

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC



LABORATÓRIO DE GUIAGEM, NAVEGAÇÃO E CONTROLE

Problema de Dois Corpos

Professor



Alunos



São Bernardo do Campo
2 de maio de 2023

Sumário

Introdução	3
1 Fundamentação teórica	4
1.1 Solução Analítica	4
1.2 Solução Numérica	4
2 Estudo numérico e/ou procedimento	6
2.1 Conversão da Anomalia Média para Verdadeira	6
2.2 Determinação do semieixo maior	7
2.3 Determinação das coordenadas e velocidades orbitais	7
2.4 Determinação das coordenadas e velocidades inerciais	7
3 Fluxograma	9
4 Resultados e discussão dos resultados	10
5 Conclusão	12
Referências Bibliográficas	13

Resumo

O presente relatório consiste em fornecer uma explicação a respeito da análise e procedimentos matemáticos que envolva o problema de dois corpos, ao passo que trata dos dados fornecidos, o twolines, implementando soluções analítica e numérica, sendo de alta relevância compreender o processo de conversão entre anomalias, determinação do semi-eixo maior da órbita e determinação de vetores no sistema orbital e inercial, para assim obter os corretos parâmetros de posicionamento e velocidade ao passo que é necessário determinada atenção para com os possíveis erros numéricos.

Introdução

O presente trabalho busca por meios de métodos analíticos e computacionais, utilizando-se da linguagem de programação do Matlab, aliados a métodos numéricos, estudar o que conhecemos como o problema de dois corpos. Para melhor compreender tomemos como exemplo o movimento orbital entre dois corpos de massa M e m , como por exemplo a Terra e um satélite. O satélite orbitando a Terra é influenciado por diversas forças como a gravidade terrestre, perturbações gravitacionais de outros corpos, pressão de radiação solar, arrasto atmosférico, dentre outras. Para modelagem e solução desse sistema utiliza-se o princípio fundamental da dinâmica, mais conhecido como a segunda lei de Newton. De maneira que obtendo as expressões para cada força atuante é possível determinar posição e velocidade do veículo espacial.

$$\sum \vec{F}_{ext} = \vec{F}_{grav} + \vec{F}_{corpos} + \vec{F}_{perturbações} + \vec{F}_{outras} = m\vec{a} \quad (1)$$

Contudo esta forma de solucionar o problema se torna extremamente complexa, portanto o problema de dois corpos visa simplificar e tornar menos custoso a solução. Assim combina-se a segunda lei de Newton com a lei da gravitação universal e restringimos o problema para somente a interação entre os dois principais corpos desconsiderando qualquer tipo de perturbação que pode estar presente.

$$\sum \vec{F}_{ext} = \vec{F}_{grav} = m\vec{a} \quad (2)$$

Sendo

$$\vec{F}_{grav} = \frac{GMm}{r^2}(-\vec{r}) \quad (3)$$

Desenvolvendo o equacionamento acima é possível parametrizar em função da posição, de maneira que obtem-se a seguinte equação:

$$\ddot{r} + \frac{GM}{r^2} = 0 \quad (4)$$

Esta equação define o problema de dois corpos. Trata-se de uma equação diferencial ordinária (EDO) não linear de segunda ordem, que pode ser resolvida por diversos métodos obtendo a solução em $r(t)$, que é a equação que descreve o posicionamento do veículo espacial. E mesmo com as aproximações supracitadas todo o desenvolvimento possui um papel importante na mecânica celeste ao passo que é capaz de tratar de vários problemas práticos

1 Fundamentação teórica

O problema de dois corpos, uma forma de simplificar o sistema orbital em análise, foi desenvolvido por meio de duas formas: analítico e numérico. Assim é possível ter parâmetros de análise para identificar possíveis erros computacionais, dado que pode ocorrer propagação de um erro devido a fatores de precisão, por exemplo, portanto se certificando de que está tudo conforme o esperado.

