UFABC

BKC 0103-15 – Física Quântica – Segunda Avaliação - Noturno – prova A

Professor: Luciano Cruz Turma: ______

Nome: ____ R.A. ________________

Regras:

A avaliação tem duração de 1 hora e 40 minutos.
É proibido o uso de calculadoras, celulares e outros eletrônicos similares.
É proibida qualquer consulta a materiais auxiliares ou colegas, a avaliação será anulada caso isto ocorra.
Todas as respostas devem ser justificadas e os cálculos devem ser apresentados explicitamente.
Boa sorte!

Questões:

1 – (3 pontos) Considere um partícula de massa m confinada em um poço infinito unidimensional de largura L, cujo potencial é dado por: V(x) = 0 para 0 < x < L e V(x) → ∞, x < 0 ou x > L. Esta particula se encontra em n = 5, cuja função de onda é dada por $\psi_5(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\,\text{sen}\left(\frac{5\pi}{L}x\right)$ e a energia é $E_5 = \frac{25}{2}\frac{\hbar^2\pi^2}{mL^2}$.

(a) (1,0pt) Qual a probabilidade de encontrar essa partícula entre L/20 e L/2 para o estado do enunciado?

(b) (1,0pt) Determine o valor de $\langle p^2 \rangle$ para esta partícula no estado dado.

(c) (1,0pt) Considere o caso de um poço finito de largura L e altura (do potencial) de $2E_5$. Quantos estados ligados temos neste poço? Justifique a sua resposta.

2 – (3,5 pontos) Considere uma partícula livre de massa M e energia cinética 12ε que se desloca da esquerda para direita. No ponto x = 0, o potencial muda bruscamente para 8ε e assim permanece para todo valor de x > 0 (solução da função de onda: $\psi_I = Ae^{ik_1x} + Be^{-ik_1x}, para\ x < 0\ e\ \psi_{II} = Ce^{ik_2x}, para\ x > 0$).

(a) (2,0pt) Quais os valores dos coeficientes de reflexão e transmissão associados a esta partícula quando atinge o degrau?

(b) (1,5pt) Faça o esboço do módulo ao quadrado (densidade de probabilidade) da função de onda desta partícula em todo espaço. Explique e justifique o porquê deste ser o esboço da densidade de probabilidade.

3 – (3,5 pontos) Considere um átomo de Hidrogênio (Z=1) de massa reduzida μ, o elétron deste átomo encontra-se no estado com a função de onda radial $R_{32}\,(r) = A\, r^2\, e^{-r/3a_0}$, com n =3 e l =2 e a_0 é o raio de Bohr. O potencial de interação entre o núcleo e o elétron é dado por $V(r) = \frac{\hbar^2}{\mu a_0}\frac{1}{r}$.

(a) (2,0pt) Mostre que esta função de onda satisfaz a equação Schrodinger radial e determine o valor da energia (E) em termos de constantes universais, μ e a_0.

(b) (1,5pt) Calcule a constante de normalização para a função de onda radial dada no enunciado.

UFABC

BKC 0103-15 – Física Quântica – Segunda Avaliação - Noturno – prova B

Professor: Luciano Cruz Turma: ______

Nome: ____ R.A. ______________

Regras:

A avaliação tem duração de 1 hora e 40 minutos.

É proibido o uso de calculadoras, celulares e outros eletrônicos similares.

É proibida qualquer consulta a materiais auxiliares ou colegas, a avaliação será anulada caso isto ocorra.

Todas as respostas devem ser justificadas e os cálculos devem ser apresentados explicitamente.

Boa sorte!

Questões:

1 – (3 pontos) Considere um partícula de massa m confinada em um poço infinito unidimensional de largura L, cujo potencial é dado por: V(x) = 0 para 0 < x < L e V(x) → ∞, x < 0 ou x > L. Esta particula se encontra em n = 4, cuja função de onda é dada por $\psi_4(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\,\text{sen}\left(\frac{4\pi}{L}x\right)$ e a energia é $E_4 = 8\frac{\hbar^2\pi^2}{mL^2}$.

(a) (1,0pt) Qual a probabilidade de encontrar essa partícula entre L/24 e L/4 para o estado do enunciado?

(b) (1,0pt) Determine o valor de $\langle p^2 \rangle$ para esta partícula no estado dado.

