Aula 2 (2/Fev)

Na aula hoje:

* Rever aula anterior.
* Terminar Mec. Hamiltoniana.
* Folha 1.

Revisão aula anterior

* Formalismo Newtoniano.
* Formalismo Lagrangeano.
  ↳ Princípio Hamilton / Acção Mínima:
  $\delta S = 0 \Rightarrow$ Eqs E-L $\Rightarrow$ eqs movimento
  ↳ Teor. Noether. $\Rightarrow \mathcal{L}$ inv. transformações $\Rightarrow$ quantidades conservadas.
* Formalismo Hamiltoniano

Notação:
$\mathcal{L}(q,\dot{q}(q,p,t),t) = \tilde{\mathcal{L}}(q,p,t)$

1.3.1) Eqs Hamilton (cont.)

$$\frac{\partial}{\partial q}\mathcal{L}(q,\dot{q}(q,p,t),t) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} + \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}}_{=p}\frac{\partial \dot{q}(q,p,t)}{\partial q}$$

$$\Longleftrightarrow \overbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q}}^{=\dot{p}} = \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial q} - p \cdot \frac{\partial}{\partial q} \dot{q}(q,p,t)$$

$$\Longleftrightarrow \dot{p} = -\frac{\partial}{\partial q}\Big(\underbrace{p \cdot \dot{q}(q,p,t) - \tilde{\mathcal{L}}(q,p,t)}_{= \mathcal{H}(q,p,t)} \Big)$$

Podemos também calcular

$$\frac{\partial}{\partial p} \underbrace{\mathcal{L}(q, \dot{q}(q,p,t), t)}_{= \tilde{\mathcal{L}}(q,p,t)} = \frac{\partial \dot{q}(q,p,t)}{\partial p} \overbrace{\frac{\partial \mathcal{L}(q,\dot{q},t)}{\partial \dot{q}}}^{=p}$$

$$= \frac{\partial}{\partial p}\Big(p \cdot \dot{q}(q,p,t)\Big) - \dot{q}(q,p,t)$$

$$\Longleftrightarrow \dot{q}(q,p,t) = \frac{\partial}{\partial p}\Big(\underbrace{p\, \dot{q}(q,p,t) - \tilde{\mathcal{L}}(q,p,t)}_{= \mathcal{H}(q,p,t)} \Big)$$

Definimos funcional Hamiltoniano,

$$H(q,p,t) \equiv p \cdot \dot{q}(q,p,t) - \mathcal{L}(q, \dot{q}(q,p,t), t)$$

As eqs do movimento serão dadas pelas eqs de Hamilton

$$\boxed{\frac{d}{dt}p = -\frac{\partial}{\partial q}\mathcal{H}(q,p,t)} \qquad \boxed{\frac{dq}{dt} = \frac{\partial}{\partial p}\mathcal{H}(q,p,t)}$$

Resumindo,

transf. de Legendre

$$(q,\dot{q},t) \longrightarrow (q,p,t)$$

$$\mathcal{L}(q,\dot{q},t) \longrightarrow \mathcal{H}(q,p,t)$$

<u>Exemplo</u>: <u>Oscilador Harmônico 1D</u>

$$\mathcal{L}(x,\dot{x},t) = \frac{m}{2}\dot{x}^2 - \frac{k}{2}x^2 = T(\dot{x}) - V(x)$$

O momento canônico conjugado a x

$$p = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}} = m\dot{x} \Rightarrow \dot{x} = \frac{p}{m}$$

que é igual ao momento dinâmico (mas não precisa ser igual).

O Hamiltoneano será dado por

$$H(q,p,t) = p \cdot \dot{x} - \left(\frac{m}{2} \dot{x}^2 - \frac{k}{2} x^2 \right)$$

$$= \frac{p^2}{m} - \frac{\cancel{m}}{2} \frac{p^2}{m^{\cancel{2}}} + \frac{k}{2} x^2$$

$$= \frac{p^2}{2m} + \frac{k}{2} x^2 = T(p) + V(x)$$

As eqç do movimento são

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m}$$

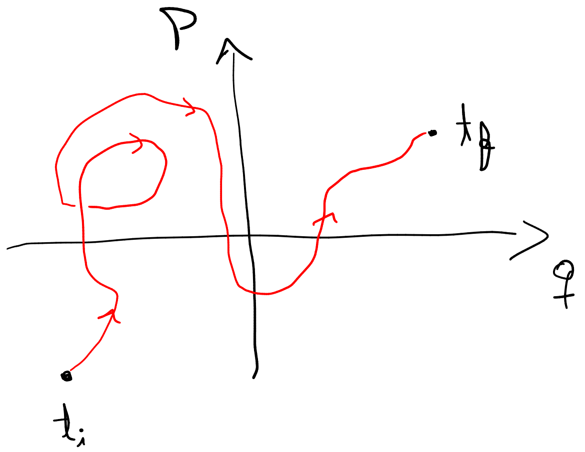
$$\frac{d}{dt} p = - \frac{\partial H}{\partial x} = -kx \Rightarrow \frac{d^2}{dt^2} x = \frac{1}{m} \frac{dp}{dt}$$

$$\Leftrightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m} x = 0$$

que é a mesma eqç movimento que obtivemos com Newton e Lagrange.

