Estabilidade do Equilíbrio

Poços não Lineares: $x' = f(x)$, $f : W \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \in C^1$

Se $f(\bar{x}) = 0 \Rightarrow \bar{x}$ é equilíbrio.

Seja $\phi : \Omega \to W$ o flow associado tal que para cada $x \in W$, $\phi(\cdot, x) = \phi_t(x)$ é a solução que passa por x quando $t = 0$.

$Df(0) = A$ é um campo de vetores linear que aproxima f próximo a origem (Taylor). Se os autovalores de A tem parte real negativa, o 0 é um poço.

Teorema: $\bar{x}$ um poço. Todo autovalor de $Df(\bar{x})$ com parte real $< -c$, $c > 0$. Então existe uma vizinhança U de x_0, tal que:

1) $\phi_t(x)$ é definido em U e está em U para todo $x \in U$, $t > 0$.
2) $\|\phi_t(x) - \bar{x}\| \leq e^{-tc} \|x - \bar{x}\|$ $\forall x \in U$, $t \geq 0$

e uma norma Euclidiana $\|\cdot\|$.

Dem.: Assuma $\bar{x} = 0$. $A := Df(0)$. Tome $b > c$ tal que $-b$ limite a parte real dos autovalores de A.

Suponha $\alpha < Re(\lambda) < \beta$, para λ autovalores de A.
Então E tem uma base tal que

$$\alpha \|x\|^2 \leq \langle Ax, x \rangle \leq \beta \|x\|^2$$

Temos que $\lim_{x\to 0} \frac{\|f(x) - Ax\|}{\|x\|} = 0$, pois $A = Df(0)$

$|\langle f(x) - Ax, x\rangle| \le \|f(x) - Ax\|\|x\|$

Portanto $\lim_{x\to 0} \frac{\langle f(x) - Ax, x\rangle}{\|x\|^2} = 0$, por Cauchy.

Logo existe $\delta > 0$ tal que se $\|x\| \le \delta$

$$\left\langle \frac{f(x)}{\|x\|^2}, x \right\rangle < -C, \text{ pois } \frac{\langle Ax, x\rangle}{\|x\|^2} < -C$$

$U := \overline{B}_\delta(0)$. Seja $x([0,t_0])$ a solução curva em U, $x(t) \neq 0$. Então:

$$\frac{d}{dt}\|x\| = \frac{1}{\|x\|}\langle x', x\rangle \le -C\|x\|$$

(com $x' = f(x)$)

Logo $\|x(t)\|$ é decrescente $\Rightarrow$ $x(t) \in U$ $\forall t \in [0, t_0]$.
Além disso,

$$\|x(t)\| \le e^{-tc}\|x(0)\|$$

Estabilidade

Def.: $\bar{x} \in W$ é equilíbrio de $x' = f(x)$. $\bar{x}$ é estável se para toda vizinhança U de $\bar{x}$ existe uma vizinhança U_1 tal que toda solução $x(t)$ com $x(0) \in U_1$ é definida e está em U $\forall t > 0$.

Def.: Se $\lim x(t) = \bar{x} \Rightarrow \bar{x}$ é assintoticamente estável

Def.: Se $\bar{x}$ não é estável, ele é instável.

Teorema: Suponha que $f(\bar{x}) = 0$ e $\bar{x}$ é ponto estável de equilíbrio de $x' = f(x)$ $\Rightarrow$ nenhum autovalor $Df(\bar{x})$ tem parte real positiva.

Dem.: Suponha que algum autovalor tenha parte real positiva. $E = E_1 \oplus E_2$ invariante sob $Df(0)$ tal que

$A = Df(0)|E_1$ tem parte real dos autovalores > 0

$B = Df(0)|E_2$ " " " " " ≤ 0

Seja $\text{Re}(\lambda) > a$, $\forall \lambda$ autovalor de A.

$$\langle Ax, x \rangle \geq a\|x\|^2 \text{ em } E_1$$

De forma equivalente

$$\langle By, y \rangle < b\|x\|^2$$

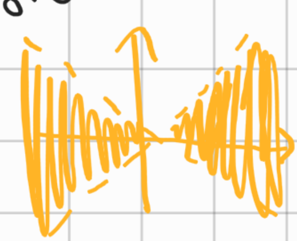
Tome $a > b > 0$.

$E_1 \oplus E_2$

$$f(x,y) \overset{\text{Taylor}}{=} (Ax + R(x,y), By + S(x,y)) = (Ax, By) + Q(x,y)$$

Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$|Q(x,y)| \leq \varepsilon |(x,y)|, \forall (x,y) \in B_\delta(0)$$



$$C := \{(x,y) \in E_1 \oplus E_2 \mid |x| \geq |y|\}$$

$\exists \delta > 0$ tal que $\forall (x,y) \in C \cup B_\delta(0)$,

(a) $\langle x, f_1(x,y)\rangle - \langle y, f_2(x,y)\rangle > 0$ se $x \neq 0$

(b) $\exists \alpha > 0$; $\langle f(x,y), (x,y)\rangle \geq \alpha |(x,y)|^2$

$g: E_1 \times E_2 \to \mathbb{R}$, $g(x,y) = \frac{1}{2}(|x|^2 - |y|^2)$,

$g^{-1}[0, \infty) = C$

$$\langle f(x,y),(x,y)\rangle = \langle Ax,x\rangle + \langle By,y\rangle + \langle Q(x,y),(x,y)\rangle$$
$$\geq a\|x\|^2 - b\|y\|^2 - \varepsilon\|(x,y)\|^2$$
$$\geq (a/2 - b/2 - \varepsilon)\|(x,y)\|^2$$
$$> 0$$

Funções de Liapunov

$V : U \to \mathbb{R}$, U vizinhança de $\bar{x}$

$\dot{V}(x) := DV(x)(f(x))$.

