UFABC – UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC

CECS – CENTRO DE ENGENHARIA, MODELAGEM E CIÊNCIAS SOCIAIS APLICADAS

ENGENHARIA AEROESPACIAL E ENGENHARIA BIOMÉDICA

ESTS010-17 - TÉCNICAS DE ANÁLISE ESTRUTURAL E PROJETO

- Terceiro Quadrimestre – 2022 -

Prof. Dr. Wesley Góis – CECS - UFABC

São Bernardo do Campo, outubro de 2022

Contextualização – problema da mecânica das estruturas

↓

Formalização do Método de Rayleigh-Ritz

↓

Exemplos de Aplicação

Introdução:
O problema da mecânica das estruturas

➢ **Determinar**
- *ů*
- *U*
- *d*

Sólido Contínuo

↓

Continuidade do meio

↓

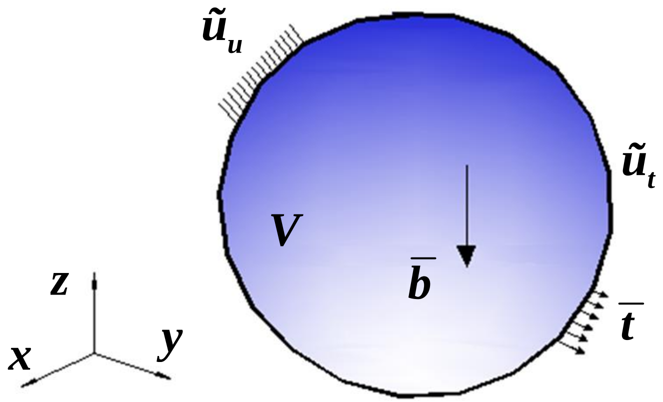
Restrições de Equilíbrio, Compatibilidade e Constitutiva

