BCJ0203

Fenômenos Eletromagnéticos

(Parte Teórica) - Aula 3

10 de junho de 2019

Prof. Felipe Chen

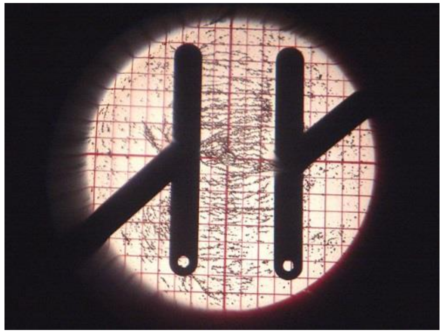
Fluxo?

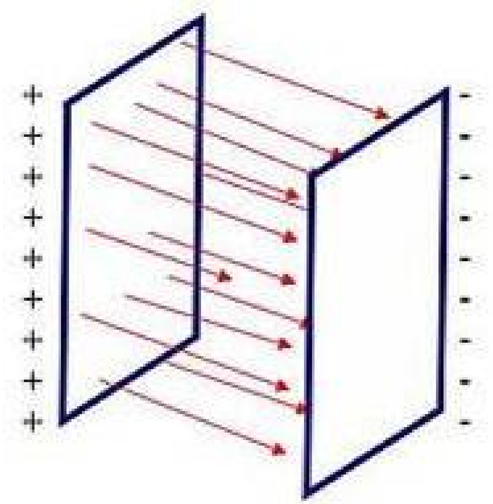
Fluxo = (quantidade de água) (área)

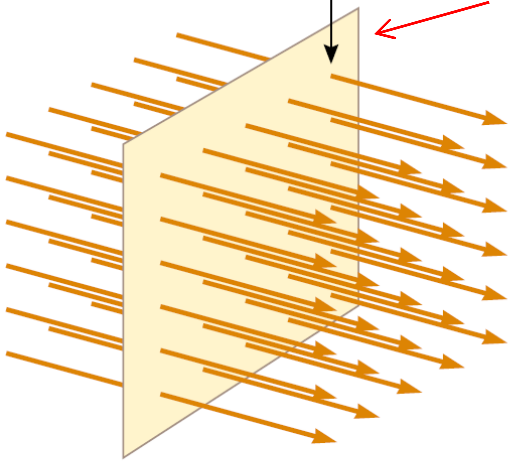
Fluxo elétrico

O fluxo elétrico se relaciona com as linhas do campo elétrico.

As linhas de campo elétrico entre duas placas paralelas estão igualmente espaçadas indicando que o campo elétrico é praticamente uniforme (em intensidade e direção).







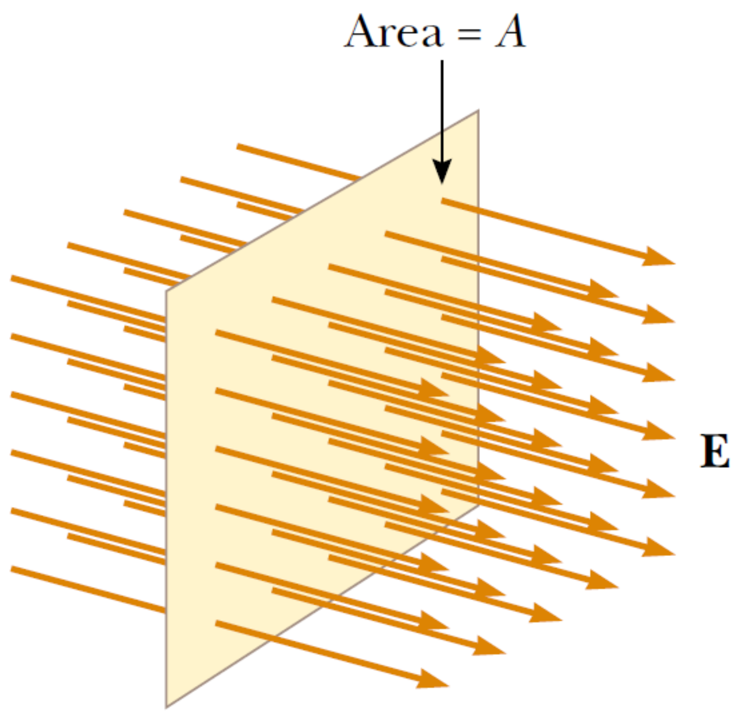
Neste caso, as linhas do campo elétrico atravessam a superfície imaginária perpendicularmente

Fluxo elétrico

O fluxo elétrico se define como:

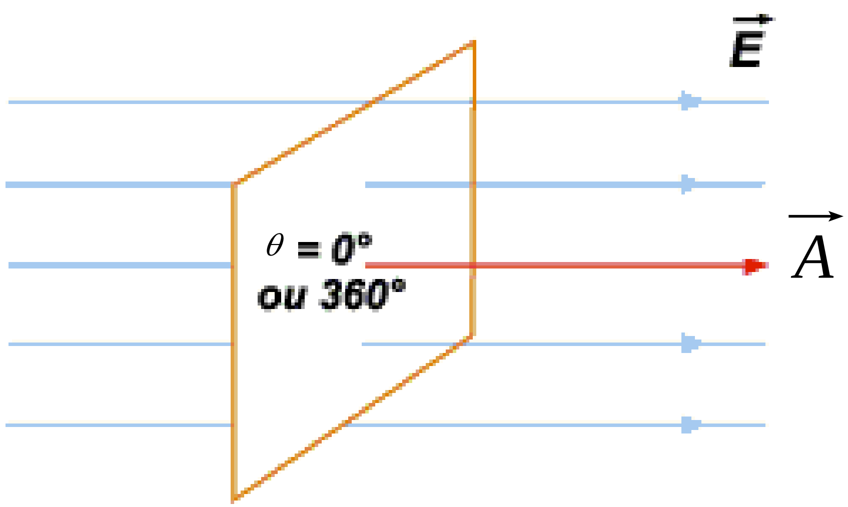
$$\boxed{\Phi_E = EA}$$

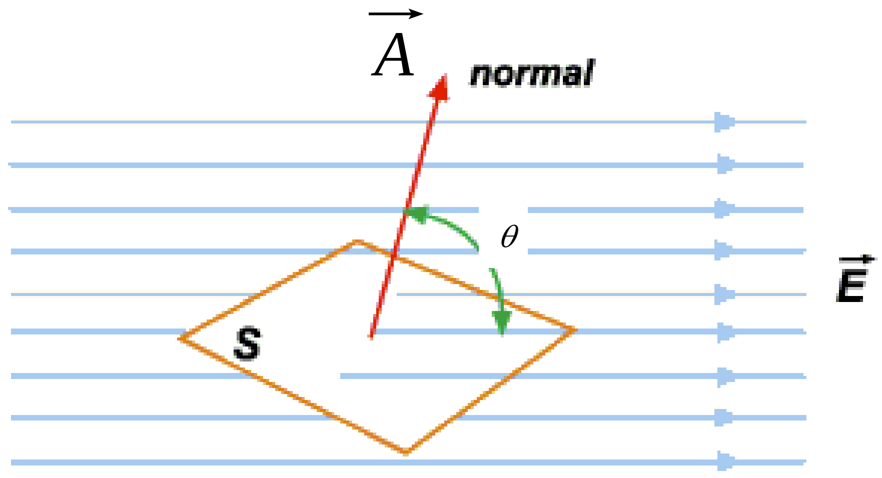
Unidades SI: $\mathrm{N \cdot m^2/C}$



O fluxo elétrico é proporcional ao número de linhas de campo elétrico que atravessa a superfície.

Fluxo elétrico





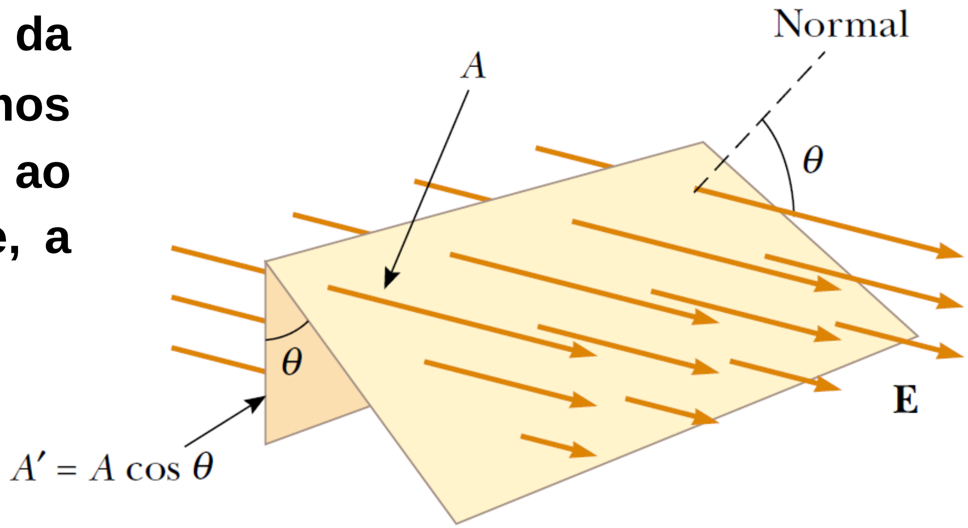
Se a superfície imaginária não for perpendicular ao campo E, o número de linhas do campo através dela será menor do que aquele dado pela equação:

$$\boxed{\Phi_E = EA}$$

e por conseguinte, o fluxo também será menor.

Fluxo elétrico

Para encontrar o fluxo através da superfície A (inclinada) devemos achar sua projeção perpendicular ao campo $\mathbf{E}$, que seria precisamente, a superfície Aô.



Vemos que:

$$A' = A \cos \theta$$

e o fluxo através da superfície A vem dado por:

$$\Phi_E = EA' = EA \cos \theta$$

Fluxo elétrico

O vetor $\vec{A}$ é normal à superfície e representa a área da superfície ***A***

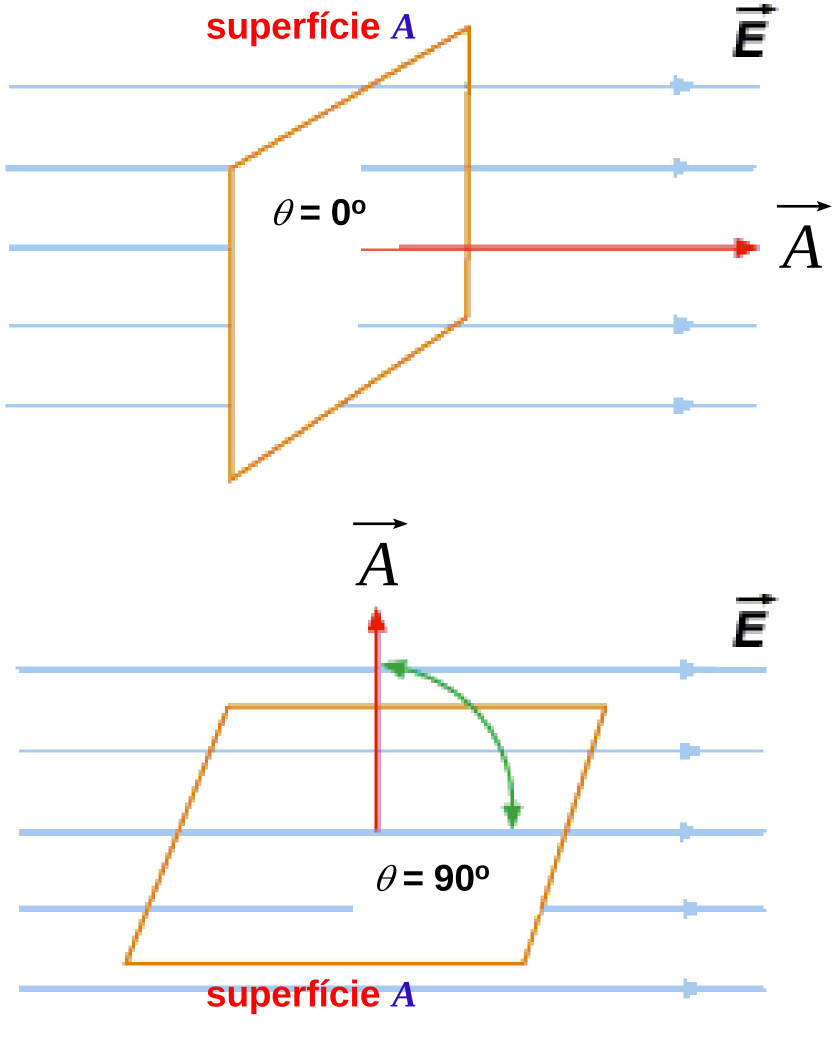
$$\Rightarrow \quad \left|\vec{A}\right| = A$$

θ = ângulo entre os vetores $\vec{A}$ e $\vec{E}$

O fluxo é máximo quando θ = 0º

O fluxo é zero quando θ = 90º

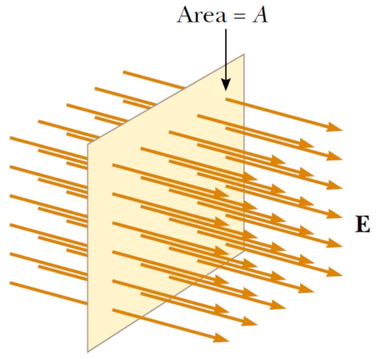
$$\Phi_E = EA\cos\theta = \vec{E}\cdot\vec{A}$$

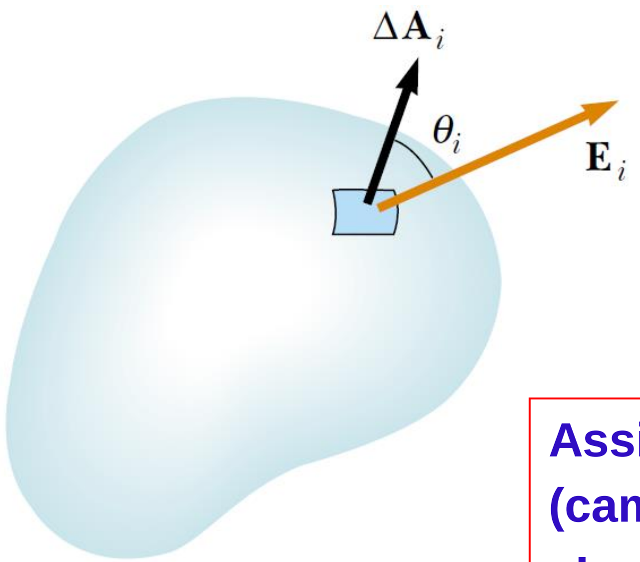


Fluxo elétrico

A equação ao lado só tem significado quando o campo ***E*** é uniforme através da superfície ***A***.

$$\Phi_E = EA\cos\theta$$



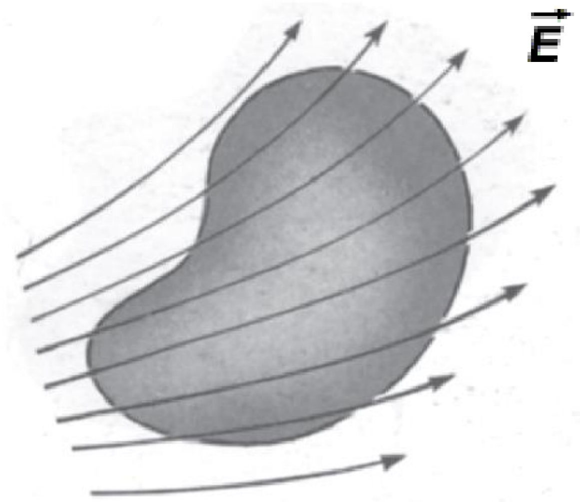


De forma geral, esta condição de campo uniforme não é cumprida em superfícies de forma irregular porque o ângulo θ teria um valor arbitrário.

