Resumo para a P_2 de Cálculo I

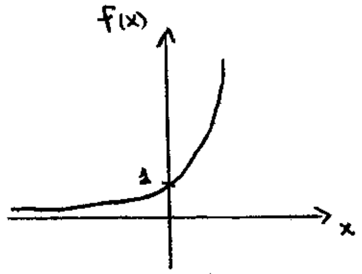
Felipe Augusto Rizzi

1) Funções exponenciais e logarítmicas

1.1) Revisão e propriedades

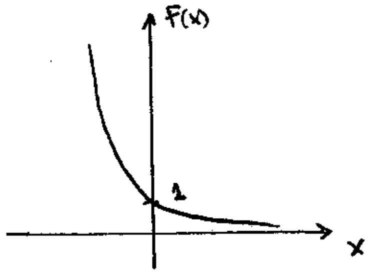
Def: A função f é chamada exponencial se $f(x) = a^x$, onde a é um real positivo denominado base, com $a \neq 1$ e x é um número real, denominado expoente

• Se $a>1$, $f(x)$ é crescente



$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

• Se $0<a<1$, $f(x)$ é decrescente



$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$

Propriedades:

•) $f(0) = 1$ ($a^0 = 1$)

•) $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$ ($a^{x+y} = a^x \cdot a^y$)

•) $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$

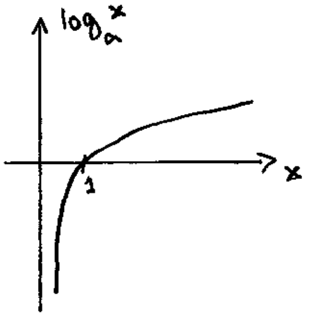
•) $(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$

•) f é contínua (e derivável)

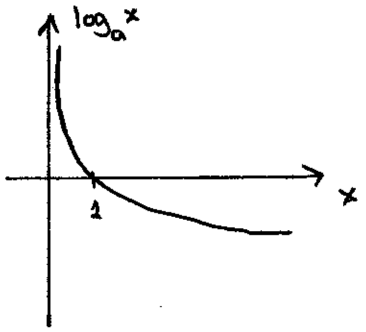
A função f tem $]0, +\infty[$ como imagem. Podemos definir então a função inversa de f, $g(x) = f^{-1}(x) :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$, chamada função logarítmica de base a. Escrevemos $g(x) = \log_a x$

obs: Lembrando que $\log_a c = b \iff a^b = c$ (Lê-se "logaritmo de c na base a é b")

• Se $a > 1$, $g(x)$ é crescente • Se $0 < a < 1$, $g(x)$ é decrescente



$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = -\infty$



$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = +\infty$

Propriedades

•) $g(1) = 0$ $(\log_a 1 = 0)$

•) $g(x.y) = g(x) + g(y)$ $(\log_a (x.y) = \log_a x + \log_a y)$

•) $g(x/y) = g(x) - g(y)$ $(\log_a (x/y) = \log_a x - \log_a y)$

•) $g(x^y) = y \cdot g(x)$ $(\log_a x^y = y \cdot \log_a x)$

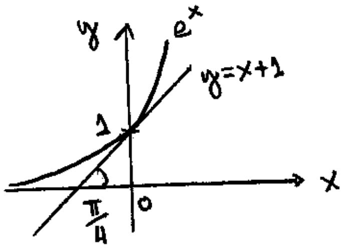
•) $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$

•) $a^{\log_a x} = \log_a a^x = x$

•) g é contínua (e derivável)

1.2 O número e

Definimos e como o número real tal que $f(x) = e^x$ tem reta tangente de coeficiente angular 1 em $x = 0$, ou seja, $f'(0) = 1$



$$f'(0) = 1 \Rightarrow \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = 1 \Rightarrow \boxed{\lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1}$$

esse limite vai aparecer mais tarde

Também é possível definir e da seguinte forma:

$$\boxed{e = \lim_{u \to 0} (1+u)^{1/u} = \lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{y \to -\infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^y}$$

Partindo da primeira definição, é possível chegar na segunda, e vice-versa.

E quanto vale e?

O número e é irracional, assim como π. A sua expansão com as primeiras 20 casas decimais é: 2,71828182845904523536. Para fins práticos, basta saber que $2,7 < e < 2,8$

obs: quando a base do logaritmo é e, é comum escrever $\ln x$ (lê-se: logaritmo natural de x), que equivale a escrever $\log_e x$

1.3) Derivadas

- $\boxed{\begin{array}{l} f(x) = e^x \\ f'(x) = e^x \end{array}}$ $\quad f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^{x+h}-e^x}{h} = \lim_{h\to 0} e^x \cdot \underbrace{\frac{(e^h-1)}{h}}_{\to 1} = e^x$

- $\boxed{\begin{array}{l} g(x) = \ln x \\ g'(x) = 1/x \end{array}}$ $\quad g(x) = \ln x$ é a inversa de $e^x = f(x)$

$$g'(p) = \frac{1}{f'(g(p))} = \frac{1}{e^{g(p)}} = \frac{1}{e^{\ln p}} = \frac{1}{p} \Rightarrow g'(x) = \frac{1}{x}$$

- $\boxed{\begin{array}{l} f(x) = a^x \\ f'(x) = a^x . \ln a \end{array}}$ $\quad f(x) = a^x = [e^{\ln a}]^x = \underbrace{e^{x . \ln a}}$

Ver as propriedades $\quad$ composta de e^y e $x . \ln a$ $\Rightarrow$ regra da cadeia

$$f'(x) = e^{x . \ln a} . [\ln a] = a^x . \ln a$$

- $\boxed{\begin{array}{l} f(x) = \log_a x \\ f'(x) = \frac{1}{(\ln a) . x} \end{array}}$ $\quad f(x) = \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a} = \underbrace{\left(\frac{1}{\ln a}\right)}_{\text{constante}} . \ln x$

$$f'(x) = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{x}$$

- $h(x) = [f(x)]^{g(x)}$

vamos escrever $h(x) = e^{\ln(f(x)) . g(x)}$ e aplicar as regras de derivação:

$$h'(x) = \underbrace{e^{\ln(f(x)) . g(x)}} . \left[\frac{1}{f(x)} . f'(x) . g(x) + \ln(f(x)) . g'(x)\right]$$

$$\boxed{h'(x) = h(x) . \left[\frac{f'(x) . g(x)}{f(x)} + \ln(f(x)) . g'(x)\right]}$$

Não decorem essa fórmula. Vocês precisam saber repetir o processo para chegar nela

Exemplo: [m da lista] $f(x) = (e^x + 3x)^{\arcsin(x^2)}$

$$f(x) = e^{\ln(e^x+3x) . \arcsin(x^2)}$$

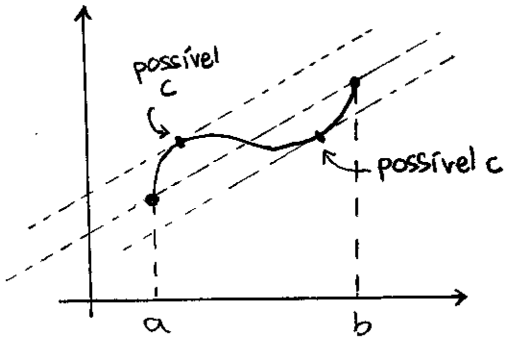
$$f'(x) = e^{\ln(e^x+3x) . \arcsin(x^2)} . \Bigg[\overbrace{\frac{1}{e^x+3x} . (e^x+3) . \arcsin(x^2) + \ln(e^x+3x) . \frac{1}{\sqrt{1-x^4}} . 2x}^{\text{derivada do expoente}}\Bigg]$$

$$f'(x) = (e^x+3x)^{\arcsin(x^2)} . \left[\frac{(e^x+3)\arcsin x^2}{e^x+3x} + \frac{\ln(e^x+3x) . 2x}{\sqrt{1-x^4}}\right]$$

2) Teorema do Valor Médio (TVM)

Enunciado: Sejam $a<b$ reais quaisquer e $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivável. Então, existe $c \in]a,b[$ tal que $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$

Interpretação geométrica: Notem que $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ é o coeficiente angular da reta que une os pontos $(a,f(a))$ e $(b,f(b))$. Além disso, $f'(c)$ é igual ao coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de f em c. Então, o TVM garante que existe um ponto c entre a e b cuja reta tangente é paralela à reta que liga os pontos de abscissas a e b



Aplicações

- provar desigualdades: Imaginem que sabemos alguma informação sobre $f'(x)$, dada $f(x)$. Por exemplo, suponha que $f'(x) > 2$, para qualquer x. O TVM garante que, dados $a<b$ reais, $\exists\, c \in]a,b[$ tal que $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$. Mas $f'(x) > 2$ para qualquer x (inclusive para c). Então, podemos garantir que $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} > 2$. No caso geral, devemos seguir as seguintes etapas para provar desigualdades, seguindo o raciocínio descrito no exemplo:

1) Determinar uma função $f(x)$

2) Determinar $f'(x)$

3) Escrever o TVM

4) Determinar uma desigualdade envolvendo $f'(c)$

5) Relacionar a desigualdade encontrada com o TVM e concluir o que é pedido

Exemplo 1 (2d da lista): Prove que $b^b - a^a > a^a(b-a)$ para $1 \leq a < b$

Resolução: Seja $f(x) = x^x$ (1), com $f'(x) = x^x.(1+\ln x)$ (2). Como $f(x)$ é derivável, pelo TVM, existe $c \in]a,b[$ tal que $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c) \Rightarrow \frac{b^b - a^a}{b-a} = c^c.(1+\ln c)$.

