

Lista 2 - Introdução à Probabilidade e Estatística

Modelo Probabilístico

1 — Uma urna contém 3 bolas, uma vermelha, uma verde e uma azul.

- a) Considere o seguinte experimento. Retire uma bola da urna, devolva-a e retire uma segunda bola. Descreva o espaço amostral.
- b) Repita o exercício no caso em que a primeira bola retirada não é devolvida.

2 — Proponha o espaço amostral para os seguintes experimentos

- a) Uma moeda é lançada duas vezes.
- b) Um dado e uma moeda são lançados simultaneamente
- c) Uma caneca cai de uma mesa.
- d) Duas cartas são retiradas de um baralho de 52 cartas.
- e) Um pacote de seis cartas numeradas é embaralhado e os números são revelados um a um.
- f) Lançar uma moeda até sair cara.
- g) Que horas seu relógio mostra agora.

3 — Dois dados são lançados. Seja E o evento em que a soma dos dados é ímpar; seja F o evento em que pelo menos um dos números na face virada para cima seja 1; e seja G o evento em que a soma é 5. Descreva os eventos $E \cap F$, $E \cup F$, $F \cap G$, $E \cap F^c$, e $E \cap F \cap G$.

4 — Um dado é lançado sucessivas vezes até aparecer um 6 na face virada para cima. Neste instante o experimento finaliza. Qual é o espaço amostral deste experimento? Seja E_n o evento em que n lançamentos são necessários para completar o

experimento. Que evento representa $(\cup_{n=1}^{\infty} E_n)^c$?

5 — Um sistema está formado por 5 componentes, cada uma das quais está em funcionamento ou com falha. Considere o experimento que consiste em observar o estado de cada componente. Assuma que o resultado do experimento está dado por um vetor $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$, onde x_i é igual a 1 se a i -ésima componente está funcionando e igual a 0 caso contrário.

- a) Qual a cardinalidade do espaço amostral deste experimento.
- b) Assuma que o sistema estará em funcionamento caso as componentes 1 e 2 estejam funcionando, ou se as componentes 3 e 4 estão funcionando ou se as componentes 1, 3 e 5 estão funcionando. Seja W o evento em que o sistema está funcionando. Especifique os pontos amostrais de W .
- c) Seja A o evento em que as componentes 4 e 5 falham. Qual a cardinalidade deste evento?
- d) Escreva todos os pontos amostrais do evento $A \cap W$.

6 — O administrador de um hospital codifica os pacientes vítimas de arma de fogo que ingressam na unidade hospitalar segundo tenham ou não plano de saúde (código 1 se tem cobertura e código 0 se não tiver) e de acordo a sua condição, que é avaliada como boa (b), razoável (r) ou péssima (p). Considere o experimento que consiste em codificar estes pacientes.

- a) Descreva o espaço amostral deste experimento.
- b) Seja A o evento em que o paciente está em uma condição péssima. Especifique os pontos amostrais de A .

- c) Seja B o evento em que o paciente não tem um plano de saúde. Especifique os pontos amostrais de B .
- d) Apresente todos os pontos amostrais do evento $B^c \cup A$.

7 — Distribuição de objetos em cubículos. Considere a estrutura do espaço amostral decorrente de alocar k objetos (bolas, etc.) em n cubículos (caixas, etc.) enumerados de 1 a n . Esta classe de problemas aparece, por exemplo, na Física Estatística quando é estudada a distribuição de k partículas (prótons, elétrons, etc.) entre n estados (que podem ser níveis de energia). Na física estatística dizemos que:

- as partículas distinguíveis e que não estão sujeitas ao princípio de exclusão de Pauli (no máximo uma partícula por sítio) obedecem as estatísticas de Maxwell-Boltzmann
- as partículas distinguíveis e que estão sujeitas ao princípio de exclusão de Pauli (no máximo uma partícula por sítio) obedecem as estatísticas de Bose-Einstein.
- as partículas distinguíveis e que estão sujeitas ao princípio de exclusão, dizemos que obedecem as estatísticas de Fermi-Dirac.

Descreva o espaço amostral para estes modelos de alocação de partículas.

8 — Considere o experimento aleatório que consiste em observar os primeiros n movimentos de uma partícula que se desloca aleatoriamente no conjunto $\mathbb{Z} = \{\dots, -1, 0, 1, \dots\}$ dos números inteiros. A partícula começa sua trajetória na origem no instante 0 e a cada instante de tempo $1, 2, 3, \dots$ a partícula se move aleatoriamente para a direita ou para a esquerda. Descreva o espaço amostral deste experimento.