Assim, a equação acima para o fluxo é satisfeita (campo ***E*** uniforme) somente para pequenos elementos de área ΔA_i

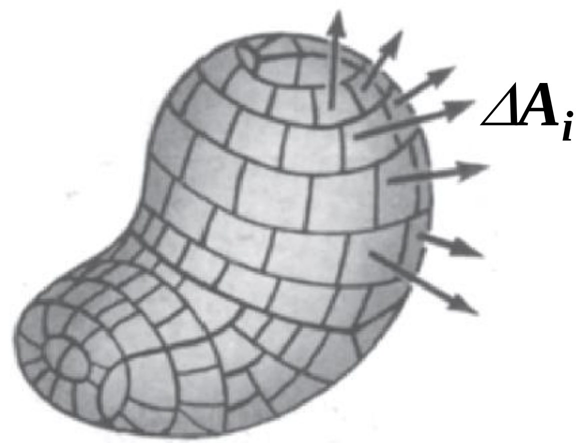
Fluxo elétrico total

Para calcular o fluxo total através de uma superfície de forma irregular, se divide esta superfície em pequenos elementos (quadradinhos), cada um com área ΔA .



O fluxo $\Delta\Phi_E$ através de um destes elementos é:

$$\Delta\Phi_E = E_i\,\Delta A_i \cos\theta_i = \mathbf{E}_i \cdot \Delta\mathbf{A}_i$$



O fluxo elétrico total é:

$$\Phi_E = \lim_{\Delta A_i \to 0} \sum \mathbf{E}_i \cdot \Delta\mathbf{A}_i = \int_{\text{superfície}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A}$$

Fluxo (superfície fechada)

Fluxo elétrico através de uma superfície fechada

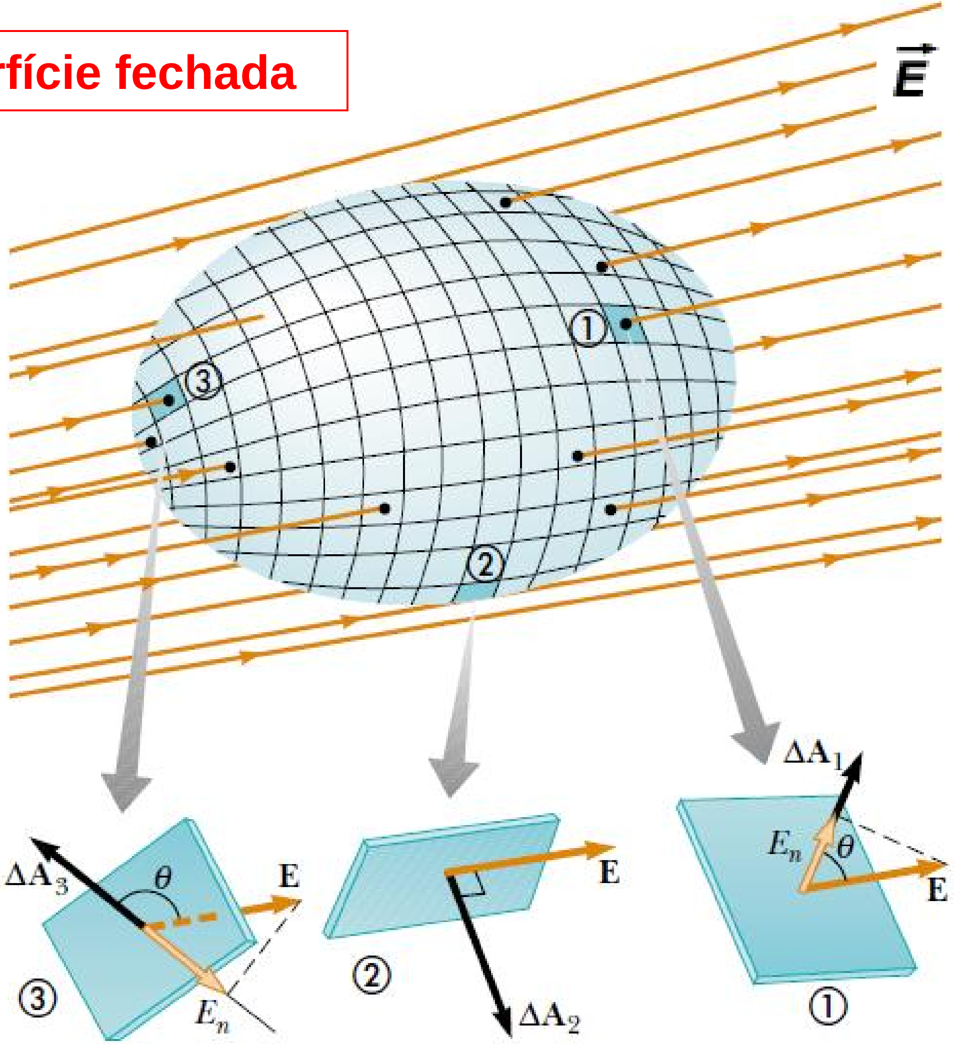
Definir fluxo positivo e negativo

$$\Delta\Phi_E = E_i\,\Delta A_i \cos\,\theta_i$$

① Fluxo (+): θ < 90º

② Fluxo (zero): θ = 90º

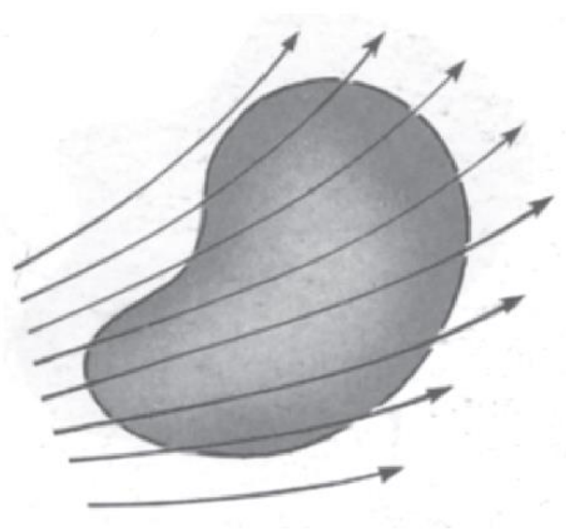
③ Fluxo (-):
180° > θ > 90º

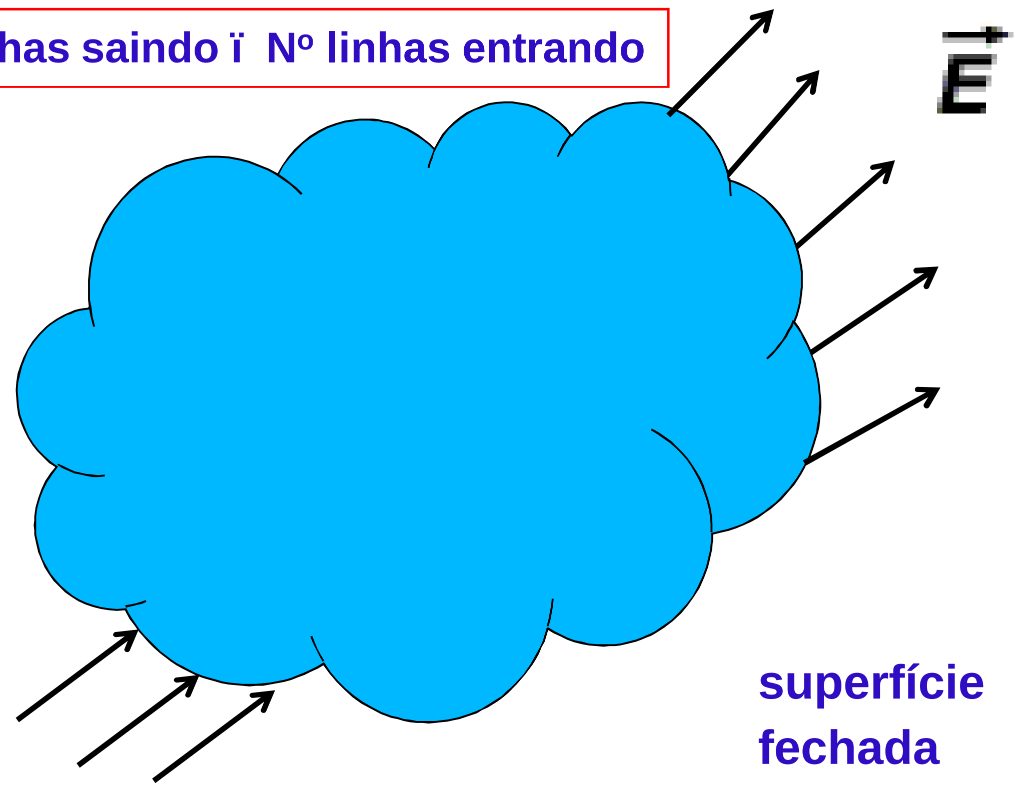


Fluxo resultante

Fluxo resultante: é proporcional ao número liquido de linhas de campo elétrico saindo da superfície.

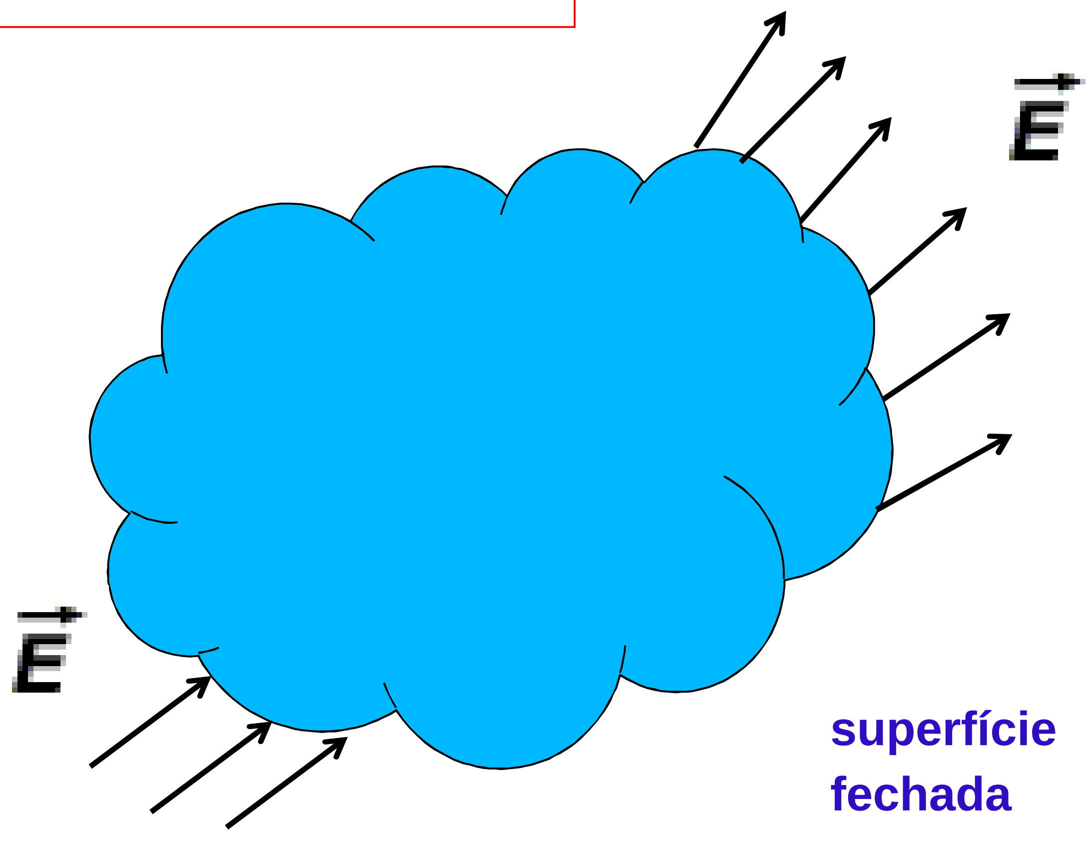
Nº liquido de linhas de campo = Nº linhas saindo ï Nº linhas entrando





