UFABC – UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC

CECS – CENTRO DE ENGENHARIA, MODELAGEM E CIÊNCIAS SOCIAIS APLICADAS

ENGENHARIA AEROESPACIAL

ESTS010-17 - TÉCNICAS DE ANÁLISE ESTRUTURAL E PROJETO

- Terceiro Quadrimestre – 2022 -

Prof. Dr. Wesley Góis – CECS - UFABC

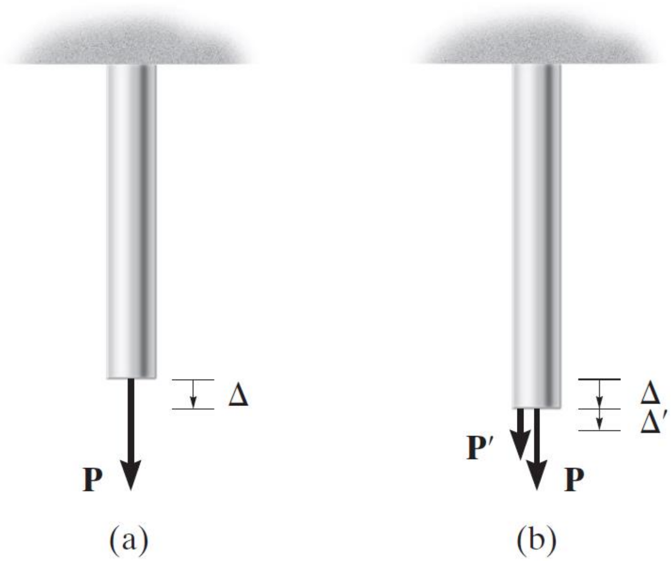
São Bernardo do Campo, outubro de 2022

1. Trabalho Externo e Energia de Deformação

- O trabalho é provocado por uma força interna e momento.
- Uma força realiza *trabalho* quando sofre um deslocamento *dx* que está na mesma direção dela.

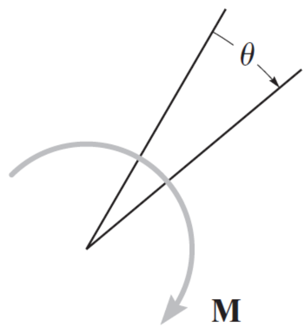
$$U_e = \int_0^x F\,dx$$

Quando $F = P$ e deslocamento final é Δ, $U_e = \frac{1}{2} P\Delta$



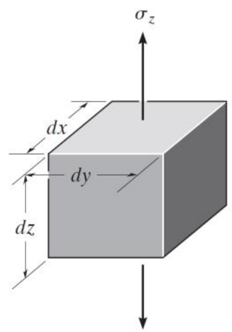
- Um momento **M** realiza trabalho quando sofre um deslocamento rotacional $d\theta$ ao longo de sua linha de ação.
- Quando M aumenta gradualmente do zero em $\theta = 0$ a *M* em θ então o trabalho será:

$$U_e = \frac{1}{2} M\theta$$



- Se o corpo é sujeito somente a tensão normal uniaxial e energia de deformação o corpo é:

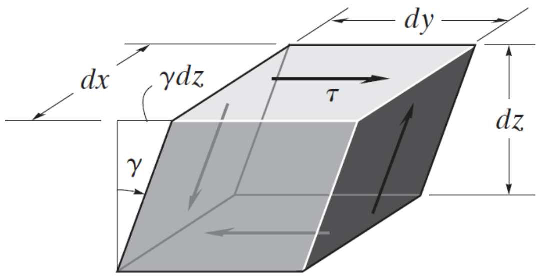
$$U_i = \int_V \frac{\sigma^2}{2E} dV$$

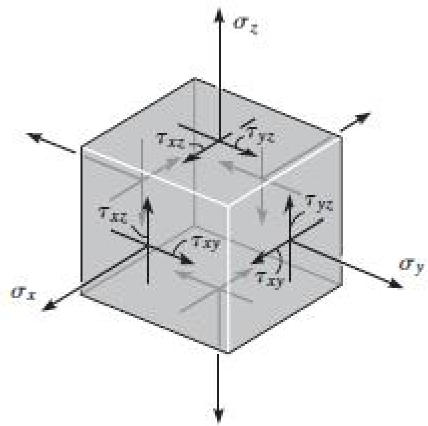


Métodos Energéticos e Análise Estrutural

- Se o corpo é sujeito somente a tensão de cisalhamento a energia de deformação o corpo é:

$$U_i = \int_V \frac{\tau^2}{2G} dV$$





- Tensão multiaxial:

