UFABC – UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC

CECS – CENTRO DE ENGENHARIA, MODELAGEM E CIÊNCIAS SOCIAIS APLICADAS

ENGENHARIA AEROESPACIAL

Universidade Federal do ABC

ESTS010-17 - TÉCNICAS DE ANÁLISE ESTRUTURAL E PROJETO

- Terceiro Quadrimestre – 2022 -

Prof. Dr. Wesley Góis – CECS - UFABC

São Bernardo do Campo, outubro de 2022

Universidade Federal do ABC

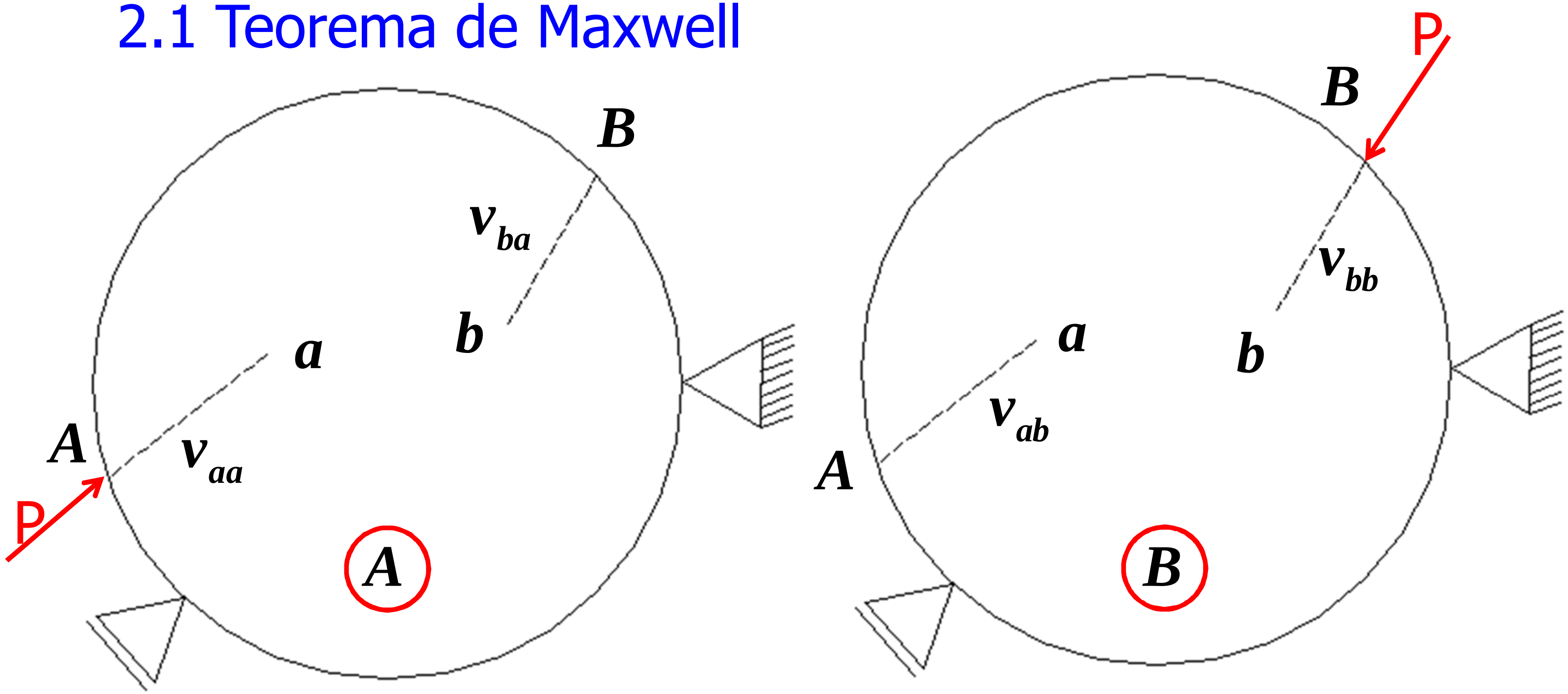
1. Teorema de Clapeyron

O teorema de Clapeyron estabelece que a energia de deformação U de um sólido submetido a um sistema de forças P_i é igual a metade do valor da soma dos produtos das intensidades dessas forças pelas componentes dos deslocamentos de seus pontos de aplicação nas direções das forças.

