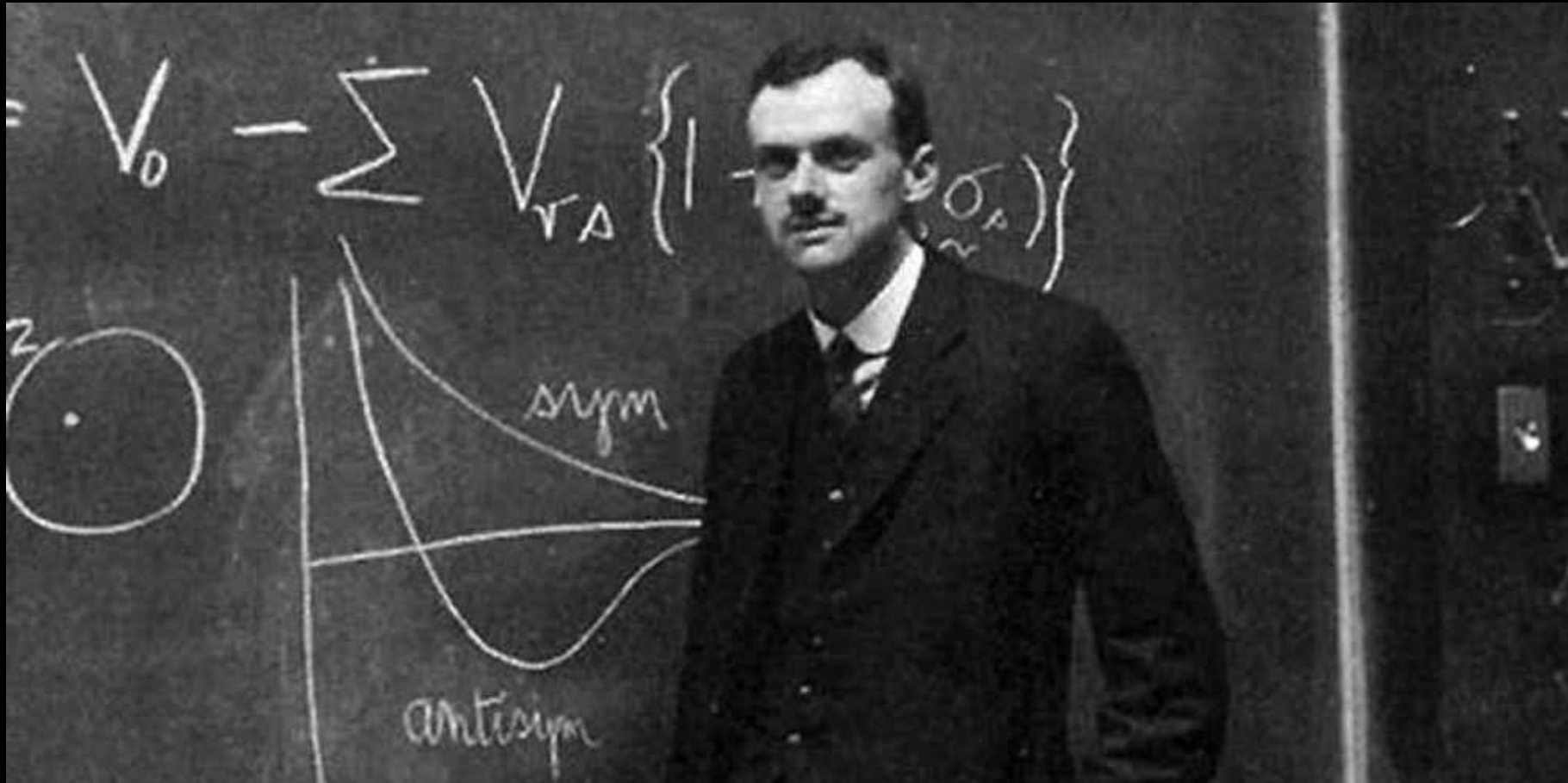


# Física Quântica (BCK0103-15 )

aula 05 - 2019



Luciano Cruz

Sala 609 – Torre 3 – Bloco A

[luciano.cruz@ufabc.edu.br](mailto:luciano.cruz@ufabc.edu.br)

### **Na última aula (08/10/19)**

- Revisitando ondas;
- Interferência (fótons e elétrons) e interferômetros;
- Dualidade onda-partícula e princípio de complementaridade;
- Princípio de incerteza de Heisenberg.

### **Na aula de hoje (15/10/19)**

- Sistemas de dois níveis;
- Interferômetros e fótons únicos;
- Polarização da luz;
- Postulados da física quântica;
- Notação de Dirac.

# Mudança no Horário de Atendimento

Quinta-Feira das 13:30 às 15:30 h

(30 minutos antes do horário  
previamente combinado).

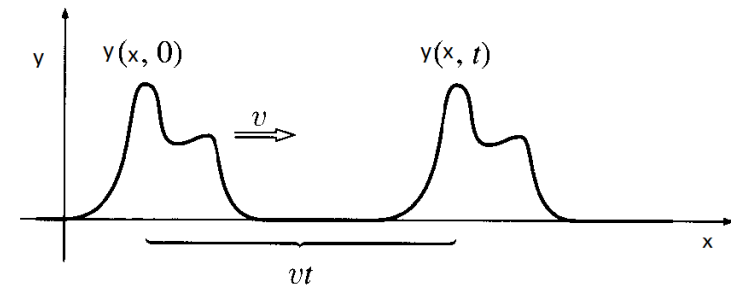
Sala 609-3 ou laboratório LS24

Em geral, será na 609-3.

# (Re)visitando ONDAS

[FÍSICA] Perturbação, contínua ou transitória, que se propaga com transporte de energia através de um meio, quer em virtude das propriedades elásticas desse meio material, quer em virtude das propriedades elétricas ou magnéticas do espaço (onda eletromagnética)

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$



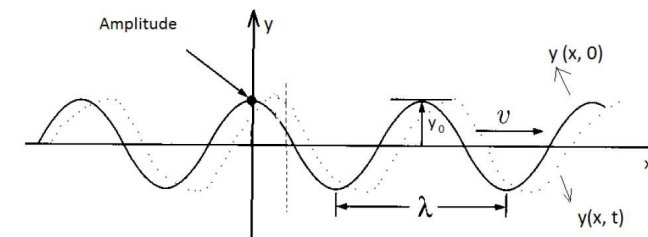
**Comprimento de onda:** Distância necessária para que um ciclo completo da onda se repita.  $\lambda$

