UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC

Lista 3 - Introdução à Probabilidade e Estatística

Probabilidade em Espaços Equiprováveis

1 — Num evento científico temos 15 físicos e 11 matemáticos. Três deles serão escolhidos aleatoriamente para participar de uma mesa redonda.

a) Qual a chance que sejam todos físicos?

b) Qual a chance que pelo menos um seja matemático?

c) Qual a chance que exatamente dois sejam matemáticos?

2 — Um dado vermelho e um branco são jogados, qual a probabilidade que o resultado do dado vermelho seja maior que a do branco?

3 — Qual a probabilidade de tirarmos 4 números distintos jogando 4 dados.

4 — Se 1 moeda for jogada 7 vezes.

a) Qual a probabilidade que não saia nenhuma cara?

b) Qual a probabilidade que saia 3 caras?

c) Qual a probabilidade que saia pelo menos 3 caras?

5 — Um professor quer separar seus 10 alunos em dois grupos de 5 e resolveu fazer isso através de um sorteio. Dois alunos gostariam de ficar no mesmo grupo. Qual a probabilidade que isso ocorra?

6 — Suponha que A e B são eventos mutuamente excludentes tais que $\mathbb{P}[A] = 0,3$ e $\mathbb{P}[B] = 0,5$. Calcule a probabilidade de que

a) ocorra pelo menos um dos dois eventos;

b) ocorra A mas não ocorra B;

c) ambos eventos ocorram.

7 — Assumindo que todas as $\binom{52}{5}$ mãos de pôquer são igualmente prováveis, qual a probabilidade de sair

a) um flush? (Uma mão é chamada flush se as 5 cartas forem do mesmo naipe.)

b) um par? (duas cartas do mesmo valor.)

c) dois pares?

d) uma trinca? (três cartas do mesmo valor e as duas restantes não formam um par.)

e) uma quadra? (quatro cartas do mesmo valor.)

8 — Se 8 torres são distribuídas aleatoriamente em um tabuleiro de xadrez calcule a probabilidade de que nenhuma das torres possa capturar qualquer uma das outras torres.

9 — (Blackjack) Duas cartas são escolhidas ao acaso de um baralho (de pôquer). Qual a probabilidade de sair um Ás e uma carta de 10 pontos (valete,dama, rei e 10.)?

10 — Uma pequena aldeia está formada por 20 famílias, das quais 4 têm um filho,8 têm 2 filhos, 5 têm 3 filhos, 2 têm 4 filhos e 1 tem 5 filhos.

a) Se uma família é escolhida ao acaso qual a probabilidade de que tenha i filhos, $i = 1, 2, 3, 4, 5$?

b) Se uma das crianças é escolhida ao acaso qual a probabilidade dela vir de uma família com i crianças, $i = 1, 2, 3, 4, 5$?

11 — Se dois dados são lançados, qual a probabilidade de que a soma das faces viradas para cima seja i?

12 — Dois dados são lançados até que a soma seja 5 ou 7. Calcule a probabilidade de que o 5 ocorra primeiro. Dica: Seja E_n o evento em que a soma seja 5 e não tenha ocorrido um 5 ou 7 nos $n - 1$ primeiros lançamentos. Calcule $\mathbb{P}[E_n]$ e argumente que $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}[E_n]$ é a probabilidade a ser calculada.

13 — Uma urna contém 3 bolas vermelhas e 7 bolas negras. Os jogadores A e B retiram uma bola por vez (sem substituição) até sair uma bola vermelha pela primeira vez. Calcule a probabilidade de que o jogador A escolha primeiro a bola vermelha.

14 — Uma urna contém n bolas brancas e m bolas negras, onde n e m são números inteiros positivos.

a) Se duas bolas são escolhidas ao acaso, qual a probabilidade delas serem da mesma cor?

b) Se uma bola é escolhida ao acaso e é colocada dentro da urna antes da segunda bola ser escolhida, qual a probabilidade de que as bolas escolhidas sejam da mesma cor?

c) Mostre que a probabilidade encontrada em b) é maior que a probabilidade encontrada em a).