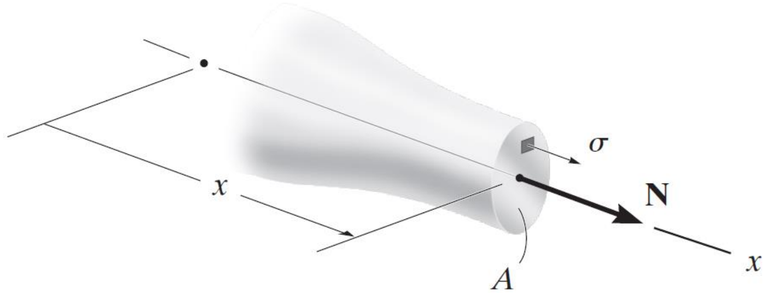
$$U_i = \int_V \left[\frac{1}{2E}\left(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2\right) - \frac{\nu}{E}\left(\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_x\sigma_z\right) + \frac{1}{2G}\left(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2\right)\right] dV$$

$$U_i = \int_V \left[\frac{1}{2E}\left(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2\right) - \frac{\nu}{E}\left(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3\right)\right] dV$$

1.1 Energia de Deformação Elástica para Vários Tipos de Carga

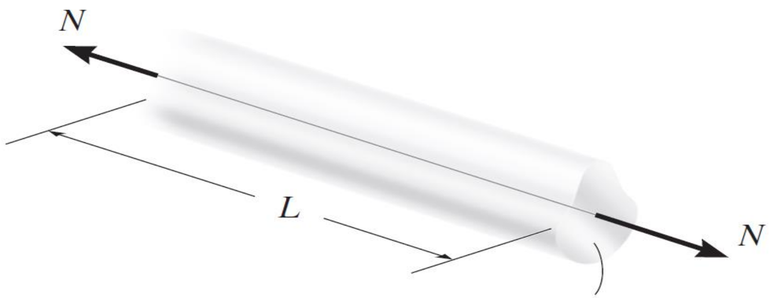
- Para **carga axial**, a *força axial interna* localizada à distância *x* de uma extremidade é *N*.

$$U_i = \int_0^L \frac{N^2}{2AE}\,dx$$



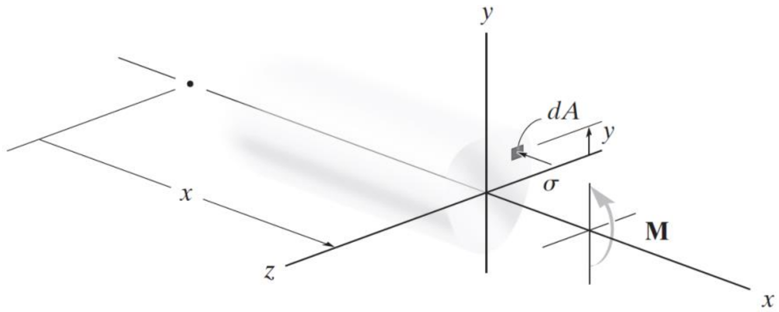
- Para o caso mais comum de uma barra prismática da área de seção transversal constante *A*, *L*, e *N*,