**Período:** Intervalo de tempo para que um ciclo da onda se repita.  $T = \frac{\lambda}{v}$

**Frequência:** Inverso do Período (número de ciclos por segundo).  $f = \frac{1}{T} = \frac{v}{\lambda}$

**Frequência angular:** frequência mensurada em radianos  $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$

**Número de onda:** grandeza inversa ao comprimento de onda  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$



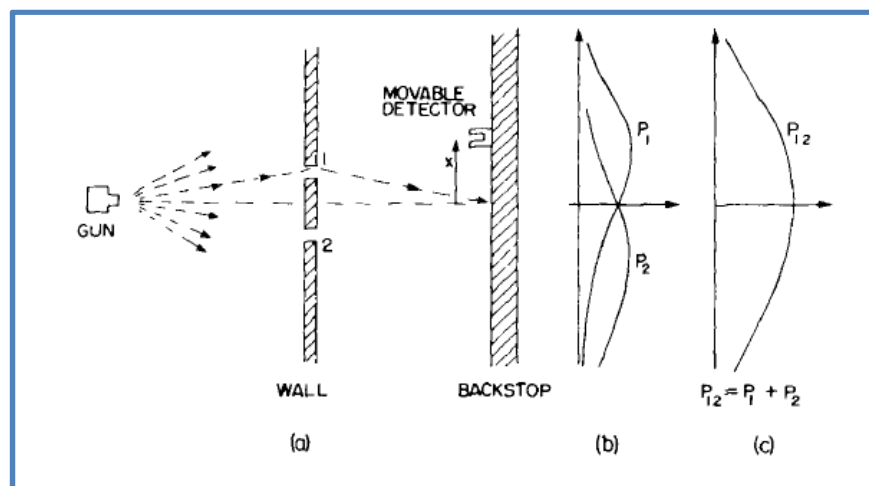
**Amplitude:** valor máximo alcançado pela onda.

$$y(x, t) = y_0 \cos[k(x - vt)] = y_0 \cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}(x - vt)\right]$$

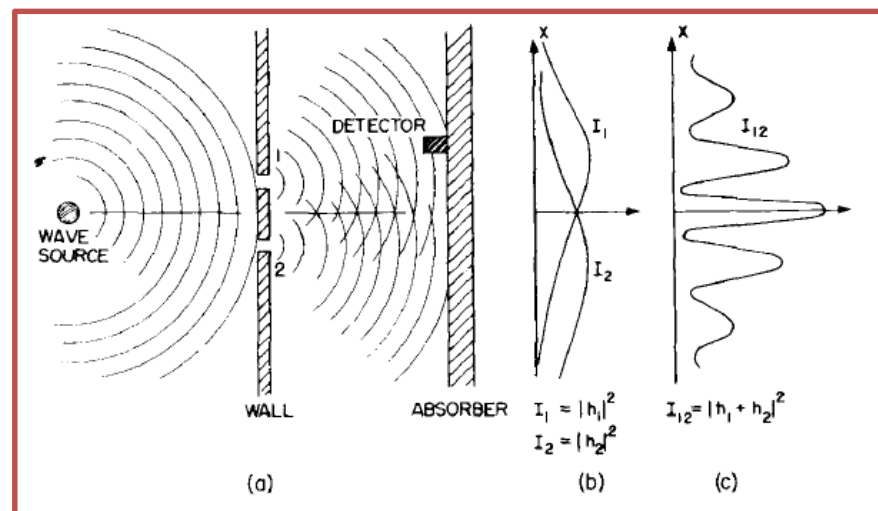
Das expressões acima, podemos ver que:  $v = \lambda f$

# O Experimento da FENDA DUPLA

## Partículas



## Ondas



Interferência é um método muito eficiente de evidenciar o caráter ondulatório de um ente físico.

# O experimento de fenda dupla com elétrons

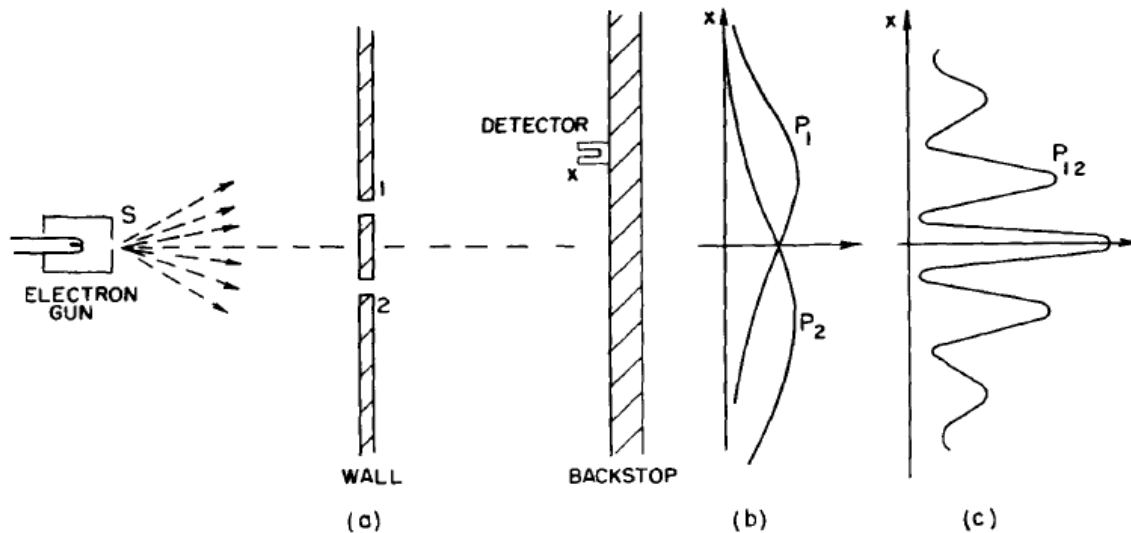
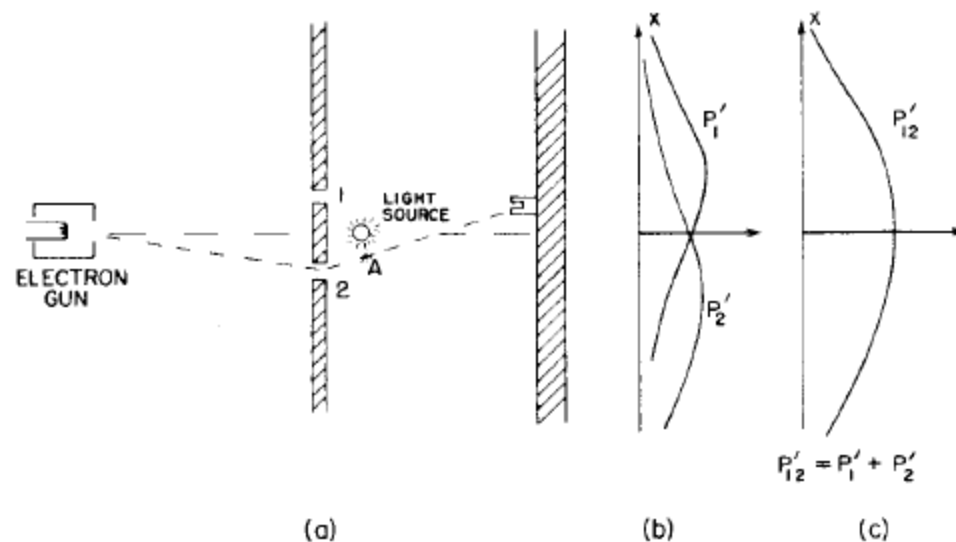
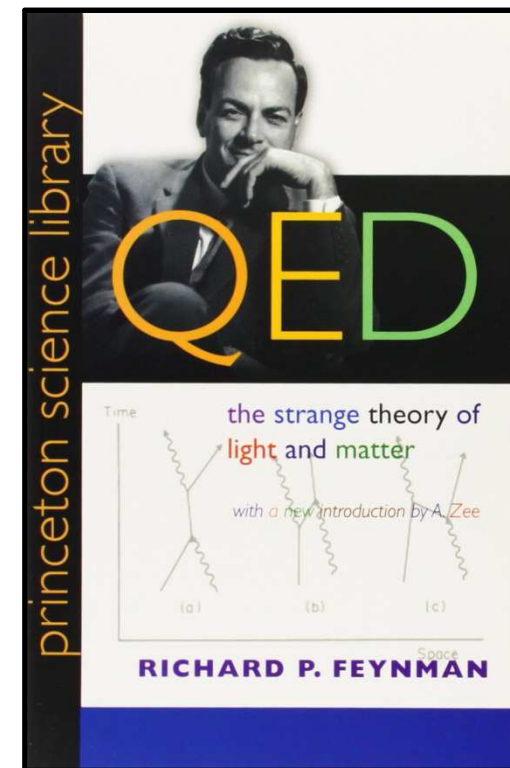


