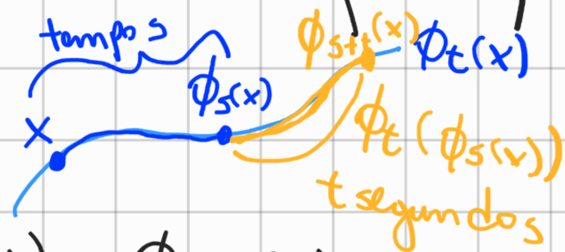
Teoria Fundamental

- S pode ser pensado como o espaço dos estados del um sistema.

- Assumimos que o mapa $\mathbb{R} \times S \to S$ definido por $(t,x) \mapsto x_t$ é de classe C^1.

indica a posição do ponto x no tempo t



movimento do estado no tempo

$$\phi_t : S \to S$$
$$x \mapsto x_t$$

$\phi_0 \equiv$ identidade e $\phi_t(\phi_s(x)) = \phi_{t+s}(x)$

Def.: Um sistema dinâmico $\mathbb{R} \times S \xrightarrow{\phi} S$ de classe C^1, tal que $\phi_t(x) := \phi(t,x)$ satisfaz:

(a) $\phi_0 : S \to S$ é a intentidade
(b) $\phi_t \circ \phi_s = \phi_{t+s}, \ \forall t, s \in \mathbb{R}$

$\}$ Axiomas

↳ composição

Exemplo: $E = S$ e $A : E \to E$. Defina

$$\phi(t,x) = e^{tA}x \Rightarrow \boxed{\phi_t = e^{tA}}$$

Um sistema dinâmico origina uma equação diferencial

curva solução

$$f(x) = \frac{d}{dt}\phi_t(x)\Big|_{t=0}$$

Assim se $x(t) = \phi_t(x)$, $x' = f(x)$

Uma solução para $x' = f(x)$ é uma função diferenciável u, tal que $u'(t) = f(u(t))$.
↳ curva em E

Teorema: Seja $W \subset E$ aberto, $f: W \to E \in C^1$. Então existe a e uma única solução

$$x: (-a, a) \to W$$

de $x' = f(x)$, $x(0) = x_0$.

gradiente de f

$$Df(x) \cdot u := \lim_{s \to 0} \frac{1}{s}\left(f(x+su) - f(x)\right), \quad s \in$$

Existência

Seja $W_0 := \overline{B_b(x_0)} \subseteq W$. Suponha $J \ni 0$ e x satisfaça $x'(t) = f(x(t))$, $x(0) = x_0$. Então intervalo aberto

$$x(t) = x_0 + \int_0^t f(x(s))\, ds$$

Dado que é C^1

Seja K a constante de Lipschitz de f em W_0. Além do mais, $f(x)$ é limitada em W_0 por M. Tome $a < \min\{b/M, 1/K\}$ e $J = [-a, a]$. Definiremos $u_0, u_1, u_2, \ldots : J \to W_0$ uniformemente convergente.

$u_K: J \to E$ funções contínuas, tal que $\forall \varepsilon > 0$ $\forall p, q > N$, $\max_{t \in J} |u_p(t) - u_q(t)| < \varepsilon$

Cauchy

Então existe u contínua, tal que

$$\max_{t \in J} |u_K(t) - u(t)| \to 0$$

O espaço $C(J)$ com norma $\|\cdot\|$ supremo é um espaço métrico completo, por isso!

iteração de Picard

Defina $u_0(t) \equiv x_0$ e $u_{K+1}(t) = x_0 + \int_0^t f(u_K(s))\, ds$

dado que $u_K(t) \in W_0$, $\forall t \in J$.

$$|u_{k+1}(t) - x_0| \leq \int_0^t |f(u_k(s))|\, ds$$
$$\leq \int_0^t M\, ds \leq M \cdot a < b$$

$\Rightarrow u_{k+1}(t) \in W_0, \forall t \in J.$ → Soluções continuam em W_0

Tome $L := \max\{|u_1(t) - u_0(t)|\} = f(x_0) \cdot a.$

$$|u_2(t) - u_1(t)| = \left| \int_0^t f(u_1(s)) - f(u_0(s))\, ds \right|$$
$$\leq K \cdot a \cdot L$$