15 — Um professor seleciona 10 problemas e informa a sala que o exame final consistirá em 5 exercícios escolhidos ao acaso desta lista de problemas. Se m estudante sabe fazer 7 dos 10 problemas qual a probabilidade de responder corretamente

a) os 5 problemas;

b) pelo menos 4 dos problemas?

16 — Dois dados são lançados em sequência n vezes. Calcule a probabilidade de que dois 6 apareçam no mesmo lançamento pelo menos uma vez. Estime o valor de n para que esta probabilidade seja pelo menos $\frac{1}{2}$.

17 — a) Se N pessoas, incluindo A e B, são dispostas ao acaso em uma fileira, qual a probabilidade de que A e B estejam um do lado do outro?

b) Calcule a probabilidade do enunciado anterior quando as pessoas são dispostas em uma roda.

18 — Um professor possui um chaveiro com 15 chaves. Se consideramos que ele escolhe as chaves de modo aleatório.

a) Qual a probabilidade dele abrir a porta antes de 7 tentativas, se considerarmos que ele descarta as chaves já tentadas?

b) Qual a probabilidade dele abrir a porta antes de 7 tentativas, se considerarmos que ele não descarta as chaves já tentadas?

c) Qual a probabilidade dele abrir a porta antes de k tentativas, se considerarmos que ele descarta as chaves já tentadas?

d) Qual a probabilidade dele abrir a porta antes de k tentativas, se considerarmos que ele não descarta as chaves já tentadas?

e) Qual a probabilidade dele abrir a porta na 7^a tentativas, se considerarmos que ele descarta as chaves já tentadas?

f) Qual a probabilidade dele abrir a porta na 7^a tentativas, se considerarmos que ele não descarta as chaves já tentadas?

19 — Uma mulher tem n chaves das quais uma abrirá a porta do seu carro.

a) Se escolhe as chaves ao acaso, desconsiderando as chaves que não abrem o carro, qual a probabilidade de que conseguirá abrir o carro na k-ésima tentativa?

b) Qual essa probabilidade se ela não desconsiderar as chaves já retiradas?

20 — Se há 12 pessoas desconhecidas em uma sala, qual a probabilidade de nenhum par de pessoas faça aniversário no mesmo mês?

21 — Um grupo de 6 homens e 6 mulheres é dividido ao acaso em dois grupos iguais. Qual a probabilidade de que ambos grupos tenham o mesmo número de homens?

22 — Calcule a probabilidade de que uma mão de 13 cartas contenha

a) um ás e um rei de cada naipe;

b) pelo menos um grupo de quatro cartas do mesmo valor dos treze valores possíveis?

Respostas dos Exercícios

1 **a.)**$\frac{\binom{15}{3}}{\binom{26}{3}} = \frac{7}{40}$ **b.)**$1 - \frac{7}{40} = \frac{33}{40}$ **c.)**$\frac{\binom{11}{2}\binom{15}{1}}{\binom{26}{3}}$

4 **a.)**$P = \frac{1}{2^7} = 1/128$
b.)$P = \binom{7}{3}\frac{1}{2^7} = 35/128$
c.)$P = \binom{7}{3}\frac{1}{2^7} + \binom{7}{4}\frac{1}{2^7} + \binom{7}{5}\frac{1}{2^7} + \binom{7}{6}\frac{1}{2^7} + \binom{7}{7}\frac{1}{2^7} = 99/128$

5 $P = \frac{\binom{8}{5}\binom{3}{3}}{\binom{10}{5}\binom{5}{5}} = \frac{2}{9}$

6 **a.)**0,8 **b.)**0,3 **c.)**0

7 **e.)**1/4165

8 $P = \frac{8^2 \cdot 7^2 \cdot 6^2 \cdot 5^2 \cdot 4^2 \cdot 3^2 \cdot 2^2 \cdot 1^2}{8^2 \cdot 8^2 \cdot 8^2 \cdot 8^2 \cdot 8^2 \cdot 8^2 \cdot 8^2 \cdot 8^2} = \frac{8!}{8^16}$

9 $P = \frac{\binom{1}{1}\binom{4}{1}\binom{4}{1}\binom{4}{1}}{\binom{52}{2}}\frac{32}{663}$