(3)

Mas $1 \leq a < c < b \Rightarrow c > 1 \Rightarrow \ln c > 0$ e $a < c \Rightarrow a^a < c^c$. Então

$f'(c) = c^c \underbrace{(1+\ln c)}_{>1} > c^c > a^a$

(4)

Logo, $\frac{b^b - a^a}{b-a} = c^c(1+\ln c) > a^a \Rightarrow \frac{b^b - a^a}{b-a} > a^a \Rightarrow b^b - a^a > a^a(b-a)$, para $1 \leq a < b$ ■

(5)

Exemplo 2 (P2 2012): Prove que $\frac{\ln b}{b} - \frac{\ln a}{a} < \frac{1}{a^2}(b-a)$, com $1 \leq a < b \leq e$

Resolução: Seja $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, com $D_f =]0,+\infty[$ (1) e $f'(x) = \frac{(1-\ln x)}{x^2}$ (2). Como $f(x)$ é derivável em seu domínio, pelo TVM, existe $c \in]a,b[$ tal que $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$

(3)

Mas $1 \leq a < c < b \leq e \Rightarrow 1 < c < e \Rightarrow 0 < \ln c < 1 \Rightarrow 0 < 1 - \ln c < 1$. Além disso,

$a < c \Rightarrow a^2 < c^2 \Rightarrow \frac{1}{a^2} > \frac{1}{c^2}$. Então $f'(c) = \frac{(1-\ln c)}{c^2} < \frac{1}{c^2} < \frac{1}{a^2}$.

(4)

Logo, $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{\frac{\ln b}{b} - \frac{\ln a}{a}}{(b-a)} = f'(c) = \frac{(1-\ln c)}{c^2} < \frac{1}{a^2} \Rightarrow \frac{\frac{\ln b}{b} - \frac{\ln a}{a}}{b-a} < \frac{1}{a^2}$

$\Rightarrow \frac{\ln b}{b} - \frac{\ln a}{a} < \frac{1}{a^2}.(b-a)$, para $1 \leq a < b \leq e$

(5)

- determinar intervalos de crescimento e decrescimento de uma função:

Teorema: Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivável tal que $f'(x) > 0$ para $x \in]a,b[$. Então f é crescente em $]a,b[$

Dem: Sejam $x < y$; $x, y \in]a,b[$. Pelo TVM, $\exists\, c \in]x,y[$ tal que

$\frac{f(y)-f(x)}{\underbrace{(y-x)}_{>0}} = f'(c) > 0 \Rightarrow f(y) - f(x) > 0 \Rightarrow f(x) > f(y)$

(o numerador e o denominador têm o mesmo sinal)

Analogamente, se $f'(x)<0$ em $]a,b[$, então $f(x)$ é decrescente em $]a,b[$.
Voltaremos a falar disso na parte de gráficos.

- provar desigualdades (usando o fato de que uma função é crescente ou decrescente):

Os exercícios desse tipo são desigualdades em que se pede para provar que $f(x) > f(y)$, sabendo que $x>y$ ou $y>x$. Se conseguirmos provar que f é crescente ou decrescente, o problema está resolvido, porque se f for crescente, por exemplo, para $x>y$, temos que $f(x)>f(y)$. Os valores x e y podem aparecer como variáveis ou como valores fixos. Vejamos exemplos:

Exemplo 1 (P2 2014): Prove que $\frac{\operatorname{arctg} x}{x} < 1$, para $x>0$.

Resolução: A desigualdade equivale a $\operatorname{arctg} x < x$ ou ainda a $\operatorname{arctg} x - x < 0$.
Seja $f(x) = \operatorname{arctg} x - x$.

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - 1 = \frac{1-(1+x^2)}{1+x^2} = -\frac{x^2}{1+x^2} < 0, \text{ se } x>0 \Rightarrow f(x) \text{ é decrescente.}$$

$f(x)$ é decrescente $\Rightarrow$ se $x>0$, $f(x)<f(0) \Rightarrow \operatorname{arctg} x - x < \operatorname{arctg} 0 - 0 = 0$
$\Rightarrow \underline{\operatorname{arctg} x - x < 0}$ ■

Notem que, nesse exercício, um dos valores era variável (x) e o outro era fixo (0).

Exemplo 2 (10b lista): Provar que $e^{\pi} > \pi^{e}$

Resolução: Seja $f(x) = x^{1/x} \Rightarrow f'(x) = \underbrace{\left(\frac{x^{1/x}}{x^2}\right)}_{>0}[\underbrace{1 - \ln x}_{\text{determina o sinal de } f'(x)}]$

$x>e \Rightarrow \ln x > 1 \Rightarrow 1-\ln x < 0 \Rightarrow f'(x)<0 \Rightarrow f(x)$ é decrescente para $x>e$
como $\pi > e$, sabemos que f é decrescente, então $f(\pi) < f(e) \Rightarrow \pi^{1/\pi} < e^{1/e}$
$\Rightarrow \pi^{e/\pi} < e \Rightarrow \underline{\pi^{e} < e^{\pi}}$

Nesse exercício, os dois valores eram fixos: π e e

Exemplo 3 (10c lista): Provar que $\frac{\operatorname{tg} b}{\operatorname{tg} a} > \frac{b}{a}$ $\quad 0<a<b<\pi/2$

Resolução: A desigualdade é equivalente a $\frac{\operatorname{tg} b}{b} > \frac{\operatorname{tg} a}{a}$, pois $0<a<b<\frac{\pi}{2}$. Seja

$f(x) = \frac{\operatorname{tg} x}{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{\sec^2 x - \operatorname{tg} x}{\underbrace{x^2}_{>0}} \rightarrow$ determina o sinal de $f'(x)$

Seja $g(x) = \sec^2 x - \operatorname{tg} x \Rightarrow g'(x) = \underbrace{2\sec^2 x}_{>0} \cdot \underbrace{\operatorname{tg} x}_{>0} \cdot \underbrace{x}_{>0} > 0$, para $0<x<\frac{\pi}{2} \Rightarrow g(x)$ é crescente

- $g(x)$ é crescente: $x>0 \Rightarrow g(x) > g(0) \Rightarrow \sec^2 x - \operatorname{tg} x > 0 \Rightarrow f'(x) > 0$
$\Rightarrow f(x)$ é crescente, para $0<x<\pi/2$

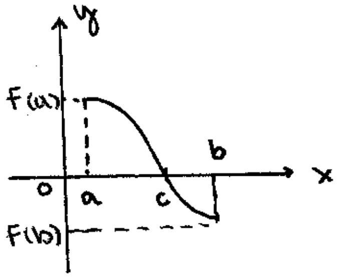
• $f(x)$ é crescente: se $b > a$, então $f(b) > f(a) \Rightarrow \frac{\operatorname{tg} b}{b} > \frac{\operatorname{tg} a}{a}$

notem que, nesse exercício, os dois valores eram variáveis: a e b

3. Teorema do valor intermediário (TVI)

Esse teorema não costuma cair em prova, por isso só vou enunciá-lo e comentar sobre uma aplicação que pode ser útil nas outras questões:

Teorema do valor intermediário (TVI): Sejam $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua e $y \in \mathbb{R}$. Para todos $a \leq b \in \mathbb{R}$ tais que $f(a) \leq y \leq f(b)$, existe $x \in [a,b]$ tal que $f(x) = y$



