# BC0209–Fenômenos Eletromagnéticos

## Segundo quadrimestre de 2016

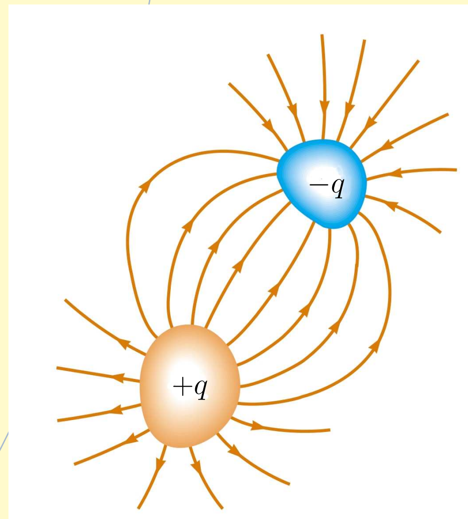
Prof. José Kenichi Mizukoshi

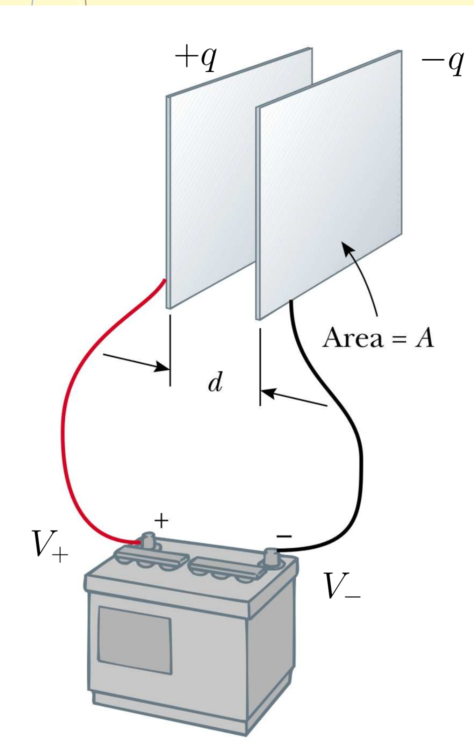
Aula 7 (versão 14/05/2015)

Capacitância e capacitores. Combinações de capacitores.

# Capacitância e Capacitores; Combinações de Capacitores

- Um **capacitor** é um dispositivo formado por dois condutores (chamados de placas, independentemente da geometria), sendo um carregado com carga $+q$ e o outro com carga $-q$, cuja função é armazenar energia em um campo eletrostático.




- Um capacitor pode ser carregado conectando-se uma de suas placas no terminal positivo de uma bateria e a outra no terminal negativo, fechando-se o circuito. Conforme será visto mais adiante, a bateria funciona como uma “bomba”, através do estabelecimento de uma **diferença de potencial**, bombeando elétrons da placa positiva (inicialmente neutra) para a placa negativa.

- Quando se estabelece uma diferença de potencial $\Delta V = V_+ - V_-$ entre as placas do capacitor, igual aquela entre os terminais da bateria, os elétrons param de se mover e o capacitador estará completamente carregado.
- A carga no capacitor completamente carregado é dada por

$$q = C\Delta V$$

$C$ é a **capacitância** do capacitor e depende somente da sua geometria e do material preenchido entre as placas.

- Unidades no SI: $[C] = \dfrac{\text{coulomb}}{\text{volt}} \equiv$ farad (F) (em homenagem a Michael Faraday)
- Como a capacitância de 1 F é muita alta, na prática utilizam-se os submúltiplos do farad, como $\mu$F $= 10^{-6}$ F e nF $= 10^{-9}$ F.