↓

Hipóteses Simplificadoras

↓

Modelo Matemático



Introdução:
O problema da mecânica das estruturas

Solução Exata do Modelo Matemático

Métodos Numéricos

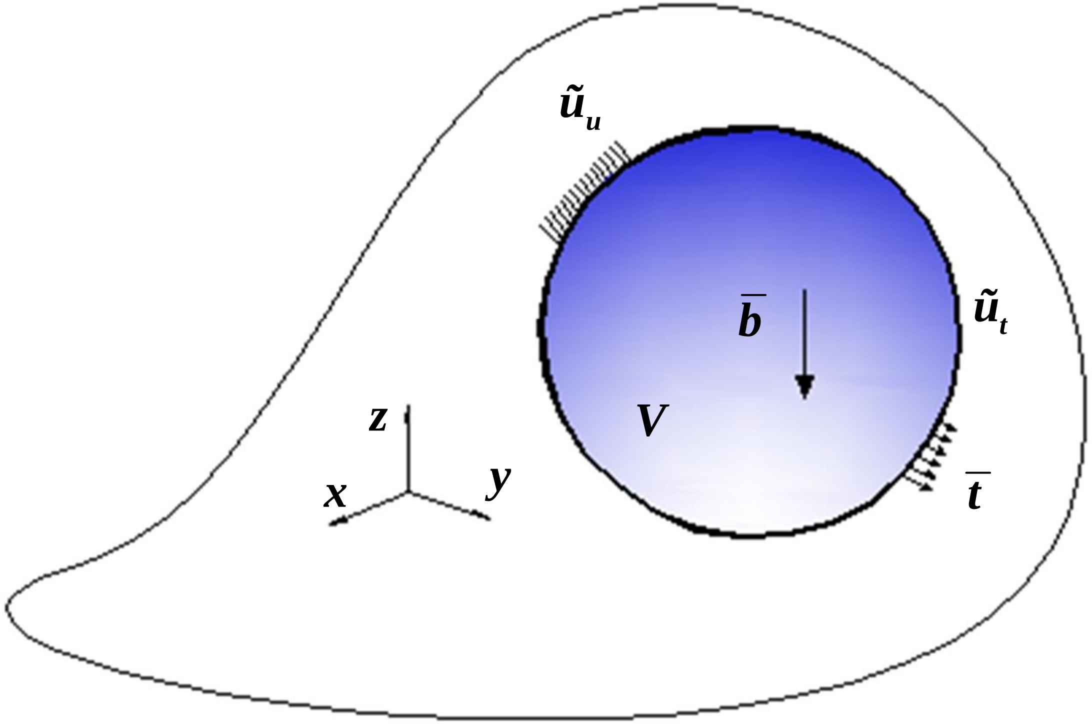
Método de Rayleigh-Ritz

Princípio da Mínima Energia Potencial Total

Energia Potencial Ʉ

$$Ʉ = U + q$$

Energia Potencial das Cargas Externas q e Energia de Deformação Elástica U



SISTEMA

ENERGIA

Energia Potencial das Cargas Externas q e Energia de Deformação Elástica U

Universidade Federal do ABC

- ENERGIA
  - Natureza Mecânica
    - Potencial de Posição
    - Potencial das Forças q
    - Energia Cinética
  - Natureza Térmica

Energia Potencial das Cargas Externas q e Energia de Deformação Elástica U

Universidade Federal do ABC

- Princípio fundamental da mecânica dos meios contínuos é a PRIMEIRA LEI DA TERMODINÂMICA

$$\Downarrow$$

Esse princípio postula um balanço entre as variações de energia no sistema, num determinado instante de tempo, e introduz uma forma de energia dita INTERNA, definida em função do trabalho das tensões nas deformações do corpo.

Energia Potencial das Cargas Externas q e Energia de Deformação Elástica U

Universidade Federal do ABC

Simplificações consistentes

- Deslocamentos Pequenos → Potencial de Posição
- Não possuem qualquer movimento inicial e, além disso o carregamento é aplicado de forma gradual → Energia Cinética
- Processos de carregamento e deformação são sempre adiabáticos e isotérmicos → Energia Térmica

Energia Potencial das Cargas Externas q e Energia de Deformação Elástica U

Universidade Federal do ABC

- Última simplificação no tocante à energia interna.

Material Elástico Linear

Tensões e Deformações permaneçam dentro dos limites do regime elástico

Toda a energia interna é armazenada no corpo, não havendo qualquer porção dissipada

Sistema é conservativo e a energia interna passa a ser denominada de ENERGIA DE DEFORMAÇÃO ELÁSTICA U

Energia Potencial Total

$$\text{Ʉ} = U + q$$

- Energia Potencial das Cargas Externa.

$$q = -\sum_{i=1}^{n} P_i v_i$$

- Energia Potencial Interna.

$$U = \int_V \left(\mathring{u} \cdot d\mathring{U} \right) dV$$

$$U = \int_0^l \left(\frac{N^2}{2EA} + \frac{M^2}{2EI} + \frac{M_T^2}{2GI_T} + c\,\frac{Q^2}{2GA} \right) dx$$

Princípio da Mínima Energia Potencial Total

Universidade Federal do ABC

U ⇨ **Expressa em função dos deslocamentos** v_i

$$\text{Ʉ}\left[v\right] = U\left(v\right) - \sum_{i=1}^{n} P_i v_i \;\Rightarrow\; \frac{\partial \text{Ʉ}\left[v\right]}{\partial v_i} = \frac{\partial U\left(v\right)}{\partial v_i} - P_i$$

Do Primeiro Teorema de Castigliano sabe-se que:

$$\frac{\partial U\left(v\right)}{\partial v_i} = P_i \;\Rightarrow\; \frac{\partial \text{Ʉ}\left[v\right]}{\partial v_i} = 0$$

O Método de Rayleigh-Ritz

$$\text{Ʉ}\left[v\right] = U\left(v\right) - \sum_{i=1}^{n} P_i v_i \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \text{Ʉ}\left[v\right]}{\partial v_i} = 0$$

$$v \approx \tilde{v} = \sum_{i=1}^{n} \breve{U}_i \text{ű}_i$$

$$\text{Ʉ}\left[\breve{U}_i\right], i = 1 \ldots n \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \text{Ʉ}\left[\tilde{v}\right]}{\partial \breve{U}_i} = 0$$