1.3.2) Espaço de Fase e Parêntises de Poisson

O espaço onde se desenrola a "acção" deste formalismo é parametrizado por (q,p) e é chamado espaço de Fase



Introduzamos coordenadas unificadas

$$\xi^i = (q,p) \Rightarrow \xi^1 = q \quad , \quad \xi^2 = p$$

As eqçs de Hamilton ficam

$$\frac{d\xi^i}{dt} = \omega^{ij}\frac{\partial H}{\partial \xi^j}$$

Notação Einstein

Somamos sob os índices repetidos

$$\frac{d\xi^1}{dt} = \omega^{11}\frac{\partial H}{\partial \xi^1} + \omega^{12}\frac{\partial H}{\partial \xi^2}$$

$$\Leftrightarrow \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}$$

$$\frac{d\xi^2}{dt} = \omega^{21}\frac{\partial H}{\partial \xi^1} + \omega^{22}\frac{\partial H}{\partial \xi^2}$$

$$\Leftrightarrow \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}$$

onde $\omega^{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$. Podemos escrever como equação matricial

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{d\xi^1}{dt} \\ \frac{d\xi^2}{dt} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial \xi^1} \\ \frac{\partial H}{\partial \xi^2} \end{pmatrix}$$

Evolução temporal da variável $\phi(q,p,t)$ é dada

$$\dot{q} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} \qquad \dot{p} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q}$$

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{dq}{dt}\frac{\partial \phi}{\partial q} + \frac{dp}{dt}\frac{\partial \phi}{\partial p}$$

$$= \frac{\partial \phi}{\partial t} + \underbrace{\frac{\partial \phi}{\partial q}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q}\frac{\partial \phi}{\partial p}}$$

$$= \frac{\partial \phi}{\partial t} + \omega^{ij}\frac{\partial \phi}{\partial \xi^i}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \xi^j} \equiv \frac{\partial \phi}{\partial t} + \{\phi, \mathcal{H}\}$$

Parênteses de Poisson:

$$\{A,B\} = \omega^{ij}\frac{\partial A}{\partial \xi^i}\frac{\partial B}{\partial \xi^j} = \frac{\partial A}{\partial q}\frac{\partial B}{\partial p} - \frac{\partial B}{\partial q}\frac{\partial A}{\partial p}$$

Propriedades

(i) Bilineares

$$\{\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2, B\} = \alpha_1\{A_1,B\} + \alpha_2\{A_2,B\}$$

$$\{A, \beta_1 B_1 + \beta_2 B_2\} = \beta_1\{A,B_1\} + \beta_2\{A,B_2\}$$

(ii) Anti-simétricos

$$\{A,B\} = -\{B,A\}$$

(iii) Identidade Jacobi

$$\{A,\{B,C\}\} + \{B,\{C,A\}\} + \{C,\{A,B\}\} = 0$$

<u>Nota</u>: Os parêntises de Poisson são exemplos de parêntises de Lie. Serão fundamentais na quantificação canónica de sistemas físicos.

No entanto a derivada total destes pode ser $\neq 0$ (devido a dependências implícitas): $\frac{dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}$; $\frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q}$

<u>Exemplo</u>:

As variáveis q, p são variáveis independentes que por isso não dependem explicitamente de $t \Rightarrow \frac{\partial q}{\partial t} = 0 = \frac{\partial p}{\partial t}$

$$\frac{d\xi^i}{dt} = \cancelto{0}{\frac{\partial \xi^i}{\partial t}} + \{\xi^i, H\} = \omega^{jk} \frac{\partial \xi^i}{\partial \xi^j} \frac{\partial H}{\partial \xi^k}$$

$$= \omega^{ik} \frac{\partial H}{\partial \xi^k} \rightarrow \text{eqs Ham.}$$

<u>Exemplo</u>:

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} + \cancelto{0}{\{H, H\}} = \frac{\partial H}{\partial t}$$

$\Rightarrow$ o H é quantidade conservada no movimento se não depender explicitamente no tempo.