9 — Descreva o espaço amostral quando o experimento consiste em observar a trajetória completa do passeio aleatório. Isto é, se observarmos seus movimentos em todos instante de tempo $n, n \in \mathbb{N}$.

10 — Considere uma urna que contém M bolas enumeradas $1, 2, \dots, M$ onde M_1 bolas tem a cor b_1, \dots, M_r tem a cor b_r , e $M_1 + \dots + M_r = M$. Suponha que retiramos uma amostra de tamanho $n < M$ sem substituição. Descreva o espaço amostral do experimento.

11 — Mostre as seguintes relações

- a) $E \cap F \subset E \subset E \cup F$.
- b) Se $E \subset F$ então $F^c \subset E^c$.
- c) $F = (F \cap E) \cup F \cap E^c$, e $E \cup F = E \cup (E^c \cap F)$.
- d) Para qualquer sequência de eventos E_1, E_2, \dots defina uma sequência de eventos F_1, F_2, \dots disjuntos dois a dois tais que para cada $n \geq 1$,

$$\bigcup_{i=1}^n E_i = \bigcup_{i=1}^n F_i.$$

12 — Sejam E, F e G três eventos. Encontre uma expressão para os seguintes eventos

- a) Apenas o evento E ocorre.
- b) Os eventos E e G ocorrem mas não o evento F .
- c) Pelo menos um dos eventos ocorre.
- d) Pelo menos dois dos eventos ocorrem.
- e) Os três eventos ocorrem.
- f) Nenhum dos eventos ocorre.
- g) No máximo, um dos eventos ocorre.
- h) No máximo, dois dos eventos ocorrem.
- i) Exatamente dois dos eventos ocorrem.
- j) No máximo, três dos eventos ocorrem.

13 — Suponha que um experimento é realizado n vezes. Para qualquer evento E do espaço amostral seja $n(E)$ o número de vezes que o evento E ocorre, e defina $f(E) = n(E)/n$. Mostre que $f(\cdot)$ satisfaz os axiomas de uma probabilidade.

14 — Se $\mathbb{P}[E] = 0,9$ e $\mathbb{P}[F] = 0,8$ mostre que $\mathbb{P}[E \cap F] \geq 0,7$. Em geral, mostre a desigualdade de Bonferroni,

$$\mathbb{P}[E \cap F] \geq \mathbb{P}[E] + \mathbb{P}[F] - 1$$

15 — Mostre que a probabilidade de que exatamente um dos eventos E ou F ocorra é igual a $\mathbb{P}[E] + \mathbb{P}[F] - 2\mathbb{P}[E \cap F]$.

16 — Prove que $\mathbb{P}[E \cap F^c] = \mathbb{P}[E] - \mathbb{P}[E \cap F]$.

17 — Mostre que $A \subset B$ se e somente se $1_A \leq 1_B$; e que $A \cap B = \emptyset$ se, e somente se, $1_A 1_B = 0$.

18 — Mostre que se \mathbb{P} e \mathbb{Q} são duas probabilidades então $\alpha\mathbb{P} + \beta\mathbb{Q}$ é uma probabilidade, onde $\alpha, \beta \geq 0$ e $\alpha + \beta = 1$. Forneça um exemplo concreto de uma mistura deste tipo.

19 — Se \mathbb{P} é uma probabilidade, que axiomas satisfazem $\mathbb{P}/2$ e \mathbb{P}^2 .

20 — Seja $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de eventos.

a) Mostre que se $\mathbb{P}[A_n] = 1, \forall n \in \mathbb{N}$ então $\mathbb{P}[\cap_{n \in \mathbb{N}} A_n] = 1$.

b) Mostre que se $\mathbb{P}[A_n] = 0, \forall n \in \mathbb{N}$ então $\mathbb{P}[\cup_{n \in \mathbb{N}} A_n] = 0$.

* **21** — Mostre que $\mathbb{P}[E \cup F \cup G] = \mathbb{P}[E] + \mathbb{P}[F] + \mathbb{P}[G] - \mathbb{P}[E^c \cap F \cap G] - \mathbb{P}[E \cap F^c \cap G] - \mathbb{P}[E \cap F \cap G^c] - 2\mathbb{P}[E \cap F \cap G]$.