$$W = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} P_i v_i$$

2. Teoremas Recíprocos – Maxwell e Betti

2.1 Teorema de Maxwell



O trabalho W_A realizado pela força P no sistema A

$$W_A = \frac{1}{2} P \, v_{aa}$$

P no ponto A e outro P no ponto B

O trabalho W_B realizado pelas forças P vale:

$$W_B = \frac{1}{2} P \, v_{bb} + P v_{ab}$$

O trabalho total realizado pelas forças P ⇨ $W = \frac{1}{2} P \, v_{aa} + \frac{1}{2} P \, v_{bb} + P v_{ab}$

O trabalho W_B^* realizado pela força P no sistema B

$$W_B^* = \frac{1}{2} P\, v_{bb}$$

P no ponto B e outro P no ponto A

O trabalho W_A^* realizado pelas forças P vale:

$$W_A^* = \frac{1}{2} P\, v_{aa} + P v_{ba}$$

O trabalho total realizado pelas forças P

$$W^* = \frac{1}{2} P\, v_{aa} + \frac{1}{2} P\, v_{bb} + P v_{ba}$$

Como os trabalhos W e W^* devem ser iguais, conclui-se que:

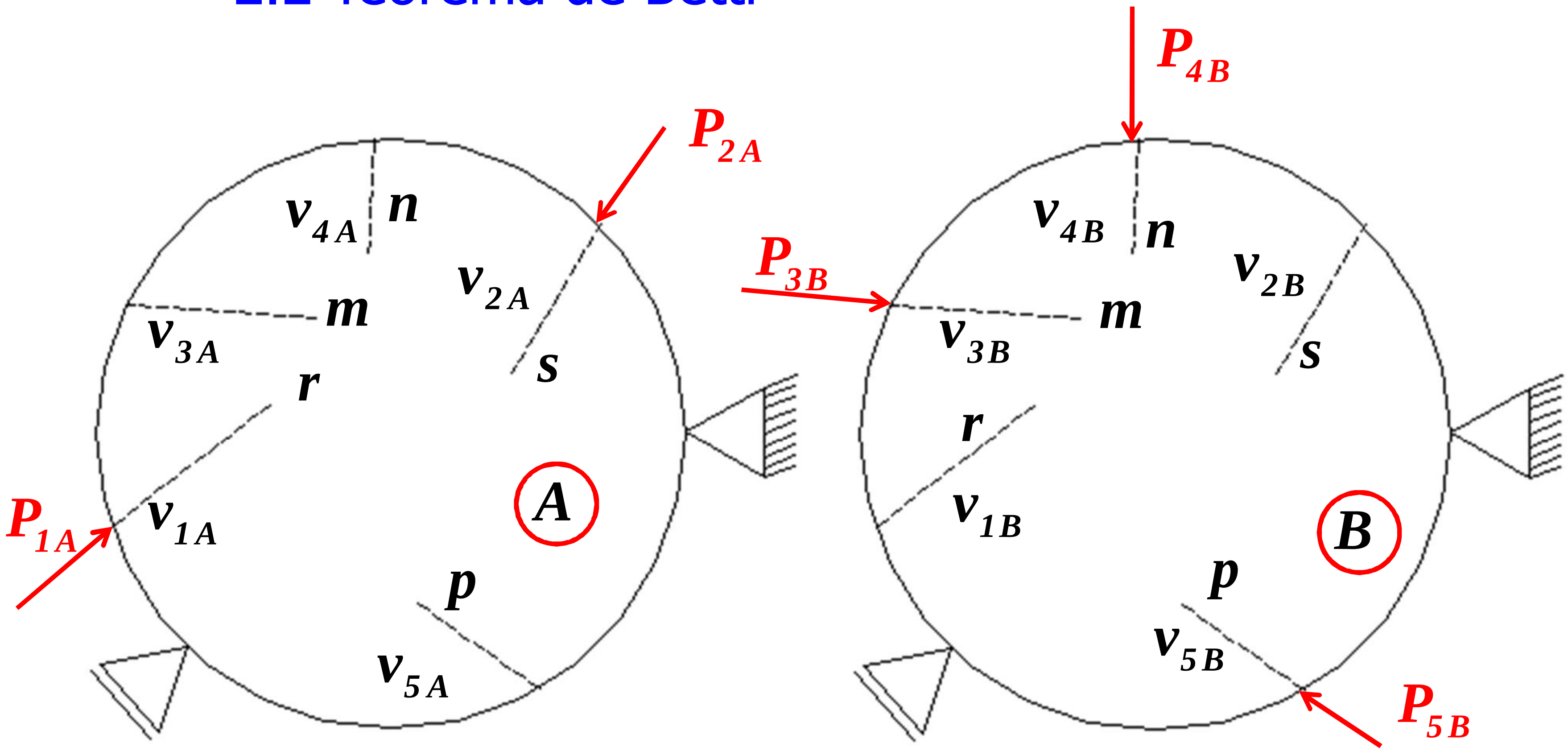
$$W = W^* = \frac{1}{2} P\, v_{aa} + \frac{1}{2} P\, v_{bb} + P v_{ab} = \frac{1}{2} P\, v_{aa} + \frac{1}{2} P\, v_{bb} + P v_{ba}$$