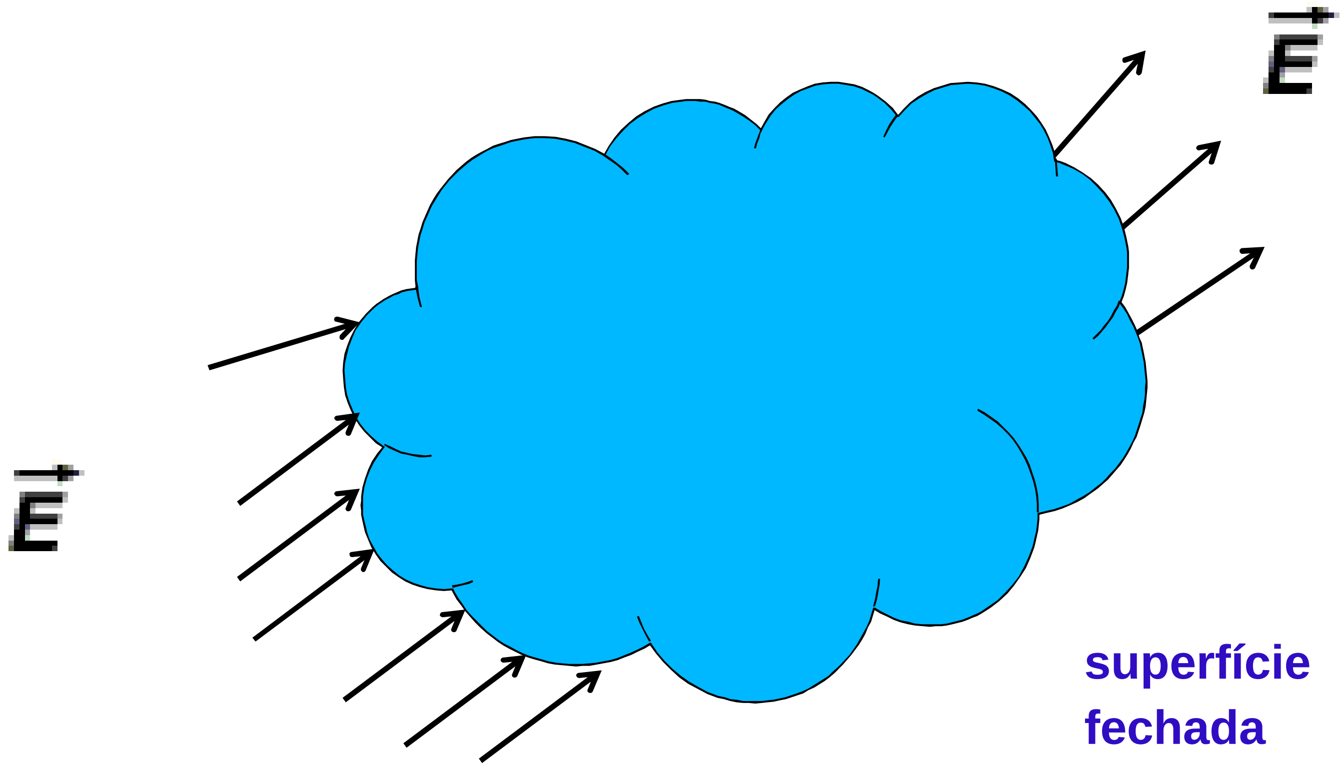
Fluxo resultante positivo

Nº linhas saindo > Nº linhas entrando



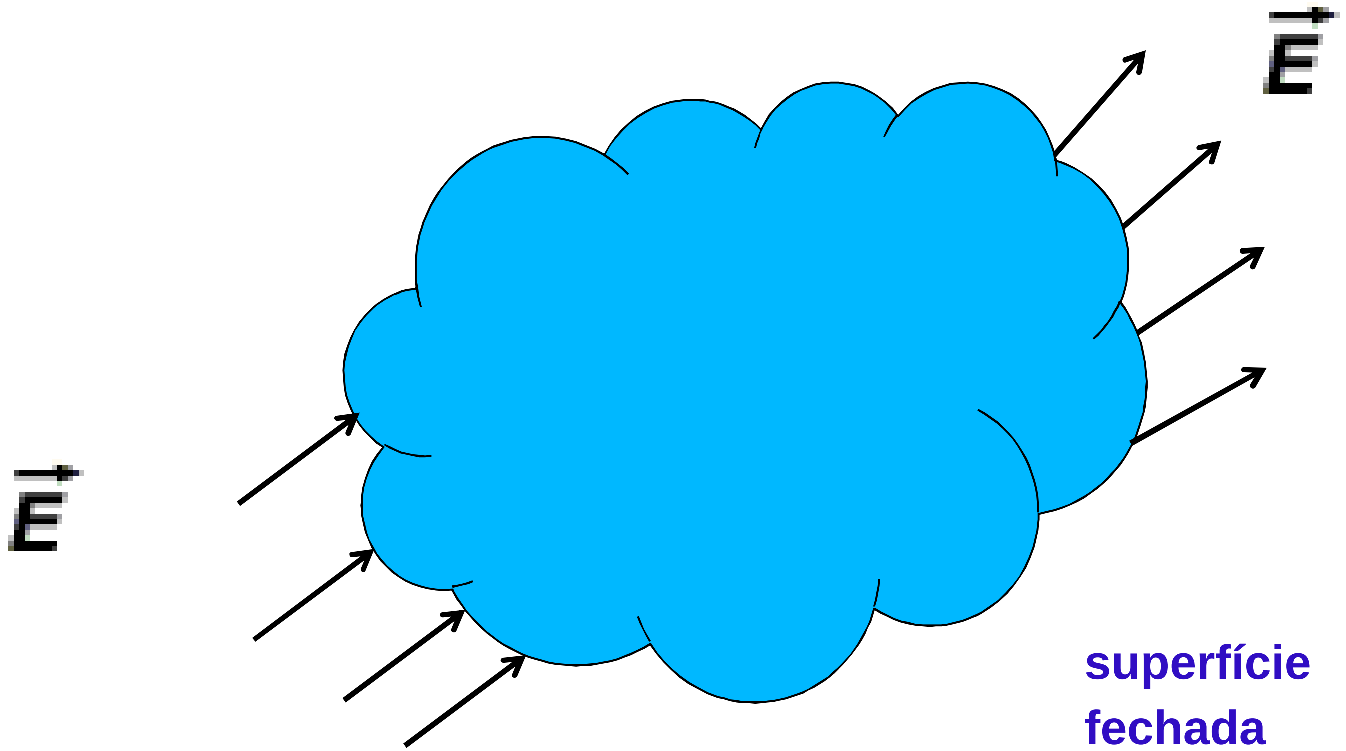
Fluxo resultante negativo

Nº linhas saindo < Nº linhas entrando



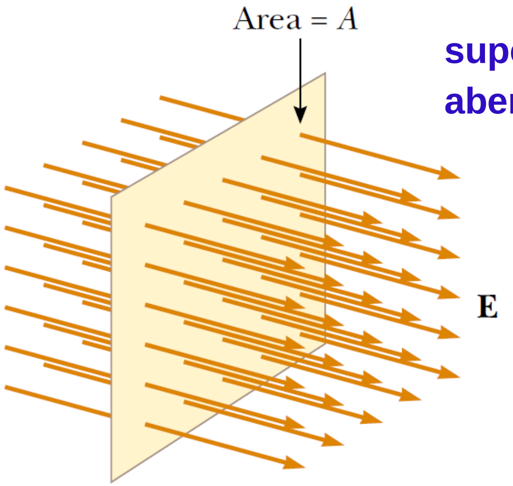
Fluxo resultante nulo

Nº linhas saindo = Nº linhas entrando



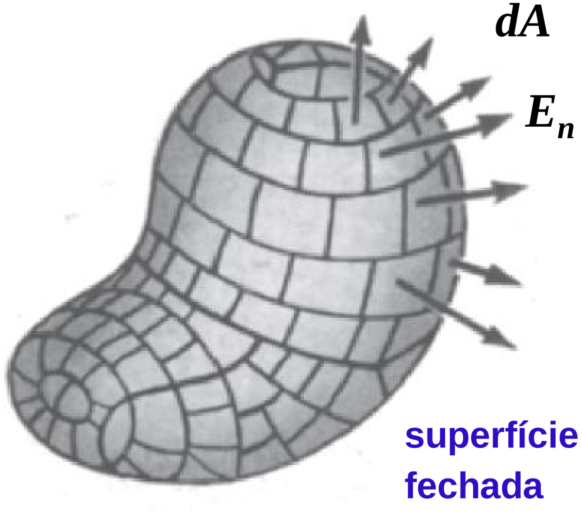
Fluxo elétrico resultante

$$\Phi_E = \int_{\text{superfície aberta}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A}$$



fluxo → integral de superfície ou integral de área

$$\Phi_E = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \oint E_n \, dA$$

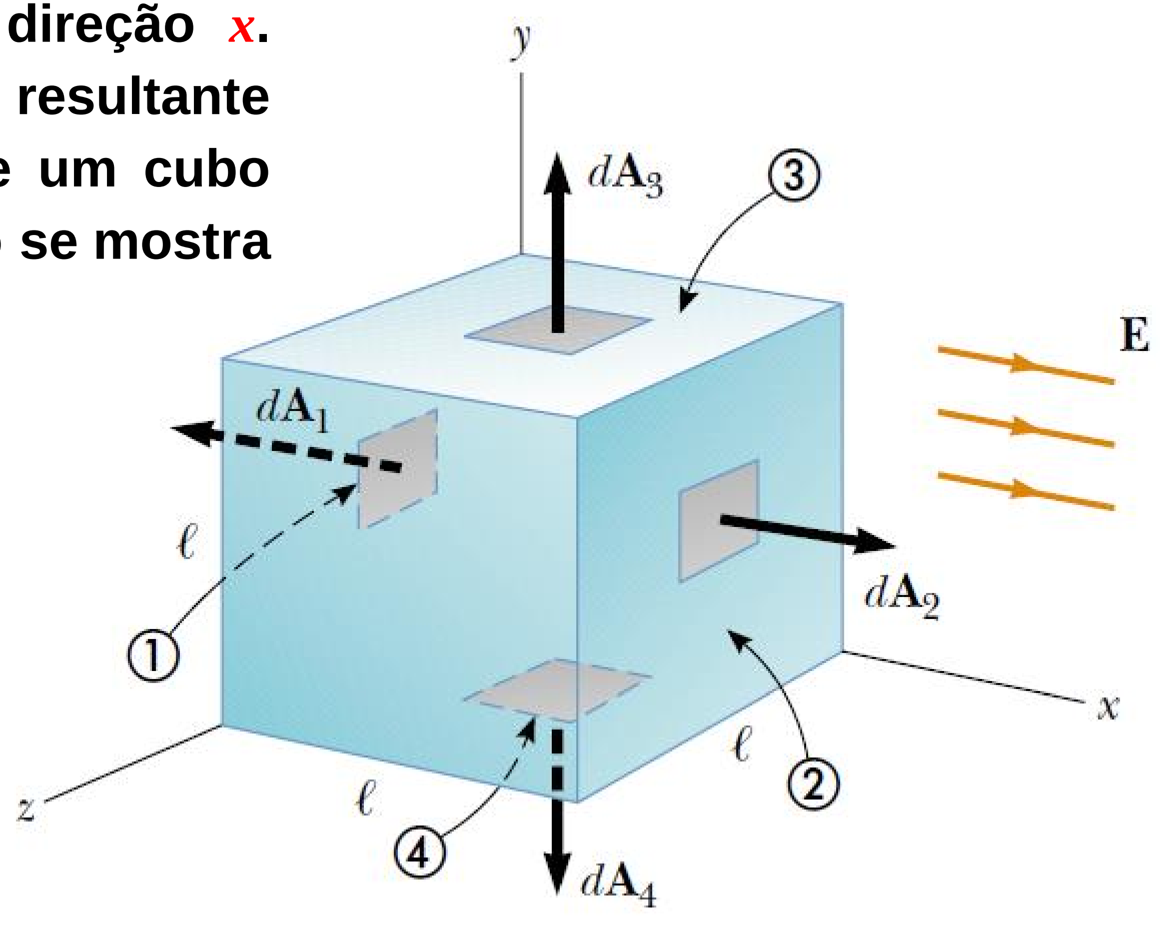


fluxo → integral de superfície (superfície fechada)

E_n = componente do campo elétrico normal à superfície

Exemplo 1: Fluxo através de um cubo

Considere um campo elétrico *E* uniforme orientado na direção *x*. Encontre o fluxo elétrico resultante através da superfície de um cubo de lado *l* orientado como se mostra na figura.



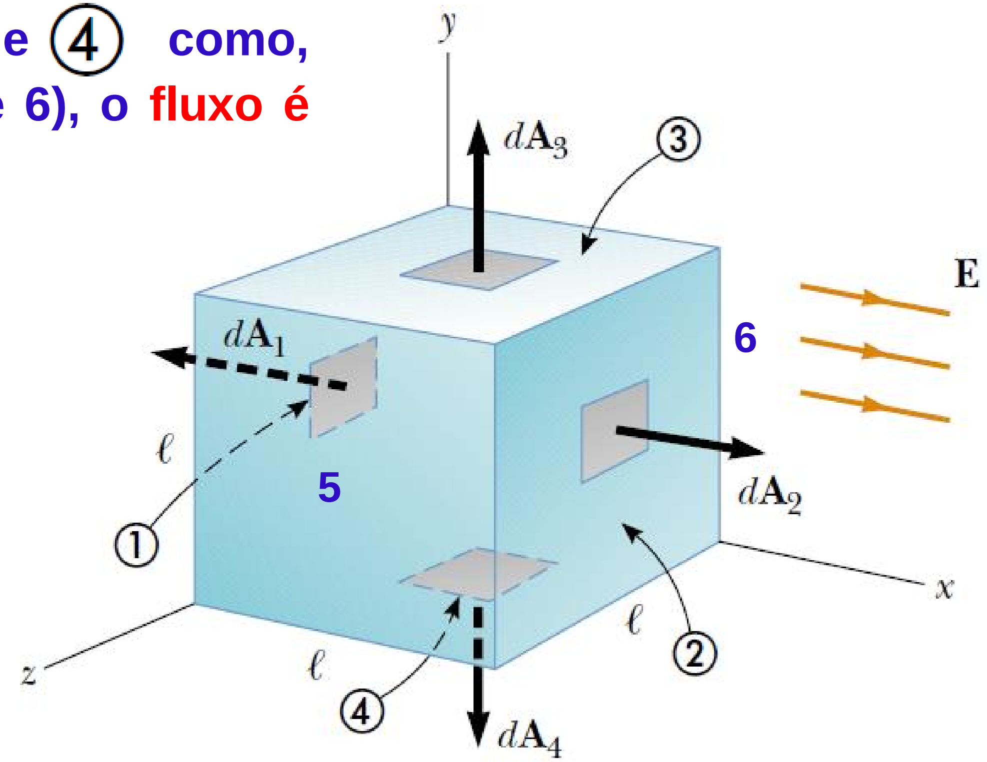
Solução: Fluxo resultante no cubo

O fluxo resultante é igual a soma dos fluxos através de cada uma das faces do cubo.

Para as faces numeradas por ③ e ④ como, para as faces não numeradas (5 e 6), o fluxo é nulo.

Existe fluxo nas faces ① e ②

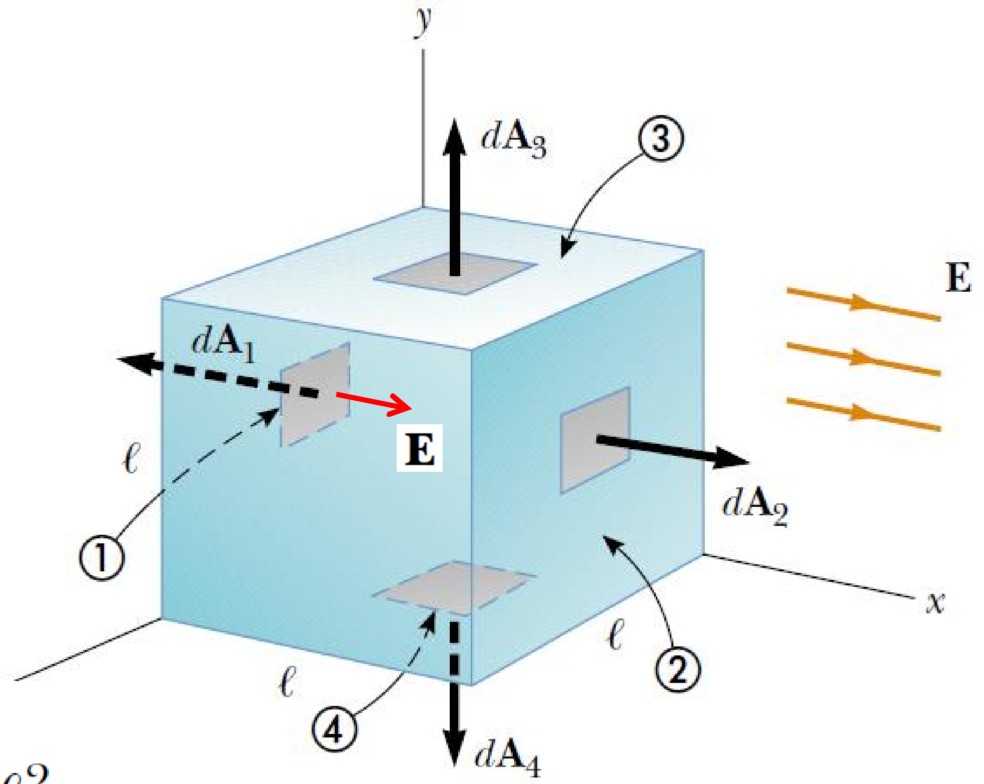
$$\Phi_E = \int_1 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} + \int_2 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A}$$



Fluxo no cubo (face 1)

Para a face ① temos:

$\theta = 180^\circ$ $\quad E$ = constante



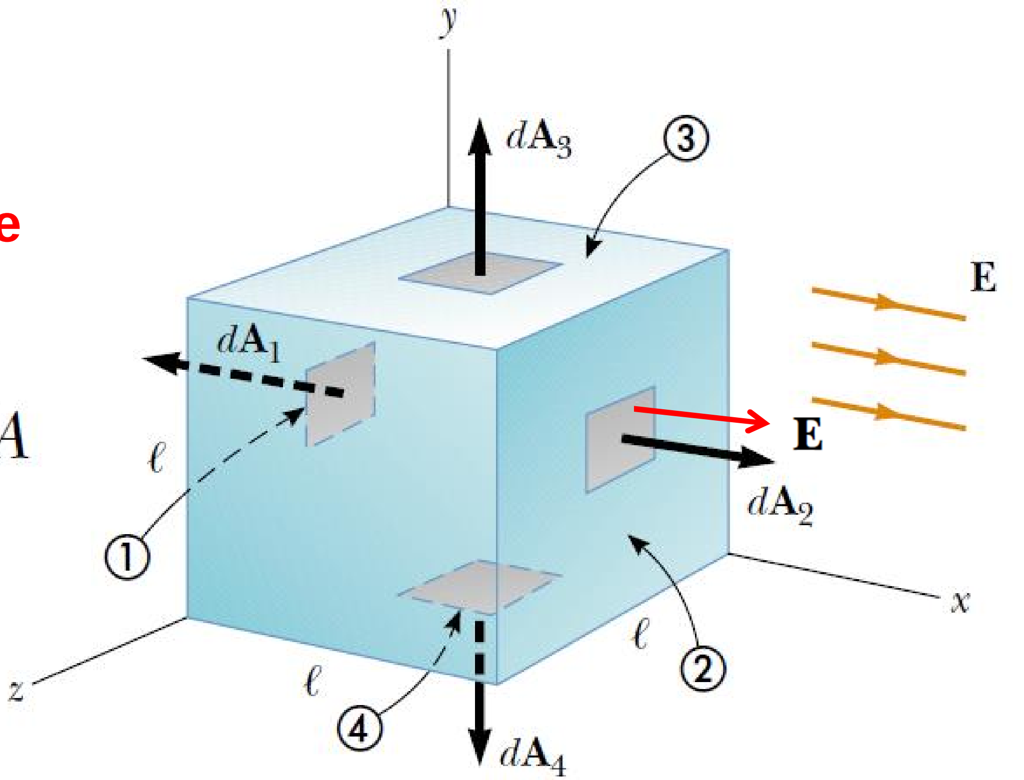
$$\int_1 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \int_1 E(\cos 180^\circ)\, dA$$

$$= -E\int_1 dA = -EA = -E\ell^2$$

Fluxo no cubo (face 2)