Fig 3-1. Interference experiment with electrons.



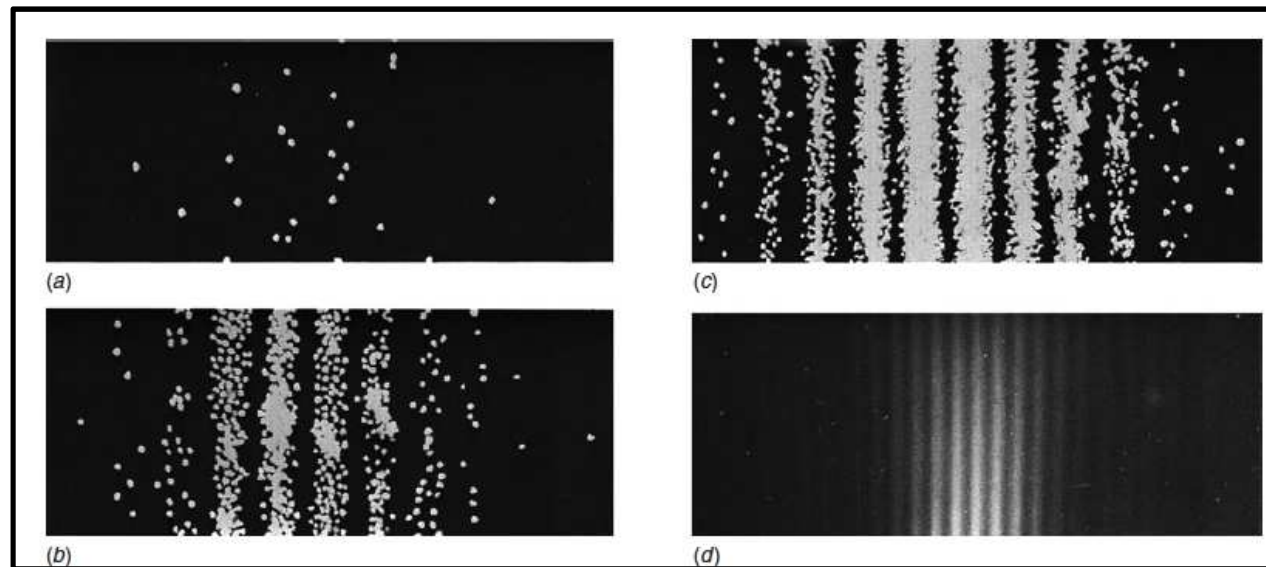
Em um experimento de fenda dupla com elétrons se observou um padrão de interferência, o que evidenciou que elétrons podem se comportar como ondas.



# Princípio de complementaridade

O princípio de complementaridade afirma que a natureza da matéria e da radiação é dual e os aspectos ondulatórios e corpusculares não são contraditórios, mas complementares.

Segundo Bohr, um objeto quântico, como um átomo, não pode ser inteiramente entendido dentro de um quadro único; necessitando de descrições mutuamente excludentes, como “onda” ou “partícula”, para que juntas se complementem na descrição de um objeto.



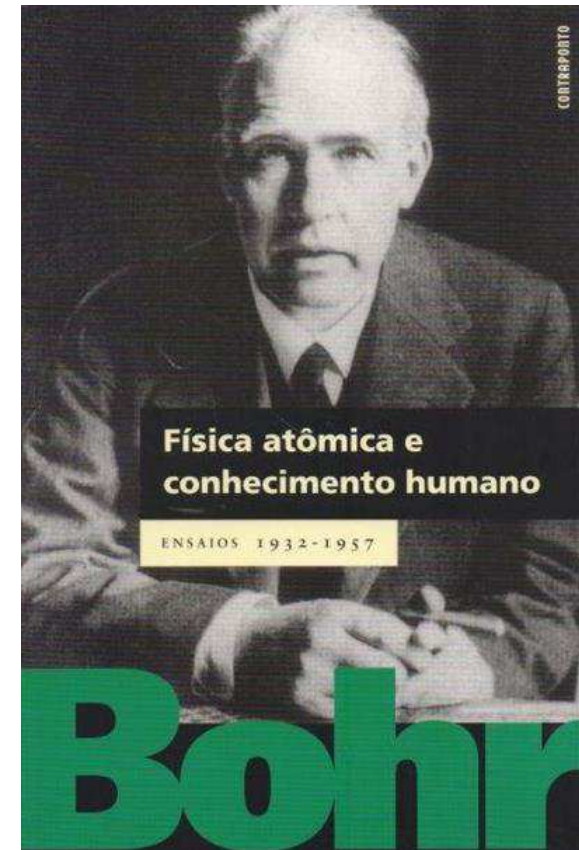
## Algumas consequências do Princípio da Complementaridade (segundo Bohr)

“O mundo exterior não tem existência própria, estando antes, ‘inextrincavelmente’... ligado à percepção que dele fazemos”.

“Incerteza e indeterminação são inerentes ao mundo quântico, e... não... apenas resultado de nossa percepção incompleta”.

“A Física não nos diz o que é o “mundo”... mas, sim... aquilo que podemos dizer, uns aos outros, a respeito dele”.