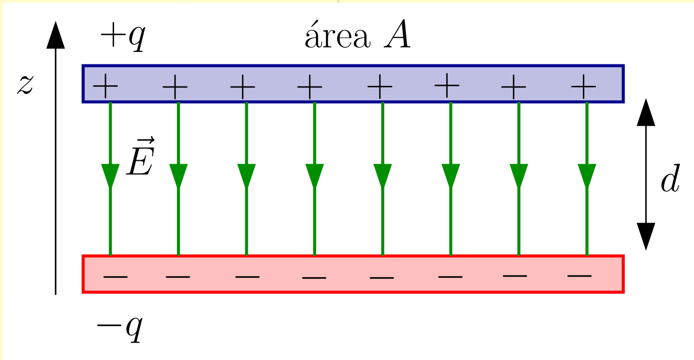
# O capacitor de placas paralelas

- O capacitor de placas paralelas é um dispositivo que consiste em duas placas paralelas de área igual $A$, separadas por uma distância $d$.
- O campo entre as placas é dado por

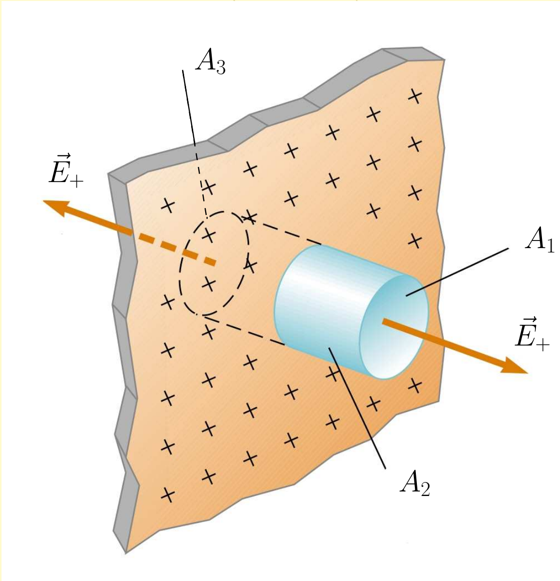
$$\vec{E} = \vec{E}_+ + \vec{E}_-$$

onde $\vec{E}_+$ é o campo elétrico gerado pela placa carregada positivamente e $\vec{E}_-$ o campo gerado pela placa carregada negativamente.

- Se a área $A$ é muito grande e a distância $d$ é muito pequena, os efeitos de borda são desprezíveis e portanto os campos $\vec{E}_+$ e $\vec{E}_-$ serão constantes (campos de placas infinitas). Nesta aproximação, pode-se calcular os campos de placas infinitas utilizando a lei de Gauss (Aula 4, pág. 16).



- Para a placa positiva temos que




$$\oint_S \vec{E}_+ \cdot d\vec{A} = E_+ A_1 + E_+ A_3 = \frac{q'}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma A'}{\varepsilon_0}$$

Como $A_1 = A_3 = A'$, obtemos

$$E_+ = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

Similarmente, obtém-se para a placa negativa $|E_-| = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}$.

- Levando-se em conta o sentido dos campos $\vec{E}_+$ e $\vec{E}_-$, o campo resultante fora do capacitor é nulo e dentro é dado por

$$\vec{E} = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\,\hat{k} + \frac{-\sigma}{2\varepsilon_0}\,\hat{k} = \quad \Rightarrow \quad \vec{E} = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\,\hat{k}$$

- A diferença de potencial entre as placas é dada por

$$\Delta V = V_+ - V_- = -\int_-^+ \vec{E}\cdot \underbrace{d\vec{\ell}}_{= dz\,\hat{k}} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\int_0^d dz \quad \Rightarrow \quad \Delta V = \frac{\sigma d}{\varepsilon_0}$$

Como $\sigma = q/A$

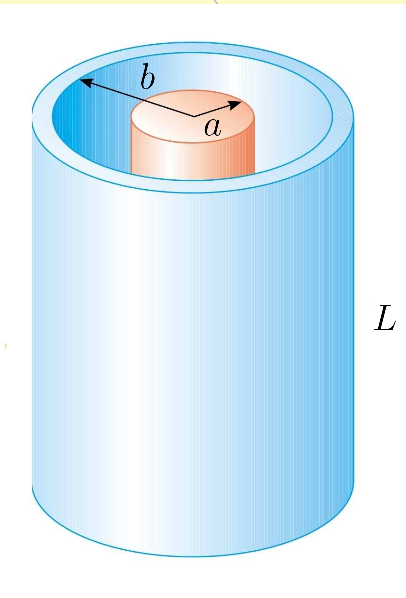
$$\Delta V = \frac{qd}{A\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad q = \frac{A\varepsilon_0}{d}\Delta V$$