Para a face 2 temos:

$\theta = 0°$ E = constante



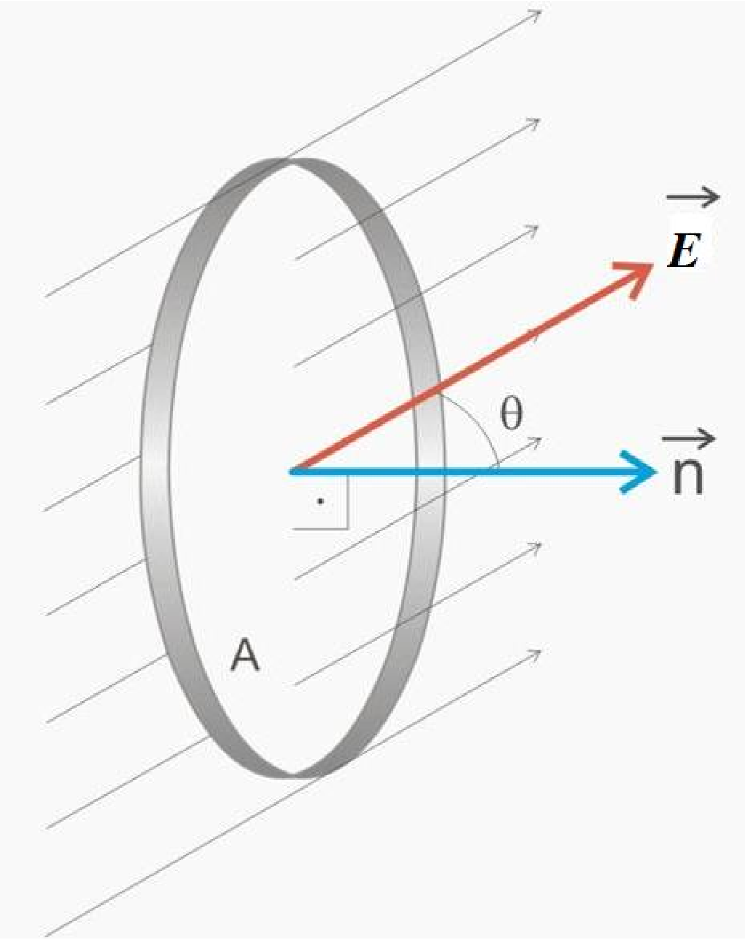
$$\int_2 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \int_2 E(\cos 0°)\, dA$$

$$= E\int_2 dA = +EA = E\ell^2$$

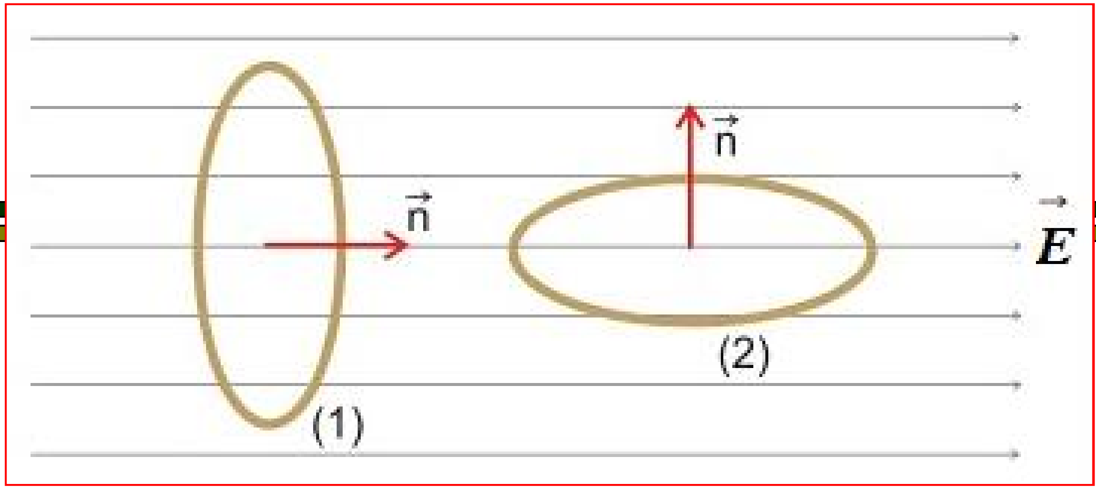
fluxo resultante $\Phi_E = -E\ell^2 + E\ell^2 + 0 + 0 + 0 + 0 = \boxed{0}$

Exemplo 2: fluxo através de um anel

Um anel circular de 40 cm de diâmetro é girado em um campo elétrico uniforme até que a posição do fluxo elétrico máximo seja encontrada. O fluxo medido nessa posição é $5{,}20 \times 10^5\ Nm^2/C$. Qual é a magnitude do campo elétrico?



Solução:



Posição (1): fluxo máximo

O fluxo elétrico se define como: $$\Phi_E = EA\cos\theta$$

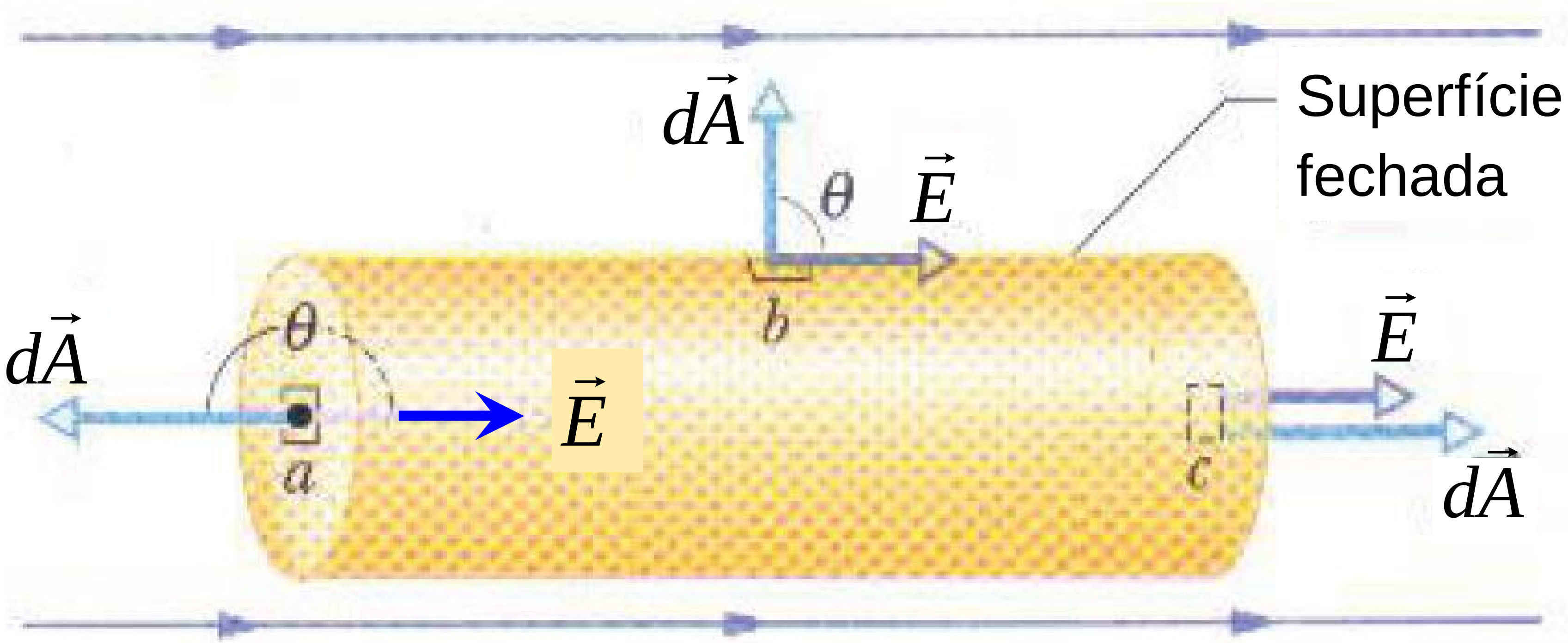
Área do circulo formado pelo anel:

$$A = \pi r^2 = \pi(0.200)^2 = 0.126 \text{ m}^2$$

O campo elétrico seria: $$5.20\times 10^5 = E(0.126)\cos 0°$$

$$\boxed{E = 4.14\times 10^6 \text{ N/C}}$$

Exemplo 3: **Uma superfície fechada com a forma de um cilindro de raio *R* está imersa em um campo elétrico uniforme com o eixo do cilindro paralelo ao campo. Qual é o fluxo do campo elétrico através da superfície?**

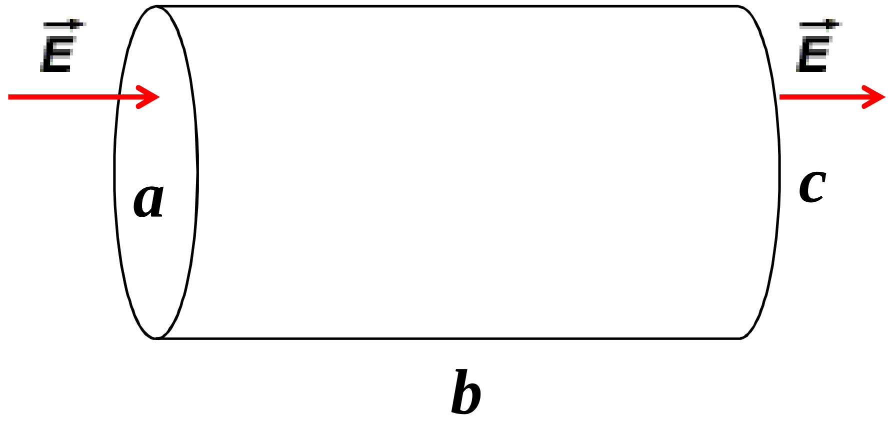


Solução:

a ï base esquerda do cilindro

c ï base direita do cilindro

b ï superfície lateral



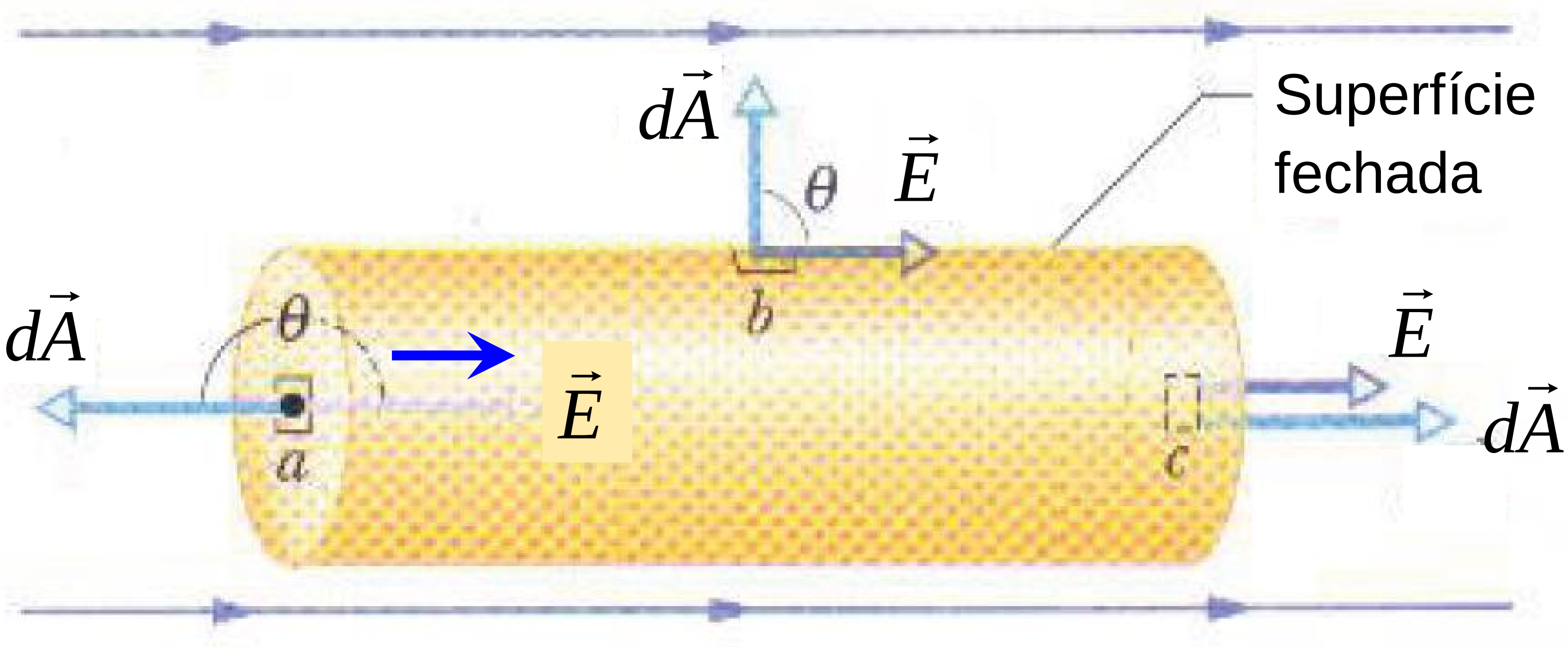
Fluxo: $$\Phi = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

Podemos separar em três integrais que representam o fluxo para cada uma das três superfícies ***a***, ***b*** e ***c***

$$\Phi = \int_a \vec{E} \cdot d\vec{A} + \int_b \vec{E} \cdot d\vec{A} + \int_c \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

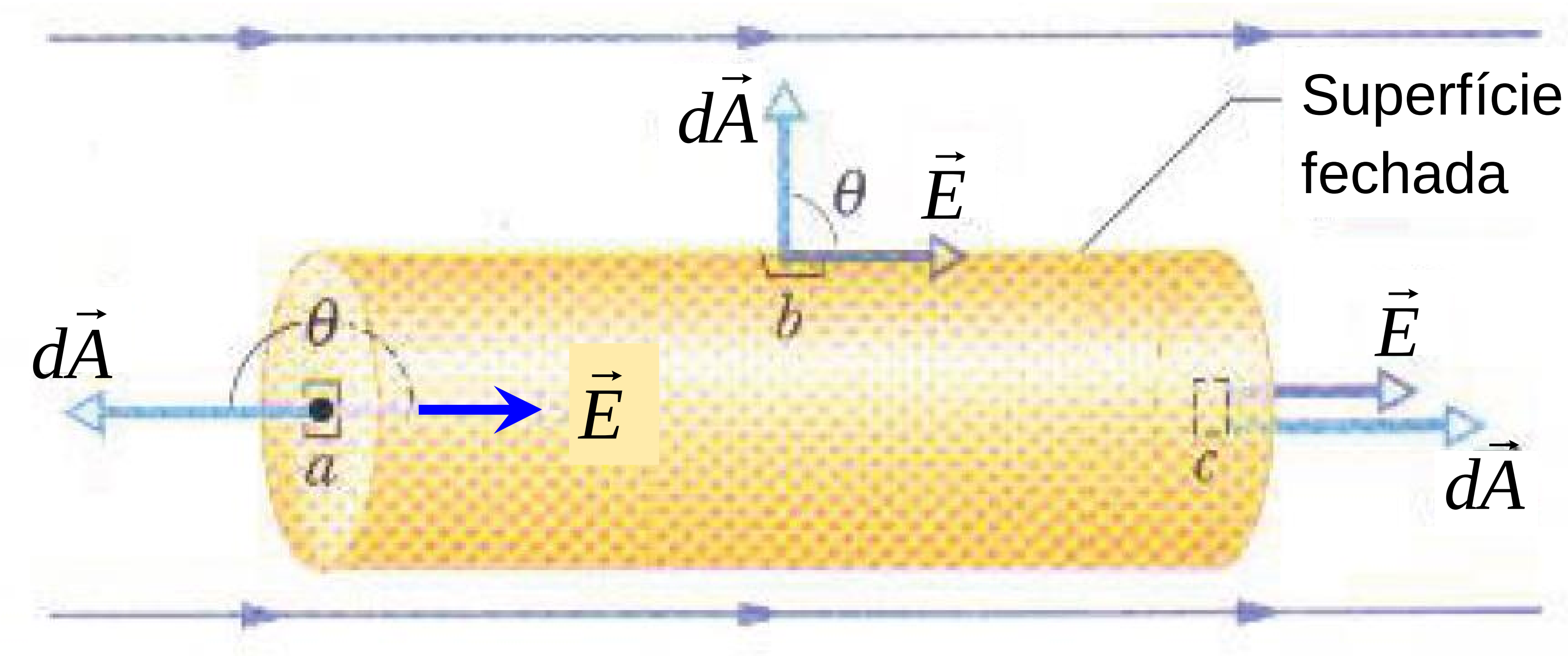
Solução: a ï base esquerda do cilindro

$$\Phi = \int_a \vec{E}\cdot d\vec{A} = \int E\left(\cos 180^o\right) dA = -E\int dA = -EA$$



