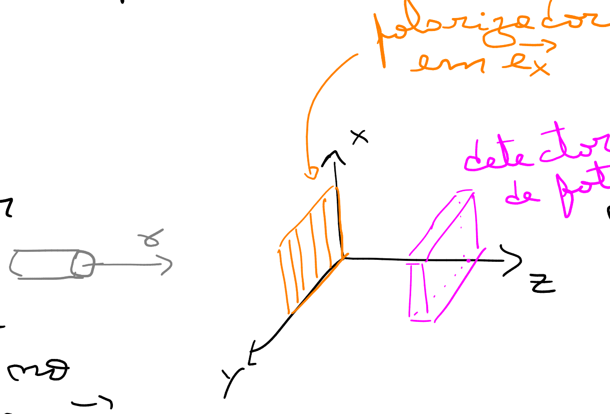
Aula de Dúvidas 2 (12/Fev)

Decomposição espectral de fotões



Laser que emite fotões no estado $\vec{e_p}$,

↳ $\vec{e_p} = \cos\theta \, \vec{e_x} + \operatorname{sen}\theta \, \vec{e_y}$

onde "θ" é escolhido por quem prepara o laser.

Resultados possíveis de medição

↳ passa / detector vê-o

↳ não-passa / detector não o detecta

A cada "auto-resultado" temos um "auto-estado" associado:

* auto-resultado "passa" $\Longrightarrow$ "auto-estado" $\vec{e_x}$.

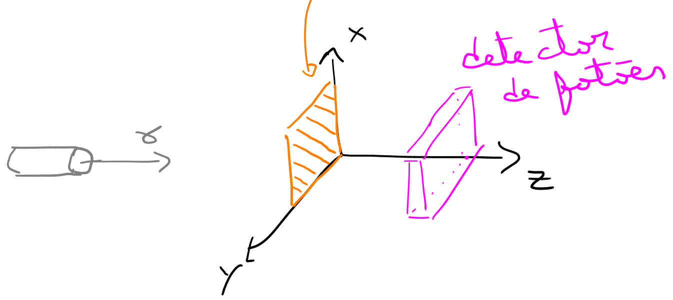
* auto-resultado "não-passa" $\Longrightarrow$ "auto-estado" $\vec{e_y}$.

Mas e se agora usarmos um outro polarizador?

[E o mesmo laser, que prepara os fotões no mesmo estado, $\vec{e_p} = \cos\theta \, \vec{e_x} + \operatorname{sen}\theta \, \vec{e_y}$.]

polarizador
em $\vec{e_w} = \cos\alpha \, \vec{e_x} + \operatorname{sen}\alpha \, \vec{e_y}$

↳ onde α é escolhido pelo experimentalista (por ex., $\alpha = \pi/4 = 45°$).



Como devemos fazer a decomposição espectral do nosso estado do fotão, $\vec{e_p}$, neste caso?

Queremos sempre fazer a decomposição espectral do estado em termos do conjunto de resultados possíveis da medição que vamos fazer

↳ Para novo polarizador:

* auto-resultado "passa" ⟹ "auto-estado" $\vec{e_\omega}$.
* auto-resultado "não-passa" ⟹ "auto-estado" $\vec{e_{\perp\omega}}$.

Ou seja, vamos querer escrever $\vec{e_p}$, que dá o estado do fotão, em termos de $\vec{e_\omega}$ e de $\vec{e_{\perp\omega}}$ (essencialmente uma nova base de auto-estados claramente relacionada com os auto-resultados possíveis numa medição com o novo polarizador).

Assim, e como usamos polarizador definido por

$$\vec{e_\omega} = \cos\alpha\,\vec{e_x} + \operatorname{sen}\alpha\,\vec{e_y},$$

o que determina $\vec{e_{\perp\omega}}$, pois $\vec{e_\omega}\cdot\vec{e_{\perp\omega}} = 0$,

$$\vec{e_{\perp\omega}} = \operatorname{sen}\alpha\,\vec{e_x} - \cos\alpha\,\vec{e_y}.$$

Temos $\vec{e_\omega}$ e $\vec{e_{\perp\omega}}$ em função de $\vec{e_x}$ e $\vec{e_y}$. Mas queremos o contrário.

$$\cos\alpha\,\vec{e_\omega} + \operatorname{sen}\alpha\,\vec{e_{\perp\omega}} = \cos^2\alpha\,\vec{e_x} + \cancel{\cos\alpha\operatorname{sen}\alpha\,\vec{e_y}} + \operatorname{sen}^2\alpha\,\vec{e_x} - \cancel{\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha\,\vec{e_y}}$$

$$= \vec{e_x}$$

$$\operatorname{sen}\alpha\,\vec{e_\omega} - \cos\alpha\,\vec{e_{\perp\omega}} = \cancel{\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha\,\vec{e_x}} + \operatorname{sen}^2\alpha\,\vec{e_y} + - \cancel{\cos\alpha\operatorname{sen}\alpha\,e_x} + \cos^2\alpha\,\vec{e_y}$$

$$= \vec{e_y}$$

Substituindo em $\vec{e_p} = \cos\theta\,\vec{e_x} + \operatorname{sen}\theta\,\vec{e_y}$

$$\Rightarrow \vec{e_p} = \cos\theta\left(\cos\alpha\,\vec{e_\omega} + \operatorname{sen}\alpha\,\vec{e_{\perp\omega}}\right) + \operatorname{sen}\theta\left(\operatorname{sen}\alpha\,\vec{e_\omega} - \cos\alpha\,\vec{e_{\perp\omega}}\right)$$

$$= (\cos\theta\cos\alpha + \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\alpha).\,\vec{e_\omega} + (\cos\theta\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\theta\cos\alpha).\,\vec{e_{\perp\omega}}$$

Assim, temos o nosso estado escrito nesta nova base de "auto-estados" associados a esta nova experiência com o novo polarizador.