- Visto que $q = C\Delta V$, pela expressão acima a capacitância de um capacitor de placas paralelas é dada por

$$C = \frac{A\varepsilon_0}{d}$$

- O capacitor cilíndrico é um dispositivo formado por um cilindro condutor de comprimento $L$ e raio $a$, carregado com carga $+q$, circundado por uma casca cilíndrica coaxial condutora de mesmo comprimento e raio interno $b$, com carga $-q$.

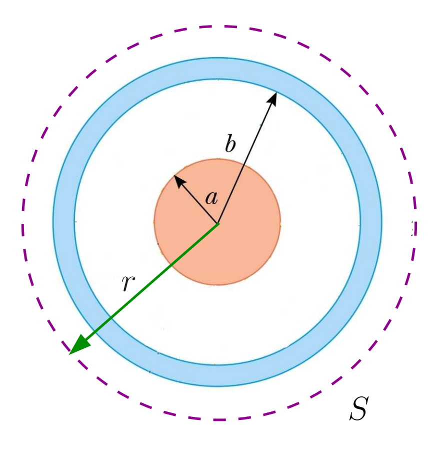
  Se $L \gg b$, pode-se desprezar o efeito de borda e portanto utilizar a lei de Gauss para o cálculo do campo elétrico em toda a região do espaço.




- Para $r > b$ (região I).

  Devido à simetria radial, toma-se a superfície de um cilindro de raio $r$, concêntrico ao capacitor, para aplicarmos a lei de Gauss:

$$\oint_S \vec{E}_I \cdot d\vec{A} = \frac{q_{\text{tot}}}{\varepsilon_0} = 0$$



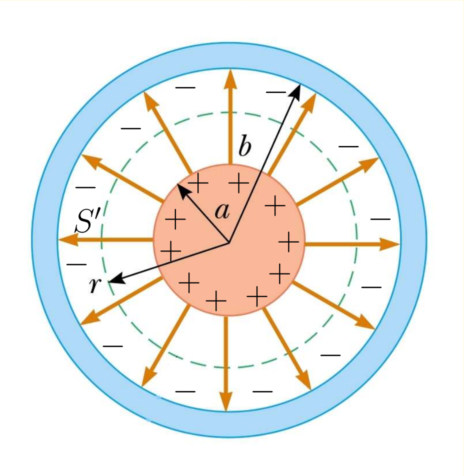
# O capacitor cilíndrico

Pela simetria, se o campo elétrico existir, será perpendicular à superfície lateral do cilindro $S$ e terá módulo constante ao longo dessa superfície. Logo,

$$E_I \int_S dA = 0 \quad \Rightarrow \quad E_I = 0$$

- Para a região $r < a$ (região III). Trata-se da região dentro do condutor cilíndrico de raio $a$, que no equilíbrio eletrostático possui campo nulo ($E_{III} = 0$).

- Para a região $a < r < b$ (região II). Utilizando a lei de Gauss, tomando-se o cilindro de raio $r$ como sendo a superfície gaussiana,