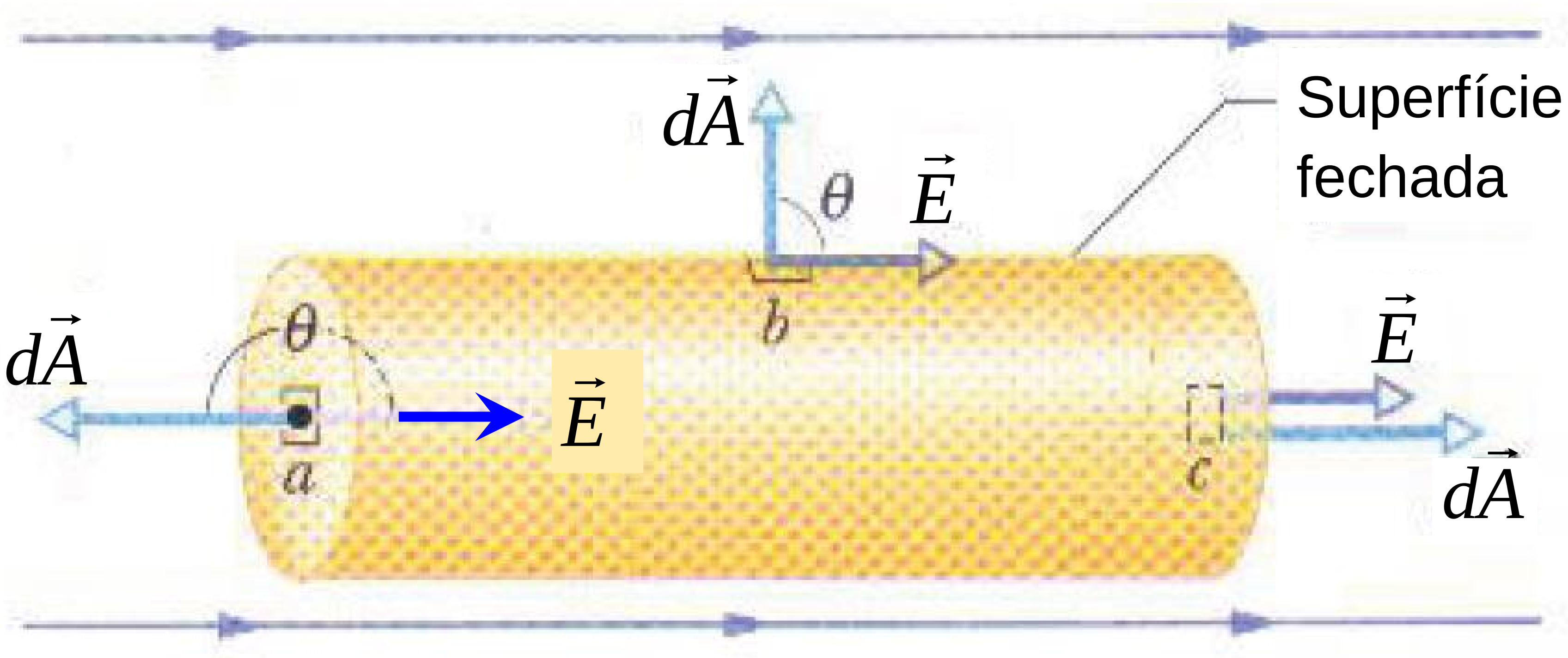
Solução: *c* ï base direita do cilindro

$$\int_c \vec{E}\cdot d\vec{A} = \int E\left(\cos 0^o\right)dA = EA$$



Solução: *b* ï superfície lateral

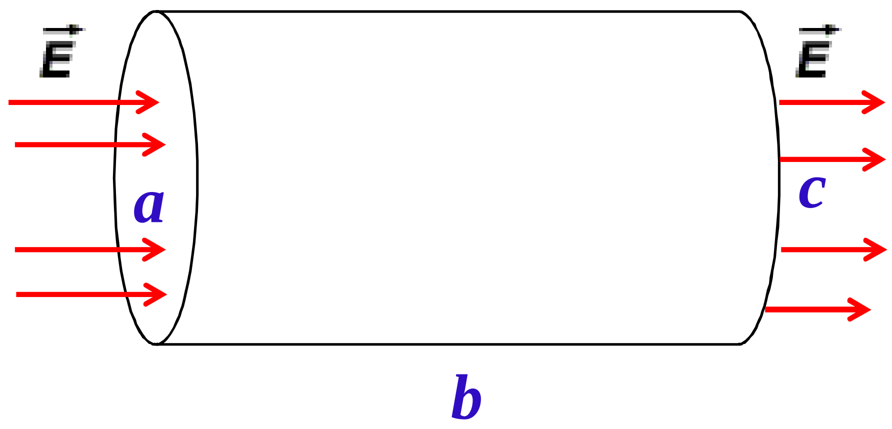
$$\int_{b} \vec{E}\cdot d\vec{A} = \int E\left(\cos 90^{o}\right) dA = 0$$



Solução:

Fluxo resultante:

$$\Phi = -EA + 0 + EA = 0$$

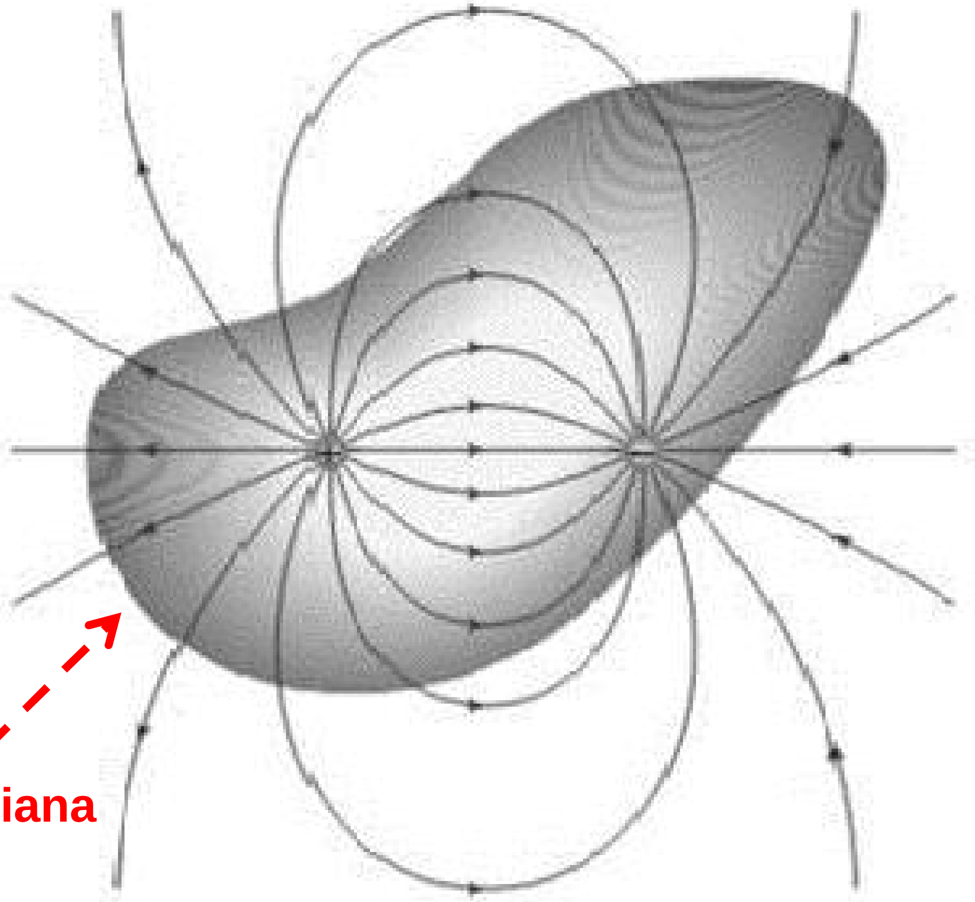


Nº linhas saindo = Nº linhas entrando

Lei de Gauss

Quando dentro da superfície fechada estão presentes cargas elétricas, o fluxo elétrico resultante devido a estas cargas se relaciona diretamente com o valor das cargas.

Lei de Gauss

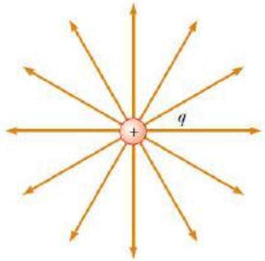


Superfície fechada ≡ superfície gaussiana

superfície imaginária

Lei de Gauss

Existe uma carga elétrica (+) q no interior de uma superfície fechada de forma esférica de raio r.

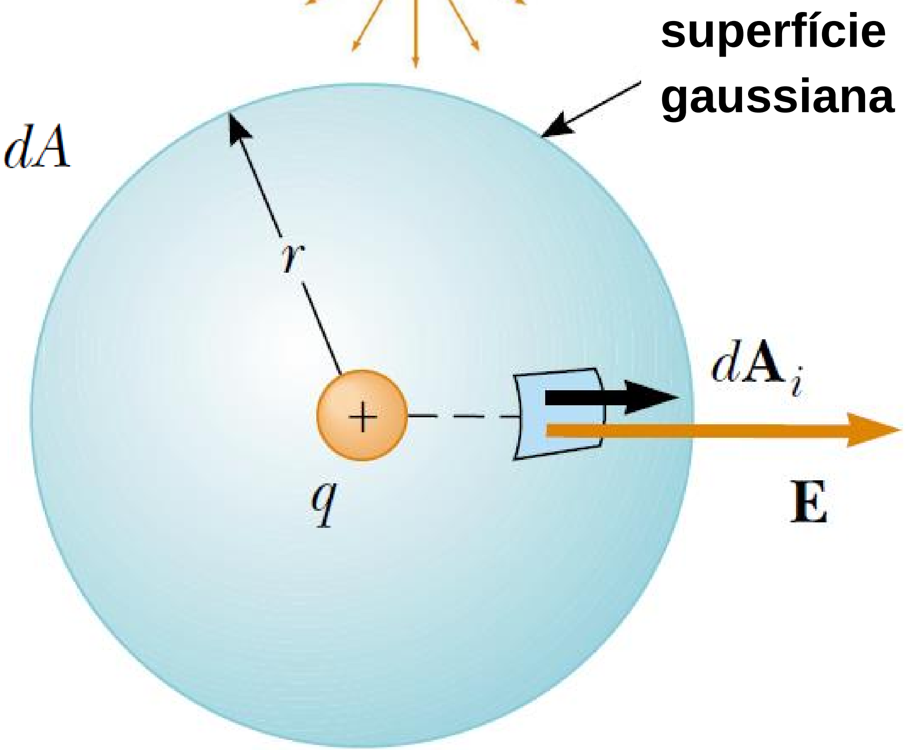


O fluxo devido a q vem dado por:

$$\Phi_E = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \oint E\, dA = E \oint dA$$

Módulo do campo elétrico a uma distância r da carga q :

$$E = k_e q / r^2$$



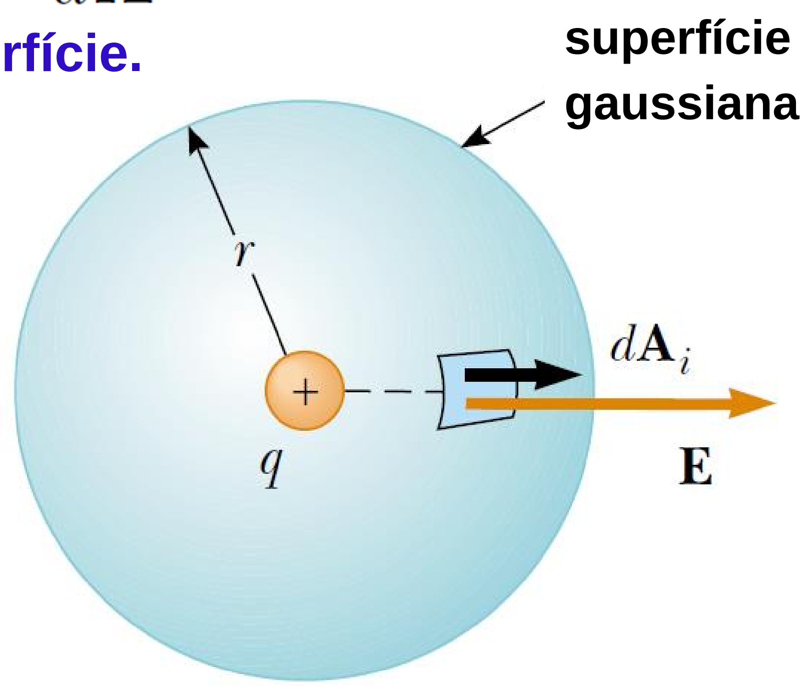
Lei de Gauss

$$\Phi_E = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \oint E\, dA = E \oint dA$$

$$\boxed{E = k_e q / r^2}$$

Na superfície da esfera, os vetores $\mathbf{E}$ e $d\mathbf{A}$ são paralelos saindo (radialmente) da superfície.

$$\mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = E\, dA$$



O campo elétrico E é constante sobre a superfície por isso sai da integral.