$$U_i = \frac{N^2 L}{2AE}$$



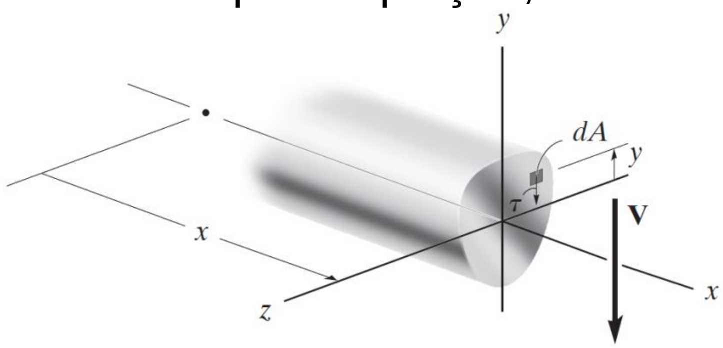
- Visto um **momento fletor** aplicado a um elemento estrutural prismático reto desenvolve uma *tensão normal*, o momento de inércia na viga sobre o eixo neutro

$$U_i = \int_0^L \frac{M^2 dx}{2EI}$$



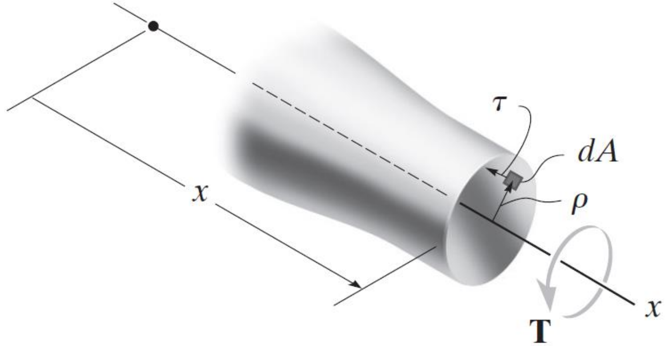
- A energia de deformação decorrente da tensão de cisalhamento em um elemento de uma viga pode ser determinada pela equação,

$$U_i = \int_0^L \frac{f_s V^2 dx}{2GA}$$



- Para determinar a força da tensão interna em um eixo ou tubo circular um **momento torsional**,

$$U_i = \int_0^L \frac{T^2 dx}{2GI}$$

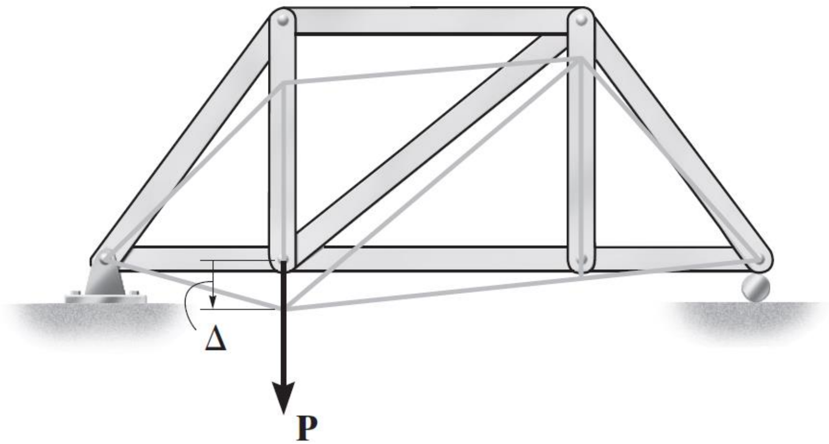


- Quando o eixo (ou tubo) tiver uma área de seção transversal e o torque aplicado é constante