Uma aplicação interessante desse teorema é mostrar que existe uma raiz da função ente dois números. Suponha que temos uma função f contínua e dois reais $a < b \in D_f$, com $f(a) > 0$ (digamos 2) e $f(b) < 0$ (digamos -1). O TVI garante que f assumirá todos os valores entre -1 e 2 para $x \in [a,b]$, inclusive 0. Então, existe pelo menos um real $c \in [a,b]$ tal que $f(c) = 0$

4. Regras de L'Hôpital

Sejam I um intervalo, $x_0 \in I$ e $f, g: I \to \mathbb{R}$ deriváveis em $I \setminus \{x_0\}$

i) Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0$ e $\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existe, então $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

ii) Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$, $\lim_{x \to x_0} g(x) = \pm\infty$ e $\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existe, então $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Ou seja, as regras de L'Hôpital servem para calcular o limite de frações quando há indeterminações do tipo $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$. Nesses casos, deve-se derivar o numerador e o denominador (cuidado para não confundir $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ com $\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]'$).

obs1: Se, após aplicar a regra de L'Hôpital, a conclusão for que o limite não existe, não podemos afirmar nada, porque as regras de L'Hôpital só valem quando existe $\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

obs2: Podemos trocar $x \to x_0$ por $x \to x_0^+$, $x \to x_0^-$, $x \to +\infty$, $x \to -\infty$

Exemplo 1: $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\overset{\to 0}{(x^5-6x^3+8x-3)}}{\underset{\to 0}{(x^4-1)}} \underset{\frac{0}{0}}{\overset{L'H}{=}} \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{5x^4-18x^2+8}{4x^3} = \dfrac{-5}{4}$ //

$f(x) = x^5-6x^3+8x-3$

$g(x) = x^4-1$

Exemplo 2: $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\overset{\to+\infty}{e^x}}{\underset{\to+\infty}{x}} \underset{\frac{\infty}{\infty}}{\overset{L'H}{=}} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{1} = +\infty$ //

$f(x) = e^x$

$g(x) = x$

Exemplo 3: $\lim\limits_{x\to 0^+} \underbrace{x}_{\to 0} \cdot \underbrace{\ln x}_{\to -\infty} = \underbrace{\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\overset{\to-\infty}{\ln x}}{\underset{\to+\infty}{1/x}}}_{\text{podemos reescrever assim para usar L'Hôpital}} \underset{\frac{\infty}{\infty}}{\overset{L'H}{=}} \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1/x}{-1/x^2} = \lim\limits_{x\to 0^+} -x = 0$ //

$F(x) = \ln x$

$g(x) = 1/x$

Indeterminações

a) Indeterminação $0\times\infty$: Dividir um dos termos pelo inverso do outro, para que a indeterminação fique $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$:

• $\lim\limits_{x\to 0^+} \underbrace{x}_{\to 0} \cdot \underbrace{e^{1/x}}_{\to+\infty} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{e^{1/x}}{1/x} \underset{\frac{\infty}{\infty}}{\overset{L'H}{=}} \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{e^{1/x}\cdot(-1/x^2)}{(-1/x^2)} = \lim\limits_{x\to 0^+} e^{1/x} = +\infty$

b) Indeterminação $\infty-\infty$: Geralmente pode ser transformada em um caso $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$ fazendo o MMC, no caso de frações, ou colocando algum termo em evidência.

• $\lim\limits_{x\to 0^+} \underbrace{\dfrac{1}{x}}_{\to\infty} - \underbrace{\dfrac{1}{\operatorname{sen} x}}_{\to\infty} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\overset{\to 0}{\operatorname{sen} x - x}}{\underset{\to 0}{x\cdot\operatorname{sen} x}} \underset{\frac{0}{0}}{\overset{L'H}{=}} \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\cos x - 1}{\operatorname{sen} x + x\cos x} \underset{\frac{0}{0}}{\overset{L'H}{=}} \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\overset{\to 0}{-\operatorname{sen} x}}{\underbrace{\cos x+\cos x}_{\to 2} - \underbrace{x\operatorname{sen} x}_{\to 0}} = 0$ //

• $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x - e^{3x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \underbrace{e^x}_{\to+\infty}(\underbrace{1-e^{\overset{\to+\infty}{2x}}}_{\to-\infty}) = -\infty$ (não precisou de L'Hôpital)

c) Indeterminações 0^0, 0^∞, ∞^0, ∞^∞, 1^∞, etc: Esses são limites do tipo $\lim\limits_{x\to a} f(x)^{g(x)}$. A saída é substituir esse limite por:

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to a}\left[e^{\ln f(x)}\right]^{g(x)} = \lim_{x\to a} e^{\ln f(x)\cdot g(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a} \ln f(x)\cdot g(x)}$$

↳ isso é verdade porque e^y é uma função contínua

• $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x = \lim\limits_{x\to 0^+} e^{(\ln x)\cdot x} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+}(\ln x)\cdot x}$

$*\lim\limits_{x\to 0^+} \underbrace{\ln x}_{\to-\infty} \cdot \underbrace{x}_{\to 0} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln x}{1/x} \underset{\frac{\infty}{\infty}}{\overset{L'H}{=}} \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1/x}{-1/x^2} = \lim\limits_{x\to 0^+} -x = 0$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^+} x^x = e^0 = 1$

NÃO ESQUEÇAM QUE A RESPOSTA É $e^{\lim\limits_{x\to 0^+}(\ln x)\cdot x}$

$$\bullet \lim_{x\to+\infty} (x+1)^{1/\ln x} = \lim_{x\to+\infty} e^{\ln(1+x)/\ln x} = e^{\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+x)}{\ln(x)}}$$

$$* \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+x)}{\ln x} \underset{\frac{\infty}{\infty}}{\overset{L'H}{=}} \lim_{x\to+\infty} \frac{1/1+x}{1/x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{1+x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1+\underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0}} = 1$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} (x+1)^{1/\ln x} = e^1 = e$$

$$\bullet \lim_{x\to 0^+} (1+5x)^{3/x} = \lim_{x\to 0^+} e^{\ln(1+5x) \cdot 3/x} = e^{\lim_{x\to 0^+} \frac{3\cdot\ln(1+5x)}{x}}$$

$$* \lim_{x\to 0^+} \frac{3\cdot\ln(1+5x)}{x} \underset{\frac{0}{0}}{\overset{L'H}{=}} \lim_{x\to 0^+} \frac{3\cdot\frac{1}{1+5x}\cdot 5}{1} = 15$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0^+} (1+5x)^{3/x} = e^{15}$$

$$\bullet \lim_{x\to 0^+} (1-\cos x)^x = \lim_{x\to 0^+} e^{\ln(1-\cos x)\cdot x} = e^{\lim_{x\to 0^+} \ln(1-\cos x)\cdot x}$$

$$* \lim_{x\to 0^+} \underbrace{\ln(1-\cos x)}_{\to -\infty} \cdot \underbrace{x}_{\to 0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1-\cos x)}{1/x} \underset{\frac{\infty}{\infty}}{\overset{L'H}{=}} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{\operatorname{sen} x}{1-\cos x}}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0^+} -\frac{x^2\cdot \operatorname{sen} x}{1-\cos x}\cdot\frac{(1+\cos x)}{(1+\cos x)}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{-x^2\cdot\operatorname{sen}x\cdot(1+\cos x)}{\operatorname{sen}^2 x} = \lim_{x\to 0^+} -\underbrace{\left(\frac{x}{\operatorname{sen}x}\right)}_{\to 1}\cdot\underbrace{\left(\frac{x}{\operatorname{sen}x}\right)}_{\to 1}\cdot\underbrace{\operatorname{sen}x}_{\to 0}\cdot\underbrace{(1+\cos x)}_{\to 2} = 0$$

lim. fund.

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0^+} (1-\cos x)^x = e^0 = 1$$

5. Esboço de Gráficos

Invariavelmente, todo ano a prova tem uma questão de esboçar gráficos. Tirando as dificuldades na análise do sinal das derivadas, no cálculo de limites e o tempo limitado da prova, não há nenhum problema maior envolvendo essas questões: basta seguir uma série de passos e, ao fim, teremos um esboço do gráfico da função dada, como uma receita de bolo.

