S T Q Q S S D ___/___/___

4) Seja o sistema
$$\begin{cases} x + 4y + z = 7 \\ 3x + y - z = 3 \\ -5x + 13y - 22z = 48 \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ -5 & 13 & -22 \end{bmatrix}_{3\times3} ; \quad b = \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \\ 48 \end{bmatrix}$$

Primeiramente confirmarmos que existe L e U únicos tais que $L.U = A$

$A_1 = [1] \longrightarrow \det A_1 = 1$

$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \det A_2 = -11$

Como det A_1 e det A_2 são diferentes de zero, temos que há L e U únicos

Sendo $A.X = b \Rightarrow L.U.x = b$

$$\underset{A}{\begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ -5 & 13 & -22 \end{bmatrix}} = \underset{L}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \ell_{21} & 1 & 0 \\ \ell_{31} & \ell_{32} & 1 \end{bmatrix}} . \underset{U}{\begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} \\ 0 & U_{22} & U_{23} \\ 0 & 0 & U_{33} \end{bmatrix}}$$

I) 1° Linha de U

$U_{11} = 1$

$U_{12} = 4$

$U_{13} = 1$

II) 1° coluna de L

$\ell_{21} . U_{11} = 3 \rightarrow \ell_{21} = 3$

$\ell_{31} . U_{11} = -5 \rightarrow \ell_{31} = -5$

III) 2° linha de U

$\overset{3}{\ell_{21}} . \overset{4}{U_{12}} + U_{22} = 1 \rightarrow U_{22} = -11$

$\overset{3}{\ell_{21}} . \overset{1}{U_{13}} + U_{23} = -1 \rightarrow U_{23} = -4$

IV) 2° coluna de L

$\ell_{31} . U_{12} + \ell_{32} . U_{22} = 13$

$\rightarrow -5.4 + \ell_{32} . -11 = 13 \rightarrow \ell_{32} = -3$

V) 3° Linha de U

$\ell_{31} . U_{13} + \ell_{32} . U_{23} + U_{33} = -22$

$\rightarrow U_{33} = -29$

spiral

S T Q Q S S D

___/___/___

$\therefore L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ -5 & -3 & 1 \end{bmatrix}$ e $U = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & -11 & -4 \\ 0 & 0 & -29 \end{bmatrix}$

Haja visto que $L.U.x = B$; primeiramente resolvemos o seguinte sistema $L.y = B$, de modo que $U.x = y$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ -5 & -3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \\ 48 \end{bmatrix}$$

Aplicando o método de multiplicação de matrizes, temos que:

$y_1 = 7$; $3\overset{7}{y_1} + y_2 = 3$; $-5\overset{7}{y_1} - 3\overset{-18}{y_2} + y_3 = 48$

$y_2 = -18$ $\qquad y_3 = 29$

Portanto, sendo $U x = y$

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & -11 & -4 \\ 0 & 0 & -29 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ -18 \\ 29 \end{bmatrix}$$

$x_3 = -1$; $-11x_2 - 4\overset{-1}{x_3} = -18$; $x_1 + 4\overset{2}{x_2} + \overset{-1}{x_3} = 7$

$x_2 = 2$ $\qquad x_1 = 0$

Então como solução, temos: $S = \{0; 2; -1\}$

spiral®