(c) (1,0pt) Considere o caso de um poço finito de largura L e altura (do potencial) de $4E_4$. Quantos estados ligados temos neste poço? Justifique a sua resposta.

2 – (3,5 pontos) Considere uma partícula livre de massa M e energia cinética 10ε que se desloca da esquerda para direita. No ponto x = 0, o potencial muda bruscamente para 8ε e assim permanece para todo valor de x > 0 (solução da função de onda: $\psi_I = Ae^{ik_1x} + Be^{-ik_1x}, para\ x < 0\ e\ \psi_{II} = Ce^{ik_2x}, para\ x > 0$).

(a) (2,0pt) Quais os valores dos coeficientes de reflexão e transmissão associados a esta partícula quando atinge o degrau?

(b) (1,5pt) Faça o esboço do módulo ao quadrado (densidade de probabilidade) da função de onda desta partícula em todo espaço. Explique e justifique o porquê deste ser o esboço da densidade de probabilidade.

3 – (3,5 pontos) Considere um átomo de Hidrogênio (Z=1) de massa reduzida μ, o elétron deste átomo encontra-se no estado com a função de onda radial $R_{43}(r) = A\,r^3\,e^{-r/4a_0}$, com n =4 e l =3 e a_0 é o raio de Bohr. O potencial de interação entre o núcleo e o elétron é dado por $V(r) = \frac{\hbar^2}{\mu a_0}\frac{1}{r}$.

(a) (2,0pt) Mostre que esta função de onda satisfaz a equação Schrodinger radial e determine o valor da energia (E) em termos de constantes universais, μ e a_0

(b) (1,5pt) Calcule a constante de normalização para a função de onda radial dada no enunciado.

UFABC

BKC 0103-15 – Física Quântica – Segunda Avaliação - Noturno – prova C

Professor: Luciano Cruz   Turma: ______

Nome: ____ R.A. ________________

Regras:
A avaliação tem duração de 1 hora e 40 minutos.
É proibido o uso de calculadoras, celulares e outros eletrônicos similares.
É proibida qualquer consulta a materiais auxiliares ou colegas, a avaliação será anulada caso isto ocorra.
Todas as respostas devem ser justificadas e os cálculos devem ser apresentados explicitamente.
Boa sorte!

Questões:

1 – (3 pontos) Considere um partícula de massa m confinada em um poço infinito unidimensional de largura L, cujo potencial é dado por: V(x) = 0 para 0 < x < L e V(x) → ∞, x < 0 ou x > L. Esta particula se encontra em n = 3, cuja função de onda é dada por $\psi_3(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\,\text{sen}\left(\frac{3\pi}{L}x\right)$ e a energia é $E_3 = \frac{9}{2}\frac{\hbar^2\pi^2}{mL^2}$.

(a) (1,0pt) Qual a probabilidade de encontrar essa partícula entre L/12 e L/4 para o estado do enunciado?

(b) (1,0pt) Determine o valor de $\langle p^2 \rangle$ para esta partícula.

(c) (1,0pt) Considere o caso de um poço finito de largura L e altura (do potencial) de $5E_3$. Quantos estados ligados temos neste poço? Justifique a sua resposta.

2 – (3,5 pontos) Considere uma partícula livre de massa M e energia cinética 16ε que se desloca da esquerda para direita. No ponto x = 0, o potencial muda bruscamente para 7ε e assim permanece para todo valor de x > 0 (solução da função de onda: $\psi_I = Ae^{ik_1x} + Be^{-ik_1x}, para\ x < 0\ e\ \psi_{II} = Ce^{ik_2x}, para\ x > 0$).

(a) (2,0pt) Quais os valores dos coeficientes de reflexão e transmissão associados a esta partícula quando atinge o degrau?

(b) (1,5pt) Faça o esboço do módulo ao quadrado (densidade de probabilidade) da função de onda desta partícula em todo espaço. Explique e justifique o porquê deste ser o esboço da densidade de probabilidade.

3 – (3,5 pontos) Considere um átomo de Hidrogênio (Z=1) de massa reduzida μ, o elétron deste átomo encontra-se no estado com a função de onda radial $R_{54}(r) = A\, r^4\, e^{-r/5a_0}$, com n =5 e l =4 e a_0 é o raio de Bohr. O potencial de interação entre o núcleo e o elétron é dado por $V(r) = \frac{\hbar^2}{\mu a_0}\frac{1}{r}$.

