

Fenômenos Eletromagnéticos

J. Javier S. Acuña

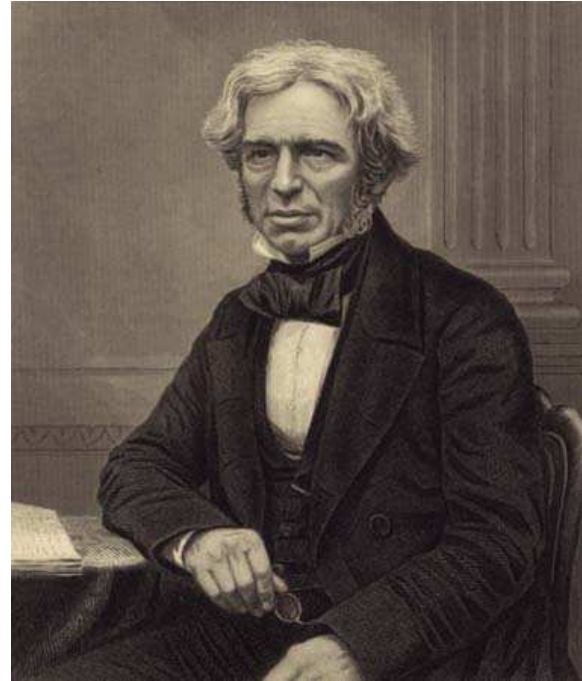
Aula 05: 07 de Agosto de 2017

Magnetismo.

.....	2
A lei de Faraday da indução.	2
Lei de Lenz	9
Indutância	10
Equações de Maxwell. Forma empírica.	14
Generalização da lei de Ampère.	19
Equações de Maxwell no vácuo e na matéria.	22

1 Magnetismo.

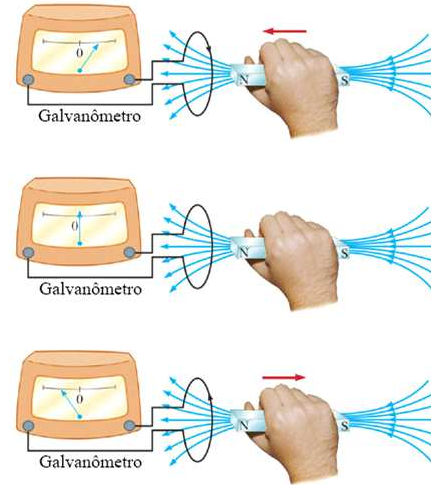
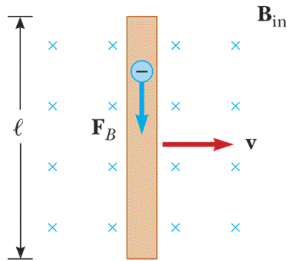
Michael Faraday (Newington, Surrey, 22 de setembro de 1791 — Hampton Court, 25 de agosto de 1867) foi um físico e químico inglês. É considerado um dos cientistas mais influentes de todos os tempos, e sem dúvida, o melhor experimentalista de física da história. As suas contribuições mais importantes e os seus trabalhos mais conhecidos tratam dos fenômenos da eletricidade, da eletroquímica e do magnetismo, mas Faraday fez também diversas outras contribuições muito importantes na física e na química.



1.1 A lei de Faraday da indução.

- Michael Faraday (1791-1867).
 - Invenção do Motor Elétrico.
 - Invenção do Gerador de Eletricidade.
 - Invenção do Transformador de Eletricidade.

- O movimento de um condutor em um campo magnético \mathbf{B} produz movimento de cargas elétricas no condutor (corrente elétrica), assim podemos pensar que o movimento de um ímã induz corrente elétrica no condutor. Chegamos à conclusão que *o movimento relativo entre ímã e condutor induz o aparecimento de uma corrente elétrica no condutor*.



Assim, como mostra a figura, uma corrente elétrica pode ser produzida por um campo magnético B que varia no tempo.

- O *fluxo magnético* é definido como

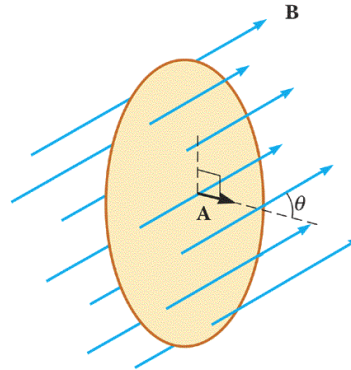
$$\phi_B = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} \quad (1)$$

Assim, se o vetor campo magnético faz um ângulo θ com respeito ao vetor normal à área em uma superfície, podemos analisar a projeção dele no vetor área, da forma

$$\phi_B = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = \int B dA \cos \theta \quad (2)$$

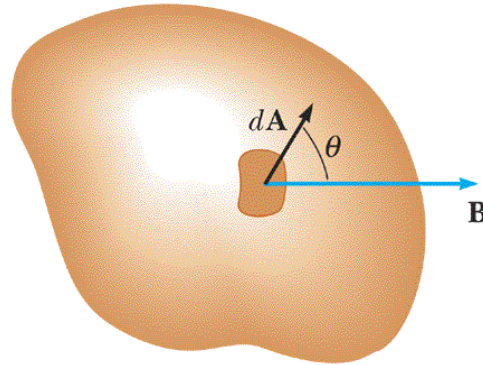
se o campo magnético for constante

$$\phi_B = B \cos \theta \int dA = BA \cos \theta$$



Vejamos que o ϕ é proporcional ao número de linhas de campo magnético que atravessa uma área A . A unidade do fluxo magnético no SI é o *weber* $[Wb]$, sendo $1Wb = 1Tm^2$.