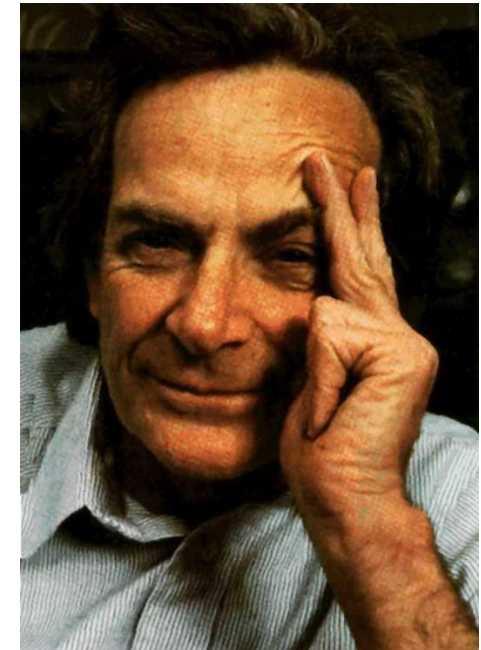
“A realidade quântica do mundo microscópico está... – irremediavelmente ligada à organização do “mundo macroscópico”, ou seja... a Parte não tem qualquer significado, exceto quando relacionada ao Todo” (caráter holístico)





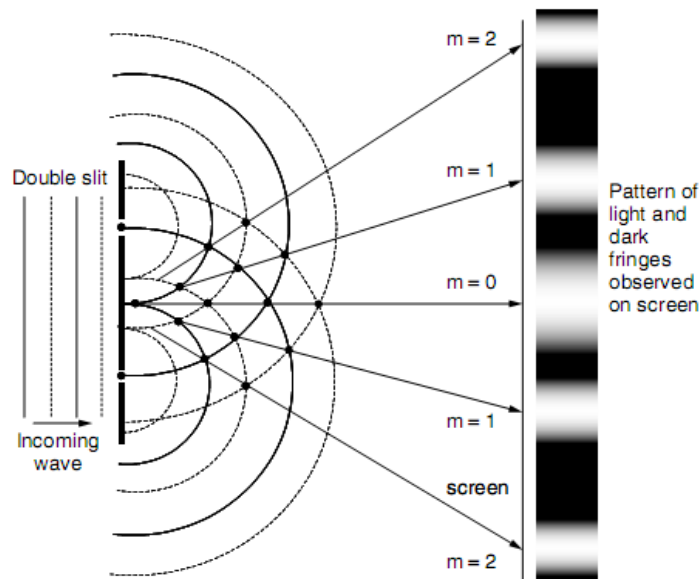
# Comentário de Feynman sobre dualidade onda-partícula

A dificuldade é realmente psicológica e existe no tormento perpétuo que resulta do fato de você dizer a si mesmo: "Mas como pode ser assim?". O que é um reflexo do desejo descontrolado, mas totalmente vão, de ver os sistemas quânticos em termos de algo familiar. ... Se você simplesmente admitir que talvez a [Natureza] se comporte assim, você a achará uma coisa agradável e interessante. Não fique dizendo para si mesmo, se é possível evitá-lo: "Mas como pode ser assim?" porque você vai 'pelo ralo', para um beco sem saída do qual ninguém escapou. **Ninguém sabe como pode ser assim.**



**Richard Feynman**

# Uma função de onda para descrever sistemas quânticos?



Considere o fenômeno de interferência de luz na fenda dupla. Mesmo quando a intensidade da fonte é tão baixa que não existe mais do que um fóton se propagando em um dado instante de tempo, a figura de interferência está de acordo com as previsões da teoria ondulatória.

$$P(x) \sim |E|^2$$

Probabilidade de encontrar uma “partícula” de luz é proporcional ao módulo ao quadrado do campo elétrico.

No caso de partículas, como elétrons, também são observados os padrões de interferência. Então, podemos sugerir que o padrão descrito pelos elétrons deveria ter uma função de probabilidade similar a dos fótons.

$$P(x) \equiv |\Psi|^2 = \Psi^* \Psi$$

**P(x)** É o que se pode observar, obtido por meio de uma “medida”

**$\Psi(x, t)$**  É a função de onda, que não é acessível nos experimentos.

# O princípio da incerteza de Heisenberg

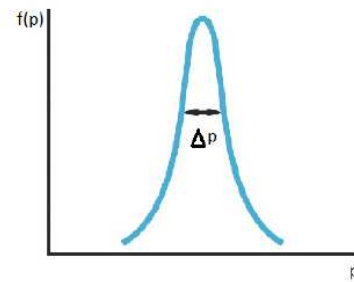
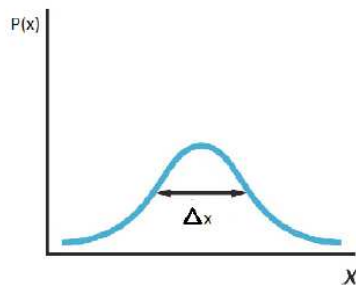
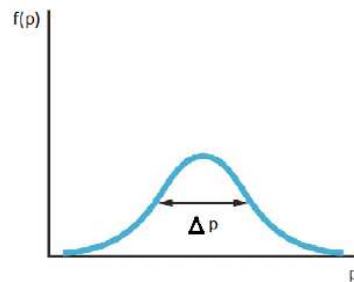
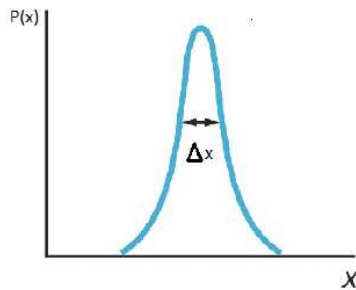
*“É impossível determinar ao mesmo tempo, e com certeza, o momento linear (produto da massa pela velocidade) e a posição de uma partícula.”*

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$$

$$\Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$$

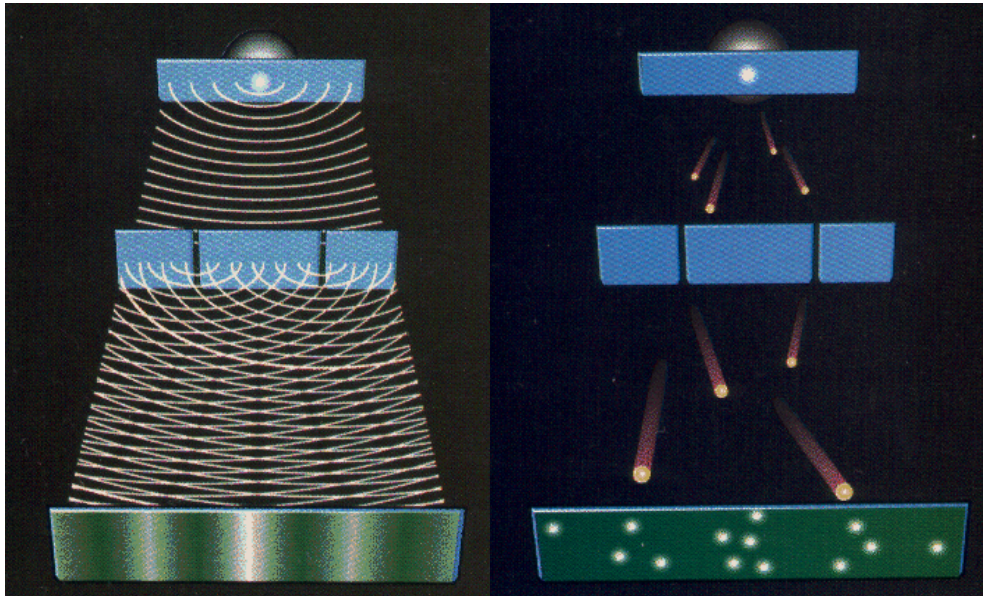


Werner Heisenberg  
(1901 – 1976)



$$\begin{aligned}\Delta x &= \sigma_x = \sqrt{(x - \bar{x})^2} \\ &= \sqrt{\overline{x^2} - \bar{x}^2}\end{aligned}$$