1.1 Solução Analítica

Com base em tudo que foi previamente explicado e solucionando a EDO pode-se determinar a solução analítica cuja expressão, mostrada abaixo, reflete o que chamamos de cônicas (círculo, elipse, parábola e hipérbole) em um sistema de coordenadas polares fixo ao corpo primário, de modo que θ é o ângulo polar, p é o semilatus rectum e e é a excentricidade

$$r = \frac{p}{1 + e \cos(\theta)} \quad (1.1)$$

Em que o semilatus rectum, por definição sendo a meia corda que passa pelo foco de uma cônica e é perpendicular ao eixo principal, pode ser expressa pelas seguintes expressões:

No caso de uma **elipse**:

$$p = a(1 - e^2) \quad (1.2)$$

E para o caso de uma **hipérbole**:

$$p = a(e^2 - 1) \quad (1.3)$$

1.2 Solução Numérica

O primeiro passo é obter a equação de movimento em coordenadas cartesianas, no sistema geocêntrico inercial.

$$\ddot{\vec{r}} = \vec{a} = a_x, a_y, a_z = (\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}) = -\frac{\mu}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}(x, y, z) \quad (1.4)$$

Resultando em um sistema de 3 EDOs de ordem 2, cuja solução fornece o movimento do veículo espacial (V/E) sujeito apenas à atração gravitacional. Conforme mostrado abaixo, será reescrita de forma a ter 6 equações diferenciais de primeira ordem, isso se deve ao fato dos métodos computacionais somente serem capazes de realizar a solução de equações diferenciais de primeira ordem

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 &= x_4 \\ \ddot{x}_2 &= x_5 \\ \ddot{x}_3 &= x_6 \\ \ddot{x}_3 &= -\frac{\mu}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{3/2}} x_1 \\ \ddot{x}_3 &= -\frac{\mu}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{3/2}} x_2 \\ \ddot{x}_3 &= -\frac{\mu}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{3/2}} x_3 \end{cases}$$

Como utilizou-se o MATLAB a função adotada foi a *ODE45* (1), integrador este que é constituído de um par Dormand-Prince, Runge-Kutta (4,5), com o método de quarta ordem com passo variado e a quinta para avaliação do erro de integração, sendo possível ver abaixo o trecho de código do programa desenvolvido pelos autores do trabalho. Na primeira linha o **ODE45** é implementado, já na segunda linha é definido o o erro relativo que o integrador pode atingir. Como padrão da função o erro relativo é fixado na casa de 1e-3. No tópico 4 do presente relatório a discussão do porque foi reduzido a margem de erro é posta.

```
[Times,Out] = ode45(@edos, [0 1*T_a], InitCond, options);
options = odeset('RelTol',1e-12);
```

2 Estudo numérico e/ou procedimento

Vale-se ressaltar que em diversos momentos nos utilizamos das chamadas *TwoLines*, conjunto de dados referente a um determinado veículo espacial

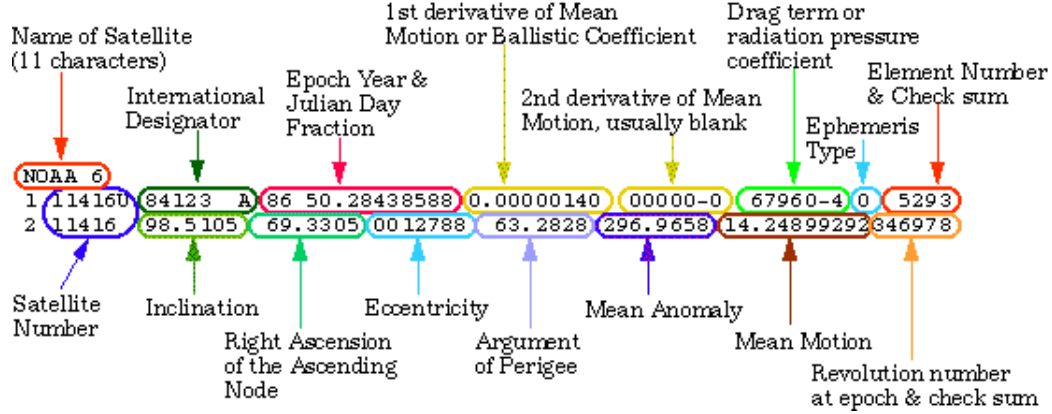


Figura 2.1: Exemplo com legenda dos dados presentes no Two Lines

Com uso dos dados da segunda linha, ou seja, da inclinação, ascensão reta do nodo ascendente, excentricidade, argumento do perigeu, anomalia média e movimento médio pode-se desenvolver corretamente tudo que foi supracitado.