Respostas dos Exercícios

1 Se denotarmos uma bola vermelha por Va , uma verde por Ve e uma azul por A teremos que o espaço amostral será dado por:

a) $\Omega = \{(Va, Va), (Va, Ve), (Va, A), (Ve, Va), (Ve, Ve), (Ve, A), (A, Va), (A, Ve), (A, A)\}$

b) $\Omega = \{(Va, Ve), (Va, A), (Ve, Va), (Ve, A), (A, Va), (A, Ve)\}$

2 a) $\Omega = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$, onde 0 representa coroa e 1 representa cara.

b) $\Omega = \{(i, a) : i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, a \in \{0, 1\}\}$.

c) Há várias opções dependendo de qual seja o interesse de quem esteja observando o experimento.

i) $\Omega = \{S, N\}$ onde S representa que a caneca quebrou e N representa que a caneca não quebrou.

ii) $\Omega = \{1, 2, \dots\}$ se o interesse for em registrar o número de partes da caneca espalhados no chão após a queda.

iii) $\Omega = \{A, B, D, E\}$ se o interesse for em saber se após a queda a caneca ficou virada para Acima ou para Baixo; ou se a orelha da caneca ficou para Direita ou para Esquerda.

d) Se C denota o conjunto de cartas, então $\Omega = \{A : A \subset C \text{ e } |A| = 2\}$. Em outras palavras, Ω consiste de todos os subconjuntos de duas cartas de um baralho de 52 cartas.

e) O espaço amostral consiste de todas as permutações do conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

f) Se registrarmos o número de lançamentos necessários até sair cara, $\Omega = \{1, 2, \dots\}$.

g) Se o relógio for um digital podemos tomar como espaço amostral $\Omega = \{(h, m, s) : h \in \Omega_h, m \in \Omega_m, s \in \Omega_s\}$, onde $\Omega_h = \{1, 2, \dots, 24\}$, $\Omega_m = \{0, 1, \dots, 59\}$ e $\Omega_s = \{0, 1, \dots, 59\}$.

3 O espaço amostral corresponde a este experimento é $\Omega = \{(1, 1), (1, 2), \dots, (6, 6)\} = \{(\omega_1, \omega_2) : \omega_i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, i = 1, 2\}$. Desta forma temos que

i) $E \cap F = \{(1, 2), (1, 4), (1, 6), (2, 1), (4, 1), (6, 1)\}$.

ii) $E \cup F$ representa o evento em que a soma é ímpar ou pelo menos um dos dois números sorteados é o número 1.

iii) $F \cap G = \{(1, 4), (4, 1)\}$.

iv) $E \cap F^c = \{(2, 3), (2, 5), (3, 2), (3, 4), (3, 6), (4, 3), (4, 5), (5, 2), (5, 4), (5, 6), (6, 3), (6, 5)\}$.

v) $E \cap F \cap G = F \cap G$.

4 Uma escolha de espaço amostral é dada por $\Omega = \{(n, x_1, \dots, x_{n-1}), n \geq 2, x_i \neq 6, i = 1, \dots, n-1\} \cup \{1\}$ onde (n, x_1, \dots, x_{n-1}) representa a situação em que o número 6 foi sorteado pela primeira vez no n -ésimo lançamento e x_i representa o resultado do i -ésimo lançamento. O evento $\{1\}$ representa o evento no qual o número 6 é sorteado no primeiro lançamento.

O evento $(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n)^c$ representa o evento em que o número 6 nunca é sorteado.

5 a) $2^5 = 32$.

b) $W = \{(1, 1, 1, 1, 1), (1, 1, 1, 1, 0), (1, 1, 1, 0, 1), (1, 1, 0, 1, 1), (1, 1, 1, 0, 0), (1, 1, 0, 1, 0), (1, 1, 0, 0, 1), (1, 1, 0, 0, 0), (1, 0, 1, 1, 1), (0, 1, 1, 1, 1), (1, 0, 1, 1, 0), (0, 1, 1, 1, 0), (0, 0, 1, 1, 1), (0, 0, 1, 1, 0), (1, 0, 1, 0, 1)\}$.

c) 8.

d) $A \cap W = \{(1, 1, 1, 0, 0), (1, 1, 0, 0, 0)\}$.

6 a) $\Omega = \{(1, b), (0, b), (1, r), (0, r), (1, p), (0, p)\}$.

b) $A = \{(1, p), (0, p)\}$.

c) $B = \{(0, b), (0, r), (0, p)\}$.

d) $B^c \cup A = \{(1, p), (0, p), (1, b), (1, r)\}$.

7 *Modelo de Maxwell-Boltzman*. Neste modelo de alocação de partículas em cubículos as partículas são distinguíveis e um cubículo pode comportar mais de uma partícula. Nestas condições o espaço amostral para este experimento é dado por $\Omega = \{(\omega_1, \dots, \omega_k) : 1 \leq \omega_i \leq n \forall i\}$, onde ω_i é o número do cubículo onde a i -ésima partícula é alocada. Note que $|\Omega| = n^k$.