$$\Delta p = \sigma_p = \sqrt{\overline{p^2} - \bar{p}^2}$$



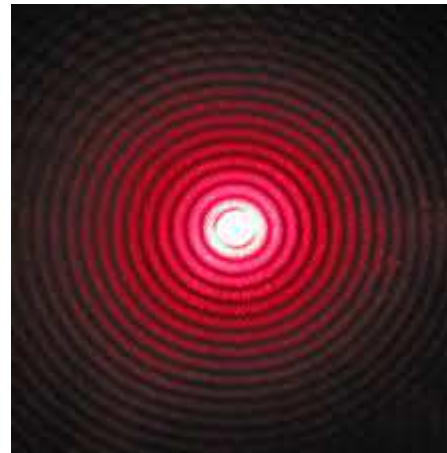
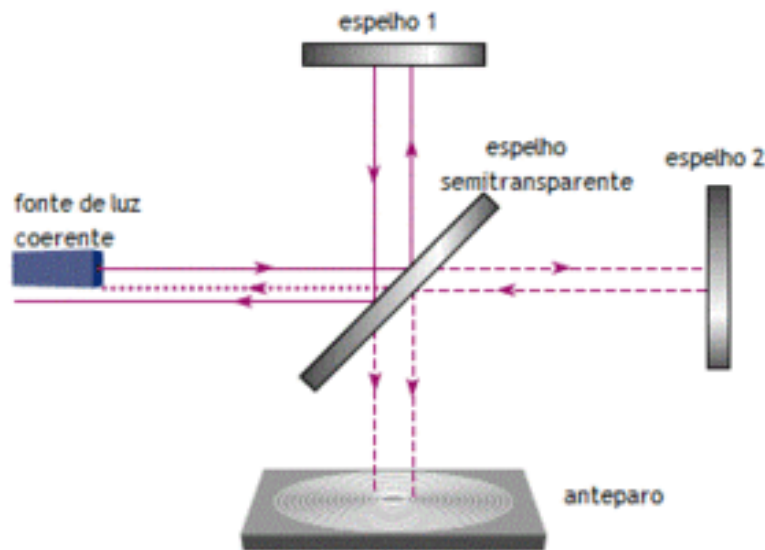
Na aula anterior, utilizamos a experimento de fenda dupla como um sistema para “discriminar” o caráter ondulatório do corpuscular de um ente físico.

Na aula de hoje, discutiremos um aparato experimental denominado INTERFERÔMETRO e que tem um papel fundamental em diversos avanços científicos do século passado e deste. Existem diversas configurações de interferômetros, entre os mais conhecidos:

- **Interferômetro de Michelson**
- **Interferômetro de Mach-Zehnder**
- Interferômetro de Sagnac
- Interferômetro de Fabry-Perrot

# Interferômetro de Michelson-Morley

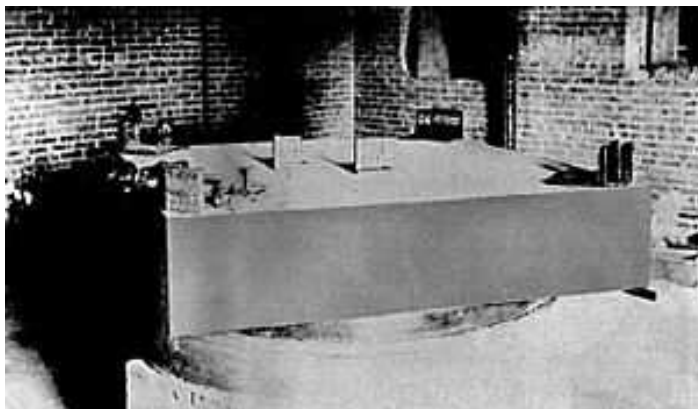
A utilização consiste em dividir um feixe de luz em dois caminhos (diferentes comprimentos de onda ou materiais), refleti-los de volta e recombiná-los em um anteparo, produzindo um padrão de interferência. O instrumento pode ser usado também para medir comprimentos de onda com grande precisão.



Albert Michelson  
1852 - 1931



Edward Morley  
1838 - 1923



O experimento de Michelson-Morley permitiu evidenciar a não existência do Éter e foi fundamental para a Teoria da Relatividade e determinação da velocidade  $c$  da luz como velocidade limite.