Se $\phi_t(x)$ é solução que passa por x em $t=0$,

$$\dot{V}(x) = \frac{d}{dt} V(\phi_t(x))\Big|_{t=0}$$

Teorema: $\bar{x}$ equilíbrio e V função contínua em U e diferenciável em $U\setminus\{\bar{x}\}$ tal que

i) $V(\bar{x}) = 0$ e $V(x) > 0$ $\forall x \neq \bar{x}$

ii) $\dot{V}(x) \leq 0$

Então $\bar{x}$ é estável. Se $\dot{V} < 0$, $\bar{x}$ é assintoticamente estável

Dem.: Seja $\overline{B_\delta}(\bar{x}) \subseteq U$. $\alpha := \min V(\partial \overline{B_\delta}(\bar{x}))$. $\alpha > 0$ por i. Defina $U_1 = \{x \in \overline{B_\delta}(x) : V(x) < \alpha\}$. Toda solução que começa em U_1, permanece em $B_\delta(x)$. Logo $\bar{x}$ é estável.

Agora assuma iii. Suponha que $x(t)$ é solução com $x(0) \in U_1\setminus\{\bar{x}\}$ e suponha que $x(t_n) \xrightarrow{n\to\infty} z_0 \in \overline{B_\delta}(\bar{x})$

Afirmamos que $z_0 = \bar{x}$. Como V é contínua,

$$V(x(t_n)) \to V(z_0)$$

Mas $\dot{V}(x(t_n)) = d/dt\, V(\varphi_t\, x(t_n))|_{t=0} < 0$, logo

$$V(x(t)) > V(z_0)$$

Suponha $\bar{x} \neq z_0$. Seja $z(t)$ a solução que começa em z_0.

Temos que $V(z(s)) < V(z_0)$ e, para soluções próximas de z_0, $V(y(s)) < V(z_0)$. Mas isso é uma contradição quando $y(0) = x(t_n)$ para n suf. grande. Concluímos que $\bar{x} = z_0$.

se $x \in P \Rightarrow \varphi_t(x) \in P$

Teorema: $\bar{x}$ equilíbrio e V função de Liapunov. Seja $P \subset U$ vizinhança de $\bar{x}$ fechado em W ($P = W \cap F$). Suponha P positivamente invariante e que não existe órbita em $P \setminus \{\bar{x}\}$ onde V é constante.

Então $\bar{x}$ é assintoticamente estável.

Dem.: Seja $x(t)$ em P e suponha que
$$\lim_{n\to\infty} x(t_n) = a \neq \bar{x}$$

Se $\alpha = V(a) \Rightarrow \alpha = \inf\{V(x(t)), t \geq 0\}$

$L := \{a \in W : \exists t_n \to \infty$ e $x(t_n) \to a\}$

$L \subseteq P$, pois P é fechado em W. Se $a \in L$, então toda sua órbita também pertence, isto é, $\phi_t(a) \in L$. Por outro lado $\phi_t(x(t_n))$ é definido em $[-t_n, 0]$. Dado que $-t_n \to -\infty$, $\phi_t(a)$ é definido para $t \leq 0$. Contradição, pois $V(a) = \alpha$, $\forall a \in L$. Logo
$$a = \bar{x}.$$

Fechados e invariantes

ω-limite conjunto

conjunto α-limite: $\{b : \lim y(t_n) = b, t_n \to -\infty\}$

Sistemas Gradiente: Um sistema dinâmico da forma $x' = -\nabla V(x)$, $V: U \to \mathbb{R} \in C^2$.

Teorema: $\dot{V}(x) \leq 0$, $\forall x \in U$ e $\dot{V}(x) = 0 \Leftrightarrow x' = 0$

Dem.: $\dot{V}(x) = \nabla V(x) \cdot x' = -\|\nabla V(x)\|^2$

Corolário: Seja $\bar{x}$ mínimo isolado de V. Então $\bar{x}$ é assintoticamente estável do sistema $x' = -\nabla V(x)$.

Dem.: $f(x) = V(x) - V(\bar{x})$ é Liapunov em alguma vizinhança de $\bar{x}$; i) é trivial, ii e iii) Teorema anterior.

Se $u \in V^{-1}(c)$ é ponto regular ($\nabla V(u) \neq 0$), então $V^{-1}(c)$ é uma superfície de dimensão $n-1$.

Usa o Teorema da Função implícita, isto é, $V(x_1, \dots, x_{n-1}, g(x_1, \dots, x_{n-1})) = c$ próximo de u e, $V^{-1}(c)$ é o gráfico de $g(x_1, \dots, x_{n-1})$

O plano tangente ao gráfico é o Kernel de $\nabla V(u)$

$$\nabla V(u) \cdot x = 0$$

$\Rightarrow x \perp \nabla V(u) \Rightarrow \nabla V(u) \perp$ curvas de nível

Exemplo: $V(x,y) = x^2(x-1)^2 + y^2$, $z = (x,y)$

$$f(z) = -\nabla V(x) = (-2x(x-1)(2x-1), -2y)$$

Os pontos de equilíbrio são

$z_1 = (0,0)$

$z_2 = (1/2, 0)$

$z_3 = (1, 0)$

$$Df(z) = \begin{bmatrix} -2(6x^2 - 6x + 1) & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$Df(z_1) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad Df(z_2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad Df(z_3) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Teorema: z um ponto α-limite ou ω-limite de uma trajetória gradiente. Então z é um equilíbrio.

Dem.: Suponha z um ponto ω-limite. Logo V é constante em $\phi_t(z) \Rightarrow \dot{V}(z) = 0$. Logo z é um equilíbrio. A prova é similar se z é α-limite.