Universidade Federal do ABC - Prof. André Fonseca
1ª Avaliação de Introdução às Equações Diferenciais Ordinárias

Nome: ____

1) Considere o PVI:

$$\begin{cases} xy' - y = x^3 sen(x) \\ y(\frac{\pi}{2}) = 0 \end{cases} \quad ; \quad x > 0.$$

(a) Verifique as hipóteses do teorema de existência e unicidade. Qual a sua conclusão ?

Solução: $f(x,y) = \frac{1}{x}(y + x^3 sen(x))$ é descontínua para $x = 0$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{x}$ é descontínua para $x = 0$.

(b) Encontre a solução do PVI.

Solução: $y(x) = -x^2 cos(x) + xsen(x) - x$.

2) Um tanque com capacidade para 200 litros tem inicialmente 150 litros de fluido nos quais 15 g de sal são dissolvidos. Uma solução salina contendo 0,4 g de sal por litro é bombeada para dentro do tanque a uma taxa de 5 litros por minuto. A mistura é então drenada a uma taxa de 3 litros por minuto. Descubra quantos gramas de sal haverá no tanque quando ele atingir sua capacidade máxima.

Solução: $S' = 2 - \frac{3S}{150+2t}$ com $S(0) = 15$. Logo $S(t) = \frac{2}{5}(150 + 2t) + c(150 + 2t)^{-3/2}$ com $c \approx -0,00083$ e $S(25) \approx 50,77$.

3) Encontre a solução geral da equação diferencial $y' = \dfrac{-2x + 5y}{2x + y}$.

Solução: $-4ln|(y/x) - 2| + 3ln|(y/x) - 1| = ln|x| + c$.

4) Seja a EDO de Clairaut $y = xy' + f(y')$ para $x > 0$, onde $f(x) = -ln(x)$. Realize a mudança de variável $y'(x) = z(x)$ e depois derive a EDO em relação à x. Mostre que esse procedimento leva à condição $z'(x) = 0$ ou $x + f'(z) = 0$. Obtenha as soluções da EDO de Clairaut.

Solução: $y = cx - ln(c)$ ou $y = 1 + ln(x)$.

5) Verifique se $y_1(x) = x$ e $y_2(x) = sen(x)$ formam um conjunto fundamental de soluções da EDO:

$$[1 - xcot(x)]\, y'' - xy' + y = 0 \quad ; \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}.$$

Solução: Mostrar que y_1 e y_2 são soluções e $W(y_1, y_2) = xcos(x) - sen(x) \neq 0$ se $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

Boa prova !