A. A. Michelson et al., *Conference on the Michelson-Morley Experiment*, *Astrophysical Journal* 68, 341 (1928)

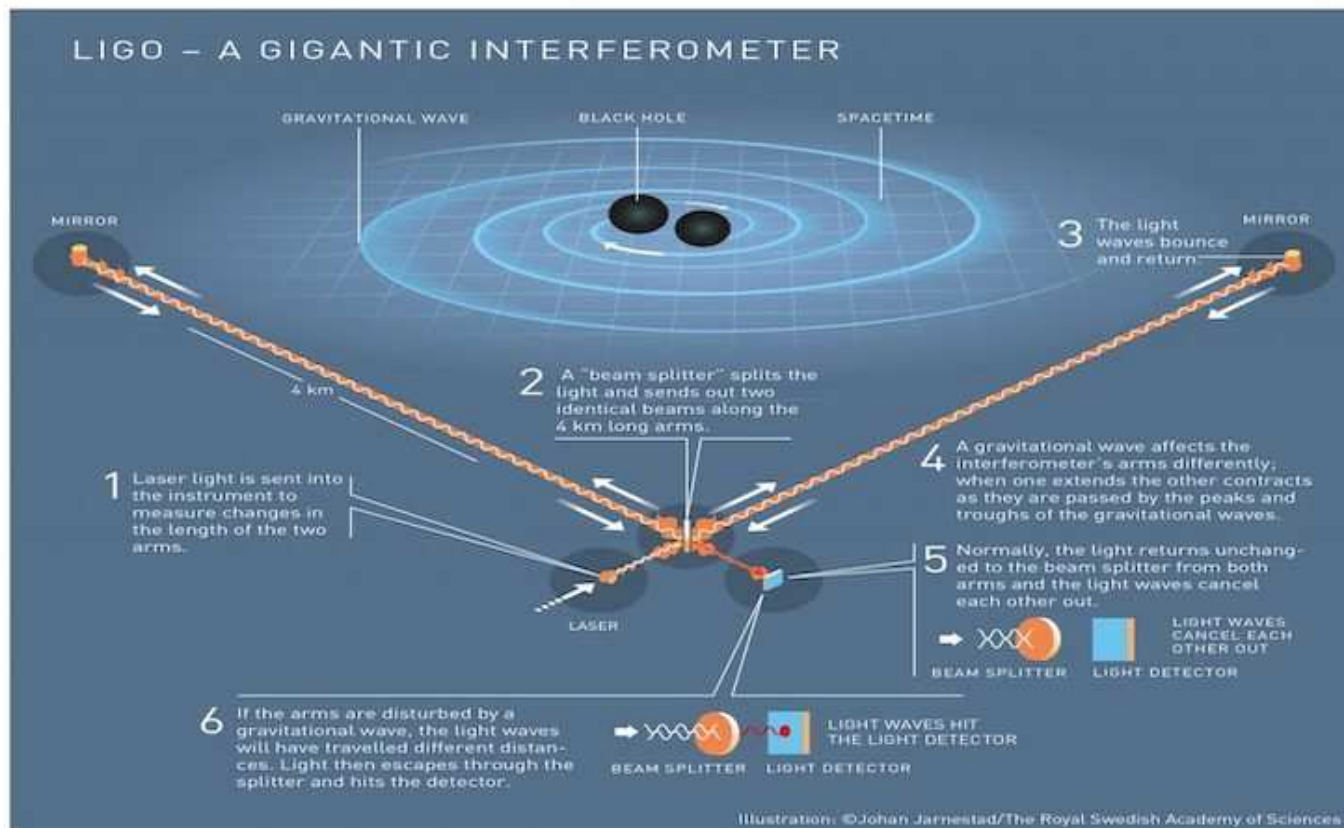


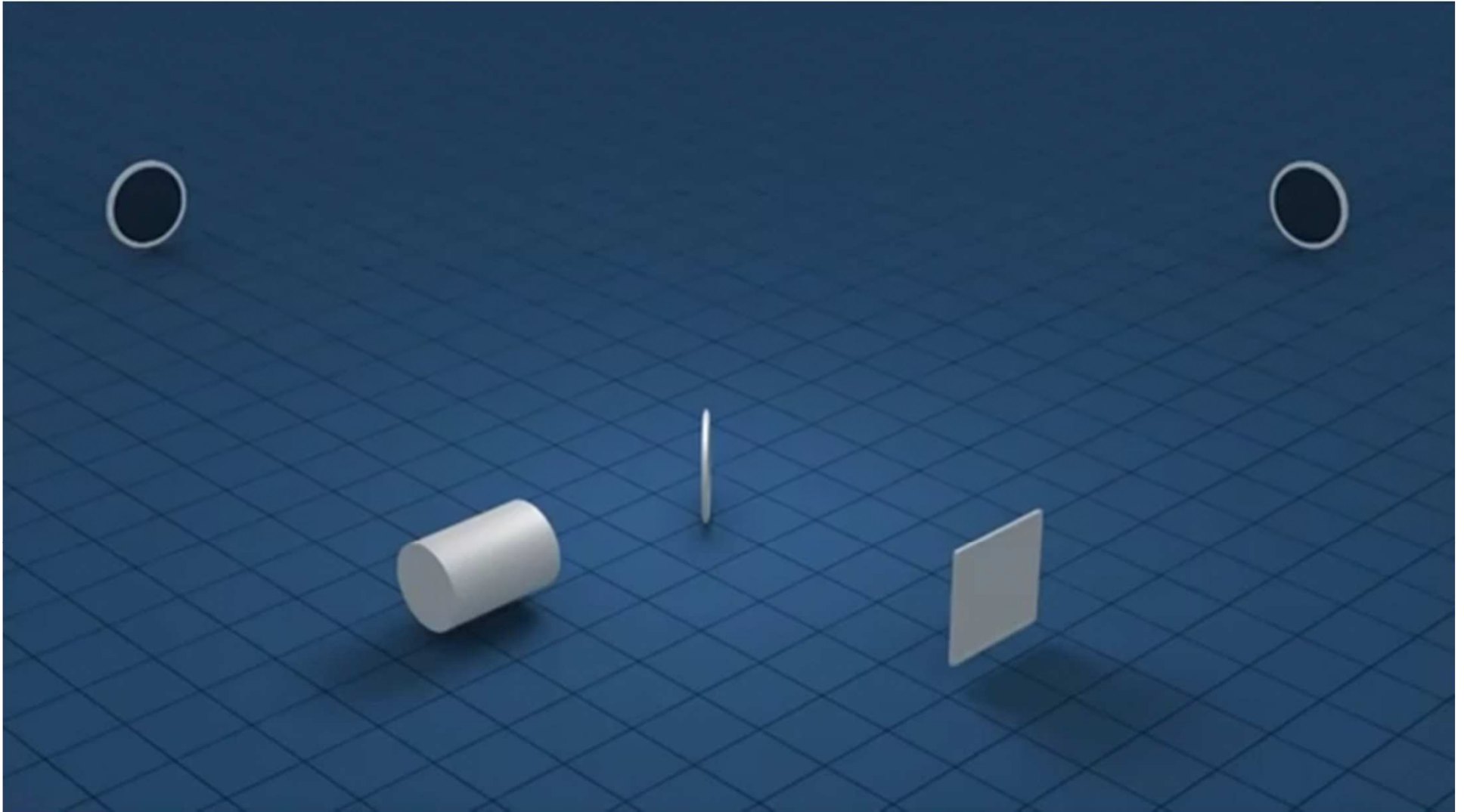
# Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory - (L.I.G.O.)



**Nobel Prize 2017**

**Rainer Weiss  
Barry C. Barish  
Kip S. Thorne**  
*“for decisive  
contributions to the  
LIGO detector and  
the observation of  
gravitational  
waves”*

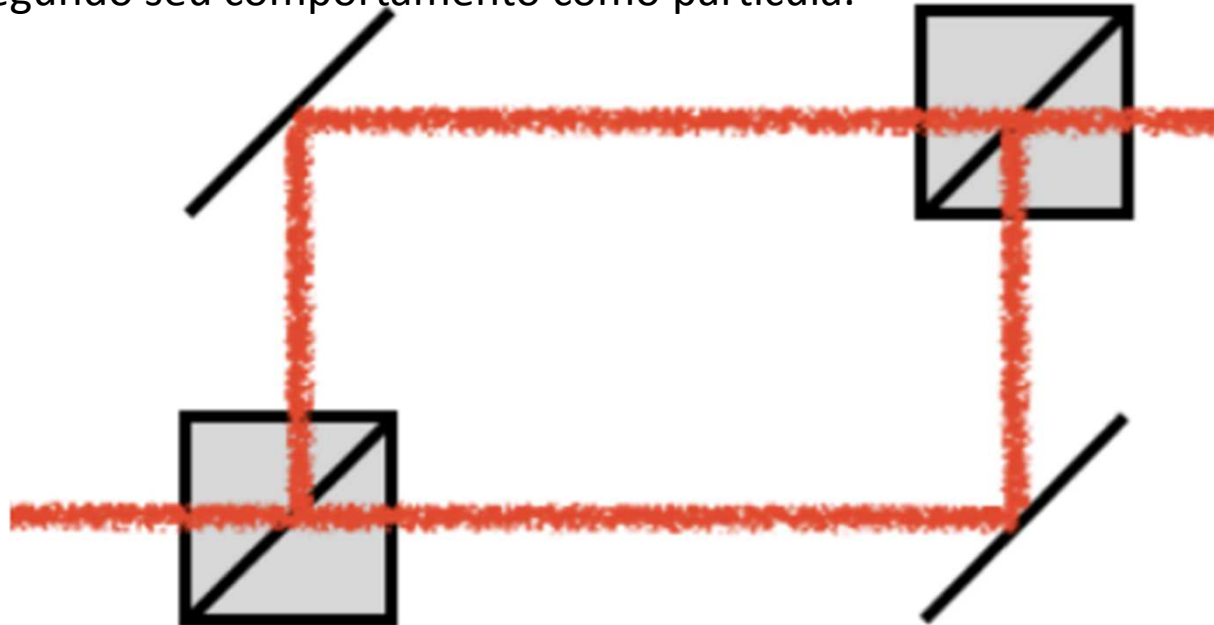




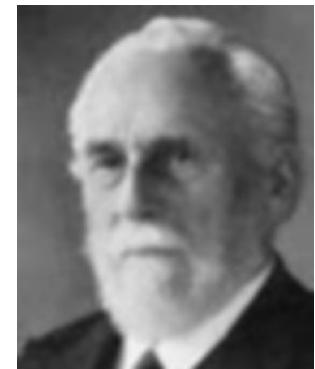
<https://www.youtube.com/watch?v=UA1qG7Fjc2A>