- Uma corrente elétrica gerada por indução magnética chama-se *Força Eletromotriz*, denotada por "fem", e com símbolo ε . Uma fem ε é induzida em um circuito quando ao fluxo magnético através da superfície é limitada pelo circuito varia com o tempo.



- Podemos expressar a equação acima pelo diferencial, assim, a fem induzida em um circuito é igual à taxa temporal de variação do fluxo magnético através do circuito.

$$\varepsilon = -N \frac{d\phi_B}{dt} \quad (3)$$

conhecida como *lei de Faraday da Indução*, e dá a fem quando o campo magnético varia no tempo. Aqui ε é a fem induzida, ϕ_B o fluxo magnético e N o número de espiras idênticas numa solenoite (bobina) condutor.

- Caso diferente é quando uma fem é induzida em um condutor em movimento por um campo magnético, chamada *fem de movimento*.
- consideremos um condutor retilíneo de comprimento l movendo-se com velocidade constante através de um campo magnético uniforme direcionado, por simplicidade, perpendicular à velocidade do condutor.

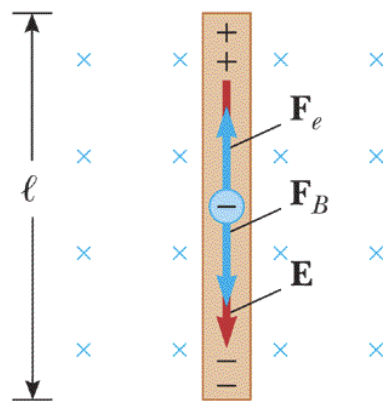
Os elétrons no condutor sofrem uma força $\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$, e dado que estes vetores são perpendiculares, a magnitude da força será $F_B = qvB$.

O movimento das cargas implicará que cargas positivas se acumulem numa parte do condutor quanto cargas negativas numa outra parte do condutor, que no caso de uma barra será nos extremos. Como resultado dessa separação, um campo elétrico será gerado ao interior do condutor.

No equilíbrio, as forças magnética $F_B = qvB$ se equilibrará com a força elétrica. Por tanto

$$\sum F = 0 \quad \Rightarrow \quad F_B = F_E \quad \Rightarrow \quad qvB = qE \quad \Rightarrow \quad E = vB$$

e a diferença de potencial será mantida porquanto o condutor se movimenta com velocidade v . Desde que $E = V/l$ (ou $\Delta V/l$), resulta

$$V = vlB \quad (4)$$


The diagram shows a vertical rod of length l moving to the right with velocity v . The rod is in a uniform magnetic field B directed into the page, represented by 'x' marks. The rod is connected to a circuit with a battery (positive terminal at the top, negative at the bottom). The induced electric field E points downwards, and the magnetic force F_B points upwards, balancing it. The induced EMF is $V = vlB$.

Note que se o movimento for invertido a polaridade de V também é invertida.

- Imaginemos o caso de uma barra condutora que é parte de um circuito fechado que tem um resistor, por exemplo, uma barra condutora de comprimento l movendo-se ao longo de dois trilhos paralelos. O movimento do condutor implicará em uma variação da área, que a sua vez implicará uma variação de fluxo magnético, e por tanto, uma fem ε induzida. Neste caso $\phi_B = Blx$, e por tanto

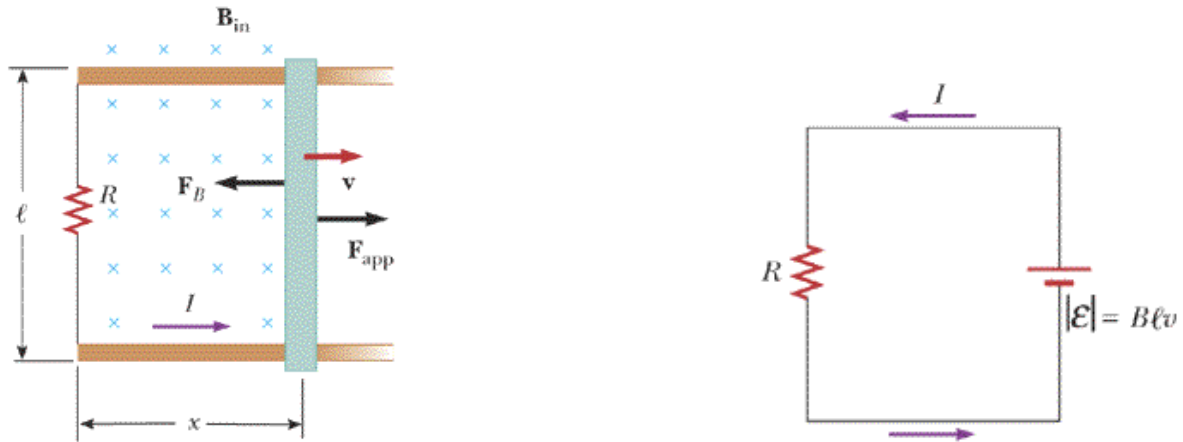
$$\varepsilon = -\frac{d\phi_B}{dt} = -\frac{d(Blx)}{dt} = -Bl\frac{dx}{dt} \quad \Rightarrow \quad |\varepsilon| = Blv \quad (5)$$