(a) (2,0pt) Mostre que esta função de onda satisfaz a equação Schrodinger radial e determine o valor da energia (E) em termos de constantes universais, μ e a_0

(b) (1,5pt) Calcule a constante de normalização para a função de onda radial dada no enunciado.

UFABC

BKC 0103-15 – Física Quântica – Segunda Avaliação - Noturno – prova D

Professor: Luciano Cruz   Turma: ______

Nome: ____ R.A. ________________

Regras:
A avaliação tem duração de 1 hora e 40 minutos.
É proibido o uso de calculadoras, celulares e outros eletrônicos similares.
É proibida qualquer consulta a materiais auxiliares ou colegas, a avaliação será anulada caso isto ocorra.
Todas as respostas devem ser justificadas e os cálculos devem ser apresentados explicitamente.
Boa sorte!

Questões:

1 – (3 pontos) Considere um partícula de massa m confinada em um poço infinito unidimensional de largura L, cujo potencial é dado por: V(x) = 0 para 0 < x < L e V(x) → ∞, x < 0 ou x > L. Esta particula se encontra em n = 2, cuja função de onda é dada por $\psi_2(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\,\text{sen}\left(\frac{2\pi}{L}x\right)$ e a energia é $E_2 = 2\frac{\hbar^2\pi^2}{mL^2}$.

(a) (1,0pt) Qual a probabilidade de encontrar essa partícula entre L/8 e 3L/4 para o estado do enunciado?

(b) (1,0pt) Determine o valor de $\langle p^2 \rangle$ para esta partícula.

(c) (1,0pt) Considere o caso de um poço finito de largura L e altura (do potencial) de $7E_2$. Quantos estados ligados temos neste poço? Justifique a sua resposta.

2 – (3,5 pontos) Considere uma partícula livre de massa M e energia cinética 25ε que se desloca da esquerda para direita. No ponto x = 0, o potencial muda bruscamente para 16ε e assim permanece para todo valor de x >0 (solução da função de onda: $\psi_I = Ae^{ik_1x} + Be^{-ik_1x}, para\ x < 0\ e\ \psi_{II} = Ce^{ik_2x}, para\ x > 0$).

(a) (2,0pt) Quais os valores dos coeficientes de reflexão e transmissão associados a esta partícula quando atinge o degrau?

(b) (1,5pt) Faça o esboço do módulo ao quadrado (densidade de probabilidade) da função de onda desta partícula em todo espaço. Explique e justifique o porquê deste ser o esboço da densidade de probabilidade.

3 – (3,5 pontos) Considere um átomo de Hidrogênio (Z=1) de massa reduzida μ, o elétron deste átomo encontra-se no estado com a função de onda radial $R_{65}\,(r) = A\,r^5\,e^{-r/6a_0}$, com n =6 e l =5 e a_0 é o raio de Bohr. O potencial de interação entre o núcleo e o elétron é dado por $V(r) = \frac{\hbar^2}{\mu a_0}\frac{1}{r}$.

(a) (2,0pt) Mostre que esta função de onda satisfaz a equação Schrodinger radial e determine o valor da energia (E) em termos de constantes universais, μ e a_0

(b) (1,5pt) Calcule a constante de normalização para a função de onda radial dada no enunciado.

Física Quântica 2016.3 – P2 – INFORMAÇÕES QUE VOCÊ PODE (OU NÃO) PRECISAR

Relações, equações e fórmulas principais

$$\Delta x\,\Delta p \;\geq\; \frac{\hbar}{2} \qquad \Delta x = \sigma_x = \sqrt{\langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2} \qquad E = hf = \hbar\omega \qquad E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{p^2}{2m}$$

$$k^2 = \frac{2m}{\hbar^2}\left[E_T - V\right] \qquad T = \frac{k_2}{k_1}\frac{|C|^2}{|A|^2} = \frac{4k_1k_2}{(k_1+k_2)^2} \qquad R = \frac{|B|^2}{|A|^2} = \left(\frac{k_1-k_2}{k_1+k_2}\right)^2 \qquad T \approx 16\frac{E}{V_0}\left(1-\frac{E}{V_0}\right)e^{-2\alpha a} \qquad \alpha^2 = \frac{2m\,(V_0-E)}{\hbar^2}$$