$$U_i = \frac{T^2 L}{2GI}$$

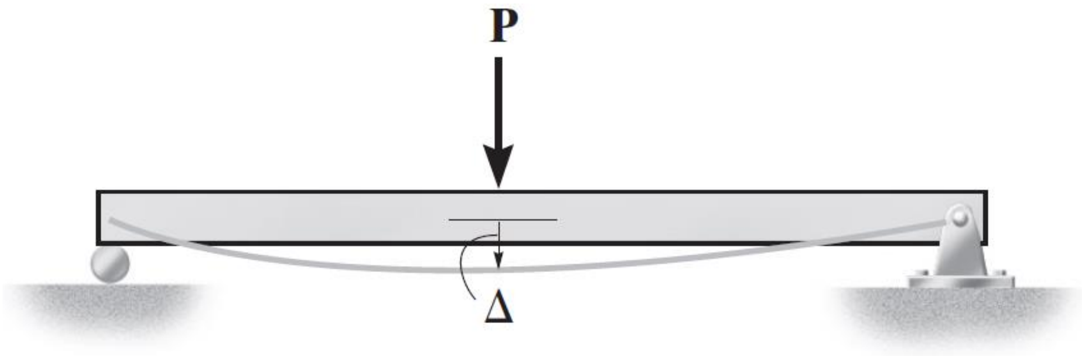
2. Conservação de Energia

- Todos os métodos de energia usados em mecânica baseiam-se em um equilíbrio de energia, muitas vezes denominado conservação de energia.
- Conservação de energia para o corpo é expressa como $U_e = U_i$
- Somando as energias de todos os elementos da treliça, temos $\frac{1}{2}P\varphi = \times \frac{N^2 L}{2AE}$



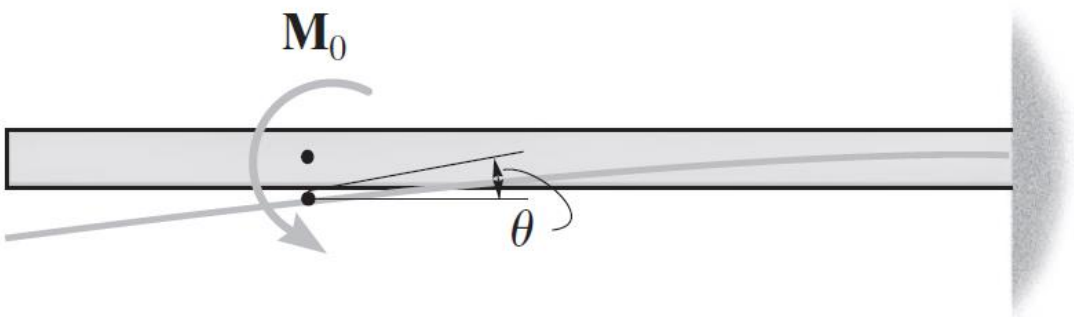
- A energia de deformação da viga será determinada pelo momento fletor interno *M*,

$$\frac{1}{2}P\Delta = \int_0^L \frac{M^2}{2EI}\,dx$$



- Uma viga carregada por um momento pode ser escrita como

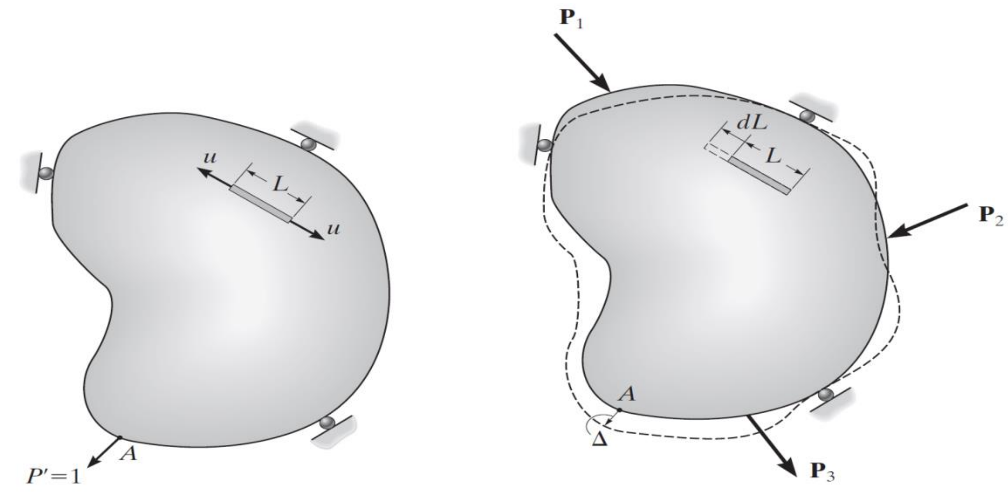
$$\frac{1}{2}M_0\theta = \int_0^L \frac{M^2}{2EI}\,dx$$



