} v_2$, $\{v_1, v_2\}$ LI.

② $X(t) = \alpha e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta t e^{\lambda t} \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$

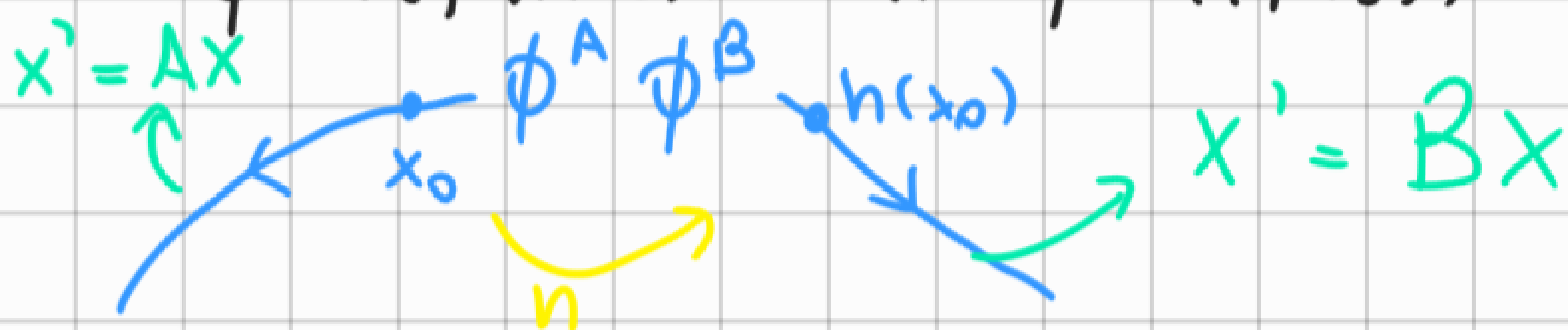
Mudança de Coordenadas: Qualquer matriz 2×2 pode ser escrita em uma dessas formas:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

através de uma mudança de coordenada T.

Definição: Suponha que $X' = AX$ e $X' = BX$ tenham soluções ϕ^A e ϕ^B. Esses sistemas são **topologicamente conjugados** se existe um homeomorfismo $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que

$$\phi^B(t, h(x_0)) = h(\phi^A(t, x_0))$$



Definição: A é matriz **hiperbólica** se nenhum de seus autovalores tem parte real 0.

Teorema: Sejam $A_1, A_2 \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ hiperbólicas. Então os sistemas correspondentes se, e somente se, cada matriz tem o mesmo número de autovalores com parte real negativa.

Dem.:

Caso 1: Suponha que A_i tenha autovalores

$$\lambda_i < 0 < \mu_i$$

As equações $x' = \lambda_i x$ tem soluções conjugadas via:

$$h_1 = \text{Heaviside}(x)\,|x|^{\lambda_2/\lambda_1}$$

De forma similar $y = \mu_i y$ tem tambem com h_2.
$H := (h_1, h_2)$ define um conjugado para os sistemas.

Caso 2: Assuma que A tem dois autovetores LI com a parte real dos autovalores negativa. A forma canônica de A é, então:

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$$

Mostraremos que essas matrizes são conjugadas

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Considere o círculo S^1 $X(\theta) = (\cos(\theta), \sin(\theta))$
Afirmo que o campo direcional deve apontar para dentro de S^1. No caso (a)

$$A\,X(\theta) = \begin{pmatrix} \alpha\cos\theta + \beta\sin\theta \\ -\beta\cos\theta + \alpha\sin\theta \end{pmatrix}$$

O vetor normal que aponta para fora de S^1 é

$$N(\theta) = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$$

$AX(\theta)\cdot N(\theta) = \alpha(\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta) < 0$, $\alpha < 0$.

Logo $AX(\theta)$ aponta para dentro de S^1. Assim a solução de $X' = AX$ cruza S^1 exatamente uma vez.