O Método de Rayleigh-Ritz

- As funções $\tilde{u}_i$:

a) Devem ser homogêneas no que diz respeito a satisfazer as condições de contorno em $\tilde{u}_u$;

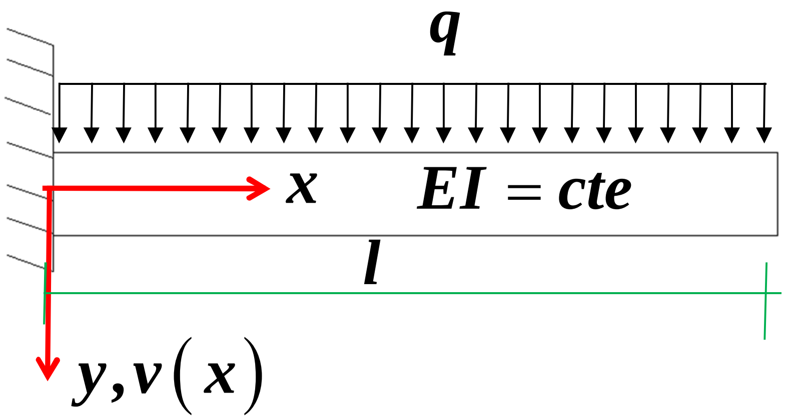
b) O conjunto de funções $\tilde{u}_i$ deve ser completo no domínio definido. No caso de uma aproximação polinomial, essa condição equivale impor que o grau mínimo do polinômio seja maior ou igual à maior ordem de derivada presente na expressão da energia potencial total;

c) As funções $\tilde{u}_i$ devem apresentar continuidade até a ordem m-1, onde m é a máxima ordem de derivada da função v que aparece na expressão da energia potencial total;

O Método de Rayleigh-Ritz aplicado aos Problemas da Mecânica Estrutural

Universidade Federal do ABC

- Equação da Linha Elástica e Cálculo de Deslocamentos:



$$d = -yv'e_1 + ve_2$$ → **Deslocamento**

$$\mathring{U}_x = -yv''$$ → **Compatibilidade → Deformação**

$$\mathring{u}_x = -yEv'' = \frac{M}{I_z}y \qquad v'' = -\frac{M}{EI_z}$$ → **Constitutiva e Equilíbrio**

O Método de Rayleigh-Ritz aplicado aos Problemas da Mecânica Estrutural

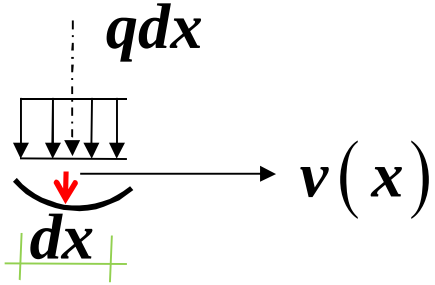
Universidade Federal do ABC

$$Ʉ = U + q$$

- Energia Potencial Interna.

$$U = \int_0^l \frac{M^2}{2EI} dx \qquad U = \int_0^l \frac{EI}{2} \left(v''(x) \right)^2 dx$$

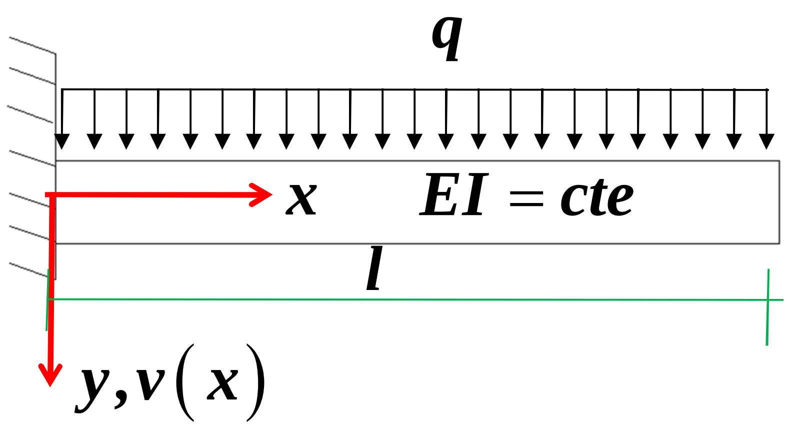
- Energia Potencial das Cargas Externas.