$\hookrightarrow$ conservação energia

Exemplo: Variável $g(q,p)$ sem dependência explícita em t, terá evolução dada por

$$\frac{dg}{dt} = \{g, \mathcal{H}\}$$

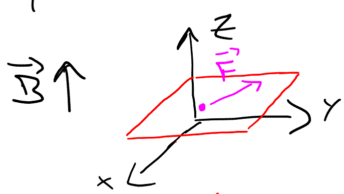
Esta variável é constante do movimento se comuta com $\mathcal{H}$ no sentido dos parêntises de Poisson, $\{g, \mathcal{H}\} = 0$.

— // —

Folha Problemas 1

Tópicos Mecânica Clássica

(1) $m, q, \vec{B} = B\vec{e_z}, \vec{E} = \vec{0} \Rightarrow \vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$



(1.1) Formalismo Newtoniano

(a) A segunda lei Newton $\vec{F} = m\ddot{\vec{r}}$

$$\vec{F} = q \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \\ 0 & 0 & B \end{vmatrix} = q(\dot{y}B, -\dot{x}B, 0)$$

As eqçs do movimento serão

$$\begin{cases} m\ddot{x} = q\dot{y}B \\ m\ddot{y} = -q\dot{x}B \\ m\ddot{z} = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \ddot{x} = \omega_c \dot{y} \\ \ddot{y} = -\omega_c \dot{x} \\ \ddot{z} = 0 \end{cases}$$

que podemos desacoplar

$$\begin{cases} \dddot{x} + \omega_c^2 \dot{x} = 0 \quad \Longrightarrow \ddot{(\dot{x})} + \omega_c^2 (\dot{x}) = 0 \\ \dddot{y} + \omega_c^2 \dot{y} = 0 \\ \ddot{z} = 0 \end{cases}$$

(b) As eqçs em cima são de 2ª ordem para as velocidades e por isso as soluções particulares são,

$$\dot{x}(t) = A.\cos(\alpha.t + \phi_0)$$

$$\Longrightarrow \frac{d^2}{dt^2}\dot{x}(t) = -A\alpha^2\cos(\alpha.t + \phi_0)$$

que podemos verificar resolvem eqç diferencial

$$\ddot{(\dot{x})} + \omega_c^2 \dot{x} = 0 \Longrightarrow -\alpha^2 \cancel{\dot{x}(t)} + \omega_c^2 \cancel{\dot{x}(t)} = 0$$

$$\Longleftrightarrow \alpha^2 = \omega_c^2 \Longrightarrow \alpha = \pm|\omega_c|$$

Para $\dot{y}(t)$ teremos algo semelhante

$$\dot{y}(t) = \tilde{A} \cdot \cos(\tilde{\alpha} \cdot t + \tilde{\phi}_0)$$

$$\Rightarrow (\ddot{\dot{y}}) + \omega_c^2 \dot{y} = 0 \Rightarrow \tilde{\alpha} = \pm |\omega_c|$$

ou seja, teremos

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A \cos(\omega_c t + \phi_0) \\ \dot{y}(t) = \tilde{A} \cos(\omega_c t + \tilde{\phi}_0) \\ \dot{z}(t) = v_z^0 \end{cases}$$

Como ~~sabemos~~ que $\ddot{x} = \omega_c \dot{y}$ (ver em cima)

$$\Rightarrow -\cancel{\omega_c} A \cdot \operatorname{sen}(\omega_c t + \phi_0) = \cancel{\omega_c} \tilde{A} \cos(\omega_c t + \tilde{\phi}_0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A = \tilde{A} \\ \tilde{\phi}_0 = \phi_0 + \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

e assim a solução final fica

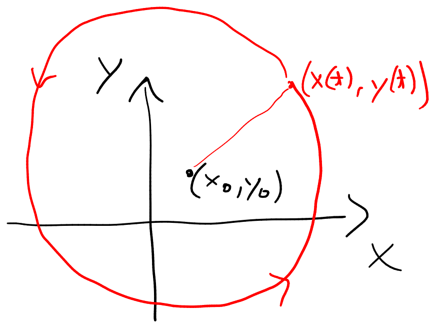
$$\begin{cases} x(t) = \frac{A}{\omega_c} \operatorname{sen}(\omega_c t + \phi_0) + x_0 \\ y(t) = \frac{A}{\omega_c} \cos(\omega_c t + \phi_0) + y_0 \\ z(t) = v_z^0 \cdot t + z_0 \end{cases}$$

$A, \phi_0, v_z^0, x_0, y_0, z_0$ serão determinados pelas condições iniciais, $\vec{r}(t=0)$ e $\vec{v}(t=0)$.