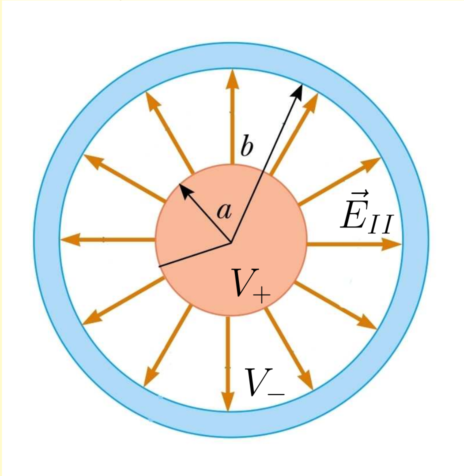

$$\oint_{S'} \vec{E}_{II} \cdot d\vec{A} = \int_{\text{tampas}} \underbrace{\vec{E}_{II} \cdot d\vec{A}}_{=0\,(\vec{E}_{II} \perp d\vec{A})} + \int_{\text{lat}} \underbrace{\vec{E}_{II} \cdot d\vec{A}}_{\vec{E}_{II} \parallel d\vec{A}} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

# O capacitor cilíndrico

Devido à simetria radial do campo elétrico, tem-se que $|\vec{E}_{II}|$ é constante na superfície lateral do cilindro. Logo,

$$E_{II} \underbrace{\oint_{\text{lat}} dA}_{=2\pi r L} = \frac{q}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad \vec{E}_{II} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{q}{Lr}\,\hat{r}$$

- A diferença de potencial entre as placas do capacitor é dada por




$$\Delta V = V_+ - V_- = -\int_-^+ \vec{E}_{II}\cdot d\vec{\ell}$$

Tomando $d\vec{\ell} = dr\hat{r}$, obtemos

$$\Delta V = -\int_b^a E_{II} dr = -\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{q}{L}\overbrace{\int_b^a \frac{dr}{r}}^{=\ln r\big|_b^a} \quad \Rightarrow \quad \Delta V = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{q}{L}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

# O capacitor cilíndrico

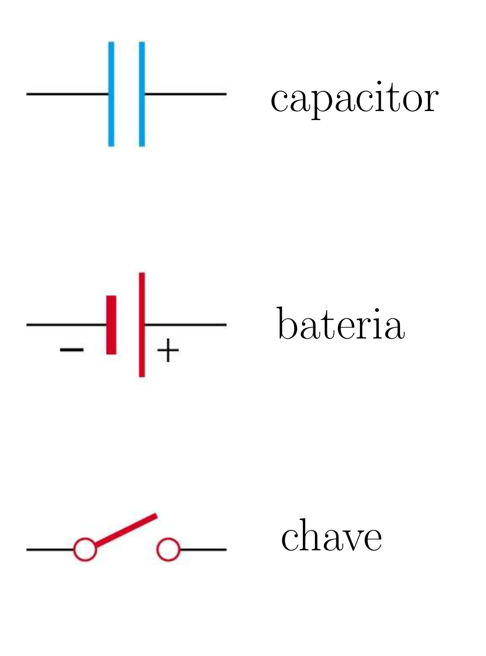
- Como $q = C\Delta V$, segue que a capacitância do capacitor cilíndrico é

$$C = \frac{2\pi\varepsilon_0 L}{\ln(b/a)}$$

# Combinações de capacitores

- Capacitores são dispositivos comuns em circuitos elétricos e podem ser conectados em série ou em paralelo.

  No intuito de obter a **capacitância equivalente** dessas combinações, vamos analisar os **diagramas de circuito**, que nada mais são do que representações pictóricas dos elementos do circuito. Na figura ao lado mostramos os símbolos para o capacitor, bateria e chave.