10 **a.)**$P(\text{família tem i filhos}) = \frac{n_i}{20}$
b.)$P(\text{criança vir de família que tem i filhos}) = \frac{i \cdot n_i}{48}$

11

i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(i)$	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

12 **a.)**Dica: Use o exercício anterior. $P(E_n) = \frac{26^{n-1} \cdot 4}{35^n}$.
b.) Como os E_n são mutualmente excludentes

$$P(\cup_{n=1}^{\infty} = \sum_{n=1}^{\infty} P(E_n)$$

Agora use a fórmula para a soma de uma P.G chegando à $P = 2/5$

13 $167/360$

14 **a.)**$P = \frac{n(n-1)+m(m-1)}{(n+m)(n+m-1)}$
b.)$P = \frac{n \cdot n + m \cdot m}{(n+m)(n+m)}$

15 **a.)**1/12
b.)$P = \frac{\binom{7}{5}+\binom{7}{4}\binom{3}{1}}{\binom{10}{5}}$

16 Seja E_n^C o evento de não ocorrência de 6 em ambos os dados. Então $\mathbb{P}(E_n^C) = \frac{35^n}{36^n}$
Logo $\mathbb{P}(E_n) = 1 - \frac{35^n}{36^n}$ logo $n \geq 25$

18 **a.)**2/5
b.)$\frac{14}{15}\left(1 - \left(\frac{14}{15}\right)^6\right)$
c.)1/15
d.)$\frac{14^{k-1}}{15^k}$

20 $P = 1 - \frac{12!}{12^{12}}$

22 **a.)**11/6431950
b.)143/4165

1.

a)

$$\frac{\binom{15}{3}}{\binom{26}{3}} = \frac{\frac{15 \cdot 14 \cdot 13}{3!}}{\frac{26 \cdot 25 \cdot 24}{3!}} = \frac{7}{2 \cdot 5 \cdot 4} = \frac{7}{40}$$

b)

$$1 - \frac{\binom{15}{3}}{\binom{26}{3}} = \frac{33}{40}$$

c)

$$\frac{\binom{11}{2}\binom{15}{1}}{\binom{26}{3}} = \frac{\frac{11 \cdot 10}{2!} \cdot \frac{15}{1!}}{\frac{26 \cdot 25 \cdot 24}{3!}} = \frac{11 \cdot 3}{13 \cdot 8} = \frac{33}{104}$$

2.

$$\frac{\sum_{i=1}^{5} i}{6^2} = \frac{1 + 2 + 3 + 4 + 5}{6 \cdot 6} = \frac{5}{12}$$

3.

$$\frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{6^4} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6} = \frac{5}{6 \cdot 3} = \frac{5}{18}$$

4.

a)

$$\frac{n^{\underline{o}}\ de\ eventos\ com\ nenhuma\ cara}{n^{\underline{o}}\ de\ eventos\ totais} = p^n = \left(\frac{1}{2}\right)^7 = \frac{1}{128}$$

b)

$$\frac{n^{\underline{o}}\ de\ eventos\ com\ 3\ caras}{n^{\underline{o}}\ de\ eventos\ totais} = \binom{k}{n} p^n = \binom{7}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^7 = \frac{35}{128}$$

c)

$$\sum_{i=3}^{7} \binom{k}{i} p^n = \left(\binom{7}{3} + \binom{7}{4} + \binom{7}{5} + \binom{7}{6} + \binom{7}{7}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^7 = \frac{99}{128}$$

5.

$$\frac{\binom{10-2}{5}}{\binom{10}{5}} = \frac{\binom{10-2}{3}}{\binom{10}{5}} = \frac{\binom{8}{3}}{\binom{10}{5}}$$

6.

a)

$$\mathbb{P}[A \cup B] = \mathbb{P}[A] + \mathbb{P}[B] = 0{,}3 + 0{,}5 = 0{,}8$$

b)

$$\mathbb{P}[A \cap B^C] = \mathbb{P}[A] = 0{,}3$$

c)

$$\mathbb{P}[A \cap B] = 0$$

---

7. *Resolução errada: não consideram a chance de vir outra jogada em um jogada específica.*