$$v_{ab} = v_{ba}$$

O deslocamento na direção a causado por força atuando na direção b é igual ao deslocamento na direção b causado por força atuando na direção a .

Universidade Federal do ABC

2.2 Teorema de Betti



O trabalho W_A realizado pelas ações do sistema A vale:

$$W_A = \frac{1}{2} P_{1A} v_{1A} + \frac{1}{2} P_{2A} v_{2A}$$

Mantendo as ações do sistema A, aplicam-se as ações do sistema B

sendo o trabalho W_B realizado por todas as ações iguais a:

$$W_B = \frac{1}{2} P_{3B} v_{3B} + \frac{1}{2} P_{4B} v_{4B} + \frac{1}{2} P_{5B} v_{5B} + P_{1A} v_{1B} + P_{2A} v_{2B}$$

O trabalho total, realizado pelas ações dos sistemas A e B , é obtido com a soma de W_A e W_B .

$$W = \frac{1}{2} P_{1A} v_{1A} + \frac{1}{2} P_{2A} v_{2A} + \frac{1}{2} P_{3B} v_{3B} + \frac{1}{2} P_{4B} v_{4B} + \frac{1}{2} P_{5B} v_{5B} + P_{1A} v_{1B} + P_{2A} v_{2B}$$

Invertendo-se, a ordem de aplicação dos sistemas de ações, ou seja, fazendo atuar em primeiro lugar o sistema B, o trabalho realizado pelas ações desse sistema vale: W_B^*

$$W_B^* = \frac{1}{2} P_{3B} v_{3B} + \frac{1}{2} P_{4B} v_{4B} + \frac{1}{2} P_{5B} v_{5B}$$

Mantendo-se as ações do sistema B e aplicando as ações do sistema A, o trabalho W_A^* realizado por todas as ações vale:

$$W_A = \frac{1}{2} P_{1A} v_{1A} + \frac{1}{2} P_{2A} v_{2A} + P_{3B} v_{3A} + P_{4B} v_{4A} + P_{5B} v_{5A}$$