Modelo de Fermi-Dirac. Neste modelo as partículas são consideradas indistinguíveis e ocupação múltipla de cubículos não é permitida. Neste caso, $\Omega = \{(\omega_1, \dots, \omega_n) : \omega_i = 0 \text{ ou } 1 \forall i \text{ e } \sum_{j=1}^n \omega_j = k\}$. Note que $|\Omega| = \binom{n}{k}$.

Modelo de Bose-Einstein. Neste modelo as partículas são indistinguíveis e ocupação múltipla dos cubículos é permitida. Neste caso, $\Omega = \{(\omega_1, \dots, \omega_n) : \omega_j \geq 0 \text{ e } \sum_{j=1}^n \omega_j = k\}$, onde ω_j representa o número de partículas presentes no cubículo j . Note que $|\Omega| = \binom{n+k-1}{k-1}$.

8 $\Omega = \{(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) : \omega_i \in \{-1, 1\}, 1 \leq i \leq n\}$ onde $\omega_i = -1$ representa um passo à esquerda no i -ésimo movimento e $\omega_i = 1$ representa um passo à direita no i -ésimo movimento.

9 $\Omega = \{-1, 1\}^{\mathbb{N}} = \{(\omega_i)_{i \in \mathbb{N}} : \omega_i = -1 \text{ ou } 1, i \in \mathbb{N}\}$.

10 $\Omega = \{\omega : \omega = (a_1, \dots, a_n) : a_k \neq a_l \text{ se } k \neq l, a_i = 1, 2, \dots, M\}$. Note que $|\Omega| = (M)_m$.

11 d) $F_1 = E_1$ e $F_i = E_i \cap (\cap_{j=1}^{i-1} E_j^c)$ para $i \geq 2$.

12 a) $E \cap F^c \cap G^c$.

b) $E \cap G \cap F^c$.

c) $E \cup F \cup G$.

d) $(E \cap F) \cup (E \cap G) \cup (F \cap G)$.

e) $E \cap F \cap G$.

f) $E^c \cap F^c \cap G^c$.

g) $(E^c \cap F^c \cap G^c) \cup (E \cap F^c \cap G^c) \cup (E^c \cap F \cap G^c) \cup (E^c \cap F^c \cap G)$

h) $(E \cap F \cap G)^c$.

i) $(E \cap F \cap G^c) \cup (E \cap F^c \cap G) \cup (E^c \cap F \cap G)$.

j) Ω .

13 $f(\cdot)$ satisfaz as seguintes propriedades:

i) $f(E) \geq 0$ para qualquer evento E já que $n(E) \geq 0$.

ii) Se $A \cap B = \emptyset$ então $f(A \cup B) = \frac{n(A \cup B)}{n} = \frac{n(A) + n(B)}{n} = f(A) + f(B)$.

iii) $f(\Omega) = \frac{n(\Omega)}{n} = \frac{n}{n} = 1$.

14 Sendo que $1 \geq \mathbb{P}[E \cup F] = \mathbb{P}[E] + \mathbb{P}[F] - \mathbb{P}[E \cap F]$ concluímos que $\mathbb{P}[E \cap F] \geq \mathbb{P}[E] + \mathbb{P}[F] - 1$.

15 O evento $E \Delta F = (E \setminus F) \cup (F \setminus E)$ representa o evento em que só um dos eventos E ou F ocorre. Logo, $\mathbb{P}[E \Delta F] = \mathbb{P}[E \setminus F] + \mathbb{P}[F \setminus E] = \mathbb{P}[E] - \mathbb{P}[E \cap F] + \mathbb{P}[F] - \mathbb{P}[E \cap F]$.

16 Sendo que $E \cap F^c = E \setminus (E \cap F)$ e que $E \cap F \subset E$ concluímos que, $\mathbb{P}[E \cap F^c] = \mathbb{P}[E] - \mathbb{P}[E \cap F]$.

17 Assuma que $A \subset B$. Seja $\omega \in \Omega$. Tem-se três casos.

i) Se $\omega \in A$ então $\omega \in B$ e neste caso tem-se que $1_A(\omega) = 1_B(\omega) = 1$.

ii) Se $\omega \in B \setminus A$ então $1_A(\omega) = 0 < 1 = 1_B(\omega)$.

iii) Se $\omega \in B^c$ então $1_A(\omega) = 1_B(\omega) = 0$.

Concluimos que $1_A \leq 1_B$.

Agora assumamos que $1_A \leq 1_B$. Seja $\omega \in A$. Logo, $1 = 1_A(\omega) \leq 1_B(\omega) \leq 1$. Portanto $1_B(\omega) = 1$; ou, de forma equivalente, $\omega \in B$.