$$\langle f(x)\rangle_\psi = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*(x)\; f(x)\; \psi(x)\; dx \qquad \hat{p}_x\psi(x) \;=\; -i\hbar\frac{d}{dx}\psi(x) \qquad p_x^2\psi(x) = -\hbar^2\frac{d^2}{dx^2}\psi(x)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Psi(x,t) + V(x,t)\,\Psi(x,t) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(x,t)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\psi(x) + V(x)\,\psi(x) = E\,\psi(x) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty}\psi^*(x)\psi(x)dx = 1$$

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d}{dr}R(r)\right) - \left[V(r) - \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu r^2}\right]R(r) = ER(r) \qquad \langle f(r)\rangle = \int_0^\infty R_{nl}^*(r)f(r)R_{nl}(r)r^2\,dr$$

$$\int_0^\infty\int_0^\pi\int_0^{2\pi} |\psi_{nlm}(r,\theta,\varphi)|^2\, r^2\sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi = \int_0^\infty |R_{nl}(r)|^2\, r^2\, dr = 1$$

$$a_0 = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{\mu e^2} \qquad E_n = -\frac{\mu}{2}\left(\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0\hbar}\right)^2\frac{1}{n^2}$$

$$n = 1,2,3\ldots \qquad l = 0,1,2,\ldots,n-1 \qquad m = 0,\pm1,\pm2,\ldots,\pm l$$

Tabela de Derivadas e Integrais

$$y = u^n \quad\Rightarrow\quad y' = n.u^{n-1}.u' \qquad \int u^n\,du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c, \quad n \neq -1 \qquad \int u\cdot dv = uv - \int v\,du$$

$$y = e^u \quad\Rightarrow\quad y' = e^u.u' \qquad \int e^{at}\,dt = \frac{1}{a}e^{at} + C \qquad \int t^n\cdot e^{at}\,dt = \frac{1}{a}t^n e^{at} - \frac{n}{a}\int t^{n-1}e^{at}\,dt$$

$$y = \mathrm{sen}(u) \quad\Rightarrow\quad y' = \cos(u).u' \qquad \int \mathrm{sen}(at)\,dt = \frac{-1}{a}\cos(at) + C$$

$$y = \cos(u) \quad\Rightarrow\quad y' = -\,\mathrm{sen}(u).u' \qquad \int \cos(at)\,dt = \frac{1}{a}\mathrm{sen}(at) + C$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^{2m}e^{-\beta x^2}dx = (-1)^m\pi^{1/2}\,\frac{d^m}{d\beta^m}\left[\beta^{-1/2}\right], \mathrm{m} = 0,1,2,3\ldots \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta x^2}dx = \sqrt{\frac{\pi}{\beta}}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^{2m+1}e^{-\beta x^2}dx = 0, \mathrm{m} = 0,1,2,3\ldots \qquad \int_0^{+\infty} x^m e^{-\frac{x}{\alpha}}dx = m!\;\alpha^{n+1}, \mathrm{m} = 0,1,2,3\ldots$$

Relação Trigonométricas

α	0° (0 рад)	30° (π/6)	45° (π/4)	60° (π/3)	90° (π/2)	180° (π)	270° (3π/2)	360° (2π)
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	−1	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	−1	0	1

$$\mathrm{sen}^2(\theta) = \frac{1-\cos(2\theta)}{2} \qquad \cos^2(\theta) = \frac{1+\cos(2\theta)}{2} \qquad \mathrm{sen}^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1$$

$$sen(a\pm b) = sen(a)\cos(b) \pm \cos(a)\cos(b)$$

$$\cos(a\pm b) = \cos(a)\cos(b) \mp sen(a)sen(b)$$

$$e^{\pm ix} = \cos(x) \pm isen(x) \qquad \cos(x) = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{} \qquad sen(x) = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{}$$