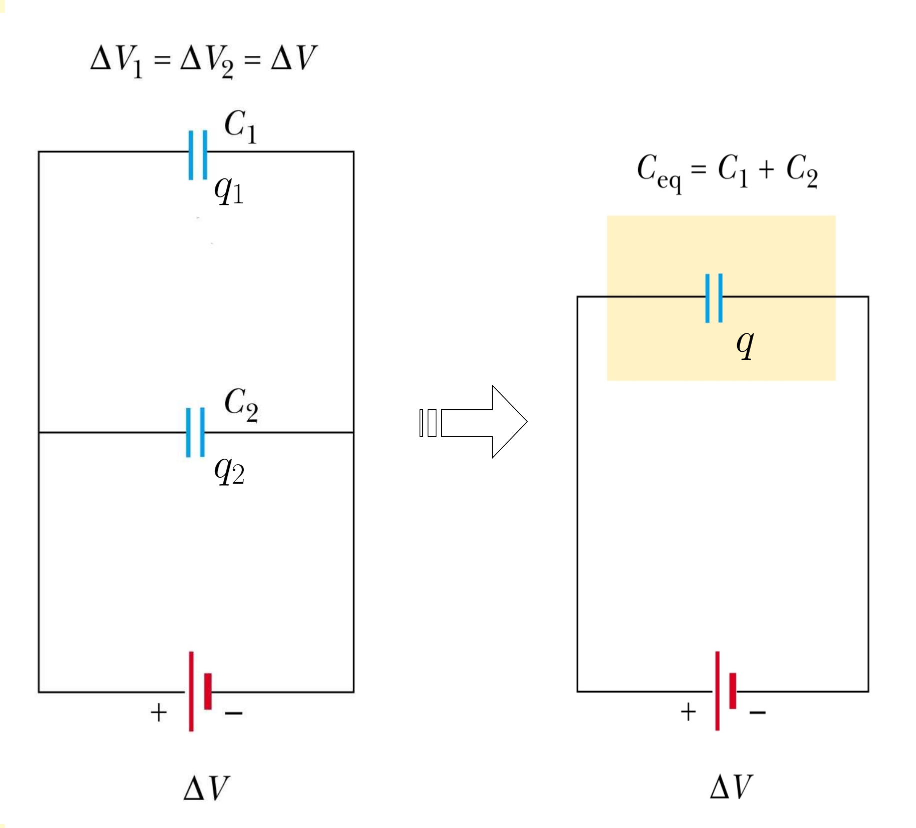


- Considere a combinação em paralelo entre dois capacitores ligados à uma bateria. O primeiro capacitor possui capacitância $C_1$ e armazena uma carga $q_1$, enquanto o segundo possui capacitância $C_2$ e armazena uma carga $q_2$.
- Os dois capacitores conectados em paralelo equivalem a um único capacitor, de capacitância equivalente $C_{\text{eq}}$ e que armazena uma carga $q = q_1 + q_2$.
  Pelos circuitos da figura ao lado, tem-se que

$$\begin{cases} q_1 = C_1 \Delta V \\ q_2 = C_2 \Delta V \\ q = C_{\text{eq}} \Delta V \end{cases}$$

Somando as duas primeiras equações,

$$\underbrace{q_1 + q_2}_{=q} = (C_1 + C_2)\Delta V$$



# Capacitores ligados em paralelo

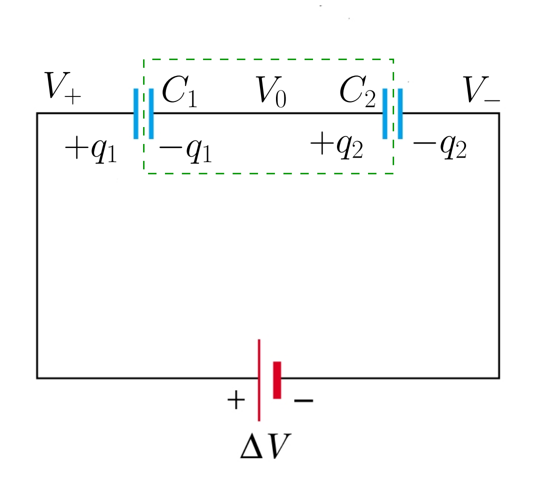
Mas, pela terceira equação, $q = C_{\mathsf{eq}}\Delta V$. Portanto,

$$C_{\text{eq}}\Delta V = (C_1 + C_2)\Delta V \quad \Rightarrow \quad C_{\text{eq}} = C_1 + C_2$$