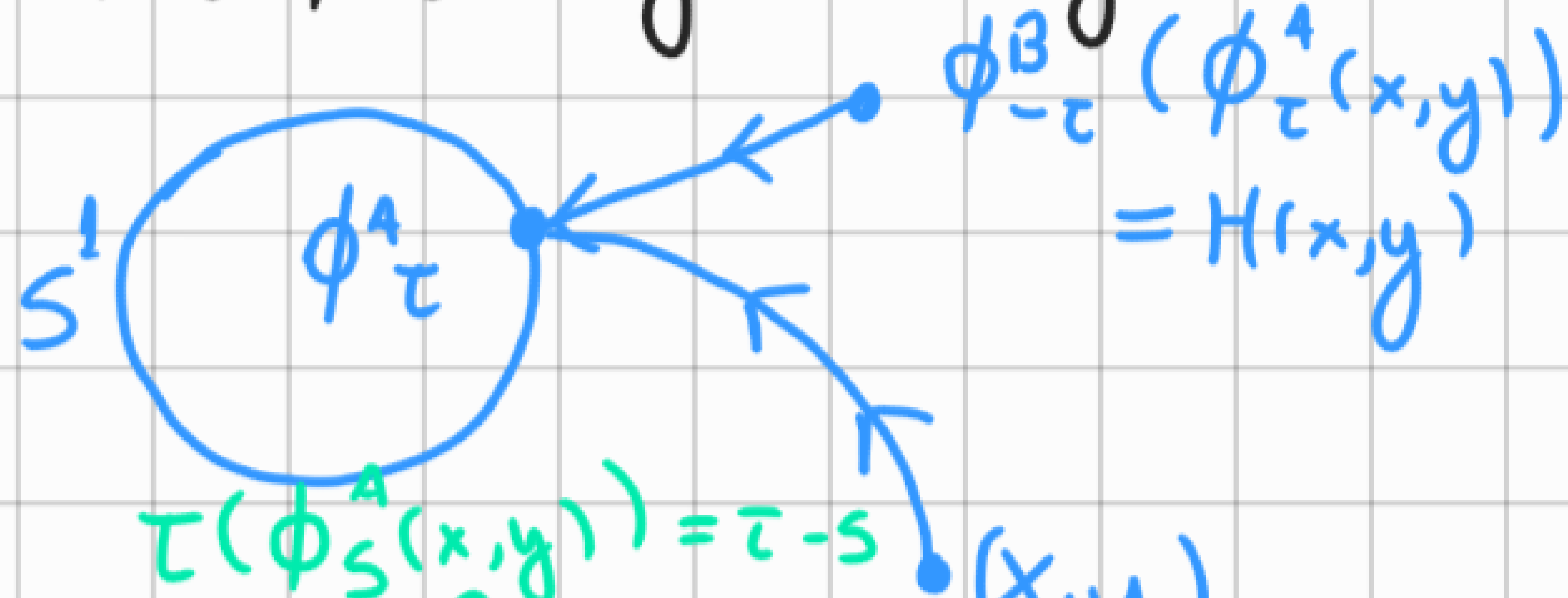
No caso (b) o mesmo ocorre.

Seja ϕ_t^A o mapa do sistema temporal e seja $\tau = \tau(x,y)$ o tempo que $\phi_t^A(x,y)$ encontra S^1.

Então $|\phi_\tau^A(x,y)| = 1$

Sabemos que $\phi_t^B(x,y) = (e^{-t}x, e^{-t}y)$

Defina $H(x,y) = \phi_{-\tau}^B\,\phi_\tau^A(x,y)\cdot \mathbb{1}\{(x,y)\neq(0,0)\}$



$$H(\phi_s^A(x,y)) = \phi_{-\tau+s}^B\,\phi_{\tau-s}^A(\phi_s^A(x,y))$$
$$= \phi_s^B\,\phi_{-\tau}^B\,\phi_\tau^A(x,y)$$
$$= \phi_s^B(H(x,y))$$

H é homomorfismo.

Caso 3: $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, $\lambda < 0$

continua

$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix}$, $Y' = (T^{-1}AT)Y$

$$T^{-1}AT\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \operatorname{sen}\theta \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \operatorname{sen}\theta \end{pmatrix} = \lambda + \frac{\varepsilon \sin 2\theta}{2}$$

$< -\lambda$

Aponta para dentro.