e assim a magnitude da corrente induzida no circuito será

$$I = \frac{|\mathcal{E}|}{R} = \frac{Blv}{R} \quad (6)$$

A medida o condutor se move pelo campo magnético uniforme \mathbf{B} , ele experimenta uma força magnética \mathbf{F}_B de magnitude IlB , onde I é a corrente induzida pelo movimento. A potencia desta força pode se relacionar pela equação $P = Fv$. Assim

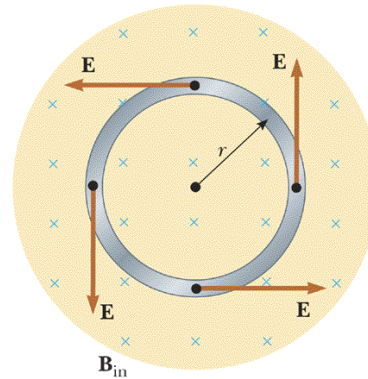
$$P = Fv = IlBv = \left(\frac{Blv}{R}\right) lBv = \left(\frac{Blv}{R}\right)^2 R = I^2 R \quad (7)$$



- Podemos ver a lei da indução desde outro ponto de vista, podemos interpretar que um fluxo magnético variável em uma região do espaço implicará um a existência de uma campo elétrico nessa região, o que é válido mesmo quando não há cargas elétricas.

Vejamo o caso em que o campo magnético varia como função do tempo, e no caso que temos um espira circular uniforme de raio r . A $\mathcal{E} = -d\phi/dt$ é induzida na espira, haverá uma corrente induzida e um campo E induzido na

espira, e que deve ser tangente à mesma como mostra a figura.



O trabalho realizado pelo campo E para uma carga dar uma volta na espira é $W = q\varepsilon$.

$$W = \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = qE(2\pi r) \quad (8)$$

por tanto

$$q\varepsilon = qE(2\pi r) \quad \Rightarrow \quad E = \frac{\varepsilon}{2\pi r} \quad (9)$$

onde temos que

$$\varepsilon = -\frac{d\phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt}(BA) = -\frac{d}{dt}(B\pi r^2) = -\pi r^2 \frac{dB}{dt} \quad (10)$$

assim o campo elétrico induzido pode ser escrito como

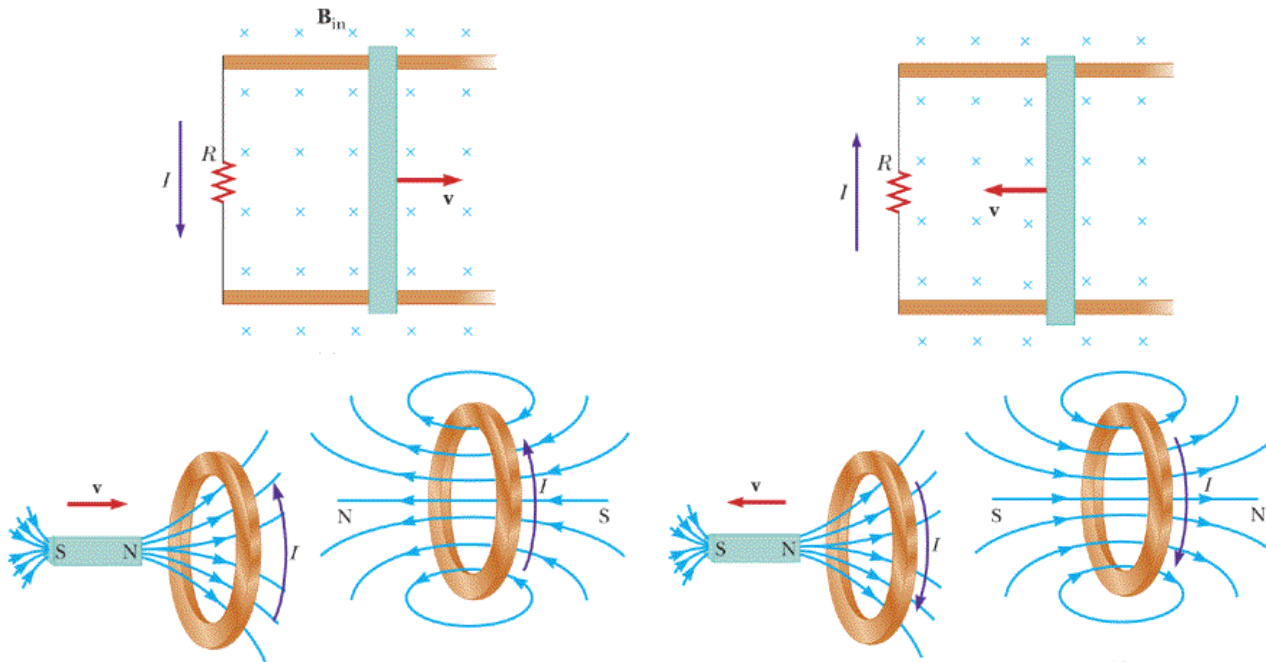
$$E = \frac{\varepsilon}{2\pi r} = -\frac{r}{2} \frac{dB}{dt} \quad (11)$$