Q.1-

a) No caso geral, $\Psi_n = \sqrt{\frac{2}{L}} \, sen\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$

$$P(x_1,x_2) = \int_0^L \Psi_n^*(x)\,\Psi_n(x)\,dx = \frac{2}{L}\int_{x_1}^{x_2} sen^2\left(\frac{n\pi}{L}x\,dx\right)$$

Usando a relação $sen^2\theta = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2\theta)$

$$P(x_1,x_2) = \frac{2}{L}\int_{x_1}^{x_2}\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos\left(\frac{2m\pi}{L}x\right)\right]dx = \frac{x}{L}\Bigg|_{x_1}^{x_2} - \frac{1}{2n\pi}\, sen\left(\frac{2n\pi}{L}x\right)\Bigg|_{x_1}^{x_2}$$

$$P(x_1,x_2) = \frac{1}{L}(x_2 - x_1) - \frac{1}{2n\pi}\left[sen\left(\frac{2n\pi}{L}x_2\right) - sen\left(\frac{2n\pi}{L}x_1\right)\right]$$

Prova A

$n = 5$; $x_1 = L/20$; $x_2 = L/2$

$$P(L/20, L/2) = \frac{9}{20} - \frac{1}{10\pi}\left[sen(5\pi) - sen\left(\frac{\pi}{2}\right)\right] = \frac{9}{20} + \frac{1}{10\pi} \approx 0{,}48$$

Prova B

$n = 4$; $x_1 = L/24$; $x_2 = L/4$

$$P(L/24, L/4) = \frac{5}{24} - \frac{1}{8\pi}\left[sen\overset{0}{(2\pi)} - sen\overset{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\left(\frac{\pi}{3}\right)}\right] = \frac{5}{24} + \frac{\sqrt{3}}{16\pi} \approx 0{,}24$$

Prova C

$n = 3$; $x_1 = L/12$; $x_2 = L/4$

$$P(L/12, L/4) = \frac{1}{6} - \frac{1}{6\pi}\left[sen\left(\frac{3\pi}{2}\right) - sen\left(\frac{\pi}{2}\right)\right] = \frac{1}{6} + \frac{1}{3\pi} \approx 0{,}27$$

Prova D

$n = 2$; $x_1 = L/8$; $x_2 = \frac{3L}{4}$

$$P(L/8, 3L/4) = \frac{5}{8} - \frac{1}{4\pi}\left[sen(3\pi) - sen\left(\frac{\pi}{2}\right)\right] = \frac{5}{8} + \frac{1}{4\pi} \approx 0{,}70$$

Q1

b) $$\langle p^2 \rangle = \int_0^L \Psi_n^*(x)\left[-\hbar^2 \frac{d^2}{dx^2}\right]\Psi(x)\,dx \qquad \Psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\,\text{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

$$\frac{d}{dx}\Psi_n(x) = \frac{n\pi}{L}\sqrt{\frac{2}{L}}\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

$$\frac{d^2}{dx^2}\Psi_n(x) = -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2\sqrt{\frac{2}{L}}\,\text{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = \left(-\frac{n\pi}{L}\right)^2\Psi_n(x)$$

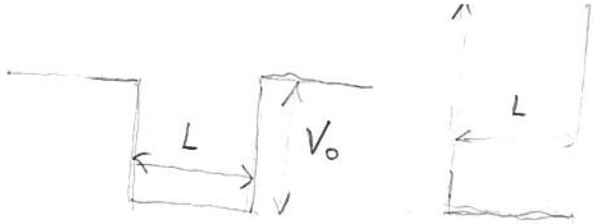
$$\langle p^2 \rangle = \int_0^L \Psi_n^*(x)\left[+\frac{\hbar^2\pi^2 n^2}{L^2}\Psi_n(x)\right]dx = \frac{\hbar^2\pi^2 n^2}{L^2}\overbrace{\int_0^L \Psi_n^*(x)\Psi_n(x)\,dx}^{=1} = \frac{\hbar^2\pi^2 n^2}{L^2}$$

outro modo de ver: $E = n^2\dfrac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2} = \dfrac{p^2}{2m} \Rightarrow \langle p^2 \rangle = 2m\langle E^2 \rangle$ para $V(x)=0$