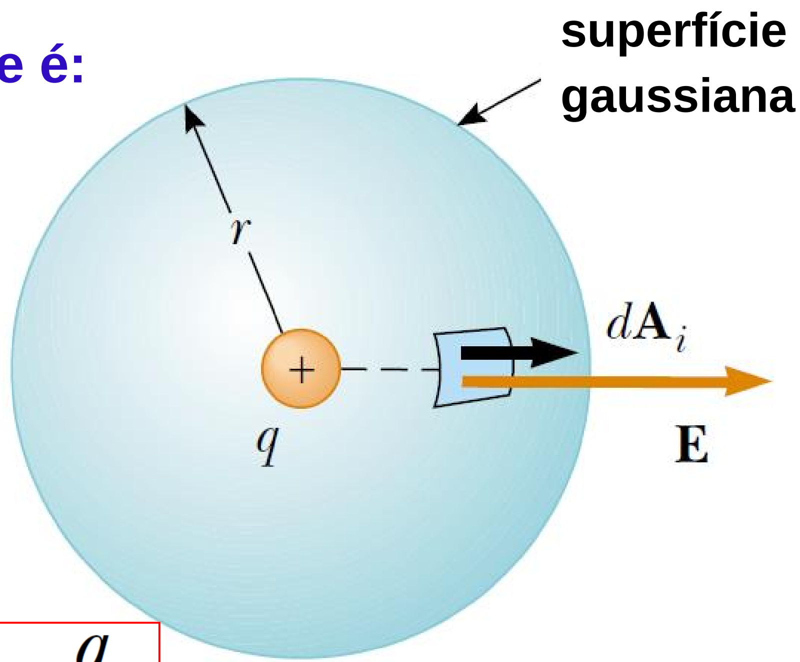
Lei de Gauss

Para uma superfície esférica temos: $$\oint dA = A = 4\pi r^2$$

O **fluxo resultante** através da superfície é:

$$\Phi_E = \frac{k_e q}{r^2}(4\pi r^2) = 4\pi k_e q$$

Como: $$k_e = 1/4\pi\epsilon_0$$



O **fluxo** resultante é diretamente **proporcional** à carga ***q*** no **interior** da superfície

$$\boxed{\Phi_E = \frac{q}{\epsilon_0}}$$

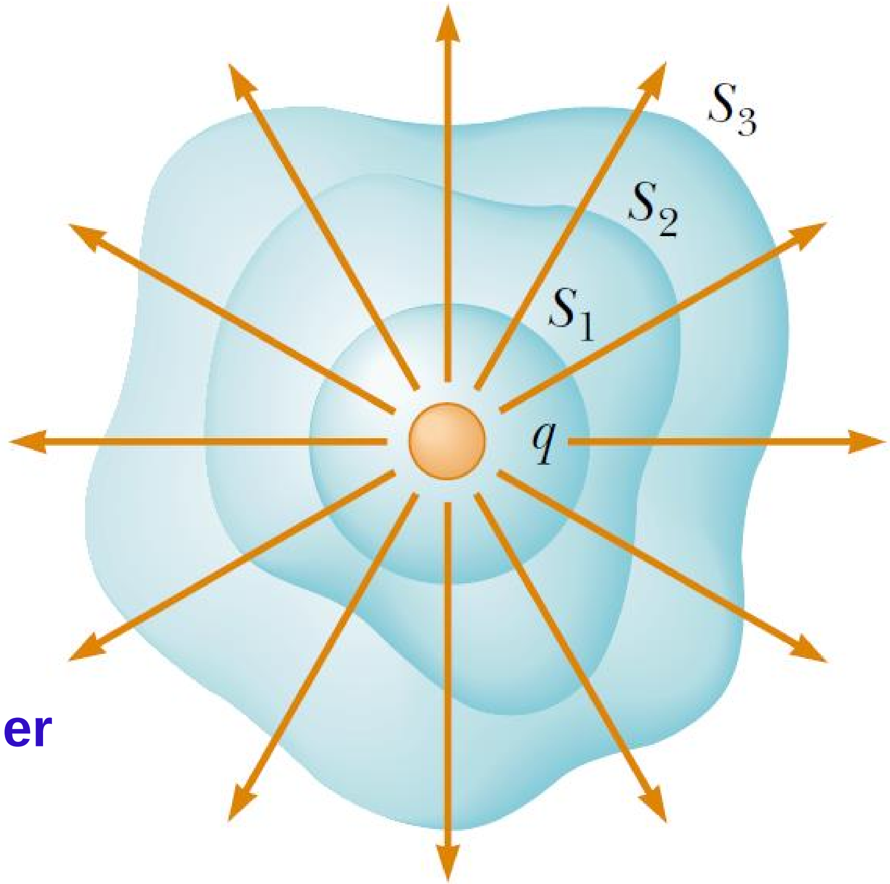
Lei de Gauss: forma da superfície fechada

Três superfícies fechadas: S_1, S_2 e S_3

O fluxo através de qualquer uma das três superfícies é:

$$\Phi_E = \frac{q}{\epsilon_0}$$

O fluxo é proporcional ao número de linhas do campo elétrico que atravessam uma superfície.

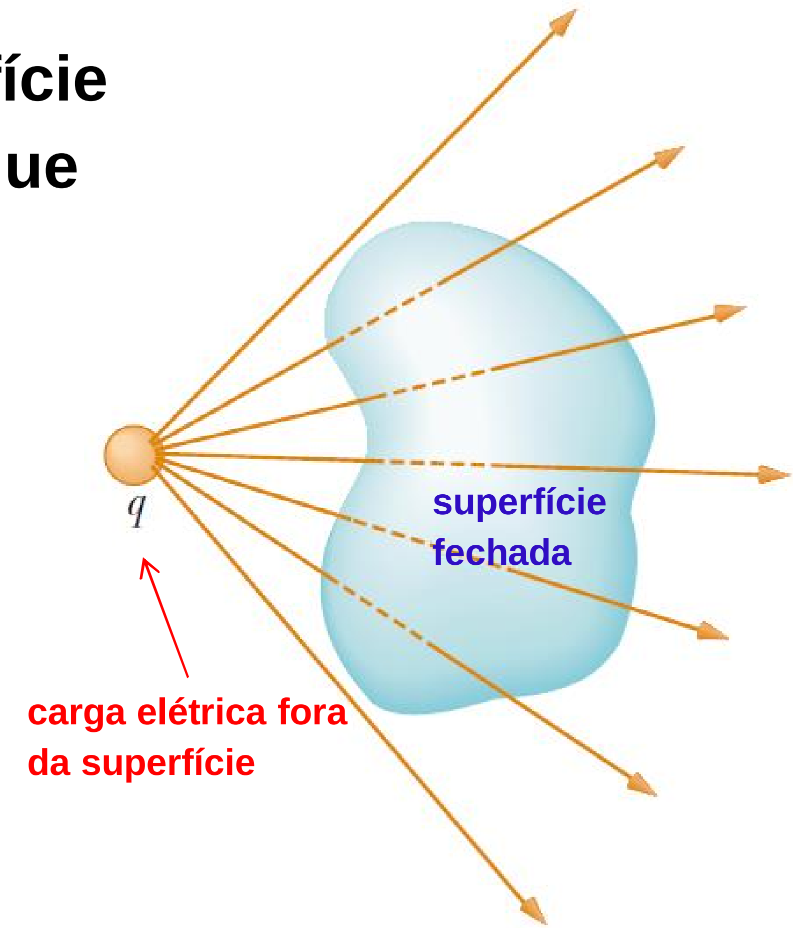


O fluxo resultante através de qualquer superfície fechada que envolve uma carga pontual q é dado por q/ε_0

Carga elétrica fora da superfície fechada

Número de linhas de campo elétrico que entram na superfície é igual ao número de linhas que sai da superfície.

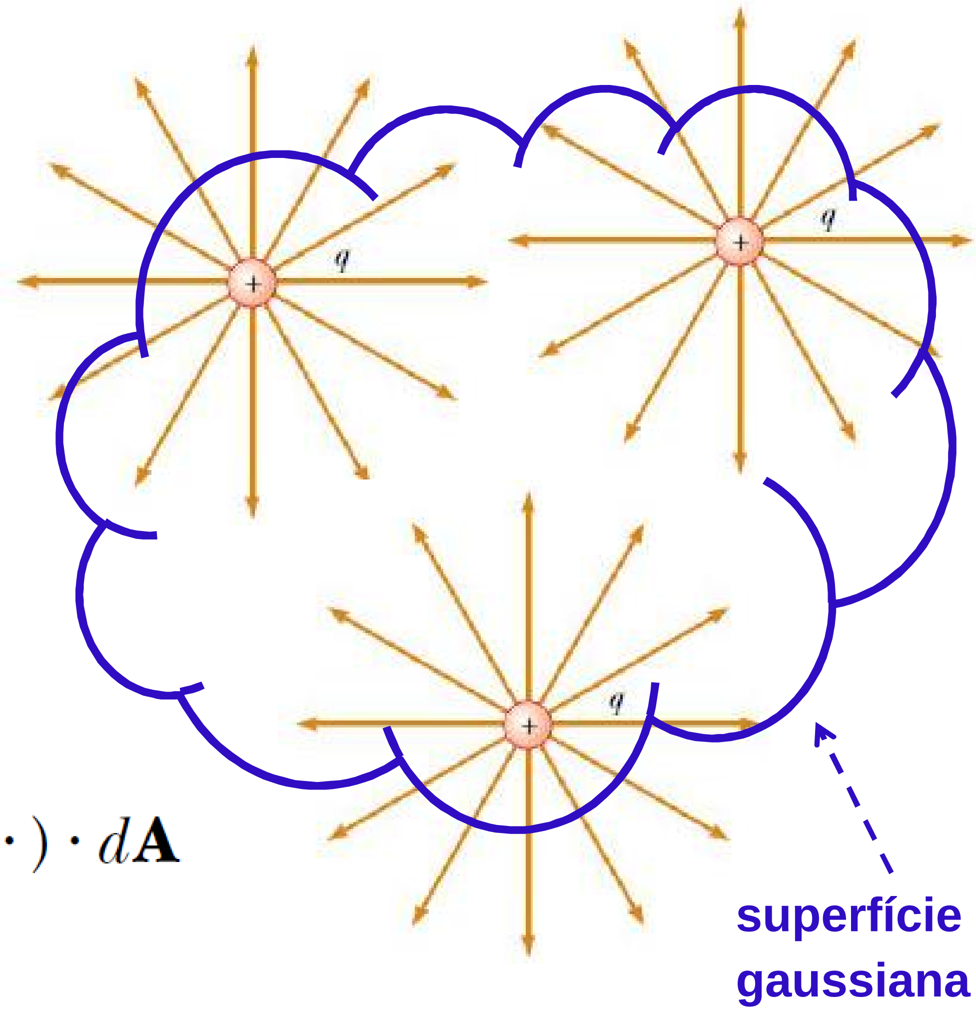
O fluxo elétrico resultante através de qualquer superfície fechada é nulo quando a superfície não encerra nenhuma carga.



Várias cargas dentro da superfície fechada

Quando a superfície gaussiana encerra várias cargas elétricas, o fluxo resultante é:

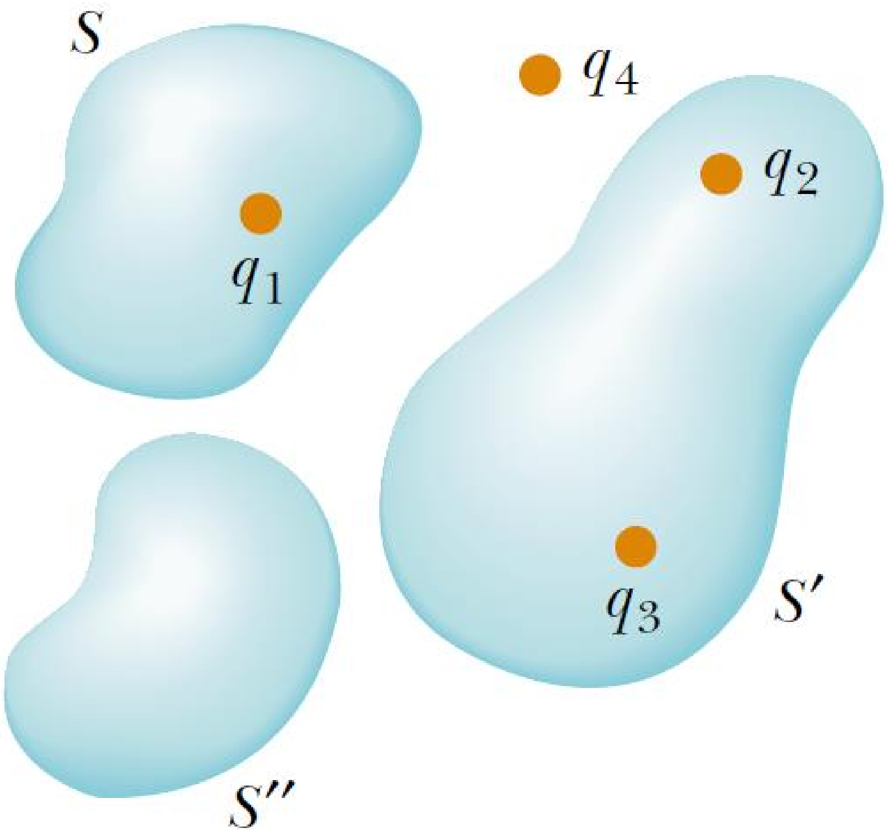
$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \oint (\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \cdots) \cdot d\mathbf{A}$$



Fluxo e superfície gaussiana

O fluxo através da superfície gaussiana *S* devido à carga q_1 é:

$$\Phi_E = q_1/\epsilon_0$$



O fluxo através da superfície gaussiana *S* devido às cargas q_2, q_3 e q_4 é:

$$\Phi_E = 0$$

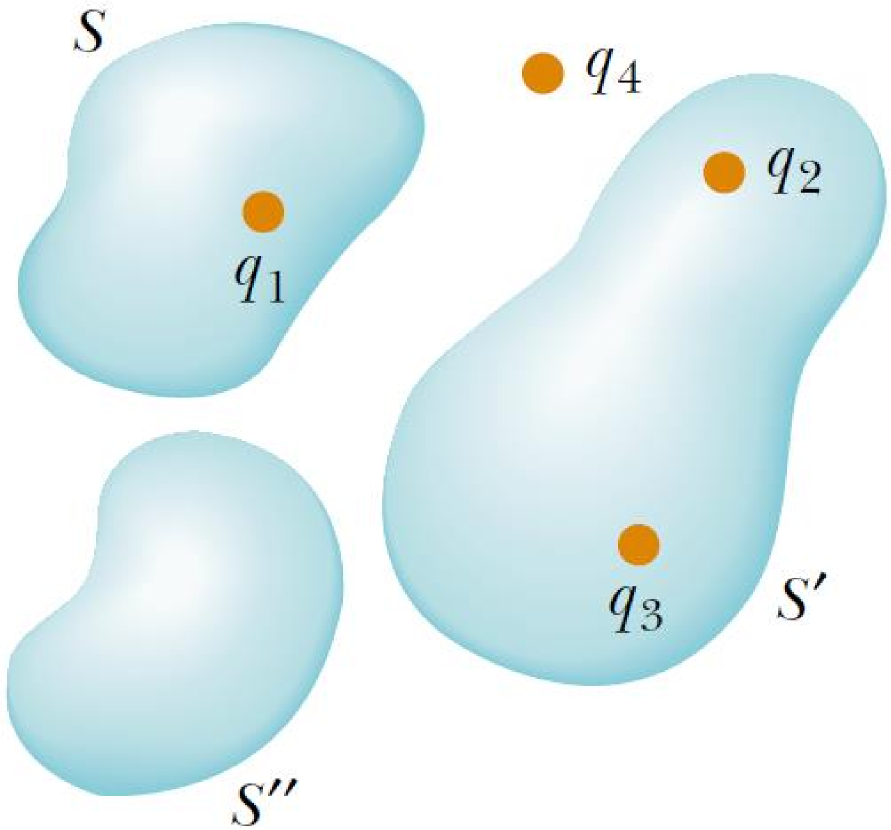
Fluxo e superfície gaussiana

O fluxo através da superfície gaussiana *Sô* devido às cargas q_2 e q_3 é:

$$\Phi_E = (q_2 + q_3)/\epsilon_0$$

O fluxo através da superfície gaussiana *Sôô* devido às cargas q_1, q_2, q_3 e q_4 é:

$$\Phi_E = 0$$



Lei de Gauss

O **fluxo elétrico** resultante através de qualquer superfície fechada é igual à **carga liquida** dentro da superfície dividida por ε_0

$$\Phi_E = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{q_{\text{in}}}{\epsilon_0}$$

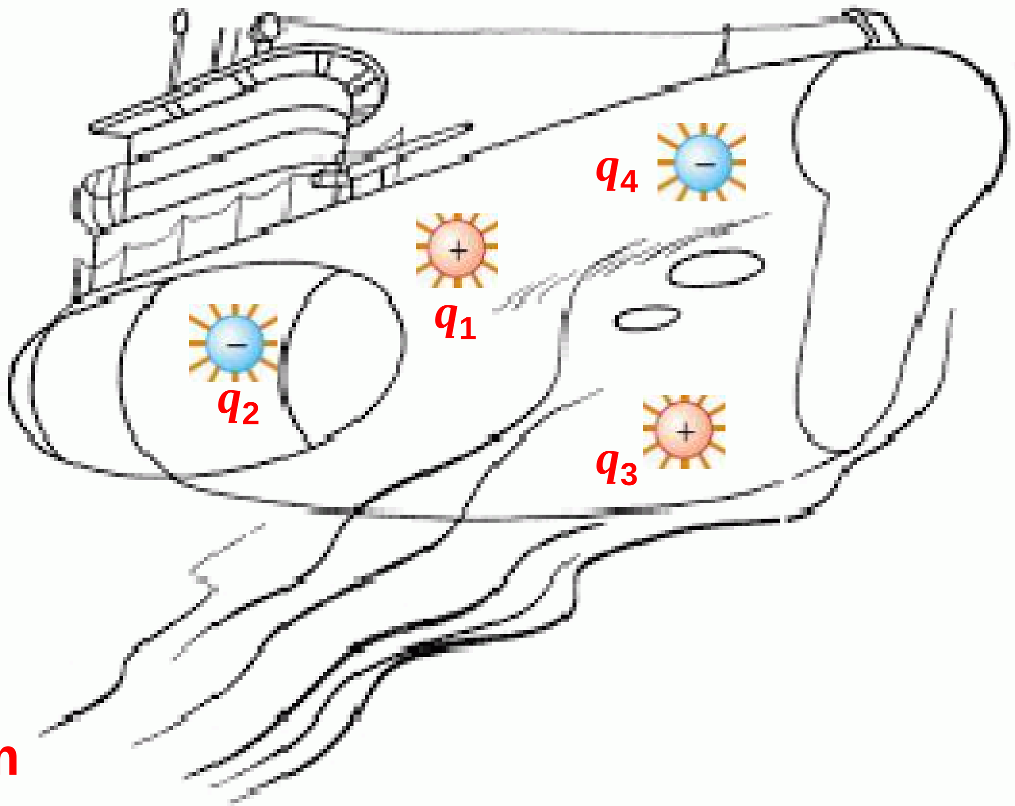
$\boldsymbol{E}$ é o campo elétrico em qualquer ponto sobre a superfície.