Assumindo por indução que $\leq (aK)^{k-1} L, \; |t| < a$

$$\boxed{|u_{k+1}(t) - u_k(t)| \leq \int_0^t |f(u_k(s)) - f(u_{k-1}(s))|\, ds \leq (aK)^k L < \delta^k L}$$

o que prova a desigualdade; com $(aK) < 1$. $r > s > N$

$(aK) < \delta < 1$

$$|u_r(t) - u_s(t)| \leq \sum_{k=N}^{\infty} |u_{k+1}(t) - u_k(t)| \approx \frac{\delta^N L}{1-\delta}$$
$$\leq \varepsilon,$$

para N suf. grande. Logo, $u_0, u_1, \dots$ converge uniformemente para

$$x(t) = x_0 + \int_0^t f(x(s))\, ds$$

→ Unicidade

Suponha que x e y sejam soluções. Seja

$$Q = \max_{t \in J} |x(t) - y(t)| = |x(t_1) - y(t_1)|$$
$$= \left| \int_0^{t_1} (x'(s) - y'(s))\, ds \right|$$
$$\leq \int_0^{t_1} |f(x(s)) - f(y(s))|\, ds$$

$$\leq \int_0^{t_1} K|x(s)-y(s)|\,ds$$
$$\leq aKQ$$
Logo $Q \leq aKQ \leq Q \Leftrightarrow Q = 0$

Continuidade das Soluções Iniciais

$W \subset E$, $f: W \to E$ K-Lipschitz. Sejam $y(t)$ e $z(t)$ soluções de $x' = f(x)$. Então $\forall\, t \in [t_0, t_1]$,

$$|y(t) - z(t)| \leq |y(t_0) - z(t_0)| \exp(K(t-t_0))$$

Lema de Gronwall

$u: [0,a] \to \mathbb{R}^+$ contínua; $C \geq 0$ e $K \geq 0$
$$u(t) \leq C + \int_0^t Ku(s)\,ds, \quad t \in [0,a]$$
Então $u(t) \leq Ce^{Kt}$

Seja $U(t) = C + \int_0^t Ku(s)\,ds$, $U'(t) = Ku(s)$
$$\frac{U'(t)}{U(t)} \leq \frac{Ku(t)}{U(t)} \leq K$$
$\Rightarrow U(t) \leq U(0)e^{Kt} = Ce^{Kt}$

Se $C = 0$, defina $c_i \to 0$.

Dem.: $v(t) := |y(t) - z(t)|$. Assim
$$v(t) \leq v(t_0) + \int_{t_0}^{t} Kv(s)\,ds \qquad r = s - t_0$$
$$\underset{\substack{\| \\ u(t-t_0)}}{v(t-t_0+t_0)} = \underset{\substack{\| \\ u(0)}}{v(t_0)} + \int_0^{t-t_0} K\overbrace{v(r+t_0)}^{u(r)}\,dr$$
$\Rightarrow v(t) \leq v(t_0)\exp(K(t-t_0))$

Extensão de Soluções

Suponha que, seja $u = v$ em J^*. Sabemos que $J^* \supseteq [-a+t_0, t_0+a]$. Se $J^* \neq J$, tome t_1 onde $v(t_1) = u(t_1)$ e prossiga. Assim $J = J^*$.

Lema: $f: W \to E \in C^1$. Suponha u e v soluções de $x' = f(x)$ definidas em J aberto com $u(t_0) = v(t_0) \Rightarrow$ são iguais

↳ Podemos considerar a solução na união dos intervalos abertos que incluem 0.