# O Interferômetro de Mach-Zehnder

Entre os interferômetros clássicos (Michelson, Sagnac, Fabry-Perrot) talvez seja o menos discutido nos livros textos. O interferômetro de Mach-Zehnder permite realizar experimentos de interferência, difração e polarização com um feixe de luz coerente, ou feixes de baixíssima intensidade, até fótons únicos, em que (pelo menos teoricamente) um fóton de cada vez interage com o interferômetro. No primeiro caso estuda-se o comportamento ondulatório da luz, enquanto que no segundo seu comportamento como partícula.



Ernest Mach  
1838 - 1916



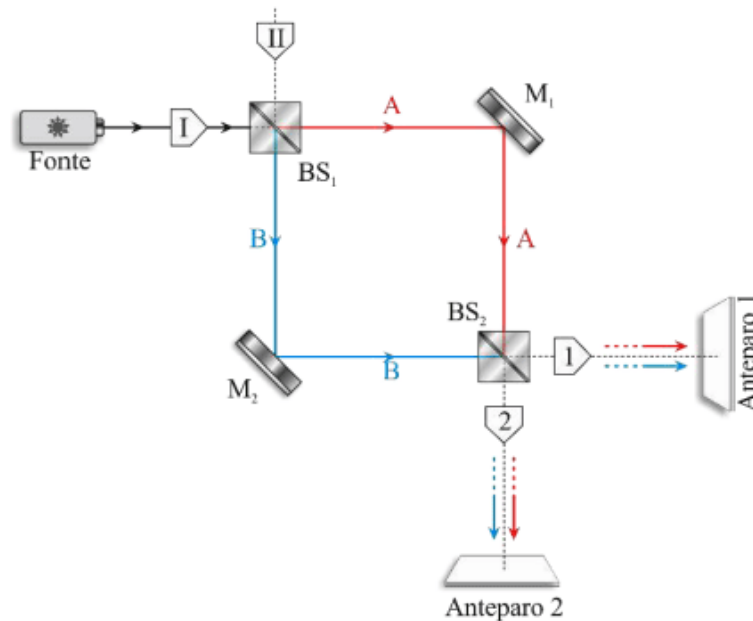
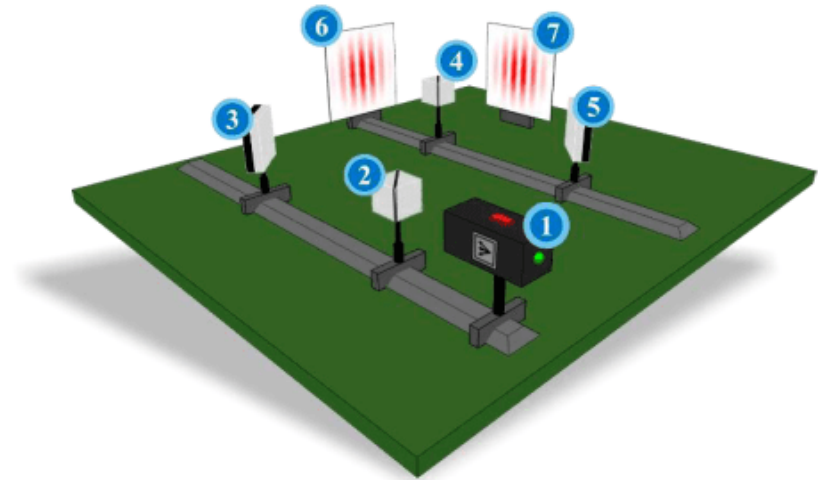
Ludwig Zehnder  
1854 - 1949

**Quantum Game with Photons:** <http://quantumgame.io/>  
(uma forma lúdica de usar inteferômetros)

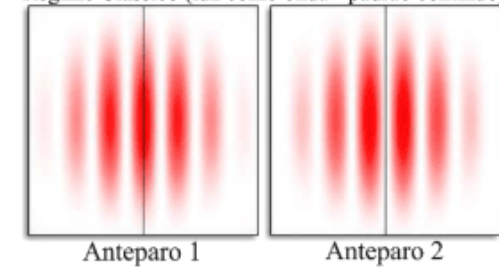


**Vamos fazer  
alguns  
experimentos  
“virtuais”.**

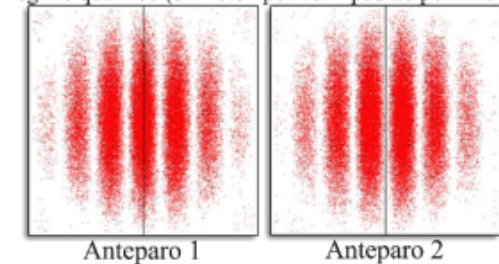
- 1 Fonte
- 2 Primeiro divisor de feixe ( $BS_1$ )
- 3 Espelho 1 ( $M_1$ )
- 4 Segundo divisor de feixe ( $BS_2$ )
- 5 Espelho 2 ( $M_2$ )
- 6 Anteparo 1
- 7 Anteparo 2



Regime Clássico (luz como onda - padrão contínuo)

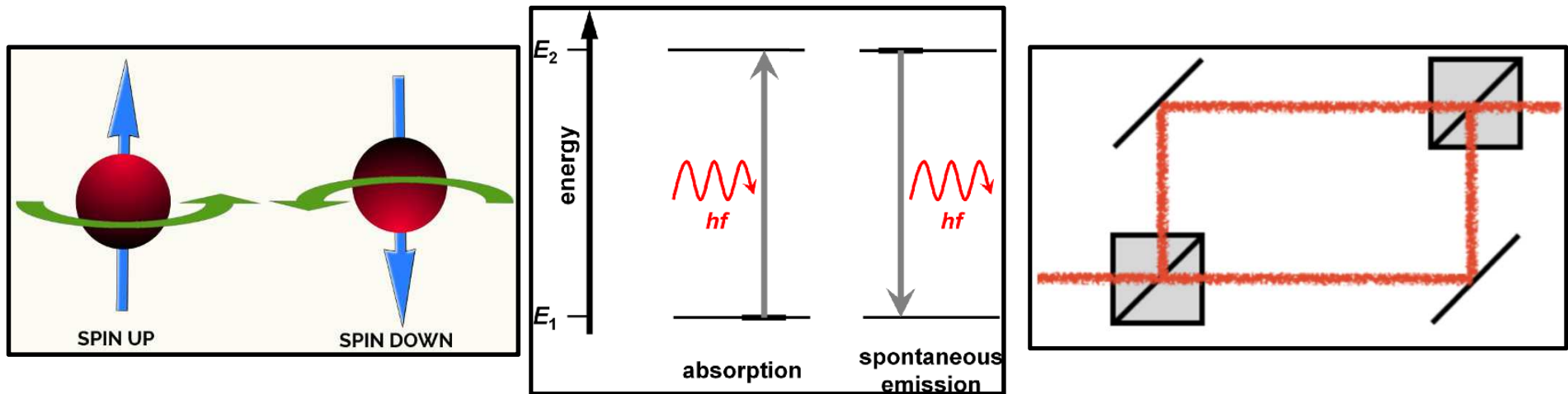


Regime quântico (um fóton por vez - padrão pontilhado)