Roteiro:

1) Explicitar o domínio da função: Escrever o conjunto D_f, para o qual a função está definida

2) Intervalos de crescimento e decrescimento: Nessa etapa, devemos determinar os intervalos contidos no domínio em que a função é crescente ou decrescente. Para isso, devemos analisar o sinal de $f'(x)$, pois, se $f'(x) > 0$, $f(x)$ é crescente e se $f'(x) < 0$, $f(x)$ é decrescente, como consequência do TVM

3) Concavidades e pontos de inflexão: Nessa etapa, devemos determinar os intervalos em que a função tem concavidade para cima, para baixo e os pontos em que há mudança na concavidade (inflexão)

Teorema: Seja $f: I \to \mathbb{R}$ derivável duas vezes

i) Se $f''(x) > 0$, $\forall x \in I$, então f tem concavidade para cima em I

ii) Se $f''(x) < 0$, $\forall x \in I$, então f tem concavidade para baixo em I

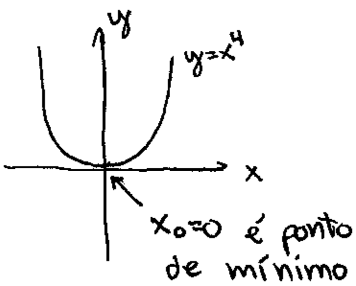
obs:

1) x_0 é ponto de inflexão se $x_0 \in]a, b[\subset D_f$ e a concavidade em $]a, x_0[$ é diferente da concavidade em $]x_0, b[$

2) Se x_0 é ponto de inflexão e f é de classe C_2 (derivável duas vezes e a segunda derivada é contínua) então $f''(x_0) = 0$

3) Se $f''(x_0) = 0$, x_0 não é, necessariamente, ponto de inflexão

Ex: $f(x) = x^4$ $\quad f''(x) = 12x^2 \Rightarrow f''(0) = 0$, mas $x_0 = 0$ não é ponto de inflexão



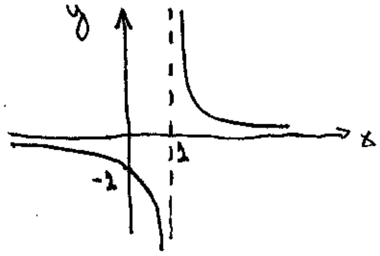
4) limites convenientes: É interessante analisar o comportamento da função nas "bordas" do domínio. Por exemplo, suponha que tenhamos uma função cujo domínio é $D_f =]0, +\infty[\setminus \{1, 2\}$. Nesse caso, é interessante calcular:

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$, $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$, $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$ e $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$

5) Intersecções com os eixos: Nesse passo, devemos determinar os pontos em que a função intercepta os eixos x e y, quando esta o faz. f irá interceptar o eixo y no ponto $(0, f(0))$ e o eixo x nos pontos $(x, 0)$, tais que $f(x) = 0$ (raízes da função). Se não for fácil encontrar as raízes da função, podemos usar o TVI para mostrar que existe uma raiz, ou simplesmente pular esse passo

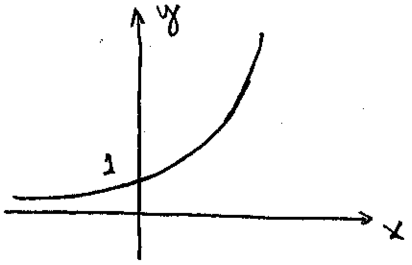
6) Assíntotas: Assíntotas são retas das quais a função se aproxima. Existem três tipos de assíntotas:

a) Assíntotas verticais: São "geradas" por causa de restrições no domínio. Considere, por exemplo, a função $f(x) = \frac{1}{x-1}$, que tem o seguinte gráfico:



Notem que $x \neq 1$. Nesse caso, $\lim_{x\to1^+} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to1^-} f(x) = -\infty$, então $x=1$ é uma assíntota vertical

b) Assíntotas horizontais: Essas assíntotas ocorrem quando $\lim_{x\to+\infty} f(x) = c$ ou $\lim_{x\to-\infty} f(x) = c$, $c \in \mathbb{R}$. Por exemplo, $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$, o que significa que e^x se aproxima da reta $y=0$ quando $x\to-\infty$



c) Assíntotas oblíquas: São assíntotas da forma $y = ax+b$, ou seja, $f(x)$ se aproxima da reta $y=ax+b$ quando $x\to+\infty$ ou $x\to-\infty$. Vale então que $\lim_{x\to\infty} f(x) - (ax+b) = 0$, e, desse limite, é possível concluir que:

$$a = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{ou} \quad a = \lim_{x\to\infty} f'(x)$$

$$b = \lim_{x\to\infty} f(x) - ax$$

Calcular a

- se $a = \pm\infty$ → não tem assíntota oblíqua
- se $a \in \mathbb{R}$ → Calcular b
  - se $b = \pm\infty$ → não tem assíntota oblíqua
  - se $b \in \mathbb{R}$ → Assíntota $y = ax+b$

* se souber que $\lim_{x\to\infty} f(x) = c \in \mathbb{R}$, não precisa calcular a: a assíntota é horizontal

* pode ser horizontal, se $a=0$

7) Esboço do gráfico

Exemplo: Vamos esboçar um gráfico de função passo a passo

(P2 2014) Esboce o gráfico da função $f(x) = \frac{x^2}{x-1} \cdot e^{-1/x}$

1) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$

2) $f'(x) = \dfrac{2x(x-1) - x^2}{(x-1)^2} \cdot e^{-1/x} + \dfrac{x^2}{(x-1)} \cdot e^{-1/x} \cdot \dfrac{1}{x^2}$

$= \dfrac{2x^2 - 2x - x^2 + (x-1)}{(x-1)^2} \cdot e^{-1/x} = \underbrace{\left(\dfrac{e^{-1/x}}{x^2}\right)}_{>0} \cdot \underbrace{(x^2 - x - 1)}_{\text{det. o sinal}}$

$x^2 - x - 1$

raízes: $x^2 - x - 1 = 0$

$\Delta = 1 - 4.1.(-1)$

$\Delta = 5$

$x = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

$+ \ | \ - \ | \ +$

$\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \quad \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

		$(1-\sqrt{5})/2$		0		1		$(1+\sqrt{5})/2$	
$f'(x)$	$+$		$-$		$-$		$-$		$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$

$\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$: máximo local

$\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$: mínimo local.

3) $f''(x) = \dfrac{x^2+1}{(x-1)^3 . x^2} . e^{-1/x}$ (Dado pela questão)

$f''(x) = \underbrace{\left(\dfrac{(x^2+1) . e^{-1/x}}{x^2}\right)}_{>0} \cdot \underbrace{\dfrac{1}{(x-1)^3}}_{\text{determina o sinal}}$

$x - 1$: $- \ \underset{1}{|} \ +$

		0		1	
$f''(x)$	$-$		$-$		$+$
$f(x)$	$\cap$		$\cap$		$\cup$

f não tem ponto de inflexão (notem que a concavidade muda em $x=1$, mas $f(x)$ não está definida para $x=1$)

4) limites convenientes

- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\overset{\to 0}{x^2}}{\underbrace{x-1}_{\to -1}} \cdot \underbrace{e^{-1/x}}_{\to 0} = 0$

- $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{x^2}{x-1} \cdot e^{-1/x} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{e^{-1/x}}{\dfrac{x-1}{x^2}} \overset{L'H}{\underset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{e^{-1/x} . 1/x^2}{\dfrac{x^2 - (x-1).2x}{x^4}} = \lim\limits_{x\to 0^-} e^{-1/x} . \dfrac{x^2}{-x^2+2x}$

$= \lim\limits_{x\to 0^-} e^{-1/x} . \dfrac{x}{-x+2} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{e^{-1/x}}{\dfrac{-x+2}{x}} \overset{L'H}{\underset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{e^{-1/x} . 1/x^2}{\dfrac{-x-(-x+2)}{x^2}} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{e^{-1/x}}{-2} = \lim\limits_{x\to 0^-} -\dfrac{1}{2} \cdot \underbrace{e^{-1/x}}_{\to +\infty} = -\infty$

- $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{\overbrace{x^2 . e^{-1/x}}^{>0}}{\underbrace{x-1}_{\to 0^+}} = +\infty$

- $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{\overbrace{x^2 . e^{-1/x}}^{>0}}{\underbrace{x-1}_{\to 0^-}} = -\infty$

- $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^2}{x-1} . e^{-1/x} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\overset{\to +\infty}{x}}{1 - \underset{\to 0}{\frac{1}{x}}} . \underbrace{e^{\overset{\to 0}{-1/x}}}_{\to 1} = +\infty$