3. Princípio dos Trabalhos Virtuais

- Sempre que um corpo é impedido de mover-se, as cargas devem satisfazer as condições de equilíbrio, e os deslocamentos, as de compatibilidade.
- A conservação de energia constata que $U_e = U_i$; $\quad \sum P\Delta = \sum u\delta$
- A equação do trabalho virtual é escrito como $1 \cdot \Delta = \sum u \cdot dL$

$$1 \cdot \theta = \sum u_\theta \cdot dL$$



Aplicação de carga unitária virtual
(a)

Aplicação de cargas reais
(b)

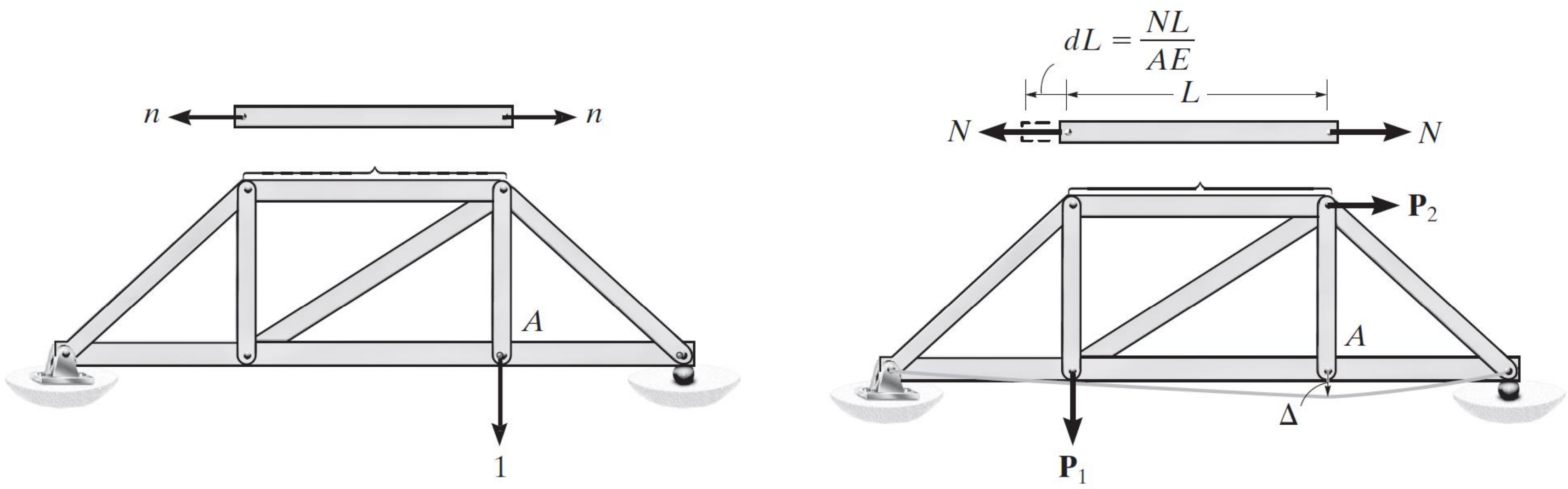
- Se considerarmos que o comportamento do material é linear elástico e que a tensão não ultrapassa o limite de proporcionalidade, podemos formular as expressões para o trabalho virtual.

Deformação causada por	Energia de deformação	Trabalho virtual interno
Carga axial N	$\int_0^L \frac{N^2}{2EA}\,dx$	$\int_0^L \frac{nN}{EA}\,dx$
Cisalhamento V	$\int_0^L \frac{f_s V^2}{2GA}\,dx$	$\int_0^L \frac{f_s vV}{GA}\,dx$
Momento fletor M	$\int_0^L \frac{M^2}{2EI}\,dx$	$\int_0^L \frac{mM}{EI}\,dx$
Momento de torsão T	$\int_0^L \frac{T^2}{2GJ}\,dx$	$\int_0^L \frac{tT}{GJ}\,dx$

Universidade Federal do ABC

3.1 Método da Carga Unitária - Treliças

- O trabalho virtual interno para um membro é $$\int_0^L \frac{nN}{AE}dx = \frac{nNL}{AE}$$