↳ Esta nova <u>base de auto-estados</u> é uma base mais natural para tratarmos esta nova experiência com o novo polarizador.

"Mecânica Matricial"

Todo este formalismo que usamos em cima para tratar o problema do polarizador, pode ser escrito em termos de multiplicações de matrizes e vectores

Vamos trabalhar na base $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y\}$. Poderemos então escrever o estado $\vec{e_p}$ como uma matriz coluna

$$\vec{e_p} = \cos\theta\, \vec{e}_x + \operatorname{sen}\theta\, \vec{e}_y = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \operatorname{sen}\theta \end{pmatrix}$$

Da mesma forma, o efeito do polarizador num estado pode ser escrito como uma matriz, $\hat{P}_{ex}$, dada por

$$\hat{P}_{ex} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Assim, aplicando o polarizador $\hat{P}_{ex}$ ao estado $\vec{e_p}$ obteremos o estado $\vec{e_p}'$,

$$e_p' = \hat{P}_{e_x} \cdot e_p = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \text{sen}\,\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

que normalizando o estado $\vec{e}_p'$

$$N_{\vec{e}_p'} = e_p' \cdot e_p' = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta \\ 0 \end{pmatrix} = \cos^2\theta$$

$$e_p' \longrightarrow \frac{e_p'}{\sqrt{N_{e_p'}}} = \frac{1}{\cos\theta} \begin{pmatrix} \cos\theta \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Neste formalismo matricial podemos mudar a base, através de uma matriz de mudança de base U

$$e_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{base}]{\text{Na nova}} \tilde{e}_x = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \text{sen}\,\alpha \end{pmatrix}$$

$$e_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{base}]{\text{Na nova}} \tilde{e}_y = \begin{pmatrix} \text{sen}\,\alpha \\ -\cos\alpha \end{pmatrix}$$

que pode ser feito através da matriz

$$U = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \text{sen}\,\alpha \\ \text{sen}\,\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$$

Mostremos isto

$$U e_x = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha \end{pmatrix}$$

$$U . e_y = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{sen}\alpha \\ -\cos\alpha \end{pmatrix}$$

A matriz U tem uma inversa que é igual a ela própria, $U^{-1} = U$,

$$U^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix} \Rightarrow U^{-1}U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{I}$$

Podemos mudar a base da eq.

$$\vec{e_{p'}} = P_{ex} . \vec{e_p}$$

$$e_{p'} = P_{ex} . e_p \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \cos\theta \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \operatorname{sen}\theta \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{I} = U^T U$$

$$\Leftrightarrow U . e_{p'} = U P_{ex} U^T . U . e_p$$

$$\Leftrightarrow \tilde{e}_{p'} = \tilde{P}_{ex} . \tilde{e}_p \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \cos\alpha \cos\theta \\ \operatorname{sen}\alpha \cos\theta \end{pmatrix} = \dots$$

onde

$$\tilde{P}_{e_\alpha} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos^2\alpha & \cos\alpha \operatorname{sen}\alpha \\ \cos\alpha \operatorname{sen}\alpha & \operatorname{sen}^2\alpha \end{pmatrix}$$

$$\tilde{e_p} = U . e_p = \begin{pmatrix} \cos\theta \cos\alpha \\ \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\alpha \end{pmatrix}$$

Mais à frente, vamos usar este formalismo matricial no estudo de problemas quânticos.

Segunda Quantização

Nota: Este assunto é avançado (é abordado em Mecânica Quântica 2 ou 3).

$$\Psi = \sum c_i \Phi_i \Rightarrow \Psi(t) = \dots$$

$$H = \sum_i h_i + \cancel{\sum_{i,j} V_{ij}}$$

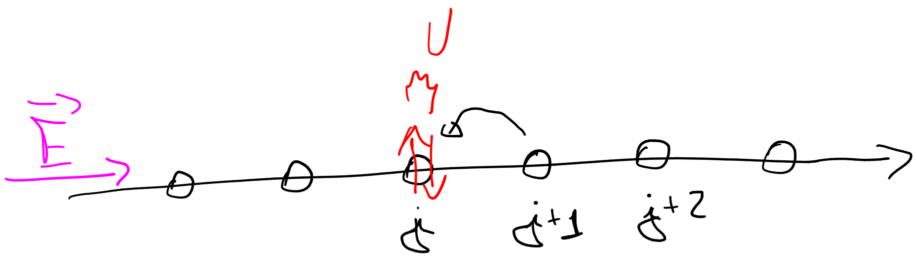
$$h_i \psi_i = E_i \psi_i$$

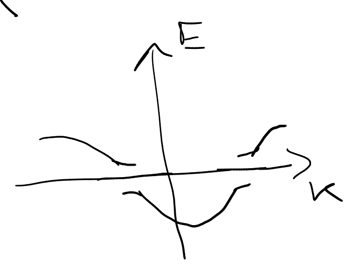
$\Rightarrow$ Soluções Determ. Slater $\{\psi_i\}$

$$\psi_1 . \psi_2 . \psi_3 - \psi_1 \psi_3 \psi_2 + \dots$$

$$h = t \sum_j \left(c_j^{\dagger} c_{j+1} + c_{j+1}^{\dagger} c_j \right) \Psi$$

↳ 2ª quantização





Mott insulator

$$V_{ij} = U \cdot \sum_j \underbrace{c_{j\uparrow}^{\dagger} c_{j\uparrow}}_{n_{j\uparrow}} \underbrace{c_{j\downarrow}^{\dagger} c_{j\downarrow}}_{n_{j\downarrow}}$$