- Observe que neste caso temos utilizado a forma particular da lei de Faraday, a forma geral é

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = -\frac{d\phi_B}{dt} \quad (12)$$

1.2 Lei de Lenz

- Experimentalmente encontramos que a polaridade da fem induzida em uma espira é tal que produz uma corrente cujo campo magnético se opõe à variação do fluxo magnético através da espira. Isto é, a corrente induzida está em uma direção tal que o campo magnético induzido tenta manter o fluxo original através da espira.
- A lei de Lenz diz que *a corrente induzida em uma espira tem sentido de tal forma que cria um campo magnético oposto à variação no fluxo magnético na área envolvida pela espira. Ou seja, a corrente induzida tende a não alterar o fluxo magnético que passa pela espira.*

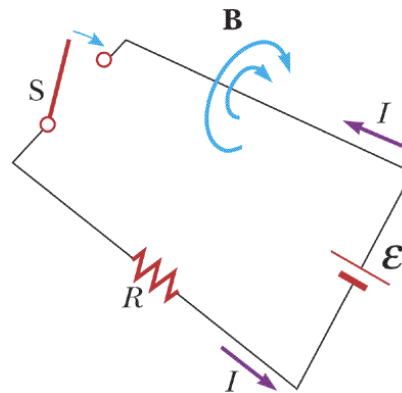


1.3 Indutância

- Por exemplo, ao ligarmos um circuito a corrente que fornecemos não alcança o máximo estável instantaneamente, senão que demora algum tempo muito curto, nesse momento haverá uma variação da corrente do mesmo, um dI/dt , Faraday descobriu que esta variação da corrente gerará um campo magnético variável no tempo ao redor do fio condutor. O campo magnético variável implicará um fluxo magnético variável dentro da espira. Da lei de Lenz teremos uma fem auto-induzida com sinal contrário da fem do circuito.
- Note que essa fem auto-induzida é proporcional à variação temporal da corrente. Portanto podemos definir uma constante de proporcionalidade L tal que para uma bobina de N espiras temos

$$\varepsilon_L = -N \frac{d\phi_B}{dt} = -L \frac{dI}{dt} \quad (13)$$

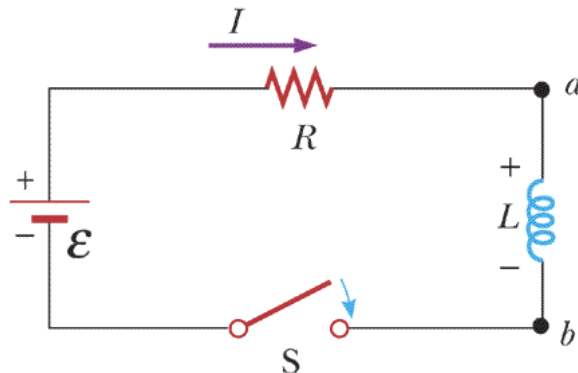
onde L é uma característica da bobina e que depende da sua geometria, conhecida como *indutância* da bobina. Podemos tomar L como a "resistência" da bobina à variação da corrente. A unidade da indutância no SI é o *henry* (H), onde $1H = 1Vs/A$.



- Integrando a equação 13 acima para um bobina de N espiras, resulta

$$L = \frac{N\phi_B}{I} \quad (14)$$

- Vejamos o caso do circuito RL que segue a figura a continuação



a regra de Kirchhoff resulta

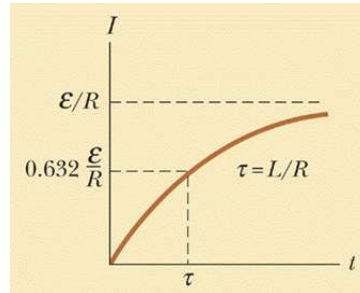
$$\varepsilon - IR - L \frac{dI}{dt} = 0 \quad (15)$$

A solução matemática a esta equação representa a corrente do circuito em função do tempo.

$$I = \frac{\varepsilon}{R} (1 - e^{-tR/L}) = \frac{\varepsilon}{R} (1 - e^{-t/\tau}) \quad (16)$$

onde a constante τ é a constante temporal do circuito RL

$$\tau = \frac{L}{R} \quad (17)$$

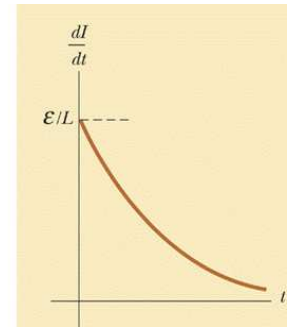


$$I(t) = \frac{\mathcal{E}}{R} (1 - e^{-t/\tau})$$

$$\begin{cases} t=0 & \Rightarrow I_0 = 0 \\ t \rightarrow \infty & \Rightarrow I = \frac{\mathcal{E}}{R} \end{cases}$$

$$\tau = \frac{L}{R} \Rightarrow \frac{dI}{dt} = \frac{\mathcal{E}}{L} e^{-t/\tau}$$

$$\begin{cases} t=0 & \Rightarrow \frac{dI}{dt} = \frac{\mathcal{E}}{L} \\ t \rightarrow \infty & \Rightarrow \frac{dI}{dt} = 0 \end{cases}$$