Exemplo 4:

As seguintes cargas estão situadas dentro de um submarino: q_1 = 5 μC; q_2 = - 9 μC; q_3 = 27 μC e q_4 = - 84 μC.

(a) Calcule o fluxo elétrico resultante através do casco do submarino.

(b) O número de linhas do campo elétrico que deixam o submarino é superior, igual ou inferior ao número que entra?



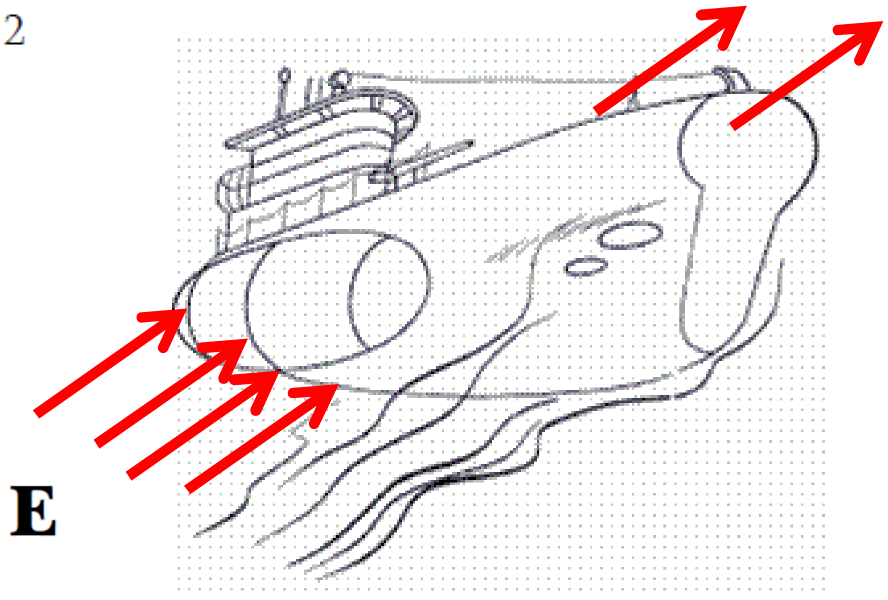
Solução:

(a) O casco do submarino seria a superfície gaussiana que encerra as quatro cargas. O fluxo resultante é:

$$\Phi_E = \frac{q_{\text{in}}}{\epsilon_0} = \frac{(+5.00\ \mu\text{C} - 9.00\ \mu\text{C} + 27.0\ \mu\text{C} - 84.0\ \mu\text{C})}{8.85 \times 10^{-12}\ \text{C}^2/\text{N} \cdot \text{m}^2}$$

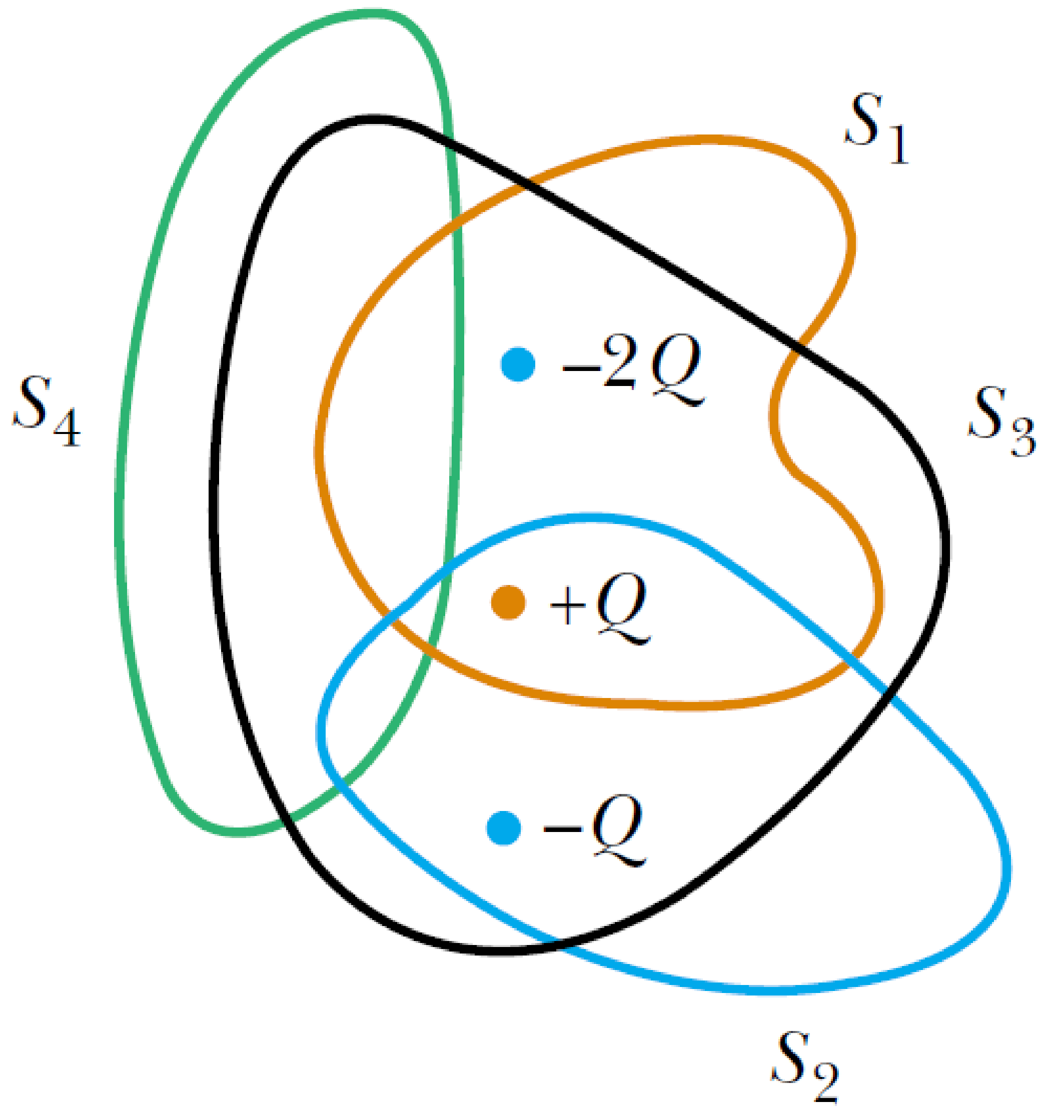
$$\Phi_E = -6.89 \times 10^6\ \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2$$

(b) Como o fluxo resultante é negativo, mais linhas do campo entram do que saem.



Exemplo 5:

Quatro superfícies fechadas S_1, S_2, S_3 e S_4 e três cargas elétricas são mostradas na figura. Encontre o fluxo elétrico através de cada superfície.

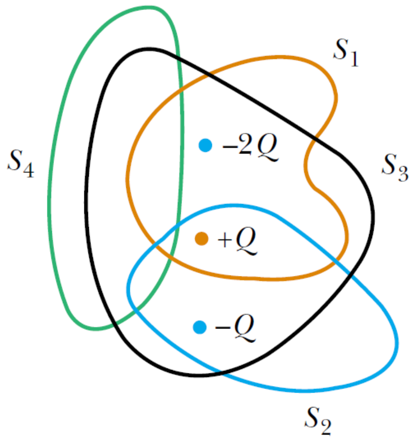


Solução:

O fluxo resultante é: $$\Phi_E = \frac{q_{in}}{\epsilon_0}$$

Através de S_1:

$$\Phi_E = \frac{-2Q+Q}{\epsilon_0} = \boxed{-\frac{Q}{\epsilon_0}}$$



Através de S_2:

$$\Phi_E = \frac{+Q-Q}{\epsilon_0} = \boxed{0}$$

Através de S_3:

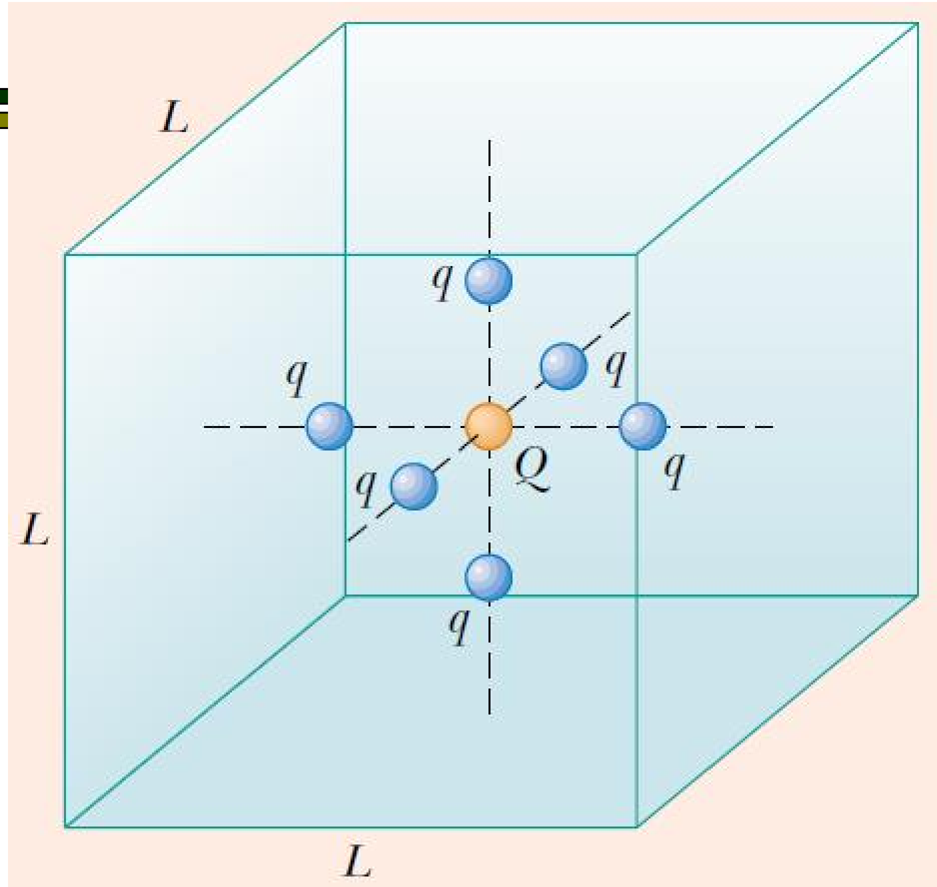
$$\Phi_E = \frac{-2Q+Q-Q}{\epsilon_0} = \boxed{-\frac{2Q}{\epsilon_0}}$$

Através de S_4:

$$\Phi_E = \boxed{0}$$

Exemplo 6:

Uma carga pontual Q = 5 μC está localizada no centro de um cubo de lado L = 0,1 m. Além disso, seis cargas pontuais idênticas q = - 1 μC estão posicionadas simetricamente ao redor da carga Q como se mostra na figura. Determinar o fluxo elétrico através de uma das faces do cubo.



Solução:

O fluxo resultante é: $$\Phi_E = \frac{q_{\text{in}}}{\epsilon_0}$$

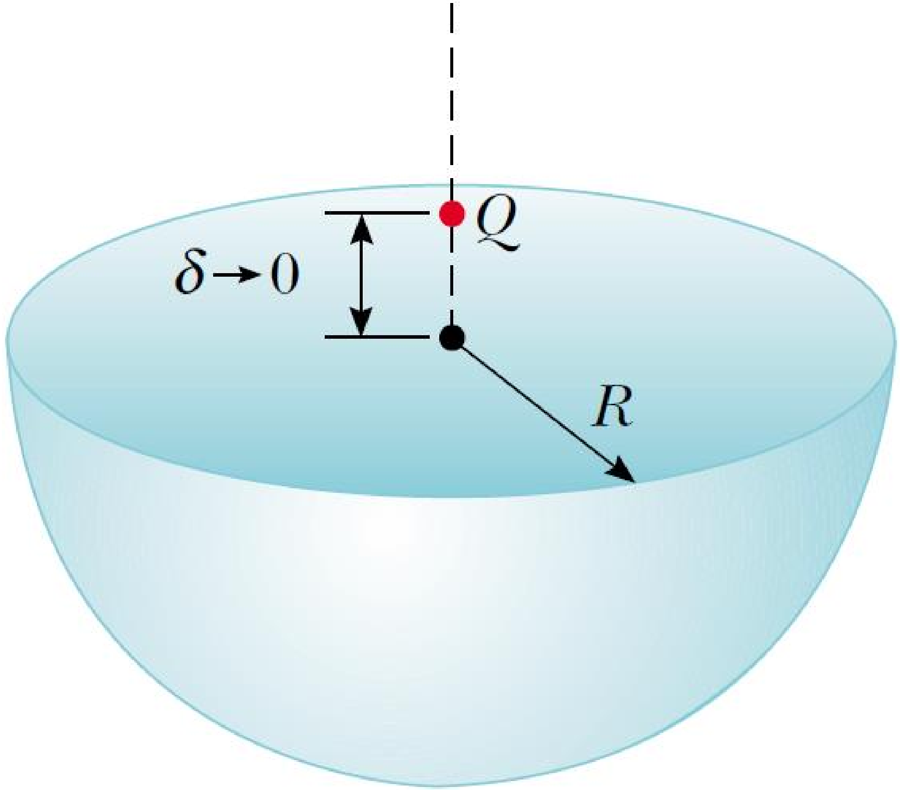
Como a carga liquida dentro do cubo é: $$q_{\text{in}} = Q - 6|q|$$

O fluxo resultante através do cubo inteiro é: $$\Phi_E = \frac{Q - 6|q|}{\epsilon_0}$$

O fluxo através de uma das faces do cubo é:

$$(\Phi_E)_{\text{uma face}} = \frac{Q - 6|q|}{6\,\epsilon_0} = \frac{(5.00 - 6.00)\times 10^{-6}\ \mathrm{C\cdot N\cdot m^2}}{6\times 8.85\times 10^{-12}\ \mathrm{C^2}} = \boxed{-18.8\ \mathrm{kN\cdot m^2/C}}$$

Exemplo 7:



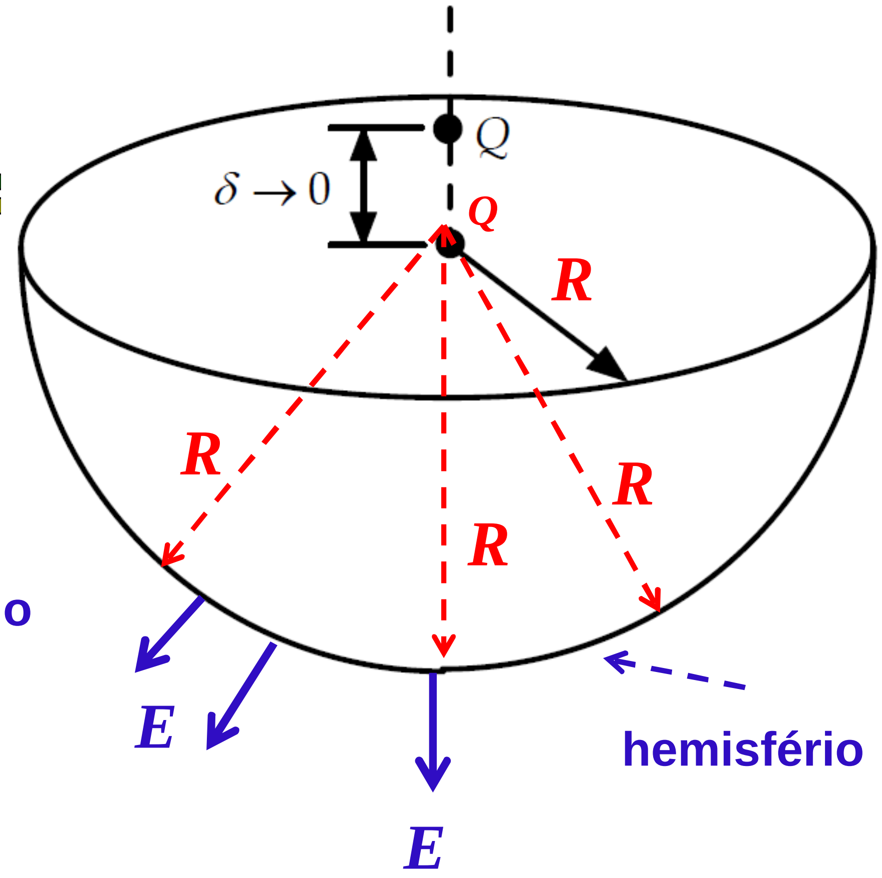
Uma carga pontual Q está situada imediatamente acima do centro da face plana de um hemisfério de raio R, como mostrado na figura. Qual é o fluxo elétrico

(a) através da superfície curva?

(b) através da face plana?

Solução:

(**a**) Como δ é muito pequeno, todos os pontos sobre o **hemisfério** estariam a mesma distância R da carga Q.



O campo elétrico sobre qualquer ponto no hemisfério é:

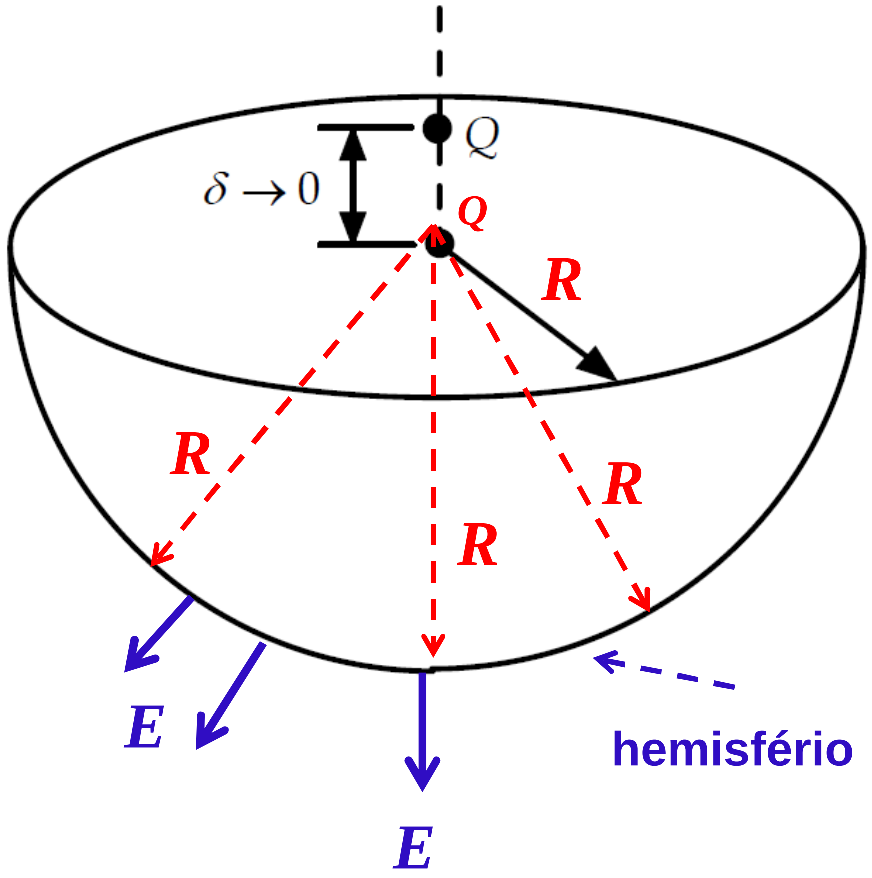
$$E = k_e \frac{Q}{R^2}$$

O fluxo elétrico através da superfície curva (hemisfério) é:

$$\Phi_{\text{curved}} = \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = E_{\text{local}} A_{\text{hemisphere}}$$

$$\Phi_{\text{curved}} = \left(k_e \frac{Q}{R^2}\right)\left(\frac{1}{2} 4\pi R^2\right) = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} Q(2\pi) = \boxed{\frac{+Q}{2 \epsilon_0}}$$

Solução:



(b) Fluxo elétrico através da superfície plana:

As superfícies plana e curva formam uma superfície fechada e, como a carga Q está na parte externa desta superfície fechada, o fluxo total é nulo e pode ser expresso assim:

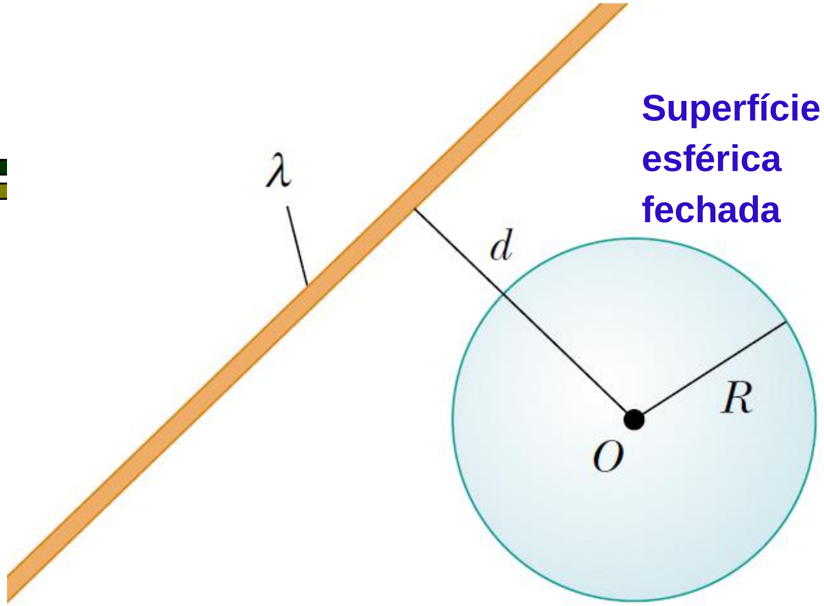
$$\Phi_{\text{curva}} + \Phi_{\text{plana}} = 0$$

Então:

$$\Phi_{\text{plana}} = -\Phi_{\text{curva}} = -\frac{Q}{2\varepsilon_0}$$

Exemplo 8:

Um fio longo infinito que tem uma densidade linear de carga λ fica a uma distancia d do ponto O como mostrado na figura.



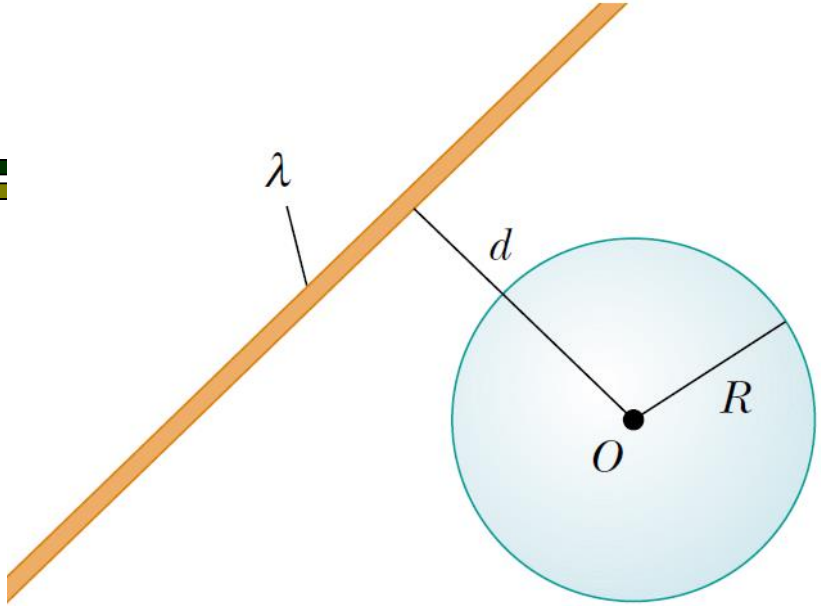
Determinar o fluxo elétrico total através da superfície esférica devido a esta carga linear se:

(a) $R < d$

(b) $R > d$

Solução:

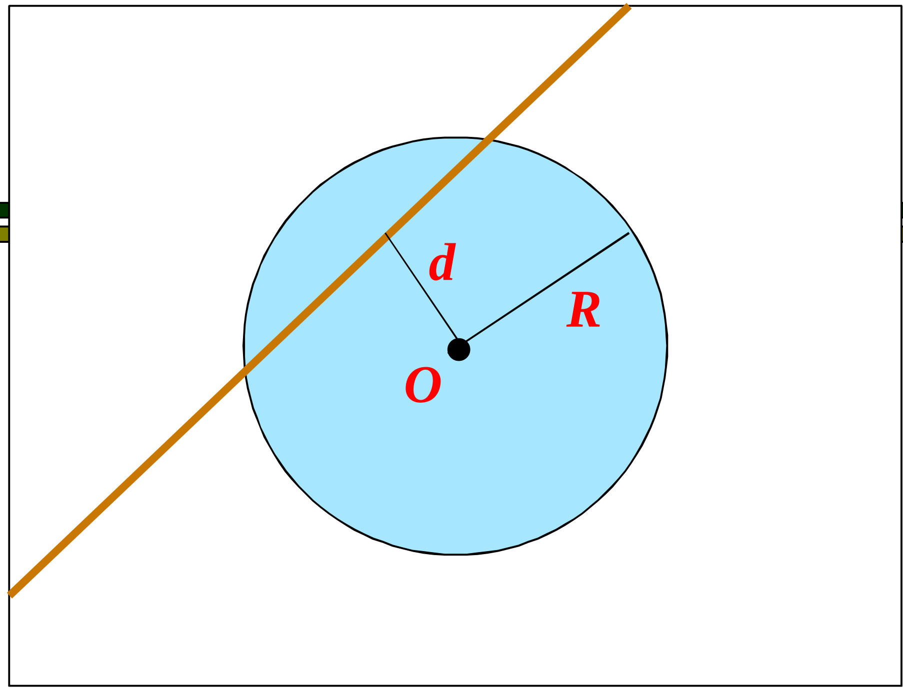
(**a**) Para $R < d$ temos a situação mostrada na figura.

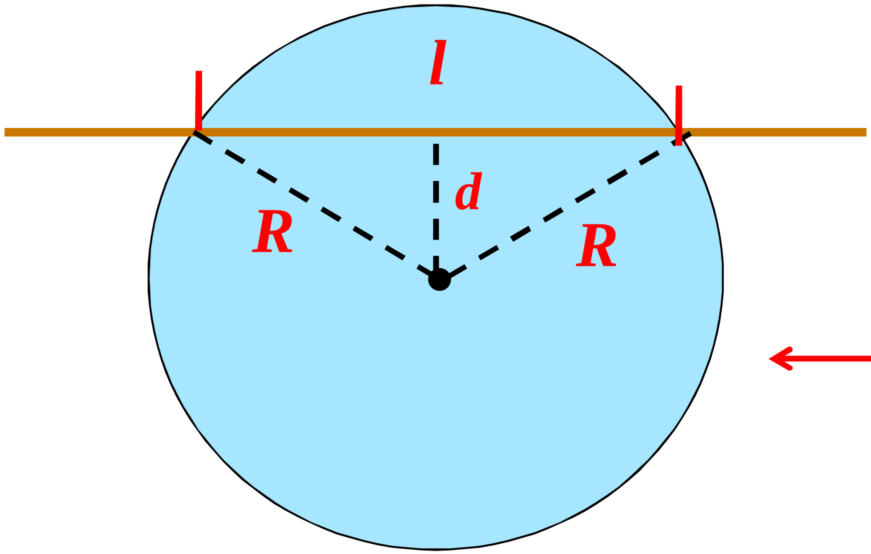


Como a distribuição linear de cargas não está encerrada pela superfície esférica, o fluxo elétrico através desta superfície é **nulo**.

Solução:

(b) Para $R > d$ temos a situação mostrada na figura.





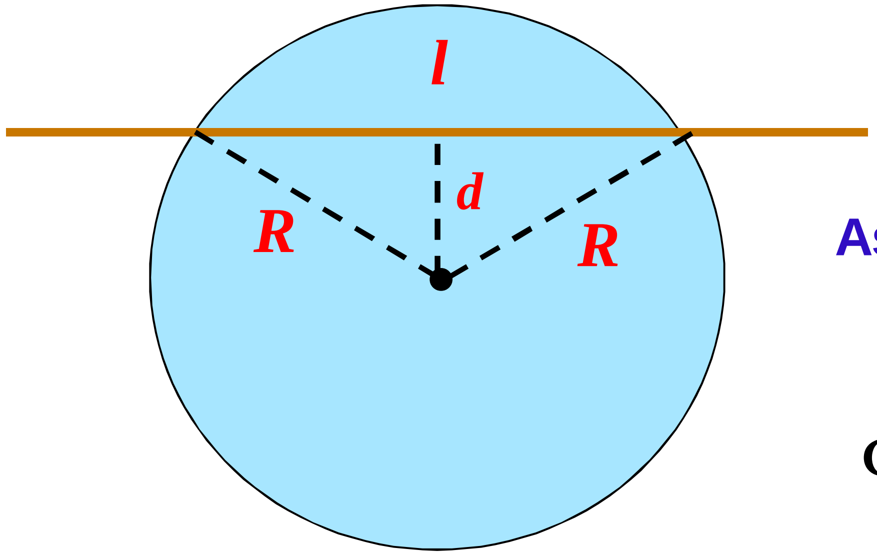
A superfície esférica se considera como a superfície gaussiana. Para encontrar o fluxo elétrico através desta superfície, devemos achar a porção da distribuição linear (comprimento l) que fica dentro da esfera.

Solução:

$$R^2 = d^2 + (l/2)^2$$

$$(l/2)^2 = R^2 - d^2$$

$$l = 2\sqrt{R^2 - d^2}$$



A densidade linear de carga é: $\lambda = \dfrac{q_{in}}{l}$

onde q_{in} é a carga que fica dentro da esfera.

$$q_{in} = \lambda l = 2\lambda\sqrt{R^2 - d^2}$$

Assim, o fluxo elétrico será:

$$\Phi = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0} = \frac{2\lambda\sqrt{R^2 - d^2}}{\varepsilon_0}$$

FIM