Prova A	Prova B	Prova C	Prova D
$n = 5$	$n = 4$	$n = 3$	$n = 2$
$\langle p^2 \rangle = 25\dfrac{\hbar^2\pi^2}{L^2}$	$\langle p^2 \rangle = 16\dfrac{\hbar^2\pi^2}{L^2}$	$\langle p^2 \rangle = 9\dfrac{\hbar^2\pi^2}{L^2}$	$\langle p^2 \rangle = 4\dfrac{\hbar^2\pi^2}{L^2}$

Q1

c)



$E_{\text{poço finito}} \lesssim E_{\text{poço finito}}$

Sabemos que para poço infinito $E_n = \dfrac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2} n^2$

Pelo exercicio $V_0 = \alpha E_n$ Vamos considerar E_m (energia do estado no poço finito)

$$E_m \approx \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2} m^2 \lesssim \alpha \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2} n^2$$

$m \leq \sqrt{\alpha}\, n$, onde m é o numero de estado ligados do poço finito de altura $V_0 = \alpha E_n$

Prova A	Prova B	Prova C	Prova D
$n = 5$	$n = 4$	$n = 3$	$n = 2$
$V_0 = 2 \cdot E_5$	$V_0 = 4 \cdot E_4$	$V_0 = 5 \cdot E_3$	$V_0 = 7 \cdot E_2$
$m \approx 7$	$m \approx 8$	$m \approx 6$	$m \approx 5$

Q2:

a) para $x < 0$ $K_1^2 = \frac{2m}{\hbar^2} E$ e para $x > 0$ $K_2^2 = \frac{2m}{\hbar^2}(E - V_0)$

Para todas as prova: $E = a\varepsilon$ e $V = b\varepsilon$ com $a > b$

$K_1^2 = \frac{2ma\varepsilon}{\hbar^2}$ e $K_2^2 = \frac{2m(a-b)\varepsilon}{\hbar^2}$

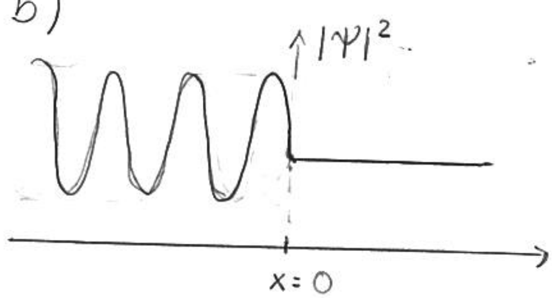
$\left(\frac{K_1}{K_2}\right)^2 = \frac{a}{a-b} \Rightarrow K_1 = \sqrt{\frac{a}{a-b}}\, K_2$

Para determinar R e T, basta substituir nas expressões:

$R = \frac{(K_1 - K_2)^2}{(K_1 + K_2)^2}$ $T = \frac{4K_1K_2}{(K_1 + K_2)^2}$

Prova A	Prova B	Prova C	Prova D
$E = 12\varepsilon$	$E = 10\varepsilon$	$E = 16\varepsilon$	$E = 25\varepsilon$
$V = 8\varepsilon$	$V = 8\varepsilon$	$V = 7\varepsilon$	$V = 16\varepsilon$
$K_1 = \sqrt{3}K_2$	$K_1 = \sqrt{5}K_2$	$K_1 = \frac{4}{3}K_2$	$K_1 = \frac{5}{3}K_2$
$R = \frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} \approx 0{,}07$	$R = \frac{3-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}} \approx 0{,}15$	$R = \frac{1}{49} \approx 0{,}02$	$R = \frac{1}{16} \approx 0{,}06$
$T = \frac{2\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} \approx 0{,}93$	$T = \frac{2\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}} \approx 0{,}85$	$T = \frac{48}{49} \approx 0{,}98$	$T = \frac{15}{16} \approx 0{,}94$

b)



Para todas as provas.

Para $x < 0$, temos Ψ_{inc} e Ψ_{refl} e a interferencia dessas ondas temos uma oscilação.

Para $x > 0$, temos apenas Ψ_{trans} que nos dá um valor constante.