$$dq = -qv(x)\,dx \;\Rightarrow\; q = -\int_0^l qv(x)\,dx$$

O Método de Rayleigh-Ritz aplicado aos Problemas da Mecânica Estrutural

$$\text{Ʉ} = \int_0^l \left[\frac{EI}{2} \left(v''(x) \right)^2 - qv(x) \right] dx$$



$$v(x) \approx \tilde{v}(x) = \breve{U}_1 + \breve{U}_2 x + \breve{U}_3 x^2 + \breve{U}_4 x^3$$

$$\tilde{v}(0) = 0 \Rightarrow \breve{U}_1 = 0$$

$$\tilde{v}'(0) = 0 \Rightarrow \breve{U}_2 = 0$$

$$\tilde{v}(x) = \breve{U}_3 x^2 + \breve{U}_4 x^3$$

$$\text{Ʉ} = \int_0^l \left[\frac{EI}{2} \left(2\breve{U}_3 + 6\breve{U}_4 x \right)^2 - q\left(\breve{U}_3 x^2 + \breve{U}_4 x^3 \right) \right] dx$$

$$\tilde{v}''(x) = 2\breve{U}_3 + 6\breve{U}_4 x$$

O Método de Rayleigh-Ritz aplicado aos Problemas da Mecânica Estrutural

Universidade Federal do ABC

$$\text{Ʉ} = \int_0^l \left[EI\left(2\breve{U}_3^2 + 12\breve{U}_3\breve{U}_4 x + 18\breve{U}_4^2 x^2\right) - q\left(\breve{U}_3 x^2 + \breve{U}_4 x^3\right)\right] dx$$

$$\frac{d\text{Ʉ}}{d\breve{U}_3} = \int_0^l \left[EI\left(4\breve{U}_3 + 12\breve{U}_4 x\right) - q\left(x^2\right)\right] dx = 0$$

$$\frac{d\text{Ʉ}}{d\breve{U}_4} = \int_0^l \left[EI\left(12\breve{U}_3 x + 36\breve{U}_4 x^2\right) - q\left(x^3\right)\right] dx = 0$$

Integrando as duas equações, chega-se:

$$EI\left(4\breve{U}_3 + 6\breve{U}_4 l\right) - \frac{1}{3}ql^2 = 0 \qquad EI\left(6\breve{U}_3 + 12\breve{U}_4 l\right) - \frac{1}{4}ql^2 = 0$$

Resolvendo esse sistema de equações:

O Método de Rayleigh-Ritz aplicado aos Problemas da Mecânica Estrutural

$$\breve{U}_3 = \frac{5ql^2}{24EI} \qquad \breve{U}_4 = -\frac{ql}{12EI}$$

Portanto, a equação da linha elástica fica:

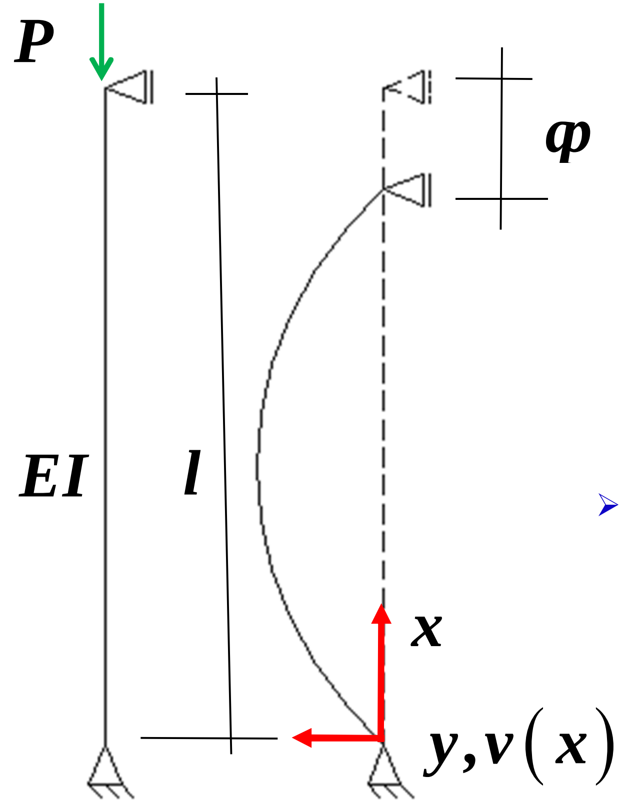
$$\tilde{v}(x) = \frac{5ql^2}{24EI}x^2 - \frac{ql}{12EI}x^3$$

O deslocamento na extremidade livre vale:

$$\tilde{v}(l) = \frac{ql^4}{8EI}$$ ⇨ Valor igual ao exato

O Método de Rayleigh-Ritz aplicado aos Problemas da Mecânica Estrutural

- Coluna Biarticulada: Carga Crítica de Flambagem



- Energia Potencial Interna.

$$U = \int_0^l \frac{EI}{2}\left(v''\left(x\right)\right)^2 dx$$

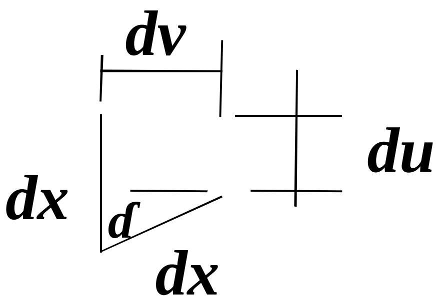
- Energia Potencial das Cargas Externas.

$$q = -p\varphi$$

Encurtamento do eixo da coluna ao atingir a carga P o valor crítico.

O Método de Rayleigh-Ritz aplicado aos Problemas da Mecânica Estrutural

Universidade Federal do ABC



Elemento infinitesimal da coluna deformada.

Supondo d pequeno,tem-se:

$$d = tgd = send = \frac{dv}{dx} = v' \longrightarrow$$

É a derivada da função que representa a elástica da coluna.

$$du = \left(1 - \cos d\right) dx \qquad \cos d = 1 - \frac{d^2}{2} + \frac{d^3}{24} - \cdots$$

O Método de Rayleigh-Ritz aplicado aos Problemas da Mecânica Estrutural

Universidade Federal do ABC

Tomando-se apenas os dois termos da série de Taylor, escreve-se:

$$du = \left(1 - \cos d\right)dx = \frac{1}{2}d^2 dx \quad \text{como} \quad d = v'$$

$$du = \frac{1}{2}\left(v'\left(x\right)\right)^2 dx$$

O encurtamento φ da coluna é obtida fazendo:

$$\varphi = \int_0^l du = \frac{1}{2}\int_0^l \left(v'\left(x\right)\right)^2 dx$$

$$\Pi = \frac{1}{2}\int_0^l EI\left(v'\left(x\right)\right)^2 dx - \frac{P}{2}\int_0^l \left(v'\left(x\right)\right)^2 dx$$

$$v\left(x\right) \approx \tilde{v}\left(x\right) = \alpha_1 sen\frac{\pi x}{l}$$

$$\Pi = \frac{1}{2}\int_0^l EI\frac{\pi^4\alpha_1^2}{l^4} sen^2\frac{\pi x}{l} dx - \frac{P}{2}\int_0^l \frac{\pi^2\alpha_1^2}{l^2} cos^2\frac{\pi x}{l} dx$$