Teorema: y solução no intervalo maximal $J = (\alpha, \beta)$, $\beta < +\infty$. Então, dado um compacto $K \subset W$, existe $t \in (\alpha, \beta)$ com $y(t) \notin K$

Aqui y e z NÃO precisam estar definidas no mesmo intervalo

Teorema: $f \in C^1$. Seja y solução de $x' = f(x)$ em $[t_0, t_1]$ com $y(t_0) = y_0$. Então existe $U \subset E$ vizinhança de y_0 e K tal que: → constante

se $z_0 \in U$, existe uma única solução $z(t)$ e

$$|y(t) - z(t)| \leq K|y_0 - z_0| \exp(K(t - t_0))$$

- Para cada $y \in E$, existe uma única solução $\phi(t)$ com $\phi(0) = y$.

$$\Omega = \{(t, y) \in \mathbb{R} \times W : t \in J(y)\}$$

→ intervalo maximal onde $\phi_t(y)$ é definido

$$\phi : \Omega \to W$$

é flow de $x' = f(x)$, $\phi(t, x) = \phi_t(x)$

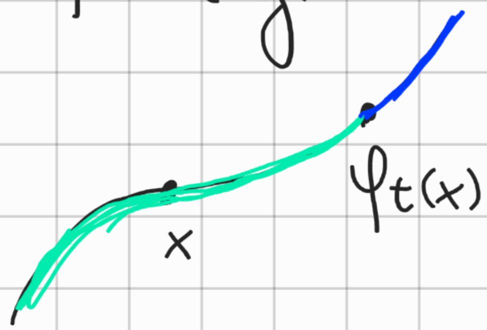
Teorema: $\phi_{t+s}(x) = \phi_s(\phi_t(x))$

Dem.: $s, t > 0$ e $\phi_s(\phi_t(x))$ seja definido. Então $t \in J(x)$ e $s \in J(\phi_t(x))$?

Suponha $J(x) = (\alpha, \beta)$. Defina $y : (\alpha, s+t] \to W$

$$y(r) = \begin{cases} \phi(r, x) & , \alpha < r \leq t \\ \phi(r-t, \phi_t(x)) & , t \leq r \leq t+s \end{cases}$$

Então y é solução e $y(0) = x \Rightarrow s+t \in J(x)$



Logo $\phi_{s+t}(x) = \phi_s(\phi_t(x))$

A volta é equivalente.

Teorema: $\phi : \Omega \to W$ é contínua e Ω aberto.

Dem.: $(t_0, x_0) \in \Omega$. Suponha $t_0 \geq 0$. $\to 0 \in J(y)$

1. A curva $\phi(\cdot, x_0)$ é definida em $[0, t_0]$ e em $[-\varepsilon, t_0 + \varepsilon]$, $\varepsilon > 0$. Pois $J(y)$ é aberto

2. $\exists\, U \ni x_0$ tal que $\phi(\cdot, t)$ é definido em U, logo $(-\varepsilon, t_0 + \varepsilon) \times U \subset \Omega \Rightarrow \Omega$ aberto.

3. Suponha $\bar{U}$ é compacto.

4. $A := \phi([-\varepsilon, t_0 + \varepsilon] \times \bar{U})$ é compacto e $f|A$ é k-Lipschitz

5. $|f(x)| \leq M$ em A.

6. $|t_1 - t_0| < \delta$, $|x_1 - x_0| < \delta \Rightarrow$

lim: todo $\delta e^{K\delta T}$

$$|\phi(t_1, x_1) - \phi(t_0, x_0)| \leq |\phi(t_1, x_1) - \phi(t_1, x_0)| + |\phi(t_1, x_0) - \phi(t_0, x_0)|$$

$\to 0$ continuidade

Teorema: $\phi_t : U \to W$, $\phi_t \phi_{-t}$ é identidade em U e $\phi_{-t}\phi_t$ em $\phi_t(U) := V$.

Exercícios:

1. (a) $x' = x + 2$, $x(0) = 2$

$$u_0(t) \equiv 2$$

$$u_1(t) = 2 + \int_0^t u_0(s) + 2 \, ds = 2 + 4t$$

$$u_2(t) = 2 + \int_0^t u_1(s) + 2 \, ds = 4t^2 + 4t + 2$$

$$u_3(t) = 2 + \int_0^t u_2(s) + 2 \, ds = \frac{4}{3!} t^3 + 2t^2 + 4t + 2$$

$$u_k(t) = u_{k-1}(t) + \frac{4}{k!} t^k$$

Logo $u_k(t) = \sum_{i=0}^{k} \frac{4}{i!} t^i - 2 \Rightarrow x(t) = 4e^t - 2$

2. $u_0 \equiv u$

$$u_1 = u + \int_0^t Au \, ds = u + Aut$$

$$u_2 = u + \int_0^t Au_1 \, ds = u + Aut + \frac{A^2 u}{2} t^2$$

$$\vdots$$

$$u_k = u + \int_0^t Au_{k-1} \, ds = u + Aut + \dots + \frac{A^k u}{k!} t^k$$

Logo $u_k = \sum_{i=0}^{k} u (At)^i / i!$ e $x(t) = u e^{tA}$

5. $x' = x^{2/3}$

a) Temos que $\frac{x'}{x^{2/3}} = 1 \Rightarrow \int \frac{dx}{x^{2/3}} = \int dt$ e,