- $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^2}{x-1} . e^{-1/x} = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{\overset{\to -\infty}{x}}{1 - \underset{\to 0}{\frac{1}{x}}} . \underbrace{e^{\overset{\to 0}{-1/x}}}_{\to 1} = -\infty$

5) Intersecções com eixos: f não intercepta os eixos, pois $\nexists f(0)$ e $f(x)=0 \iff x=0$, mas $\nexists f(0) \Rightarrow \nexists x$ tal que $f(x)=0$

6) Assíntotas

• $+\infty$

$$a = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x^2-x}\cdot e^{-1/x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1-\underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0}}\cdot e^{\overbrace{-1/x}^{\to 0}} = 1$$

$$b = \lim_{x\to+\infty} f(x) - ax = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x-1}\cdot e^{-1/x} - x = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 . e^{-1/x} - x(x-1)}{(x-1)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 . e^{-1/x} - x^2 + x}{(x-1)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2\left(e^{-1/x}-1\right)+x}{(x-1)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{-1/x}-1+\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}$$

$$\overset{L'H}{\underset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{-1/x}\cdot\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x^3}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\overbrace{e^{-1/x}-1}^{\to 0}}{-1+\underbrace{\frac{2}{x}}_{\to 0}} = 0$$

Assíntota $y = x$

• $-\infty$

Analogamente $a=1$ e $b=0 \Rightarrow$ Assíntota $y=x$

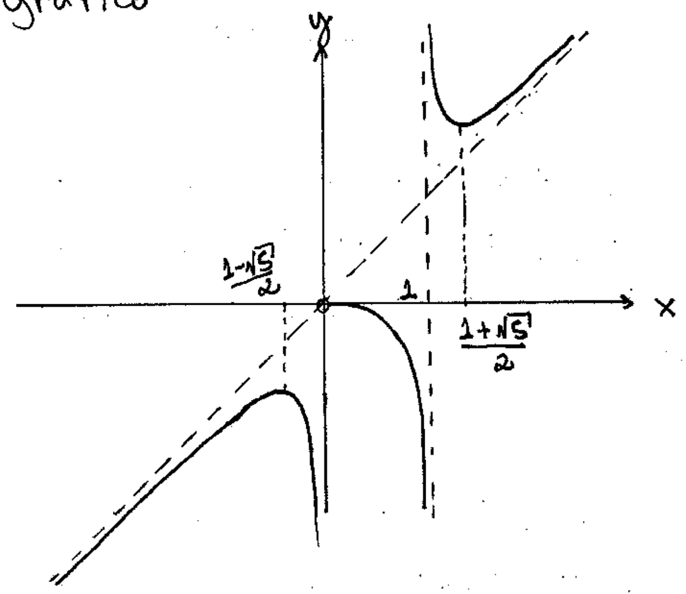
• 0

Assíntota vertical $x=0$

• 1

Assíntota vertical $x=1$

7) gráfico



6. Máximos e Mínimos

Uma das aplicações mais interessantes dessa parte da matéria são os problemas envolvendo máximos e mínimos, porque eles são bem próximos dos problemas da vida real. Antes de começarmos a resolver problemas, vamos ver alguns teoremas, que serão fundamentais na resolução dos exercícios

Teorema de Weierstrass: Seja $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua. Então f assume máximo e mínimo em $[a,b]$

•obs1: Notem que o intervalo deve ser fechado. Por exemplo, a função $f(x) = \frac{1}{x}$ não tem máximo no intervalo $]0,1]$, pois dado $x_0 > 0$, sempre é possível tomar $x_1 > 0$, com $x_1 < x_0$, tal que $f(x_1) > f(x_0)$.

•obs2: Um intervalo é fechado quando contém seus extremos. Ex: $[1,2]$

Teorema de Fermat: Se $f:]a,b[\to \mathbb{R}$ é derivável e $x_0 \in]a,b[$ é ponto de máximo ou mínimo local então $f'(x_0) = 0$

Teorema (teste da 2ª derivada): sim, é um "c" fresco

Sejam $f:]a,b[\to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ e $x_0 \in]a,b[$

i) Se $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) > 0$, então x_0 é ponto de mínimo local

ii) Se $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) < 0$, então x_0 é ponto de máximo local

obs1: Se $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) = 0$, não podemos afirmar nada

obs2: x_0 é máximo (ou mínimo) LOCAL se existe $\delta > 0$ tal que se $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\setminus \{x_0\}$, então $f(x) < f(x_0)$ (ou $f(x) > f(x_0)$), ou seja, existe um intervalo I ao redor de x_0 para o qual $f(x_0) > f(x)$, $x \in I$, se x_0 é máximo local ou $f(x_0) < f(x)$, se x_0 é mínimo local

Roteiro para resolver os exercícios

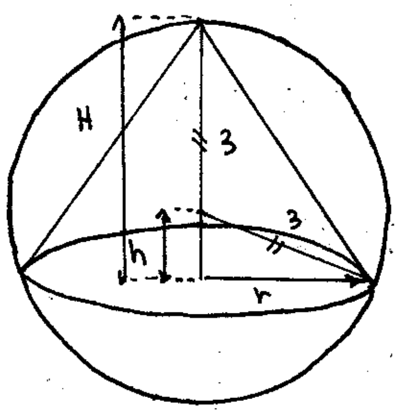
1) Interpretar o problema e encontrar a função que deve ser maximizada (ou minimizada), indicando seu respectivo domínio

2) Quando for pedido, justificar por que a função tem máximo e mínimo. A forma mais fácil de fazer isso é usar o teorema de Weierstrass. Se o domínio da função for um intervalo fechado e ela for contínua, o teorema de Weierstrass garante que ela assumirá máximo e mínimo nesse intervalo. Se o intervalo não for limitado, a forma mais conveniente é analisar o sinal de $f'(x)$.

3) Encontrar os pontos candidatos a máximos e mínimos:
Suponha que o intervalo em que a função está definida é $[a,b]$.
No interior do intervalo ($]a,b[$), os candidatos são os pontos x_0 tais que $f'(x_0)=0$, pois, se x_0 for um máximo ou mínimo local (e possivelmente global), então $f'(x_0)=0$, segundo o teorema de Fermat.
Os outros candidatos são os extremos a e b

4) Calcular o valor da função nos candidatos e comparar. O ponto cujo valor da função for maior será o máximo global e aquele cujo valor da função for menor será o mínimo global. Notem que se estivermos buscando o mínimo, por exemplo, os pontos de máximo local podem ser descartados. Nesse momento, o teorema do teste da 2ª derivada pode ajudar

Exemplo 1: Determine as dimensões do cone de maior volume que pode ser inscrito em uma esfera de raio 3



$$V = \frac{1}{3}\cdot Ab \cdot H \qquad r^2+h^2=9$$
$$H = 3+h \qquad r^2 = 9-h^2$$
$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot H = \frac{1}{3}\pi(9-h^2)\cdot(3+h)$$
$$V(h) = \frac{1}{3}\pi(27+9h-3h^2-h^3)$$
$$D_V = [-3,3]$$
(1)

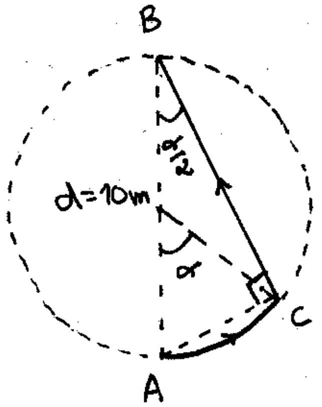
V é contínua e $D_V=[-3,3] \Rightarrow$ Pelo teorema de Weierstrass, a função tem máximo e mínimo (2)

$$V'(h) = \frac{1}{3}\pi(-3h^2-6h+9) = \pi(-h^2-2h+3)$$
candidatos no interior $\Rightarrow V'(h)=0$
candidatos extremos $h=-3$ ou $h=3$
$$V'(h)=0 \Rightarrow \underbrace{h=-3}_{\text{não está no interior}} \text{ ou } h=1$$
(3)

$V(-3)=0$
$V(1)=\frac{32\pi}{3}$
$V(3)=0$
$h=1$ é máximo global $\Rightarrow$ Cone máximo: $H=4$, $r=2\sqrt{2}$
(4)