Integrando a equação acima:

$$\Pi = \left(\frac{EI\pi^4}{4l^3} - \frac{P\pi^2}{4l}\right)\alpha_1^2$$

O Método de Rayleigh-Ritz aplicado aos Problemas da Mecânica Estrutural

$$\frac{\partial U}{\partial \breve{U}_1} = 0 \Rightarrow \left(\frac{EI\acute{}^{\,4}}{4l^3} - \frac{P\acute{}^{\,2}}{4l} \right) \breve{U}_1 = 0$$

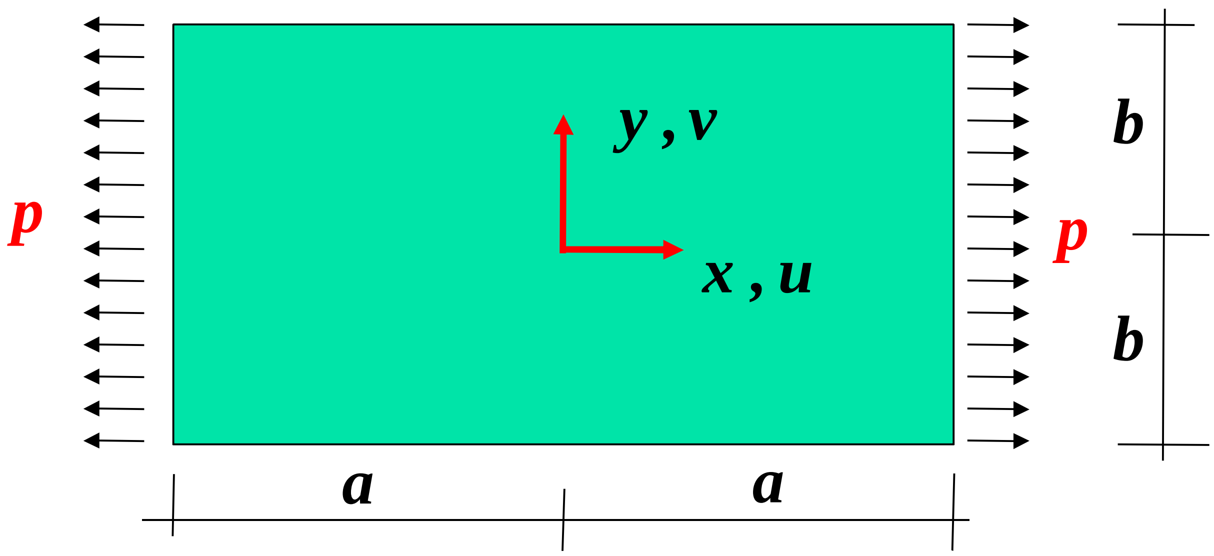
Como $\breve{U}_1$ é arbitrário:

$$P = P_{cr} = \frac{\acute{}^{\,2} EI}{l^2}$$

O Método de Rayleigh-Ritz aplicado aos Problemas da Mecânica Estrutural

Universidade Federal do ABC

- Chapa Tracionada



Estado plano de tensão:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \qquad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \Rightarrow \boxed{\textbf{Compatibilidade}}$$

O Método de Rayleigh-Ritz aplicado aos Problemas da Mecânica Estrutural

Universidade Federal do ABC

Lei Constitutiva→Lei de Hooke (material elástico linear)

$$\sigma_x = \lambda\left(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y\right) \qquad \sigma_y = \lambda\left(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x\right) \qquad \tau_{xy} = \mu\gamma_{xy}$$

$$\lambda = \frac{E}{1-\nu^2} \qquad \mu = \frac{E}{2\left(1+\nu\right)}$$

$$\Pi = \frac{1}{2}\int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b}\left(\sigma_x\varepsilon_x + \sigma_y\varepsilon_y + \tau_{xy}\gamma_{xy}\right)dxdy - p\int_{-b}^{b}u\Big|_{x=a}dy - \left(-p\right)\int_{-b}^{b}u\Big|_{x=-a}dy$$

$$\Pi = \frac{1}{2}\int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b}\left(\lambda\varepsilon_x^2 + 2\lambda\nu\varepsilon_x\varepsilon_y + \lambda\varepsilon_y^2 + \mu\gamma_{xy}^2\right)dxdy - p\int_{-b}^{b}u\Big|_{x=a}dy + \left(p\right)\int_{-b}^{b}u\Big|_{x=-a}dy$$