- Para $N$ capacitores conectados em paralelo, tem-se que

$$C_{\text{eq}} = C_1 + C_2 + \ldots + C_N$$

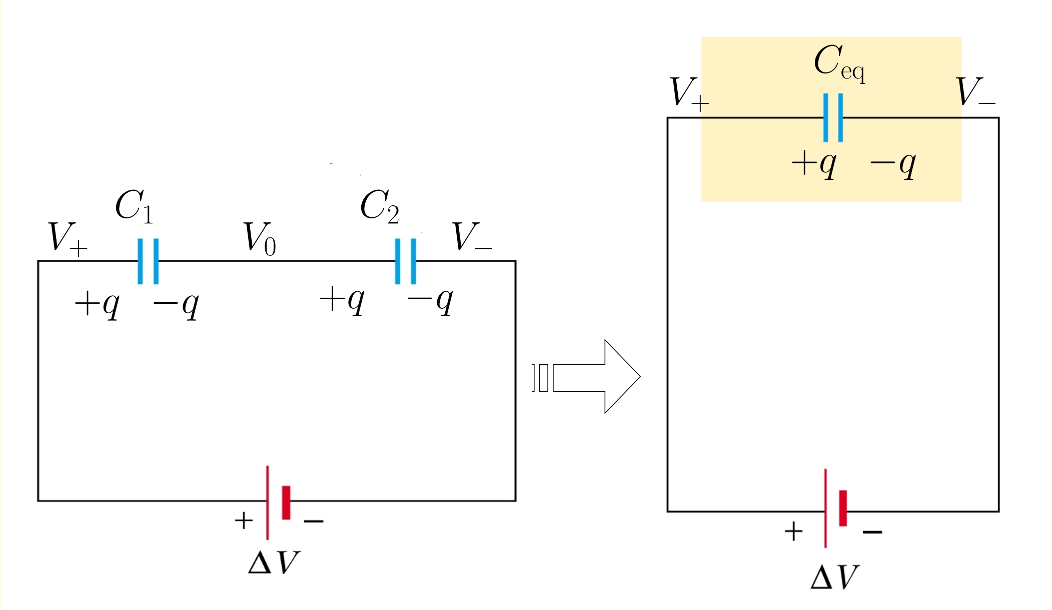
- Considere agora a combinação em série entre os mesmos dois capacitores da pág. 13, que estão conectados aos terminais de uma bateria. As cargas acumuladas nas placas internas à região retangular são induzidas, portanto tem-se que




$$-q_1 + q_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad q_1 = q_2 = q$$

Temos que

$$\begin{cases} V_+ - V_0 = \dfrac{q}{C_1} \\ V_0 - V_- = \dfrac{q}{C_2} \\ V_+ - V_- = \dfrac{q}{C_{eq}} \end{cases}$$



# Capacitores ligados em série

- Somando-se as duas primeiras equações, obtemos

$$V_+ - V_- = \frac{q}{C_1} + \frac{q}{C_2}$$

Da terceira equação, segue que

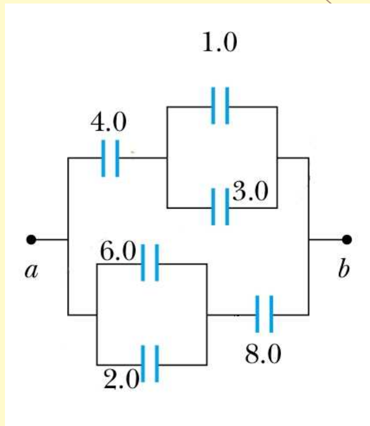
$$\frac{q}{C_{\text{eq}}} = \frac{q}{C_1} + \frac{q}{C_2} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{C_{\text{eq}}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