8.

$$p =$$

$$= \frac{8^2 \cdot 7^2 \cdot 6^2 \cdot 5^2 \cdot 4^2 \cdot 3^2 \cdot 2^2 \cdot 1^2}{8^2 \cdot (8^2-1) \cdot (8^2-2) \cdot (8^2-3) \cdot (8^2-4) \cdot (8^2-5) \cdot (8^2-6) \cdot (8^2-7)}$$

$$= \frac{8^2 \cdot 7^2 \cdot 6^2 \cdot 5^2 \cdot 4^2 \cdot 3^2 \cdot 2^2 \cdot 1^2}{\binom{8^2}{8} 8!}$$

$$= \frac{560}{61474519}$$

$$= 0{,}000911\%$$

9.

$$p =$$

$$= \frac{\binom{4}{1}\binom{4 \times 4}{1}}{\binom{52}{2}}$$

$$= \frac{32}{663}$$

$$= 4{,}83\%$$

10.

a) $p(i) = \frac{i}{20} = \begin{cases} 1/20 & se\ i = 1 \\ 2/20 & se\ i = 2 \\ 3/20 & se\ i = 3 \\ 4/20 & se\ i = 4 \\ 5/20 & se\ i = 5 \end{cases}$

b) $p(i) = \frac{i \times n_i}{\sum_{i=1}^{5} i \times n_i} = \begin{cases} 4 \times 1/48 = \ \ 4/48 & se\ i = 1 \\ 8 \times 2/48 = 16/48 & se\ i = 2 \\ 5 \times 3/48 = 15/48 & se\ i = 3 \\ 2 \times 4/48 = \ \ 8/48 & se\ i = 4 \\ 1 \times 5/48 = \ \ 5/48 & se\ i = 5 \end{cases}$ $;\ n_i = nº\ famílias\ c/\ i\ filhos$

11.

$$p(i) = \frac{n_i}{6^2} = \begin{cases} 1/36 & se\ i = 2 \\ 2/36 & se\ i = 3 \\ 3/36 & se\ i = 4 \\ 4/36 & se\ i = 5 \\ 5/36 & se\ i = 6 \\ 6/36 & se\ i = 7 \\ 5/36 & se\ i = 8 \\ 4/36 & se\ i = 9 \\ 3/36 & se\ i = 10 \\ 2/36 & se\ i = 11 \\ 1/36 & se\ i = 12 \end{cases} \ ;\ n_i = nº\ famílias\ c/\ i\ filhos$$

12.

$\mathbb{P}(E_n) =$

$= p \times q^{n-1}$

$$= \frac{S_5}{6^2}\left(1 - \frac{S_5 + S_7}{6^2}\right)^{n-1}$$

$$= \frac{4}{36}\left(1 - \frac{4+6}{36}\right)^{n-1}$$

$$= \frac{1}{9}\left(\frac{13}{18}\right)^{n-1}$$

$\mathbb{P}(E_\infty) =$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(E_n)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{9}\left(\frac{13}{18}\right)^{n-1}$$

$$= \frac{1}{9}\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{13}{18}\right)^{n-1}$$

$$= \frac{1}{9}\sum_{x=0}^{\infty} \left(\frac{13}{18}\right)^{x} \quad ; \quad x = n - 1$$

$$\Sigma_n = q + q^2 + \cdots + q^n$$

$$q\Sigma_n = q^2 + q^3 + \cdots + q^{n+1}$$

$$\Sigma_n - q\Sigma_n = q - q^{n+1}$$

$$\Sigma_n = \frac{q - q^{n+1}}{1 - q}$$

$$\Sigma_n = \frac{1 - q^n}{1/q - 1}$$

$$q < 1$$

$$n \to \infty \quad \Rightarrow \quad q^n \to 0$$

$$\Sigma_\infty = \frac{1}{1/q - 1}$$

$$= \frac{1}{9} \times \frac{1}{1/\left(\frac{13}{18}\right) - 1}$$

$$= \frac{1}{9} \times \frac{18}{18 - 13}$$

$$= \frac{2}{18 - 13}$$

$$= \boxed{\mathbf{\frac{2}{5}}}$$

13.