O Método de Rayleigh-Ritz aplicado aos Problemas da Mecânica Estrutural

Funções aproximativas para os deslocamentos:

$$u = Ax \qquad v = By$$

$$\mathring{U}_x = A \qquad \mathring{U}_y = B \qquad ɔ_{xy} = 0$$ **Compatibilidade**

$$Ʉ = \frac{1}{2}\int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b}\left(ŬA^2 + 2ŬgAB + ŬB^2\right)dxdy - 2\,p\int_{-b}^{b} Aady$$

Integrando a equação acima:

$$Ʉ = 2Ŭ\left(A^2 + 2gŬAB + B^2\right)ab - 4\,pAab$$

O Método de Rayleigh-Ritz aplicado aos Problemas da Mecânica Estrutural

$$\frac{\partial Ʉ}{\partial A} = \left(4\breve{U}A + 4\breve{U}gB\right)ab - 4\,pab = 0 \Rightarrow A + gB = \frac{p}{\breve{U}}$$

$$\frac{\partial Ʉ}{\partial B} = \left(4\breve{U}gA + 4\breve{U}B\right)ab = 0 \Rightarrow gA = -B$$

Resolvendo esse sistema de equações:

$$A = \frac{p}{\left(1 - g^2\right)\breve{U}} \qquad\qquad B = -\frac{gp}{\left(1 - g^2\right)\breve{U}}$$

O Método de Rayleigh-Ritz aplicado aos Problemas da Mecânica Estrutural

Universidade Federal do ABC

Finalmente:

Deslocamentos

$$u = \frac{p}{\left(1 - g^2\right)\breve{U}}x \qquad v = -\frac{gp}{\left(1 - g^2\right)\breve{U}}y$$

Deformações

$$\mathring{U}_x = \frac{p}{E} \qquad \mathring{U}_y = -\frac{gp}{E} \qquad \text{ɔ}_{xy} = 0$$

Tensões

$$\mathring{u}_x = p \qquad \mathring{u}_y = 0 \qquad \H{U}_{xy} = 0$$

Comentários Finais sobre o Método de Rayleigh-Ritz

- O método reduz o problema da mínima energia potencial total a um sistema de equações algébricas, passando a determinar soluções num espaço de dimensão finita. Em outras palavras, é como se o contínuo, caracterizado por um número infinito de graus de liberdade, fosse substituído por um 'modelo discreto' capaz de se deformar segundo um número finito de graus de liberdade (ou coordenadas generalizadas $\breve{U}_i$. Por essa razão, tal substituição é referenciada como uma 'discretização' do problema.

Comentários Finais sobre o Método de Rayleigh-Ritz

Universidade Federal do ABC

- Se as condições de contorno não são homogêneas

$\left(\bar{u} \neq 0 \;\; em \;\; \tilde{u}_u \right)$ o método se aplica com a seguinte consideração:

- A solução aproximativa é definida como:

$$v \approx \tilde{v} = \sum_{i=1}^{n} \breve{U}_i \H{u}_i + v_o$$

onde v_o é uma função que satisfaz as restrições essenciais de contorno e as $\H{u}_i$ são homogêneas naquelas restrições.

Comentários Finais sobre o Método de Rayleigh-Ritz

- Em alguns casos a dificuldade de se encontrar funções aproximativas admissíveis e definidas sobre todo o domínio do problema induz à definição de subdomínios, no interior dos quais as funções não necessitam satisfazer todas as condições de contorno do problema original. Neste caso devem ser observadas condições de continuidade nas fronteiras entre subdomínios. A utilização de subdomínios empresta ao método de Rayleigh-Ritz características similares ao do Método dos Elementos Finitos.