2.1 Conversão da Anomalia Média para Verdadeira

A fim de corretamente indicar o posicionamento de um V/E em uma elipse é preciso utilizar a anomalia verdadeira, pois permite localizar o astro em sua órbita, enquanto que a anomalia média tem uma relação com o tempo. Como um dos dados de análise do twolines é a anomalia média e não a verdadeira é preciso que ocorra um processo de conversão. Para tanto é utilizado as relações entre as anomalias média, excêntrica e verdadeira.

Primeiramente Kepler (2) fornece uma relação entre o tempo e a anomalia excêntrica, logo fornece a relação entre anomalias média e excêntrica:

$$M = n(t - \tau) = u - e \sin u \quad (2.1)$$

Para a relação entre as anomalias excêntrica e verdadeira é utilizado relações geométricas conforme demonstrado pelo desenvolvimento abaixo.

$$\cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{a(\cos u - e)}{a(1 - e \cos u)} \quad (2.2)$$

Utilizando a relação do arco metade é possível, por fim, obter a seguinte expressão

$$\tan^2 \theta/2 = \frac{1+e}{1-e} \tan^2 u/2 \quad (2.3)$$

Ao analisar o processo de cálculo é importante se atentar ao sinal do resultado da equação acima, pois é a partir dele que sabe-se em qual quadrante o veículo espacial se encontra.

2.2 Determinação do semieixo maior

Para determinar o semieixo maior é necessário essencialmente de dois dados o primeiro é o μ , o parâmetro gravitacional, no caso da Terra seria GM_{terra} e o movimento médio dado pelo twolines. Contudo se torna de extrema importância se atentar as unidades e converter caso necessário, como por exemplo, para o movimento médio será convertido de revoluções por dia (n_{dia}) para revoluções por segundo ($n_{segundo}$)

$$n_{segundo} = \frac{2\pi n_{dia}}{86400} \quad (2.4)$$

Por fim utiliza-se a relação entre semieixo (a) e os parâmetros presentes:

$$a = \frac{\mu}{n_{segundo}^2}^{1/3} \quad (2.5)$$

2.3 Determinação das coordenadas e velocidades orbitais

A fim de determinar as coordenadas e velocidades orbitais utiliza-se as relações que se baseiam na propriedades de anomalia verdadeira, excentricidade e o semieixo maior, valores estes anteriormente determinados. Vale-se ressaltar que é utilizada a função das cônicas e a relação do semilatus rectum para a elipse previamente mostrados

Coordenadas Orbitais:

$$\begin{cases} x_o = r \cos \theta \\ y_o = r \sin \theta \\ z_o = 0 \end{cases}$$

Velocidades Orbitais:

$$\begin{cases} v_{xi} = -\frac{a \times n_{segundo}}{\sqrt{1-e^2}} \sin \theta \\ v_{yi} = \frac{a \times n_{segundo}}{\sqrt{1-e^2}} e + \cos \theta \\ v_{zi} = 0 \end{cases}$$

2.4 Determinação das coordenadas e velocidades inerciais

E por fim é necessário que ocorra a conversão entre os sistema de referência, ou seja, é necessário utilizar a matriz de rotação transposta ou inversa para obter as coordenadas e velocidades no sistema inercial a partir do anteriormente obtido sistema orbital. Para tanto são realizadas três rotações distintas

A primeira rotação é sobre o eixo z_o por (longitude do perigeu):

$$R_{z_o} = \begin{bmatrix} \cos(w) & \sin(w) & 0 \\ -\sin(w) & \cos(w) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

A segunda rotação é sobre o novo eixo x' por i (ângulo da inclinação):

$$R_{x'} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(i) & \sin(i) \\ 0 & -\sin(i) & \cos(i) \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

A terceira e última rotação é sobre o eixo z_i por Ω (ângulo da ascensão reta do nodo ascendente):

$$R_{z_i} = \begin{bmatrix} \cos(\Omega) & \sin(\Omega) & 0 \\ -\sin(\Omega) & \cos(\Omega) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

Portanto pode-se determinar a transformação do sistema orbital para inercial como a matriz transposta da seguinte equação:

$$R_{io} = R_{z_o}(w) \times R_{x'}(i) \times R_{z_i}(\Omega) \quad (2.9)$$

3 Fluxograma

Para ter o total entendimento do procedimento de solução adotado no presente trabalho o seguinte fluxograma é apresentado:

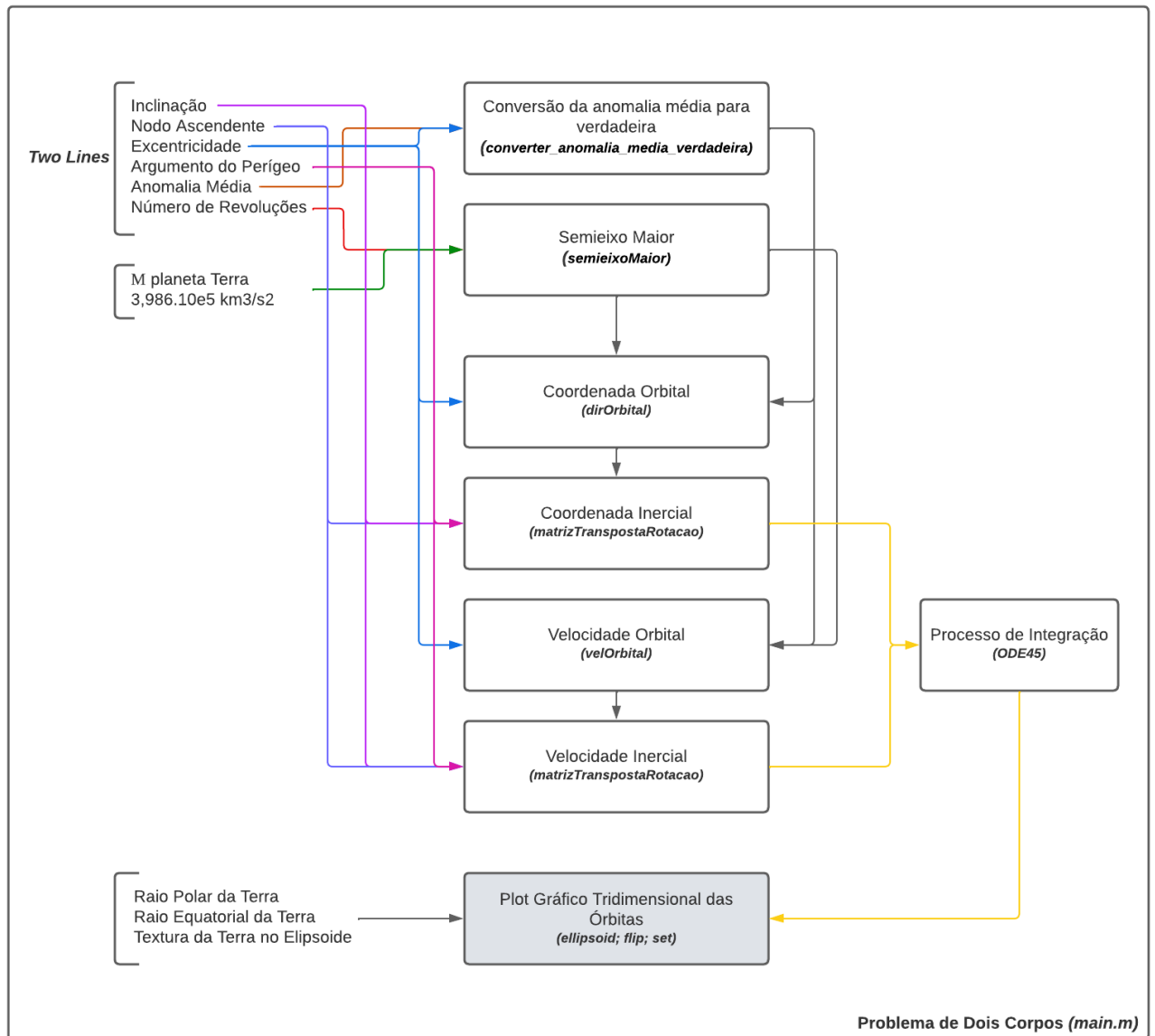


Figura 3.1: Fluxograma do código implementado em MatLab.