$$\mathbb{P}(A\ pegar\ antes\ do\ B) =$$

$$= \frac{1}{10!}\left(\sum_{i=0}^{7} \mathbb{N}(negras\ possíveis\ antes\ de\ i) \times \mathbb{N}(vermelhas\ possíveis) \times \mathbb{N}(bolas\ restantes)\right)$$

$$= \frac{1}{10!}\left(\sum_{i=0}^{7} i!\binom{7-i}{i}\times\binom{3}{1}\times\big(10-(2i+1)\big)!\right)$$

$$= \frac{1}{10!}\Big(3\times(10-1)! \;+\; 7\cdot 6\times 3\times\big(10-(2+1)\big)! \;+\; 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\times 3 \times\big(10-(4+1)\big)! \;+\; 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\times 3\times\big(10-(6+1)\big)! \;+\; 7\cdot 6 \cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1\cdot 0\times 3\times\big(10-(8+1)\big)!\Big)$$

$$= \frac{1}{10!}(3\times 9! \;+\; 7\cdot 6\times 3\times 7! \;+\; 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\times 3\times 5! \;+\; 7!\times 3\times 3!)$$

$$= \frac{1}{10!}(3\times 9! \;+\; 7\cdot 6\times 3\times 7! \;+\; 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\times 3\times 5! \;+\; 7!\times 3\times 3!)$$

$$= \boxed{\mathbf{\frac{7}{12}}}$$

14.

a) $\mathbb{P}(2\ iguais\ sem\ reposição) =$

$$= \frac{\mathbb{N}(2\ brancas\ sem\ reposição) + \mathbb{N}(2\ negras\ sem\ reposição)}{\mathbb{N}(2\ quaisquer\ sem\ reposição)}$$

$$= \frac{n(n-1)+m(m-1)}{(n+m)(n+m-1)}$$

b) $\mathbb{P}(2\ iguais\ com\ reposição) =$

$$= \frac{\mathbb{N}(2\ iguais\ com\ reposição) + \mathbb{N}(2\ iguais\ com\ reposição)}{\mathbb{N}(2\ iguais\ com\ reposição)}$$

$$= \frac{n^2+m^2}{(n+m)^2}$$

c) $\vdash :\ \mathbb{P}(2\ iguais\ com\ reposição) > \mathbb{P}(2\ iguais\ sem\ reposição)$

$$\frac{n^2+m^2}{(n+m)^2} > \frac{n(n-1)+m(m-1)}{(n+m)(n+m-1)}$$

$$\Rightarrow \frac{(n^2+m^2)}{(n+m)(n+m)} - \frac{n(n-1)+m(m-1)}{(n+m)(n+m-1)} > 0$$

$$\Rightarrow \frac{(n^2+m^2)(n+m-1)}{(n+m)(n+m)(n+m-1)} - \frac{\big(n(n-1)+m(m-1)\big)(n+m)}{(n+m)(n+m)(n+m-1)} > 0$$

$$\Rightarrow (n^2+m^2)(n+m-1) - (n^2-n+m^2-m)(n+m) > 0$$

$$\Rightarrow [(\cancel{n^3}+\cancel{n^2m}-\cancel{n^2}) + (\cancel{nm^2}+\cancel{m^3}-\cancel{m^2})] - [\cancel{(n^3+n^2m)} - (\cancel{n^2}+nm) + (\cancel{nm^2}+\cancel{m^3}) - (nm+\cancel{m^2})] > 0$$

$\Rightarrow -[-nm - nm] > 0$

$\Rightarrow 2nm > 0$

$\Rightarrow nm > 0$

$Como\ n > 0\ e\ m > 0, fica\ provado\ o\ exercício.\ \blacksquare$

15.