- Para $N$ capacitores em série,

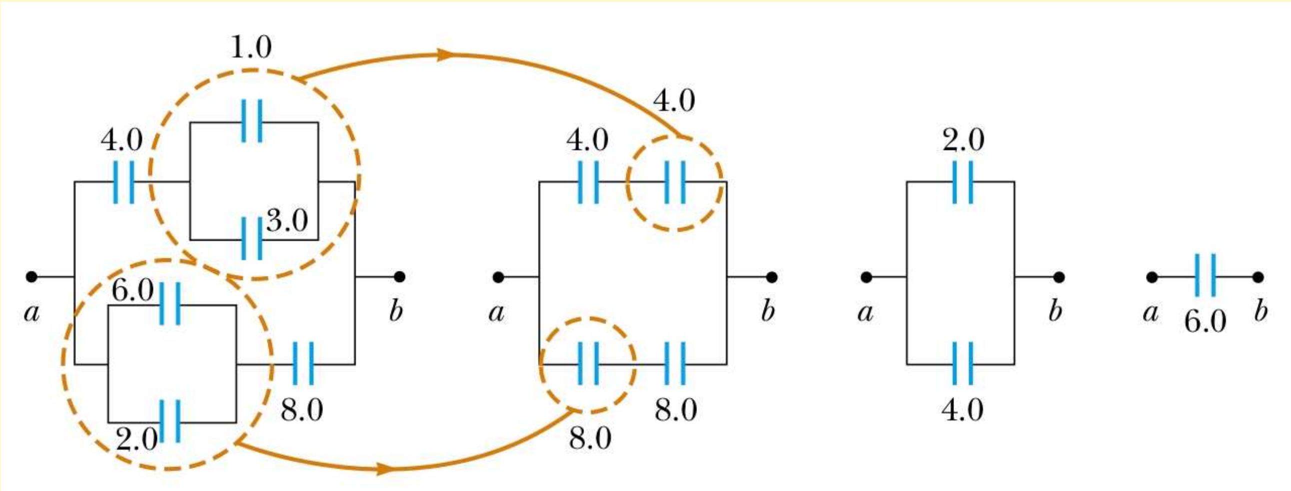
$$\frac{1}{C_{\text{eq}}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \cdots + \frac{1}{C_N}$$

# Combinações de capacitores – exemplo

**Ex. 1** Encontre a capacitância equivalente entre $a$ e $b$ para a combinação de capacitores mostrada na figura abaixo. Todas as capacitâncias estão em microfarads.




**Solução** Podemos reduzir a combinação passo a passo, conforme mostrado abaixo, utilizando-se as associações em série e em paralelo.




- Passo 1. Os capacitores de 1,0 e 3,0 $\mu$F estão em paralelo, assim como os de 6,0 e 2,0 $\mu$F. Para cada par, achamos a capacitância equivalente, que é a soma das duas capacitâncias. Obtemos assim 4,0 e 8,0 $\mu$F, respectivamente.

# Combinações de capacitores – exemplo

- Passo 2. Observamos que dois capacitores de 4,0 $\mu$F estão em série e o mesmo para os de 8,0 $\mu$F. Temos que para o primeiro par,

$$\frac{1}{C_{\text{eq}}} = \frac{1}{4{,}0\ \mu\text{F}} + \frac{1}{4{,}0\ \mu\text{F}} = \frac{1}{2{,}0\mu\text{F}} \quad \Rightarrow \quad C'_{\text{eq}} = 2{,}0\ \mu\text{F}$$

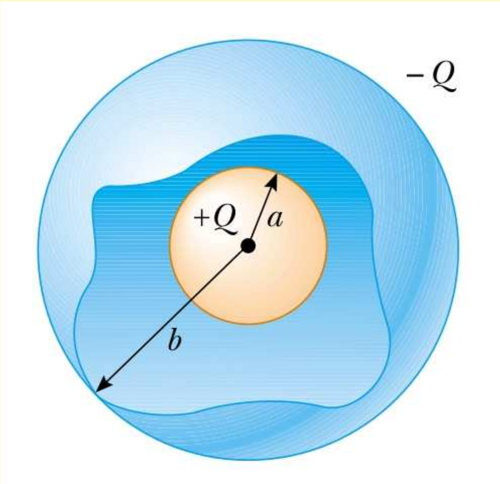
  De forma análoga, obtemos 4,0 $\mu$F para o segundo par.