Exemplo 2 (4ª lista): Para ir de um ponto A a um ponto B diametralmente oposto de uma piscina circular de 10m de diâmetro, uma pessoa pode caminhar (com velocidade constante) pela borda da piscina até um ponto C e nadar (com velocidade constante) em linha reta até o ponto B. Seja α o ângulo AOC. Sabendo que ela pode caminhar duas vezes mais rápido do que pode nadar, determine, em termos de α, as trajetórias que o levam ao seu destino no maior e no menor tempo

obs: a pessoa pode só nadar ou só caminhar



$A\hat{B}C$ inscrito na circunferência $\Rightarrow A\hat{B}C = \frac{\alpha}{2}$

ΔABC inscrito na semi circunferência $\Rightarrow \hat{C} = 90°$

$\frac{\overline{BC}}{d} = \cos\frac{\alpha}{2} \Rightarrow \overline{BC} = 10\cos\frac{\alpha}{2}$

$\overset{\frown}{AC} = \alpha . r = 5\alpha$

$v_1 = 2v$ (caminhada)

$v_2 = v$ (nado)

caminhada

$\frac{\Delta S_1}{\Delta t_1} = v_1 \Rightarrow \frac{5\alpha}{\Delta t_1} = 2v \Rightarrow \Delta t_1 = \frac{5\alpha}{2v}$

nado

$\frac{\Delta S_2}{\Delta t_2} = v_2 \Rightarrow \frac{10\cos\alpha/2}{\Delta t_2} = v \Rightarrow \Delta t_2 = \frac{10}{v} . \cos\frac{\alpha}{2}$

$t(\alpha) = \Delta t_1 + \Delta t_2 \Rightarrow t(\alpha) = \frac{5\alpha}{2v} + \frac{10}{v} . \cos\frac{\alpha}{2} \qquad \alpha \in [0, \pi]$ ①

$t(\alpha)$ é contínua e definida em um intervalo fechado $\Rightarrow t(\alpha)$ assume máximo e mínimo em $[0, \pi]$, pelo teorema de Weierstrass ②

$t'(\alpha) = \frac{5}{2v} + \frac{10}{v} . (-\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}) . \frac{1}{2} \Rightarrow t'(\alpha) = \frac{5}{2v} - \frac{5}{v}\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}$

candidatos no interior $\Rightarrow t'(\alpha) = 0$

$t'(\alpha) = 0 \Rightarrow \frac{5}{2v} - \frac{5}{v}\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} = 0 \Rightarrow \operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = \frac{\pi}{6} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{3}$

candidatos nos extremos de D_t

$\alpha = 0$ e $\alpha = \pi$ ③

$t(0) = \frac{10}{v}$ (só nada)

$t(\pi/3) = \frac{5\pi}{6v} + \frac{10}{v}\cdot\underbrace{\cos\frac{\pi}{6}}_{\sqrt{3}/2} = \frac{5\pi}{6v} + \frac{5\sqrt{3}}{v}$

$t(\pi) = \frac{5\pi}{2v}$ (só caminha)

$\pi < 4 \Rightarrow \frac{5\pi}{2} < 10 \Rightarrow t(\pi) < t(0)$

$\left.\begin{array}{l} 3 < \pi \Rightarrow 2{,}5 < \frac{5}{6}\pi \\ 1{,}7 < \sqrt{3} \Rightarrow 8{,}5 < 5\sqrt{3} \end{array}\right\} 11 < \frac{5}{6}\pi + 5\sqrt{3}$

$\Rightarrow t(0) < t(\pi/3)$

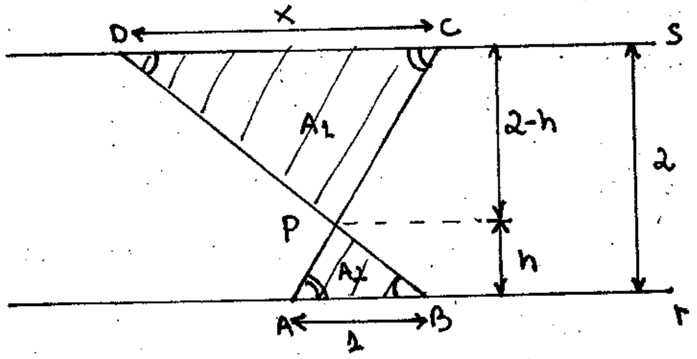
$t(\pi) < t(0) < t(\pi/3)$

π é ponto de mínimo global

$\pi/3$ é ponto de máximo global

Resposta: A trajetória de maior tempo ocorre quando $\alpha = \pi/3$ e a de menor tempo ocorre quando $\alpha = \pi$ (só nadar). (4)

Exemplo 3 (P2 2010): Na figura abaixo, r e s são retas paralelas, a distância entre elas é 2, C é um ponto fixo de s, A e B são pontos fixos de r e a distância entre eles é 1. É possível encontrar um ponto D na reta s, de modo que o segmento BD intercepte AC e que a soma das áreas dos triângulos sombreados na figura seja mínima? E máxima? Nos casos em que a resposta for afirmativa, encontre a altura h do triângulo ABP



$r /\!/ s \Rightarrow \left.\begin{array}{c}\hat{D} = \hat{B} \\ \text{e} \\ \hat{C} = \hat{A}\end{array}\right\}$ Os triângulos APB e CPD são semelhantes

$\frac{x}{2-h} = \frac{1}{h} \Rightarrow x = \frac{2-h}{h}$

Áreas: Do triângulo de cima: $A_1 = \frac{1}{2}\cdot x\cdot(2-h) = \frac{1}{2}\frac{(2-h)^2}{h}$

Do triângulo de baixo: $A_2 = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot h = \frac{h}{2}$

$\Rightarrow A(h) = \frac{(2-h)^2}{2h} + \frac{h}{2} = \frac{2}{h} - 2 + h$

$A(h) = \frac{2}{h} - 2 + h$ $\qquad D_A =]0,2]$

$h \to 0$: situação em que o ponto D tente infinitamente para a esquerda

$h = 2$: situação em que $D = C$

(1)

$$\lim_{h\to 0^+} A(h) = \lim_{h\to 0^+} \underbrace{\frac{2}{h}}_{\to +\infty} - 2 + \underbrace{h}_{\to 0} = +\infty$$

$A(h)$ é derivável em $]0,2]$

	0		$\sqrt{2}$		2
$A'(h)$	$\nexists$	$-$		$+$	
$A(h)$	$\nexists$	$\searrow$		$\nearrow$	

$A(2) = 1$

$$A'(h) = \frac{-2}{h^2} + 1 = \frac{\overbrace{h^2-2}^{\text{det. o sinal}}}{\underbrace{h^2}_{>0}}$$

h^2-2: $+ \; (-) \; +$, raízes $-\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$

$h < \sqrt{2}$: $A'(h) < 0 \Rightarrow A(h)$ é decrescente $\Rightarrow A(h) > A(\sqrt{2})$
$h > \sqrt{2}$: $A'(h) > 0 \Rightarrow A(h)$ é crescente $\Rightarrow A(h) > A(\sqrt{2})$

Como $A(h) > A(\sqrt{2})$ para qualquer $h \in]0,2]$, $h \neq \sqrt{2}$, podemos afirmar que $h = \sqrt{2}$ é ponto de <u>MÍNIMO</u> <u>GLOBAL</u> de A

Como $\lim_{h\to 0^+} A(h) = +\infty$, $A(h)$ não tem máximo...

Logo, a soma das áreas é <u>MÍNIMA</u> quando $h = \sqrt{2}$ e <u>NÃO</u> tem <u>MÁXIMO</u>

(2)
(3)
(4)

* Esse exercício é um pouco diferente, porque o domínio da função é um intervalo aberto ($]0,2]$). Nesse caso, não vale o Teorema de Weierstrass, e precisamos utilizar outros recursos para justificar a existência (ou não existência) de máximos e mínimos. Notem que uma boa forma de mostrar que não existem máximos ou mínimos é provar que a função é ilimitada (se $\lim_{x\to p} f(x) = +\infty$, f não tem máximo e se $\lim_{x\to p} f(x) = -\infty$, não tem mínimo). Já para provar que existem máximos ou mínimos, uma boa opção é estudar o crescimento e decrescimento da função, analisando o sinal da sua derivada.