Aplicação de carga virtual unitária

(a)

Aplicação de cargas reais

(b)

- Equação do trabalho virtual

$$1 \cdot \Delta = \sum \frac{nNL}{AE}$$

1 = carga virtual externa

Δ = deslocamento da articulação

n = força virtual interna

N = força interna em um elemento da treliça

L = comprimento de um elemento

A = área da seção transversal

E = módulo de elasticidade de um elemento

- O comprimento de elementos de treliças pode mudar em razão de uma mudança de **temperatura**.

$$1 \cdot \Delta = \sum n \alpha \Delta T L$$

- Ocasionalmente **erros** na fabricação afetam o comprimento dos elementos de uma treliça.

$$1 \cdot \Delta = \sum n \Delta L$$

$$1 \cdot \Delta = \sum n \alpha \Delta T L$$

1 = carga virtual externa

Δ = deslocamente externo da articulação causado pela mudança de temperatura

n = força virtual interna em um elemento de treliça

α = coeficiente de expansão térmica

ΔT = mudança na temperatura

L = comprimento do elemento

3.2 Método da Carga Unitária - Vigas

- A equação do trabalho virtual é

$$1 \cdot \Delta = \int_0^L \frac{mM}{EI}\,dx$$

1 = carga virtual externa

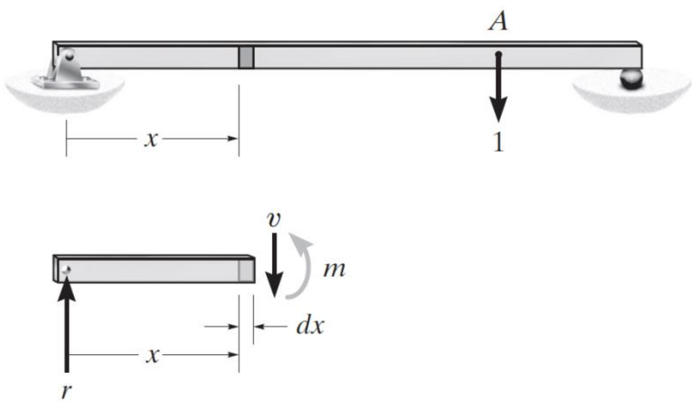
Δ = deslocamento provocado pelas cargas reais

m = momento virtual interno

M = momento interno na viga

E = módulo de elasticidade

I = momento de inércia

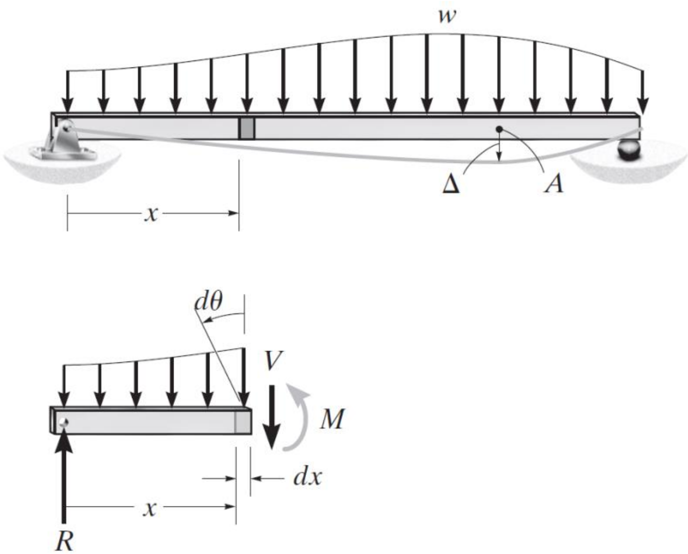


Carga virtuais

(a)

Métodos Energéticos e Análise Estrutural

- Se tivermos que determinar a inclinação da tangente em um ponto sobre a linha elástica da viga, é determinado como



Cargas reais

(b)

$$1 \cdot \theta = \int_0^L \frac{m_\theta M}{EI}\, dx$$