- Passo 3. O problema se resume em somar dois capacitores em paralelo – um de 2,0 $\mu$F e outro de 4,0 $\mu$F. A capacitância equivalente é portanto

$$\boxed{C_{\text{eq}} = 6{,}0\ \mu\text{F}}$$

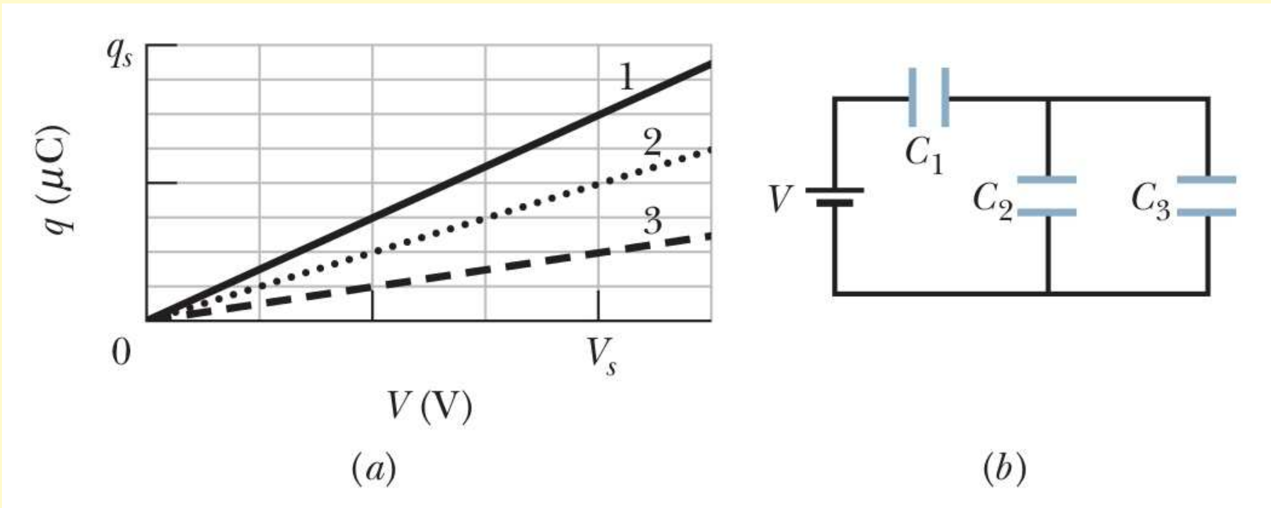
# Problemas Propostos

**P1** (a) Obtenha a capacitância de um capacitor esférico que consiste em uma casca esférica condutora de raio $b$ e carga $-Q$ que é concêntrica com uma esfera condutora menor de raio $a$ e carga $+Q$ (veja figura ao lado); (b) Qual a capacitância do capacitor esférico no limite em que $b \gg a$?




**Resp.** (a) $C = \dfrac{4\pi\varepsilon_0 ab}{b-a}$; (b) $C \approx 4\pi\varepsilon_0 a$.

**P2** O gráfico 1 na Fig. (a) abaixo dá a carga $q$ que pode ser armazenada no capacitor 1 versus o potencial elétrico $V$ aplicado nele. A escala vertical é definida por $q_s = 16{,}0\ \mu$C e a escala horizontal por $V_s = 2{,}0$ V. Os gráficos 2 e 3 são gráficos similares para os capacitores 2 e 3, respectivamente. A Fig. (b) mostra o circuito com esses três capacitores e uma bateria de 6,0 V. Qual a carga armazenada no capacitor 2 nesse circuito?




**Resp.** $q_2 = 12{,}0\ \mu$C.

# Referências

- R. A. Serway, e J. W. Jewett Jr., *Princípios de Física, Vol. 3*, Cengage Learning;
- D. Halliday, R. Resnick e K. S. Krane, *Física, Vol. 3*, LTC;