logo $3x^{1/3} = t + C \Rightarrow x(t) = \frac{t^3}{27}$.

Agora considere o intervalo $[0, \beta]$.
Tome $K \in [0, \beta]$ e defina

$$x(t) = \begin{cases} \left(\frac{t-K}{3}\right)^3, & t \in [K, \beta] \\ 0, & t \in [0, K) \end{cases}$$

Assim $\forall K \in [0, \beta]$, $x(0) = 0$.
Se $t \in (K, \beta]$, $x'(t) = \frac{3}{3}\left(\frac{t-K}{3}\right)^2 = \left[\left(\frac{t-K}{3}\right)^3\right]^{2/3}$

Se $t \in [0, K)$, $x'(t) = 0$.

Note que $x(t)$ é contínua em K e

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{x(K+h) - \cancelto{0}{x(K)}}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{1}{h}\left(\frac{h}{3}\right)^3 = 0$$

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{x(K+h) - x(K)}{h} = 0$$

Logo $x'(K^+) = x'(K^-) = x'(K) = 0$

Assim $x(t)$ é solução para cada $K \in [0, \beta]$.

b) Basta que $\alpha > 3$, assim teremos a solução divididida em $[0, 3] \cup (3, K] \cup (K, \alpha]$
Se $\alpha \leq 3$, não é possível combinar com a solução $x(t) \equiv 0$.

6.

Arzela-Ascoli: $\{f_n\} \in C[a,b]$ se $\{f_n\}$ é uniformemente limitada por M e uniformemente equicontínua então existe uma subsequência uniformemente convergente.

① $\{x_n\}$ é unif. limitada:

$$|x_n(t)| = \left|x_n(0) + \int_0^t f(x_n(s))\,ds\right|$$

$$\leq |x_n(0)| + M$$

$$\leq x_0^* + \max\{x_1(0), \dots, x_N(0)\} + M$$

$\forall t \in [0,1]$ e $\forall n \in \mathbb{N}$, onde

$$x_0^* = \lim x_n(0) \Rightarrow n > N,\ x_n(0) < x_0^* + \varepsilon$$

E se $n \leq N$, $x_n(0) \leq \max\{x_i(0)\}$

Logo $\{x_n\}$ é unif. limitada.

② Tome $\varepsilon > 0$, $t_1 < t_2$

$$|x_n(t_1) - x_n(t_2)| = \left|\int_{t_1}^{t_2} f(x_n(s))\,ds\right|$$

$$\leq M(t_2 - t_1) < \varepsilon$$

Assim tome $\delta < \varepsilon/M$ e teremos que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall t_1, t_2 \in [0,1]$, $t_1 < t_2$,

$$|t_2 - t_1| < \delta \Rightarrow |x_n(t_1) - x_n(t_2)| < \varepsilon$$

Por Arzela Ascoli, existe subsequência $\{x_{n_k}\}$ convergente. Por fim seja x^* essa função:

$$x^*(t) = x_0^* + \int_0^t \lim f(x_n(s))\,ds$$ e

pela continuidade de f, vemos que $x^*(t)$ também é solução.

9. $f(x) = \begin{cases} 1 & , x \leq 1 \\ 2 & , x > 1 \end{cases}$ $x' = f(x)$ (1)

Suponha que exista solução para (1) em (α, β) com $\alpha < 1 < \beta$.

Em $(\alpha, 1)$, $x(t) = t + x_0$ são soluções.
Em $(1, \beta)$, $x(t) = 2t + x_0$

Por continuidade de $x(t)$, $1 + x_0 = 2 + x_0$, o que é um absurdo. Logo, não existe solução.