a) $\mathbb{P}(responder\ 5) =$

$$= \frac{\mathbb{N}(combinações\ de\ escolher\ 5\ dos\ 7\ que\ sabe\ resolver)}{\mathbb{N}(combinações\ de\ escolher\ 5\ dos\ 10\ totais)}$$

$$= \frac{\binom{7}{5}}{\binom{10}{5}}$$

$$= \frac{7!/2!}{10!/5!}$$

$$= \boxed{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{12}}}$$

b) $\mathbb{P}(pelo\ menos\ 4) =$

$$= \frac{\mathbb{N}(combinações\ de\ escolher\ 5\ dos\ 7\ que\ sabe\ resolver) + \mathbb{N}(combinações\ de\ escolher\ 4\ dos\ 7)}{\mathbb{N}(combinações\ de\ escolher\ 5\ dos\ 10\ totais)}$$

$$= \frac{\binom{7}{5} + \binom{7}{4}\binom{10-7}{5-4}}{\binom{10}{5}}$$

$$= \boxed{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}}$$

16.

$\mathbb{P}(I_n: \{pelo\ menos\ dois\ 6\ apareçam\ no\ mesmo\ lançamento\ p/\ n\ lançamentos\}) =$

$= 1 - \mathbb{P}\left(I_n{}^C: \{não\ sair\ dois\ 6\ no\ mesmo\ lançamento\ para\ n\ lançamentos\}\right)$

$$= 1 - \left(\frac{36-1}{36}\right)^n$$

$$= 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^n$$

$$\mathbb{P}(i_n) \geq \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^n \geq \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{35}{36}\right)^n \leq \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \log_{\frac{35}{36}} \left(\frac{35}{36}\right)^n \geq \log_{\frac{35}{36}} \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow n \geq \log_{\frac{35}{36}} \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow n \geq \frac{\ln \frac{1}{2}}{\ln \frac{35}{36}}$$

$$\Rightarrow n \geq 24{,}61$$

$$\therefore \boxed{\boldsymbol{n \geq 25}}$$

17.

a) $\mathbb{P}(a) =$

$$= \boxed{\frac{\mathbf{2!\,(N-1)!}}{\boldsymbol{N!}}}$$

b) $\mathbb{P}(b) =$

$$= \frac{\mathbb{P}(a)}{N}$$

$$= \boxed{\frac{\mathbf{2!\,(N-1)!}}{\boldsymbol{N!\,N}}}$$

18.

a) $\mathbb{P}(a) =$

$$= \frac{1}{15!}\left(\sum_{i=0}^{7-\mathbb{N}(chaves\ possíveis\ que\ abrem)} \mathbb{N}(erradas\ possíveis\ antes\ de\ i) \times \mathbb{N}(chaves\ possíveis\ que\ abrem) \times \mathbb{N}(erradas\ possíveis\ depois\ de\ i)\right)$$

$$= \frac{1}{15!}\left(\sum_{i=0}^{7-1}\big(15-(i+1)\big)\times 1\times\big(15-(i+2)\big)!\right)$$

$$= \frac{1}{15!}\sum_{i=0}^{7-1} 14!$$

$$= \frac{6\times 14!}{15!}$$

$$= \frac{6}{15}$$

$$= \boxed{\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{5}}}$$

b) $\mathbb{P}(b) =$

$$= \sum_{i=0}^{7-1}\frac{14^{i-1}}{15^{i}}$$

$$= \frac{1}{15}\sum_{i=1}^{6}\left(\frac{14}{15}\right)^{i-1}$$

$$= \frac{1}{15}\left(\frac{1-\left(\frac{14}{15}\right)^{6}}{1\Big/\left(\frac{14}{15}\right)-1}\right)$$

$$= \frac{14}{15}\left(\frac{1-\left(\frac{14}{15}\right)^{6}}{15-14}\right)$$

$$= \boxed{\frac{\mathbf{14}}{\mathbf{15}}\left(\mathbf{1}-\left(\frac{\mathbf{14}}{\mathbf{15}}\right)^{\mathbf{6}}\right)}$$

c) $\mathbb{P}(c) =$

$$= \frac{1}{15!}\left(\sum_{i=0}^{k-1}\big(15-(i+1)\big)\times 1\times\big(15-(i+2)\big)!\right)$$