Isso pode ser visto pelo calculo directo com as funções de onda (dadas na questão)

Q3-

a) Devemos verificar que a função de onda $R_{nl}(r)$ satisfaz a eq.:

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu r^2}\frac{d}{dr}\left[r^2\frac{d}{dr}R(r)\right]-\left[V(r)-\frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu r^2}\right]R(r)=ER(r)$$

A função de onda tem a forma geral: $R(r)=A\,r^{n-1}e^{-r/na_0}$, assim:

$$\frac{d}{dr}R(r)=(n-1)r^{n-2}Ae^{-r/na_0}-\frac{1}{na_0}r^{n-1}Ae^{-r/na_0}$$

$$r^2\frac{d}{dr}R(r)=(n-1)r^nAe^{-r/na_0}-\frac{1}{na_0}r^{n+1}Ae^{-r/na_0}$$

$$\frac{d}{dr}\left[r^2\frac{dR(r)}{dr}\right]=(n-1)n\underbrace{Ar^{n-1}e^{-r/na_0}}_{R(r)}-\frac{1}{na_0}\Big[\underbrace{(n-1)+(n+1)}_{2n}\Big]\underbrace{Ar^ne^{-r/na_0}}_{rR(r)}+$$

$$+\frac{1}{n^2a_0^2}\underbrace{Ar^{n+1}e^{-r/na_0}}_{r^2R(r)}=(n^2-n)R(r)-\frac{2}{a_0}rR(r)+\frac{1}{n^2a_0^2}r^2R(r)$$

Portanto:

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu r^2}\left[(n^2-n)R(r)-\frac{2}{a_0}rR(r)+\frac{1}{n^2a_0^2}R(r)\right]-\left[\frac{\hbar^2}{\mu a_0}\frac{1}{r}-\frac{\hbar^2(n-1).n}{2\mu r^2}\right]R(r)=ER(r)$$

$$\cancel{-\frac{\hbar^2}{2\mu r^2}(n^2-n)R(r)}+\cancel{\frac{\hbar^2}{\mu a_0}\frac{R(r)}{r}}-\frac{\hbar^2}{2\mu a_0^2n^2}R(r)-\cancel{\frac{\hbar^2}{\mu a_0}\frac{R(r)}{r}}+\cancel{\frac{\hbar^2(n^2-n)}{2\mu r^2}R(r)}=ER(r)$$

$$E=-\frac{\hbar^2}{2\mu a_0^2}\frac{1}{n^2}.$$ Satisfaz a eq. de Schrodinger com este valor de energia.

Prova A	Prova B	Prova C	Prova D
$n=3 \quad l=2$	$n=4 \quad l=3$	$n=5 \quad l=4$	$n=6 \quad l=5$
$E_3=-\frac{1}{18}\frac{\hbar^2}{\mu a_0^2}$	$E_4=-\frac{1}{32}\frac{\hbar^2}{\mu a_0^2}$	$E_5=-\frac{1}{50}\frac{\hbar^2}{\mu a_0^2}$	$E_6=-\frac{1}{72}\frac{\hbar^2}{\mu a_0^2}$

13

b) A condição de normalização:

$$\int_0^\infty |R_{nl}|^2 r^2 dr = 1$$ Temos:

$$\int_0^\infty A^2 r^{2(n-1)} e^{-2r/na_0} r^2 dr = A^2 \int_0^\infty r^{2n} e^{-2r/na_0} dr = 1$$

Do formulario: $\int_0^\infty x^m e^{-x/\alpha} d\alpha = m!\, \alpha^{m+1}$, vemos que: $m = 2n$

$\alpha = \frac{na_0}{2}$

$$A^2 \cdot (2n)! \left(\frac{na_0}{2}\right)^{2n+1} = 1 \Rightarrow A = \left(\frac{2}{na_0}\right)^{\frac{2n+1}{2}} \frac{1}{\sqrt{(2n)!}}$$

Prova A

$n = 3 \quad l = 2$

$$A = \left(\frac{2}{3a_0}\right)^{7/2} \frac{1}{\sqrt{6!}}$$

Prova B

$n = 4 \quad l = 3$

$$A = \left(\frac{1}{2a_0}\right)^{9/2} \frac{1}{\sqrt{8!}}$$

Prova C

$n = 5 \quad l = 4$

$$A = \left(\frac{2}{5a_0}\right)^{11/2} \frac{1}{\sqrt{10!}}$$

Prova D

$n = 6 \quad l = 5$

$$A = \left(\frac{1}{3a_0}\right)^{13/2} \frac{1}{\sqrt{12!}}$$