4 Resultados e discussão dos resultados

Como forma de desenvolvimento do problema utilizou-se dados de dois veículos espaciais distintos V/E a e V/E b, com os seguintes dados iniciais:

a: 2 07276 64.2707 228.5762 6489050 281.4937 16.8767 2.45097347248963
b: 2 02717 0.7404 32.0789 0014515 234.9766 357.1212 1.00360058109167

Com base na figura 2.1 é possível perceber por meio dos valores da excentricidade que o V/E b terá uma órbita muito próxima de um círculo pelo seu valor se aproximar de zero. O problema restrito de dois corpos possui solução fechada e exata, e o modelo implementado é totalmente conservativo e sem perturbações, porém dado que um método numérico sempre possui erro sistemático associado, temos que o output do script desenvolvido não mostra uma órbita perfeitamente fechada. Os erros tendem a se acumular conforme o período de integração de uma órbita é extrapolado.

Na figura 4.1, o output do script implementado mostra a integração para um período de 50 órbitas, usando o integrador ODE45 sem uma precisão adequada no integrador, dessa forma se tornando visível que o satélite se aproxima gradativamente da terra devido unicamente ao acúmulo de erros pelo método, o que não ocorre ao se diminuir a tolerância do **ODE45** para $1e-12$. Vale-se ressaltar que na imagens mostradas abaixo do desenvolvimento do projeto levam em conta, como foi supracitado, a solução analítica (mostrado por meio de pontos vermelhos) e a solução numérica (mostrado pelas linhas contínuas).

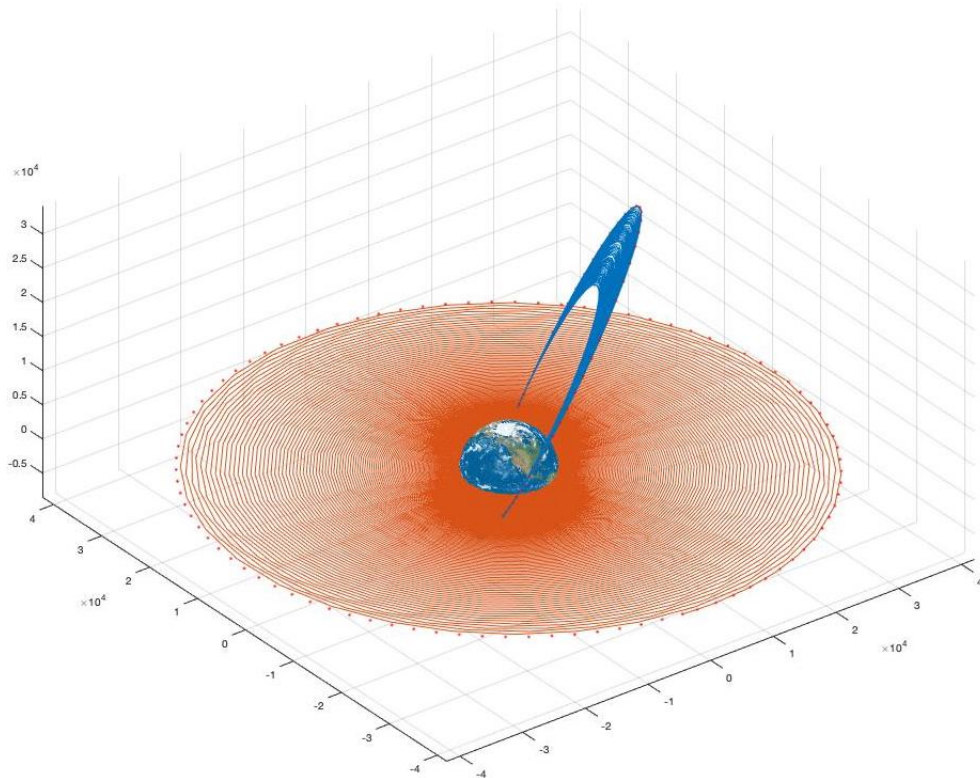


Figura 4.1: Período de 50 órbitas com erro relativo padrão de $1e-3$. (3)