- Reescrevendo a eq.(15) temos

$$\mathcal{E}I = RI^2 + LI \frac{dI}{dt} \quad (18)$$

aqui $\mathcal{E}I$ é a potencia fornecida pela fonte de fem, RI^2 é a potencia dissipada pelo resistor, por tanto podemos ver $LI \frac{dI}{dt}$ como a potencia relativa à energia acumulada pelo indutor. Se U_B é a *energia armazenada no indutor*, produto do campo magnético, podemos escrever

$$\frac{dU_B}{dt} = LI \frac{dI}{dt} \quad \Rightarrow \quad U_B = \int LI \frac{dI}{dt} dt = \int_0^I LI dI$$

e assim

$$U_B = \frac{1}{2}LI^2 \quad (19)$$

A *densidade de energia do campo magnético* por unidade de volume $u_B = U_B/V$ em um solenoide será

$$u_B = \frac{B^2}{2\mu_0} \quad (20)$$

1.4 Equações de Maxwell. Forma empírica.

- Experimentalmente se encontram as seguintes leis que especificam o divergente e o rotacional dos campos elétricos e magnéticos.

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad , \quad \epsilon_0 \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = q \quad (\text{Lei de Gauss}) \quad (21)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad , \quad \oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (22)$$

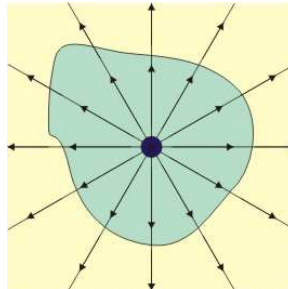
$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad , \quad \oint \mathbf{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \quad (\text{Lei de Faraday}) \quad (23)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} \quad , \quad \oint \mathbf{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I \quad (\text{Lei de Ampere}) \quad (24)$$

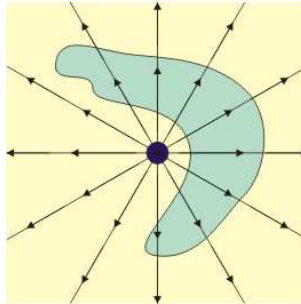
- O fluxo de campo elétrico, $\Phi_E = \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$, é uma grandeza escalar e pode ser considerado como o número de linhas de campo \mathbf{E} que atravessam a superfície. Se essa for fechada

$$\Phi_E = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$$

Assim, a lei de Gauss diz que o fluxo de campo elétrico que atravessa uma superfície fechada é proporcional à carga neta contida no interior dela.



Na eq.(22) o fluxo de campo magnético é sempre anula-se, o que implica a "não existência" do monopolo magnético. Isto pode se mais facilmente entendido pensando que ao interior da superfície fechada (um volume) sempre tem um mesmo número de linhas que entram quanto as que saem



ou seja, não existe um superfície fechada que possa envolver uma "mono-carga magnética".

A lei de indução de Faraday, eq.(23), se entende como a produção de corrente elétrica em um circuito colocado sob efeito de um campo magnético variável (ou por um circuito em movimento em um campo magnético constante). A superfície S é qualquer superfície cuja borda seja o circuito (que está sofrendo indução), onde $d\vec{l}$ é um elemento infinitesimal do circuito. *A corrente elétrica induzida em um circuito fechado é proporcional ao número de linhas de campo magnético que atravessa a área envolvida do circuito, por unidade de tempo.*

A lei de Ampère, eq.(24), permite calcular o campo magnético \mathbf{B} a partir de uma distribuição de densidade de corrente elétrica (ou de uma corrente elétrica, ambas estacionárias, ou seja, independentes do tempo). Ampère diz que a circulação de \mathbf{B} ao longo de uma curva C é proporcional à intensidade de corrente I que atravessa a curva (também denominada circuito amperiano).

- Essas equações representam o estado da teoria eletromagnética desde que Maxwell começou seu trabalho, há mais de um século. Observe que essas equações apenas representam uma formulação compacta dos resultados obtidos experimentalmente pelos físicos daquela época.



Johann Carl Friedrich Gauss.
Alemão (1777 - 1855)

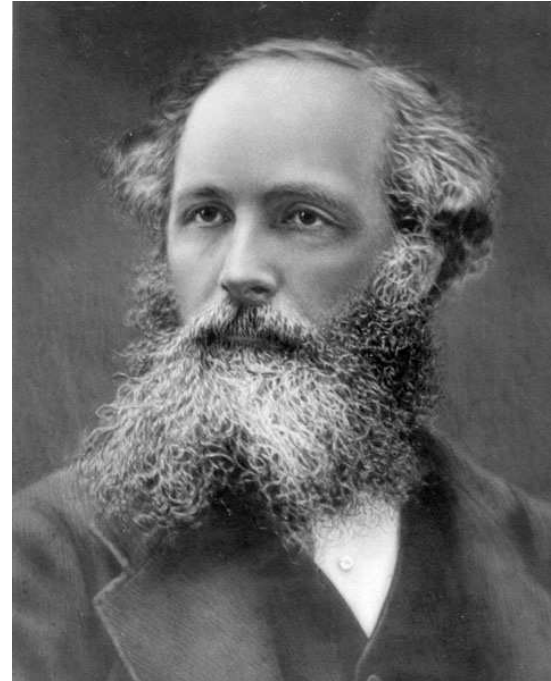


Michael Faraday.
Britânico (1791 - 1867)