O trabalho total W^*, para este caso, vale:

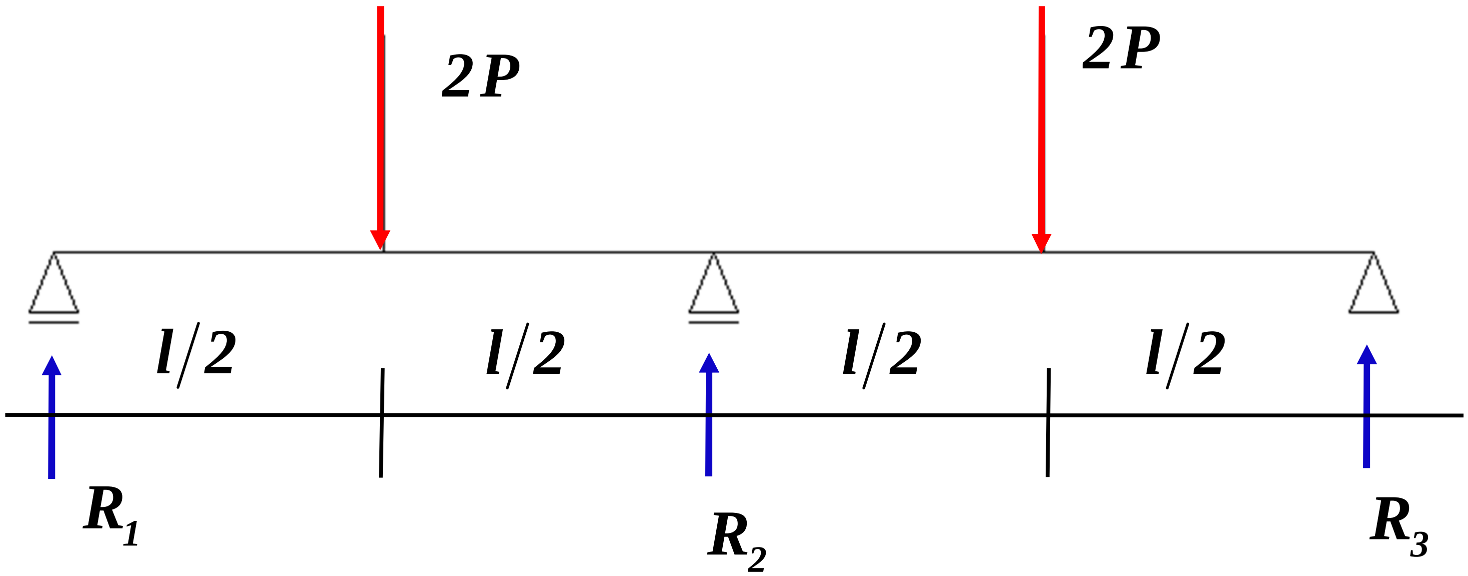
$$W^* = \frac{1}{2}P_{1A}v_{1A} + \frac{1}{2}P_{2A}v_{2A} + \frac{1}{2}P_{3B}v_{3B} + \frac{1}{2}P_{4B}v_{4B} + \frac{1}{2}P_{5B}v_{5B} + P_{3B}v_{3A} + P_{4B}v_{4A} + P_{5B}v_{5A}$$

Como os trabalhos W e W^* devem ser iguais, conclui-se que:

$$P_{1A}v_{1B} + P_{2A}v_{2B} = P_{3B}v_{3A} + P_{4B}v_{4A} + P_{5B}v_{5A}$$

O trabalho realizado pelas ações do sistema A com os deslocamentos do sistema B é igual ao trabalho realizado pelas ações do sistema B com os deslocamentos do sistema A .

Exercício:



$$v(x) = \frac{Pl^3}{48EI}\left[12\left(\frac{x}{l}\right) - 4\left(\frac{x}{l}\right)^3\right] \quad para \;\; 0 \le x \le l$$