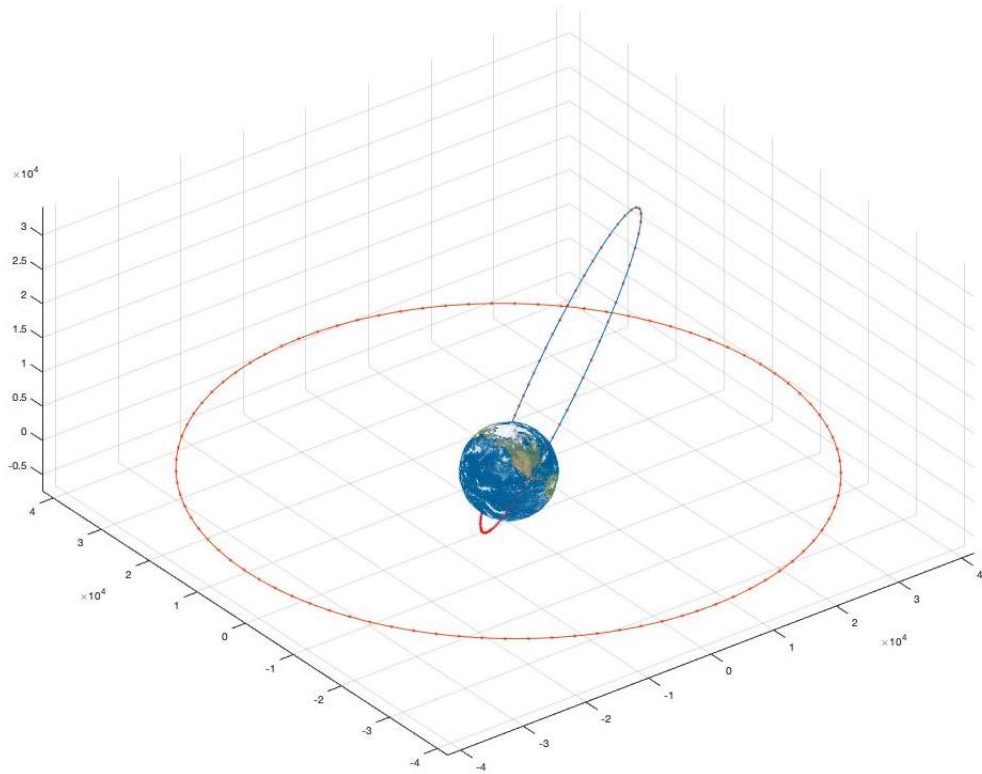


Figura 4.2: Período de 50 órbitas com erro relativo padrão de $1e-12$. (3)

Como citado no item **item 2.1** do presente relatório, foi feita a conversão da anomalia média para a verdadeira. Qualitativamente não foi possível observar nenhuma diferença na órbita em si, entretanto, para aplicações em modelos tal conversão deve ser implementada sobretudo em órbitas com excentricidade mais altas em que a diferença entre a anomalia média e verdadeira se torna ainda mais discrepante. Essa diferença é justificada pela **equação 2.3**, quando a excentricidade tende a 0, $u = \theta$ e, quando tende a 1, $\theta \gg u$.

5 Conclusão

O problema restrito de dois corpos possui importância histórica em mecânica celeste, por possuir uma solução da qual derivam resultados importantes que colaboram para com a observação sobre o movimento de corpos celestes e também possui certa importância prática, por poder ser aplicado como aproximação para uma infinidade de situações complexas para movimentos de veículos espaciais, justamente por ser o único caso que possui solução fechada. A aplicação de métodos numéricos para solução do problema restrito de dois corpos para determinação da trajetória de um veículo espacial mostrou-se satisfatória para o caso estudo. Além disso, trata-se de uma situação onde as tolerâncias com relação a erros devem ser mais rigorosas, uma vez que o processo de integração numérico tende a acumular estes erros, o que foi evidenciado, a princípio propagando a integração para mais de uma órbita sem um ajuste fino na tolerância de erro. Dos integradores testados, as implementações dos métodos de Runge-Kutta de ordens quatro e cinco mostraram-se satisfatórias. Como a periodicidade da função é conhecida e fixa. Por fim, com os dados de posição e velocidade dados, obteve-se graficamente a órbita de um satélite com uma boa precisão.

Referências

- 1 ODE45. 2006. Disponível em:
<https://www.mathworks.com/help/matlab/ref/ode45.html>.
- 2 PROBLEMA de Dois Corpos na Mecânica Celeste. 2021. Disponível em:
https://repositorio.ufscar.br/bitstream/handle/ufscar/14035/Problema_de_Dois_Corpos_TCCA_F.pdf?sequence=1&isAllowed=y.
- 3 EARTH texture. 2021. Disponível em:
http://www.shadedrelief.com/natural3/images/earth_clouds.jpg.