$$\vec{r}(t=0) = (x_0, y_0, z_0) \qquad \vec{v}(t=0) = (v_x^0, v_y^0, v_z^0)$$

(e) Se notarmos que

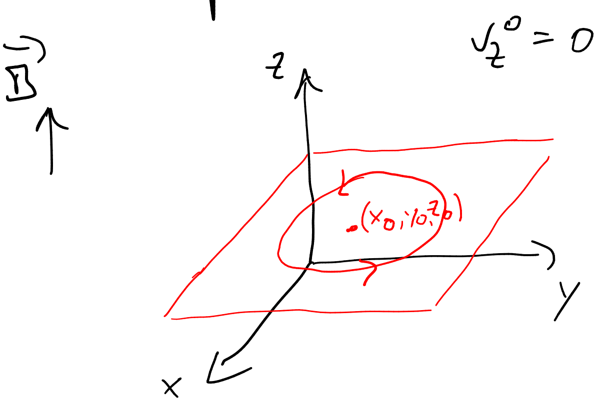
$$(x(t)-x_0)^2 + (y(t)-y_0)^2 = \frac{A^2}{\omega_c^2}\left[\cos^2(\omega_c t+\phi_0) + \operatorname{sen}^2(\omega_c t+\phi_0)\right]$$

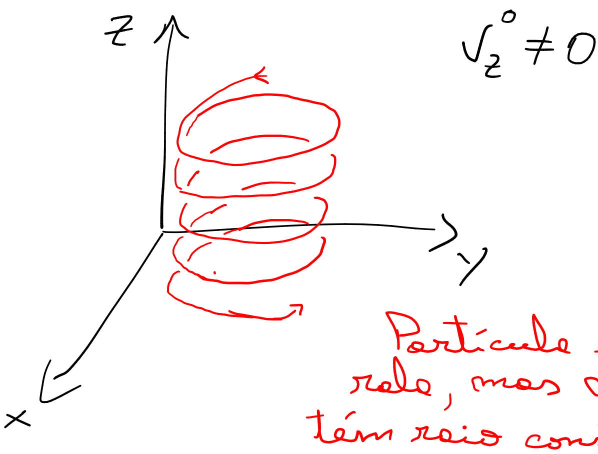


Raio da órbita é constante no tempo.

$$= \frac{A^2}{\omega_c^2} = R^2 \text{ da órbita}$$

Representando casos $v_z^0 = 0$ e $v_z^0 \neq 0$





Partícula espirala, mas mantém raio constante (projecção plano xy).

Raio é controlado por A e ω_c.

1.2 Formalismo lagrangeano

(2) Queremos calcular $\vec{\nabla}\times\vec{F} = ?$

$$\nabla\times\vec{F} = q\left(\underbrace{\vec{\nabla}\times\vec{E}}_{= -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}} + \underbrace{\vec{\nabla}\times(\vec{v}\times\vec{B})}\right)$$

$$\vec{\nabla}\times(\vec{\alpha}\times\vec{\beta}) = (\vec{\beta}\cdot\vec{\nabla})\vec{\alpha} - \vec{\beta}(\vec{\nabla}\cdot\vec{\alpha}) - (\vec{\alpha}\cdot\vec{\nabla})\vec{\beta} + \vec{\alpha}(\vec{\nabla}\cdot\vec{\beta})$$

A velocidade não é um campo vectorial (mas antes um vector). Logo não varia no espaço e por isso $\vec{\nabla}\vec{v}=0$

$$\Rightarrow \nabla\times(\vec{v}\times\vec{B}) = \underbrace{(\vec{B}\cdot\vec{\nabla})\vec{v}}_{=0} - \underbrace{\vec{B}(\vec{\nabla}\cdot\vec{v})}_{=0} - (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{B} + \vec{v}\underbrace{(\vec{\nabla}\cdot\vec{B})}_{=0}$$

eqs Maxwell

$$\Rightarrow \vec{\nabla}\times\vec{F} = q\left(-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} - (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{B}\right)$$

$$= -q\frac{d\vec{B}}{dt}$$

Derivada temporal total de $\vec{B}(t,\vec{r})$:

$$\frac{d\vec{B}}{dt} = \frac{\partial\vec{B}}{\partial t} + \frac{\partial\vec{r}}{\partial t}\cdot\frac{\partial}{\partial\vec{r}}\vec{B}$$

$$= \frac{\partial\vec{B}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{B}$$

ou seja, a Força de Lorentz em geral não é uma força conservativa e por isso não pode ser derivada de potencial escalar.