André-Marie Ampère.
Francês (1775 - 1836)

James Clerk Maxwell (1831 - 1879). Físico e matemático britânico considerado por muitos o mais importante físico do séc. XIX, o seu trabalho em eletromagnetismo foi a base da relatividade restrita de Einstein e o seu trabalho em teoria cinética de gases fundamental ao desenvolvimento posterior da mecânica quântica.



- Porém ocorre uma incoerência nessas fórmulas e a lei de Ampère deverá ser corrigida. Isto é porque há uma regra no formalismo matemático em que o divergente do rotacional é sempre nulo.

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0 \quad \forall \mathbf{A}$$

Vejamos que se aplicamos o divergente à eq.(23) resulta

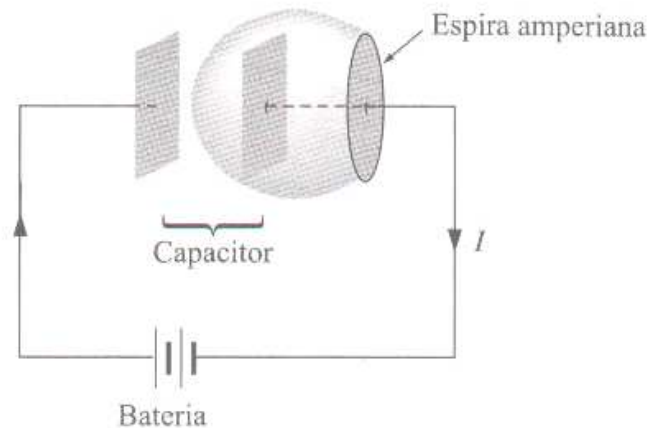
$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla \cdot \left(-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{B}) = 0$$

o lado esquerdo está certo pois o divergente de um rotacional é sempre nulo, e o lado direito é zero em virtude da eq.(22). Mas, analisando o caso da eq.(24) ocorre um problema.

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) = \mu_0 (\nabla \cdot \mathbf{J}) \neq 0 \quad (25)$$

o lado esquerdo pode ser zero, mas o lado direito geralmente não é. Para correntes estacionárias o divergente de \mathbf{J} é nulo, mas quando vamos além da magnetostática ou eletrodinâmica, a lei de Ampère não pode estar certa.

- Outra forma de ver que a lei de Ampère tende a falhas para correntes estacionárias, é supor que estejamos em processo de carregar um capacitor como da figura.



A forma integral da lei de Ampère é

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{enc}$$

e queremos aplica-la ao diagrama. Neste caso a superfície mais simples está no plano da espira, o fio penetra essa superfície de forma que $I_{enc} = I$. Isto está bem, mas que passa agora se eu pensa-se numa superfície que escapa do fio condutor e forma um balão como mostrado na figura. Nenhuma corrente passa por essa superfície e pode-se

concluir que $I_{enc} = 0$.



1.5 Generalização da lei de Ampère.

- Segundo Maxwell o problema está do lado direito da eq.(25) que deveria ser zero, mas não é. Observe que aplicando a lei de Gauss e a equação de continuidade

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

onde \mathbf{J} é a densidade volumétrica de corrente no interior do material de densidade ρ , podemos escrever o termo que

atrapalha como:

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} (\epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E}) = -\nabla \cdot \left(\epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right)$$

Observe que existe uma relação entre $\partial \mathbf{E} / \partial t$ com \mathbf{J} , e que introduzida na lei de Ampère elimina a incoerência. Maxwell escreveu a lei de Ampère da forma

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (26)$$

conhecida como *equação Ampère-Maxwell*.



- Esta modificação não altera nada no que se refere à magnetostática, quando \mathbf{E} é constante, continuamos tendo $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$. O termo $\mu_0 \epsilon_0 \partial \mathbf{E} / \partial t$, tem experimentalmente uma contribuição muito pequena respeito a $\mu_0 \mathbf{J}$, por isso Faraday não detectou ele no laboratório.
- A lei de Ampère escrita como a eq.(26) nos dá certa simetria estética com respeito à lei de Faraday, onde um campo \mathbf{B} variável induz um campo \mathbf{E} . **Aqui temos que um campo \mathbf{E} variável induz um campo \mathbf{B} .**

A verdadeira confirmação da teoria de Maxwell veio em 1888 com os experimentos de Hertz com ondas

eletromagnética. Maxwell chamava esse termo extra de corrente de deslocamento:

$$\mathbf{J}_d = \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (27)$$

Desde aqui, para as placas do capacitor o campo \mathbf{E} entre elas é

$$E = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{Q}{A}$$

onde Q é a carga na placa e A é a sua área. Assim, entre as placas temos

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{1}{\epsilon_0 A} \frac{dQ}{dt} = \frac{1}{\epsilon_0 A} I$$

Por outra parte, a eq.(26), na forma integral, pode ser escrita como

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{enc} + \mu_0 \epsilon_0 \int \left(\frac{\partial E}{\partial t} \right) \cdot da$$

Assim, se escolhermos a superfície plana, então $E = 0$ e $I_{enc} = I$. Se, por outro lado, usarmos a superfície em forma de balão, então $I_{enc} = 0$, mas $\int (\partial \mathbf{E} / \partial t) \cdot da = I / \epsilon_0$. Por tanto, obtemos a mesma resposta para ambas as superfícies embora no primeiro caso ela venha de uma corrente genuína, e no segundo, da corrente de deslocamento.