7. Integrais

Uma das principais motivações para o estudo e o desenvolvimento da teoria relacionada às integrais é o problema do cálculo da área abaixo do gráfico de uma função. Vou comentar brevemente como é o método desenvolvido por Riemann, e aprenderemos a calcular as integrais usando o Teorema Fundamental do cálculo

A integral de Riemann

Imaginem que queremos calcular a área abaixo do gráfico da função f, entre x=a e x=b, indicada na Figura 1. Essa área pode ser aproximada pela soma das áreas dos retângulos cujas bases são intervalos definidos por uma partição ("divisão em intervalos menores") do intervalo $[a,b]$ e as alturas são o valor da função para um ponto qualquer da base do retângulo, como exemplificado na figura 2. Notem que, quanto menor o tamanho das bases dos retângulos, melhor a aproximação da área. Então, o limite da soma das áreas desse retângulos, quando o tamanho das suas bases tende a 0 deve ser igual à área abaixo do gráfico da função

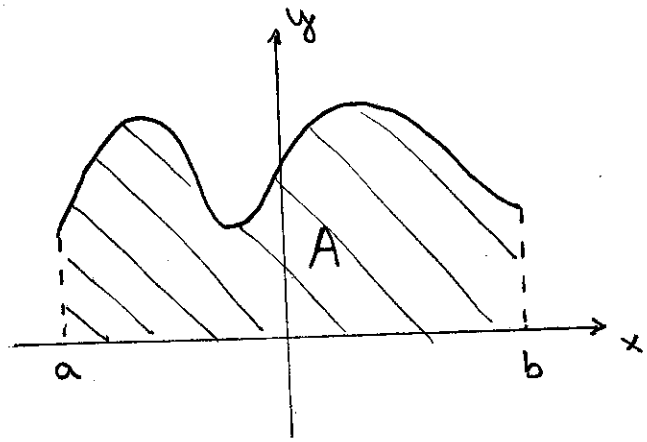


Figura 1

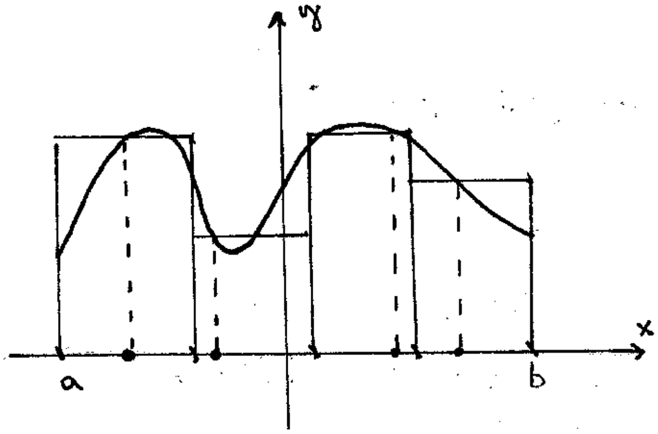


Figura 2

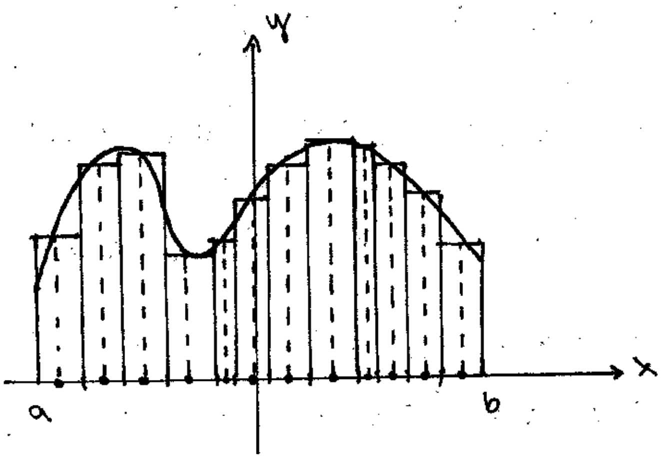
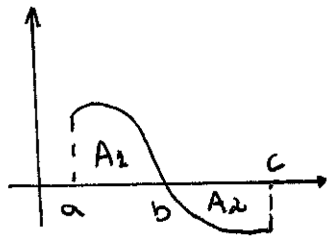


Figura 3: A aproximação melhora se o tamanho das bases dos retângulos diminui

Se o valor desse limite é $L \in \mathbb{R}$, então dizemos que $\int_a^b f(x)\,dx = L$ (Lê-se integral de f(x) de a até b é L) e, nesse caso, $A = L$

Cuidado: $\int_a^b f(x)\,dx$ só é igual à área abaixo do gráfico quando $f(x) \geq 0$. Se $f(x) \leq 0$, é igual à área, com sinal negativo e para uma $f(x)$ qualquer, é a soma das áreas positivas e negativas (com sinal)



$$\int_a^b f(x)\,dx = A_1 \qquad \int_a^c f(x)dx = A_1 - A_2$$

$$\int_b^c f(x)\,dx = -A_2$$

Propriedades

i) Se f e g são funções integráveis, $f+g$ é integrável e

$$\int_a^b (f+g)(x)\,dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

ii) Se f é uma função integrável e $K \in \mathbb{R}$, então Kf é integrável e

$$\int_a^b (K.f)(x)\,dx = K\int_a^b f(x)dx$$

iii) $\int_a^a f(x)\,dx = 0$ (a área abaixo do gráfico de f de a ate a é o)

iv) Se $f(x) > 0$, $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$

se $f(x) < 0$, $\int_a^b f(x)dx \leq 0$

v) Se f é integrável e $c \in [a,b]$, $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

vi) Teorema: Toda $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua é integrável

Teorema Fundamental do cálculo

O Teorema fundamental do cálculo mostra como calcular uma integral. No entanto, precisamos saber o que é a primitiva de uma função

• Primitivas; Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função. UMA primitiva de f é uma função $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $F'(x) = f(x)$

Exemplo 1: primitivas de $f(x) = \cos x$

$$\left.\begin{aligned} F(x) &= \operatorname{sen} x \\ F(x) &= \operatorname{sen} x + 1 \\ F(x) &= \operatorname{sen} x + \pi \cdot e \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\text{em geral} \\ &F(x) = \operatorname{sen} x + c,\ c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ $f(x)$ tem infinitas primitivas, que diferem por uma constante

Como encontrar uma primitiva?: o processo é o mesmo que uma antiderivação: devemos pensar em uma função cuja derivada é igual à função dada. A tabela a seguir contém alguns exemplos de primitivas úteis

$f(x)$	$F(x)$	
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	$(n \neq -1)$
$\frac{1}{x}$	$\ln x + C$	
e^x	$e^x + C$	
$\operatorname{sen} x$	$-\cos x + C$	
$\cos x$	$\operatorname{sen} x + C$	
$\frac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{arctg} x + C$	

Teorema Fundamental do cálculo: Se $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ é integrável e $F: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $[a,b] \subset I$ é uma primitiva de f, então

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)}$$

$\leftarrow$ tanto faz qual primitiva é, porque as constantes se cancelam

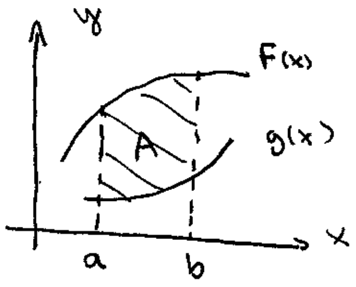
Exemplos

1) $\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{x}\,dx = F(3) - F(2) = \underbrace{\ln 3 - \ln 2}_{\ln \frac{3}{2}} = \ln 1{,}5$

$F(x) = \ln x$

2) $\displaystyle\int_0^1 x^5 + x^3 + 3\,dx = \underbrace{\frac{x^6}{6} + \frac{x^4}{4} + 3x\,\Big|_0^1}_{\text{essa notação é mais compacta: escrevemos } F(x) \text{ e uma barra com os extremos, para lembrar que devemos fazer } F(1)-F(0)} = \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{4} + 3\right) - (0) = \frac{82}{24} = \frac{41}{12}$

Área entre gráficos de funções: Os exercícios de prova geralmente são desse tipo. Suponha que queiramos calcular a área entre os gráficos das funções f e g, de a até b:

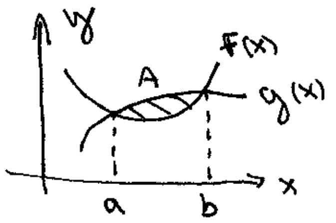


Ao fazer $\int_a^b f(x)\,dx$, calculamos a área do gráfico de f até o eixo x e ao fazer $\int_a^b g(x)\,dx$, calculamos a área do gráfico de g até o eixo x. Basta então fazer a diferença entre essas áreas:

$$A = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b f(x) - g(x)\,dx$$

podemos escrever diretamente que $A = \int_a^b f(x) - g(x)\,dx$, mas cuidado! devemos calcular a integral da função que ESTÁ POR CIMA menos a função que ESTÁ POR BAIXO

obs: Se for pedida a área limitada pelos gráficos das funções, só calcularemos as áreas das regiões fechadas:



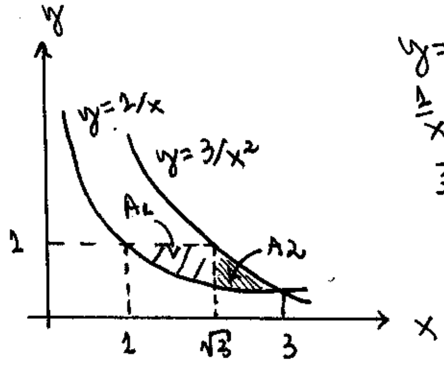
Para descobrir a e b ⇒ ver pontos de intersecção dos gráficos

Exemplo 1 (Alguma P2): Calcule a área da região:

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0,\ y \leq 1,\ \frac{1}{x} \leq y \leq \frac{3}{x^2}\}$$

Primeira coisa a fazer: Esboçar a região

$$\left.\begin{array}{l} 0 < x \leq 3 \Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{x}{x^2} < \frac{3}{x^2} \\ x > 3 \Rightarrow \frac{3}{x^2} < \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x} \end{array}\right\}$$ Para saber qual gráfico está por cima: $\frac{1}{x}$ ou $\frac{3}{x^2}$



$y=1$:

$\frac{1}{x} = 1 \Rightarrow x = 1$

$\frac{3}{x^2} = 1 \Rightarrow x = \sqrt{3}$

$$A_1 = \int_1^{\sqrt{3}} \underset{\uparrow}{1} - \frac{1}{x}\,dx$$

$\frac{1}{x} \leftarrow$ função que está por baixo

$1 \uparrow$ função que está por cima

$$\Rightarrow A_1 \int_1^{\sqrt{3}} 1 - \frac{1}{x}dx = x - \ln x \Big|_1^{\sqrt{3}} = (\sqrt{3} - \ln\sqrt{3}) - (1 - \underbrace{\ln 1}_{=0})$$

$$A_1 = \sqrt{3} - 1 - \ln\sqrt{3}$$

$$A_2 = \int_{\sqrt{3}}^{3} \frac{3}{x^2} - \frac{1}{x}\,dx$$

$\frac{3}{x^2}$: função que está por cima

$\frac{1}{x}$: função que está por baixo

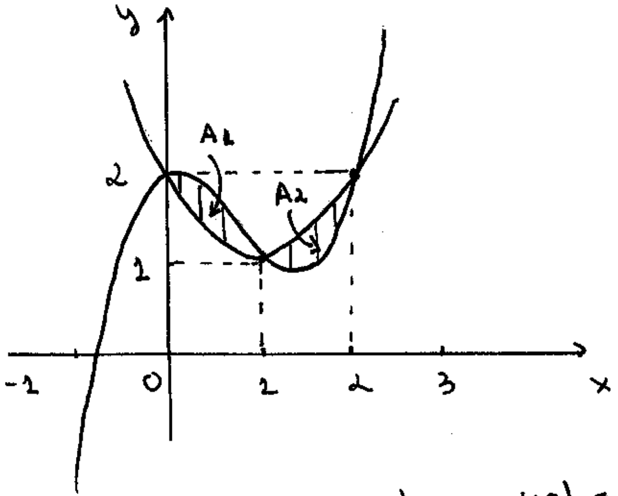
$$\Rightarrow A_2 = \int_{\sqrt{3}}^{3} \frac{3}{x^2} - \frac{1}{x}dx = -\frac{3}{x} - \ln x \Big|_{\sqrt{3}}^{3} = -1 - \ln 3 - (-\sqrt{3} - \ln\sqrt{3})$$

$$A_2 = -1 + \sqrt{3} - \ln 3 + \ln\sqrt{3}$$

$$A = A_1 + A_2 = \sqrt{3} - 1 - \cancel{\ln\sqrt{3}} - 1 + \sqrt{3} - \ln 3 + \cancel{\ln\sqrt{3}} = -2 + 2\sqrt{3} - \ln\sqrt{3}$$

$$A = 2\sqrt{3} - 2 - \ln 3$$

Exemplo 2 (P2 2014): Dado o gráfico de $f(x) = x^3 - 2x^2 + 2$ abaixo, determine a área compreendida entre os gráficos de f e $g(x) = x^2 - 2x + 2$, para $0 \leq x \leq 2$



temos que desenhar o gráfico de g

$g(x) = x^2 - 2x + 2$

raízes: $\Delta = 4 - 4.1.2 = -4 < 0$

não tem raízes reais $\Rightarrow g(x) > 0$

$x_v = -\frac{b}{2a} = \frac{2}{2} = 1$

$f(x_v) = y_v = 1$

vértice da parábola: $(1,1)$

$f(0) = 2$

Ainda precisamos saber qual gráfico está por cima e qual está por baixo em quais trechos

Seja $h(x) = f(x) - g(x)$

$$h(x) = x^3 - 2x^2 + 2 - (x^2 - 2x + 2) = x^3 - 3x^2 + 2x = x\,(\underbrace{x^2 - 3x + 2}) = x\,(x-1).(x-2)$$

raízes: soma = 3, prod = 2

$x' = 1,\ x'' = 2$

		0		1		2	
x	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$x-1$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$x-2$	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$h(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

$0 < x < 1 \Rightarrow h(x) > 0 \Rightarrow f(x) > g(x)$ — $f(x)$ está por cima

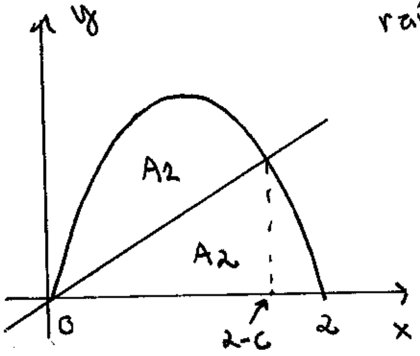
$1 < x < 2 \Rightarrow h(x) < 0 \Rightarrow g(x) > f(x)$ — $g(x)$ está por cima

$$A_1 = \int_0^1 f(x) - g(x)\,dx = \int_0^1 x^3 - 3x^2 + 2x\,dx = \frac{x^4}{4} - x^3 + x^2 \Big|_0^1 = \frac{1}{4} - 1 + 1$$

$$A_2 = \int_1^2 g(x) - f(x)\,dx = \int_1^2 -x^3 + 3x^2 - 2x\,dx = -\frac{x^4}{4} + x^3 - x^2 \Big|_1^2 = -\frac{16}{4} + 8 - 4 - \left(-\frac{1}{4} + 1 - 1\right)$$

$$A = A_1 - A_2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \Rightarrow \boxed{A = 1/2}$$

Exemplo 3 (P2 2011) Seja $f(x) = -x^2 + 2x$ e considere a reta r de equação $y = cx$, $c > 0$. Determine o valor de c para que as áreas A_1 e A_2 mostradas na figura sejam iguais



raízes: $-x^2 + 2x = 0$

$x(2-x) = 0$

$x = 0$ ou $x = 2$

intersecção: $-x^2 + 2x = cx$

$-x^2 + (2-c)x = 0$

$x([2-c] - x) = 0$

$x = 0$ ou $x = 2-c$

$$A_1 = \int_0^{2-c} (-x^2 + 2x) - cx \, dx = \int_0^{2-c} -x^2 + (2-c)x \, dx = -\frac{x^3}{3} + (2-c)\frac{x^2}{2}\Big|_0^{2-c} = -\frac{(2-c)^3}{3} + \frac{(2-c)^3}{2} = \frac{(2-c)^3}{6}$$

$$A_1 + A_2 = \int_0^2 -x^2 + 2x dx = -\frac{x^3}{3} + x^2\Big|_0^2 = -\frac{8}{3} + 4 = \frac{4}{3}$$

$$A_1 = A_2 \Rightarrow A_1 + A_2 = 2.A_1 \Rightarrow \frac{4}{3} = 2.\frac{(2-c)^3}{6} \Rightarrow 4 = (2-c)^3 \Rightarrow 2-c = \sqrt[3]{4} \Rightarrow \boxed{c = 2 - \sqrt[3]{4}}$$

BOA PROVA!