18 Começamos notando que para qualquer evento E , $(a\mathbb{P} + b\mathbb{Q})(E) = a\mathbb{P}(E) + b\mathbb{Q}(E)$. Logo,

i) Do fato que $\mathbb{P}(E), \mathbb{Q}(E) \geq 0$ para qualquer evento E segue-se que $(a\mathbb{P} + b\mathbb{Q})(E) \geq 0$.

ii) Se E, F são dois eventos disjuntos temos que $(a\mathbb{P} + b\mathbb{Q})(E \cup F) = a\mathbb{P}(E \cup F) + b\mathbb{Q}(E \cup F) =$

$a(\mathbb{P}(E) + \mathbb{P}(F)) + b(\mathbb{Q}(E) + \mathbb{Q}(F)) = (a\mathbb{P}(E) + b\mathbb{Q}(E)) + (a\mathbb{P}(F) + b\mathbb{Q}(F))$.

iii) $(a\mathbb{P} + b\mathbb{Q})(\Omega) = a\mathbb{P}(\Omega) + b\mathbb{Q}(\Omega) = a.1 + b.1 = 1$.

19 $\mathbb{P}/2$ satisfaz os axiomas i e ii já que

i) $\mathbb{P}/2(E) = \frac{\mathbb{P}(E)}{2} \geq 0$ para qualquer evento E e,

ii) se E, F são dois eventos disjuntos então $\mathbb{P}/2(E \cup F) = \mathbb{P}(E \cup F)/2 = \frac{\mathbb{P}(E) + \mathbb{P}(F)}{2} = \mathbb{P}/2(E) + \mathbb{P}/2(F)$.

\mathbb{P}^2 satisfaz os axiomas i e iii já que

i) $\mathbb{P}^2(E) \geq 0$ para qualquer evento E e

iii) $\mathbb{P}^2(\Omega) = 1^2 = 1$.

20 Assuma que $\mathbb{P}(A_n) = 0$ para qualquer n . Sendo que $0 \leq \mathbb{P}(\cup_{n \in \mathbb{N}} A_n) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n) = 0$ concluímos

que $\mathbb{P}(\cup_{n \in \mathbb{N}} A_n) = 0$.

Para concluir o exercício note que $\mathbb{P}(\cap_{n \in \mathbb{N}} A_n) = 1 - \mathbb{P}((\cap_{n \in \mathbb{N}} A_n)^c) = 1 - \mathbb{P}(\cup_{n \in \mathbb{N}} A_n^c)$ e que se $\mathbb{P}(A_n) = 1$ para todo n então $\mathbb{P}(A_n^c) = 0$ para todo n .

21 Verifique que $E \cup F \cup G = A \cup B \cup C$ com A, B, C disjuntos dois a dois onde $A = E \setminus ((E \cap F^c \cap G) \cup (E \cap F \cap G))$, $B = F \setminus ((E \cap F \cap G^c) \cup (E \cap F \cap G))$ e $C = G \setminus (G \cap F \cap E^c)$. Logo aplique as propriedades de uma probabilidade.

Outra solução:

Pelo Princípio de Inclusão exclusão:

$\mathbb{P}(E \cup F \cup G) = \mathbb{P}(E) + \mathbb{P}(F) + \mathbb{P}(G) - \mathbb{P}(E \cap F) - \mathbb{P}(E \cap G) - \mathbb{P}(F \cap G) + \mathbb{P}(E \cap F \cap G)$

Agora use que

$$E \cap F = (E \cap F \cap G^c) \cup (E \cap F \cap G)$$

$$E \cap G = (E \cap G \cap F^c) \cup (E \cap G \cap F)$$

$$F \cap G = (F \cap G \cap E^c) \cup (F \cap G \cap E).$$

e assim

$$\mathbb{P}(E \cap F) = \mathbb{P}(E \cap F \cap G^c) + \mathbb{P}(E \cap F \cap G)$$

$$\mathbb{P}(E \cap G) = \mathbb{P}(E \cap G \cap F^c) + \mathbb{P}(E \cap G \cap F)$$

$$\mathbb{P}(F \cap G) = \mathbb{P}(F \cap G \cap E^c) + \mathbb{P}(F \cap G \cap E).$$

Somando

$$\mathbb{P}(E \cap F) + \mathbb{P}(E \cap G) + \mathbb{P}(F \cap G) = \mathbb{P}(E \cap F \cap G^c) + \mathbb{P}(E \cap F \cap F^c) + \mathbb{P}(F \cap G \cap E^c) + 3\mathbb{P}(E \cap F \cap G),$$

Agora substitua na fórmula de inclusão exclusão.