1.6 Equações de Maxwell no vácuo e na matéria.

- A forma final das equações completas de Maxwell, na sua forma diferencial, ficam escritas como

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (28)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (29)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (30)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (31)$$

e sua forma integral como

$$\epsilon_0 \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = q \quad (32)$$

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (33)$$

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} \quad (34)$$

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A}. \quad (35)$$

No vácuo existe uma simetria especial das equações de Maxwell, vejamos que no espaço livre temos que ρ e \mathbf{J} anulam-se, assim

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (36)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (37)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (38)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (39)$$

- A forma das eqs.(28) até (35) estão correta como estão. No entanto, quando você está trabalhando com materiais sujeitos à polarização elétrica e magnética, existe um modo mais conveniente de escrevê-las.

Dentro da matéria polarizada haverá acúmulos de cargas e correntes ligadas sobre as quais você não exerce qualquer controle direto. Seria bom reformular as equações de Maxwell de forma que fizessem referência explícita somente às fontes que controlam diretamente as cargas e correntes livres.

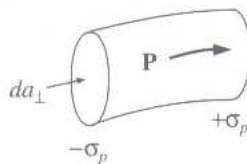
Da magnetostática temos que uma polarização elétrica \mathbf{P} produz uma densidade de carga de polarização

$$\rho_p = -\nabla \cdot \mathbf{P} \quad (40)$$

Da mesma forma uma polarização magnética, ou magnetização, \mathbf{M} resulta em uma corrente de magnetização

$$\mathbf{J}_M = \nabla \times \mathbf{M} \quad (41)$$

- Suponha que examinemos um pedacinho de material polarizado, como da figura



A polarização induz uma densidade de carga $\sigma_p = P$ em uma extremidade e $-\sigma_p$ na outra ($\sigma_p = \mathbf{P} \cdot \hat{n}$). Se P aumentar um pouco, a carga em cada extremidade aumentará, gerando uma corrente líquida

$$dI = \frac{\partial \sigma_p}{\partial t} da_{\perp} = \frac{\partial P}{\partial t} da_{\perp}$$

A densidade de corrente, portanto, é

$$\mathbf{J}_p = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}. \quad (42)$$

Esta **corrente de polarização** não tem qualquer relação com a corrente de magnetização \mathbf{J}_M (a magnetização do material se relaciona ao spin e o movimento orbital dos elétrons no átomo), e sim o resultado do movimento linear da carga quando a polarização se altera (se a polarização aumenta, as cargas, positivas e negativas, se separam. O efeito acumulativo é a corrente de polarização).

- Diante tudo isso, a densidade total de carga pode ser separada em duas partes:

$$\rho = \rho_l + \rho_p = \rho_l - \nabla \cdot \mathbf{P} \quad (43)$$

e a densidade de corrente, em três partes

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_l + \mathbf{J}_M + \mathbf{J}_p = \mathbf{J}_l + \nabla \times \mathbf{M} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \quad (44)$$

Assim, a lei de Gauss pode agora ser escrita como

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} (\rho_l - \nabla \cdot \mathbf{P}),$$

ou

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_l \quad (45)$$

onde \mathbf{D} é dada por

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad (46)$$

Enquanto isso, a lei de Ampère torna-se

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \left(\mathbf{J}_l + \nabla \times \mathbf{M} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \right) + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t},$$

ou

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_l + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (47)$$

onde \mathbf{H} é dada por

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathbf{M} \quad (48)$$

A lei de Faraday e $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ não são afetadas pela nossa separação de carga e corrente em partes livres e ligadas, já que não envolvem ρ ou \mathbf{J} . Assim em termo de cargas e correntes livres, então, as equações de Maxwell dizem

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_l \quad (49)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (50)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (51)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_l + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (52)$$

- Observe que devemos conhecer as relações (chamadas relações constitutivas) de \mathbf{D} e \mathbf{H} em termos de \mathbf{E} e \mathbf{B} , que dependem da natureza do material. Para meios lineares (homogêneos), pode se escrever as relações (também lineares)

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E} \quad \text{e} \quad \mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H} \quad (53)$$

resultando

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} \quad \text{e} \quad \mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \mathbf{B} \quad (54)$$

onde $\epsilon = \epsilon_0 (1 + \chi_e)$ e $\mu = \mu_0 (1 + \chi_m)$. Aqui \mathbf{D} é chamado de "deslocamento eletrônico; é por isso que o segundo

termo da equação Ampère-Maxwell é chamado de corrente de deslocamento, generalizando a eq.(27):

$$\mathbf{J}_d = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \quad (55)$$