$$= \frac{1}{15!}\sum_{i=0}^{k-1} 14!$$

$$= \frac{(k-1)\times 14!}{15!}$$

$$= \boxed{\boldsymbol{\frac{k-1}{15}}}$$

d) $\mathbb{P}(d) =$

$$= \sum_{i=0}^{k-1} \frac{14^{i-1}}{15^{i}}$$

$$= \frac{1}{15} \sum_{i=1}^{k-1} \left(\frac{14}{15}\right)^{i-1}$$

$$= \frac{1}{15}\left(\frac{1-\left(\frac{14}{15}\right)^{k-1}}{1\Big/\left(\frac{14}{15}\right) - 1}\right)$$

$$= \frac{14}{15}\left(\frac{1-\left(\frac{14}{15}\right)^{k-1}}{15-14}\right)$$

$$= \boxed{\boldsymbol{\frac{14}{15}\left(1-\left(\frac{14}{15}\right)^{k-1}\right)}}$$

e) $\mathbb{P}(e) =$

$$= \frac{k-1}{15} \quad quando\ k = 8$$

$$= \frac{7}{15}$$

f) $\mathbb{P}(f) =$

$$= \frac{14}{15}\left(1-\left(\frac{14}{15}\right)^{k-1}\right) \quad quando\ k = 8$$

$$= \frac{14}{15}\left(1-\left(\frac{14}{15}\right)^{7}\right)$$

19.

a) $\mathbb{P}(a) =$

$$= \frac{1}{n!}\left(\sum_{i=0}^{k-1}\big(n-(i+1)\big)\times 1\times\big(n-(i+2)\big)!\right)$$

$$= \frac{1}{n!}\sum_{i=0}^{k-1}(n-1)!$$

$$= \frac{(k-1)\times(n-1)!}{n!}$$

$$= \boxed{\frac{\boldsymbol{k-1}}{\boldsymbol{n}}}$$

b) $\mathbb{P}(b) =$

$$= \sum_{i=0}^{k-1}\frac{(n-1)^{i-1}}{n^i}$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k-1}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{i-1}$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k-1}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{i-1}$$

$$= \frac{1}{n}\left(\frac{1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^{k-1}}{{}^{1}\!\Big/\!\left(1-\frac{1}{n}\right)-1}\right)$$

$$= \frac{n-1}{n}\left(\frac{1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^{k-1}}{1}\right)$$

$$= \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^{k-1}\right)$$

$$= \boxed{\left(\mathbf{1}-\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n}}\right)-\left(\mathbf{1}-\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n}}\right)^{\boldsymbol{k}}}$$

20.

$\mathbb{P}(A\colon\{2\ pessoas\ faze\ aniversário\ no\ mesmo\ dia\}) =$

$= 1 - \mathbb{P}(A^C)$

$$= \boxed{\mathbf{1 - \frac{12!}{12^{12}}}}$$

21.

$\mathbb{P}(mesmo\ número\ de\ homens) =$

$$= \frac{\binom{6}{3}\left(\binom{6}{6} + \binom{6}{5} + \binom{6}{4} + \binom{6}{2} + \binom{6}{1} + \binom{6}{0}\right)}{\binom{12}{3+6} + \binom{12}{3+5} + \binom{12}{3+4} + \binom{12}{3+3} + \binom{12}{3+2} + \binom{12}{3+1} + \binom{12}{3+0}}$$

$$= \frac{\binom{6}{3}\left(\binom{6}{6} + \binom{6}{5} + \binom{6}{4} + \binom{6}{2} + \binom{6}{1} + \binom{6}{0}\right)}{\binom{12}{9} + \binom{12}{8} + \binom{12}{7} + \binom{12}{6} + \binom{12}{5} + \binom{12}{4} + \binom{12}{3}}$$

$$= \frac{880}{3938}$$

$$= \boxed{\mathbf{\frac{40}{179}}}$$

22.

a) $\mathbb{P}(a) =$

$$= \frac{\binom{4}{4}\binom{4}{4} \times \binom{52-8}{13-8}}{\binom{52}{13}}$$

$$= \boxed{\mathbf{\frac{11}{6431950}}}$$

b) $\mathbb{P}(b) =$

$$= \frac{\binom{13}{1}\binom{4}{4} \times \binom{52-4}{13-4}}{\binom{52}{13}}$$

$$= \boxed{\mathbf{\frac{143}{4165}}}$$