- A forma integral das eqs.(49)-(52) adquire a forma

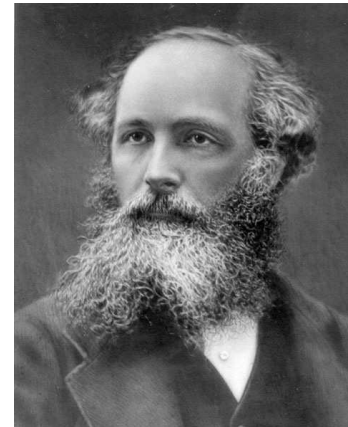
$$\oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{A} = Q_{l_{enc}} \quad (56)$$

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = 0 \quad (57)$$

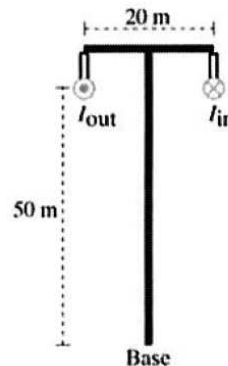
$$\oint \mathbf{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} \quad (58)$$

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\vec{l} = I_{l_{enc}} + \frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{A}. \quad (59)$$

Diante de suas equações sobre o eletromagnetismo, o físico Boltzmann perguntou admirado, citando as palavras do Fausto, de Goethe: "*Foi um deus quem escreveu estes símbolos?*"



Torres altas mantêm duas linhas de transmissão a uma altura $H = 50$ m acima do chão e separadas por uma distância $w = 20$ m, como mostrado na figura. As linhas de transmissão vão de uma hidrelétrica até uma grande cidade carregando uma corrente alternada de amplitude $I_M = 1 \times 10^4$ A e frequência $f = 60$ Hz, i.e., $I(t) = I_M \sin[2\pi ft]$.



(a) (5 pontos) Calcule o vetor (módulo, direção e sentido) do campo magnético produzido pelas duas linhas na base da torre quando a corrente $I(t)$ nas linhas é máxima.

(b) (5 pontos) O campo produzido pelas linhas não é tão grande quando comparado ao da Terra mas ele varia no tempo, o que pode levar a efeitos biológicos diferentes. Calcule a força eletromotriz produzida em uma pessoa com cerca de $h = 2$ m de altura e $l = 0,5$ m de largura deitada na base torre, ao longo das linhas de transmissão. Considere que o campo magnético na pessoa seja homogêneo e com a mesma intensidade que o campo na base da torre.

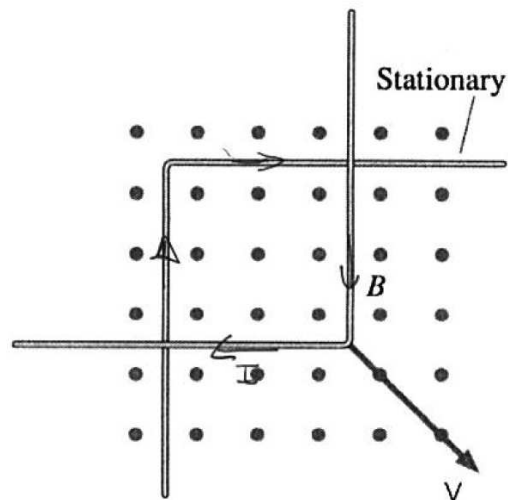
<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>
----------------------	----------------------	----------------------	----------------------	----------------------	----------------------	----------------------	----------------------	----------------------	----------------------	----------------------	----------------------

Um condutor em formato de L é puxado com uma velocidade \vec{v} constante sobre um outro condutor idêntico em uma região com campo magnético \vec{B} uniforme saindo da folha, como mostrado na Figura. A velocidade faz um ângulo de 45° com a horizontal. Em $t=0$ os dois vértices coincidem e a área delimitada pelo circuito é zero. Os condutores têm uma resistência por unidade de comprimento r .

(a) (2 pontos) Qual o sentido da corrente induzida? Justifique sua resposta.

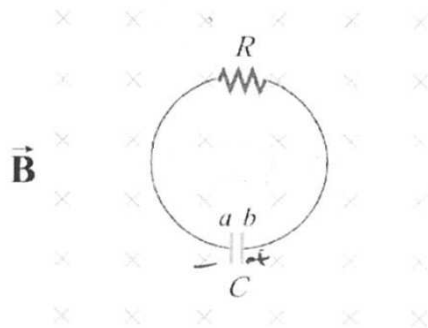
(b) (4 pontos) Calcule a força eletromotriz induzida como função do tempo.

(c) (4 pontos) Calcule a corrente induzida como função do tempo.



☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐ 8 ☐ 9 ☐ 10

Considere um fio circular de raio r no plano xy como mostrado na figura. O fio tem uma resistência R e está conectado em um capacitor de capacitância C , inicialmente descarregado. Existe um campo magnético uniforme com intensidade B entrando no plano xy . A intensidade do campo magnético varia com o tempo com uma taxa constante $dB/dt = -\alpha$, com $\alpha > 0$.



a) (3 pontos) Qual a FEM induzida no circuito?

b) (3 pontos) Qual a carga máxima do capacitor?

c) (4 pontos) Qual placa, a ou b , tem potencial maior? Justifique sua resposta.

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7 ☐8 ☐9 ☐10