Você pode obter este applet em: <http://www.if.ufrgs.br/~fernanda/>

Vamos considerar os sistemas quânticos mais simples que podemos ter, isso nos permitirá entender melhor as “regras” da física quântica. Chamamos estes casos de Sistemas de Dois Níveis.



Qualquer sistema em que os resultados de uma medida podem ser descritos por apenas dois resultados possíveis, podem ser tratados como um sistema de 2 níveis.

# A Moeda Quântica

Muitas vezes, em física quântica, é interessante olhar os chamados sistemas de “Dois Níveis”, que são sistemas que podem ser descritos por apenas 2 estados. Algo como uma “moeda quântica”, que pode assumir CARA (H) ou COROA (T).



Cara  
(H)



Coroa  
(T)

**Alusões Quânticas da Vida:** Quando estiver entre duas opções, jogue uma moeda para o alto e, enquanto ela gira no ar, pense qual seria a face que você realmente gostaria que você sorteadada. Essa pode ser a melhor resposta, independente do resultado do lançamento da moeda.



Qual é o “face” da moeda enquanto ela ainda gira no ar?

Um site para lançamento de moeda “virtual”

<https://sorteador.com.br/caracoroa>

# Como descrever o estado da moeda?

Temos dois estados possíveis para esta medida:

Resultado: Cara  $\longrightarrow H = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

T e H são os dois auto-estados possíveis

Resultado: Coroa  $\longrightarrow T = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Um estado com 50% probabilidade de dar cara e 50% de probabilidade coroa:

$$\Psi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = \frac{1}{\sqrt{2}}(H + T)$$

Observação Técnica: De fato, este não é exatamente a melhor descrição para descrever o estado da moeda. A melhor maneira de descrever este estado seria por meio do “operador densidade”, que é um tópico avançado e só visto em disciplinas de Mecânica Quântica.

# Postulado I

As propriedades de um sistema quântico são completamente definidos pela especificação do seu vetor de estado  $|\Psi\rangle$ , que determina a representação matemática do estado físico do sistema.

Em geral, é conveniente definir que os vetores de estado tenham norma unitária, ou seja:  $|\Psi|^2 = |\langle\Psi|\Psi\rangle|^2=1$

Observação Técnica: O vetor de estado é um elemento de um espaço vetorial completo de Hilbert, denominado espaço de vetores.

Podemos generalizar esse nosso formalismo, de modo que um sistema físico quântico é descrito por um vetor de estado, representado por:

$$|\Psi\rangle = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = a|H\rangle + b|T\rangle \quad \text{com} \quad |a|^2 + |b|^2 = 1$$

Em nossa notação, chamamos um estado  $|\Psi\rangle$  de “Ket”, que é representado por um **vetor coluna**.

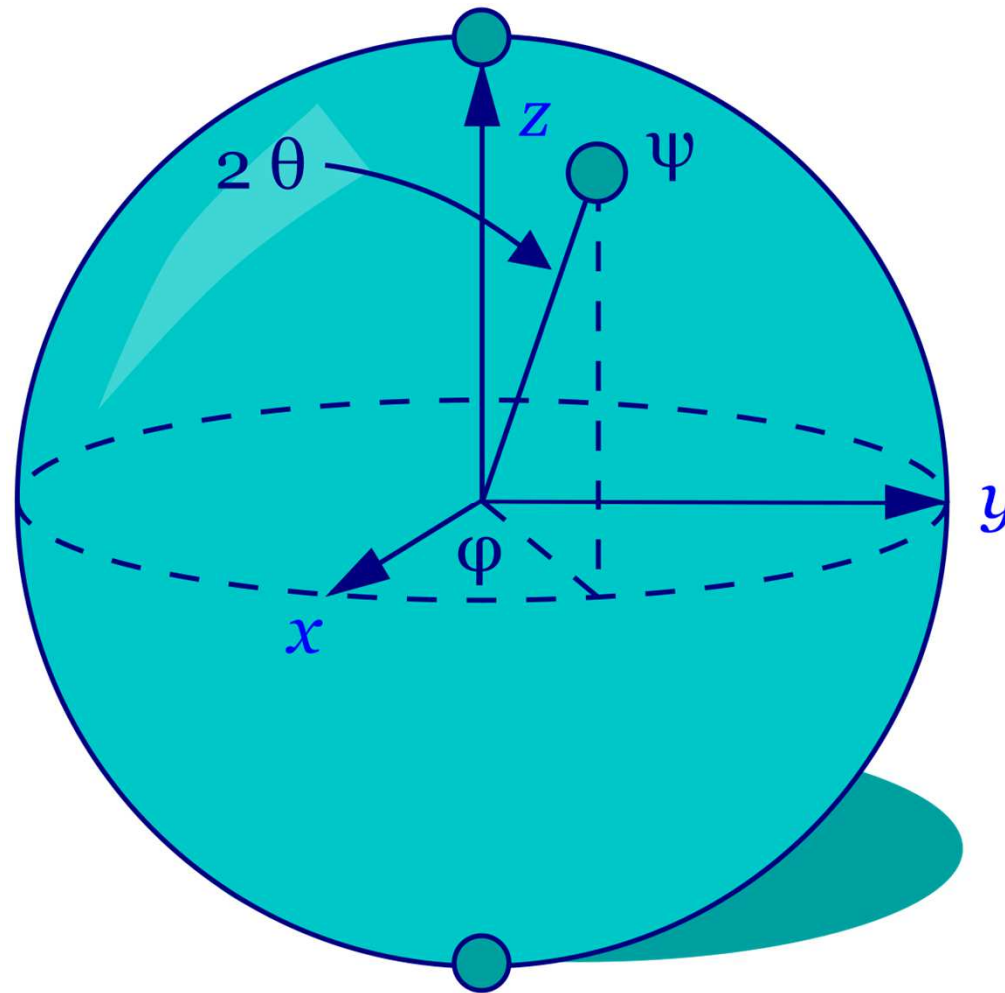
Uma consequência muito interessante da forma como estados quânticos são descritos é a possibilidade de termos a **superposição de estados**.

**Princípio da superposição** em física quântica: Uma ente quântico pode ser descrita por uma superposição dos possíveis auto-estados que ela pode assumir.

A seguir uma “analogia” de uma superposição de dois estados...



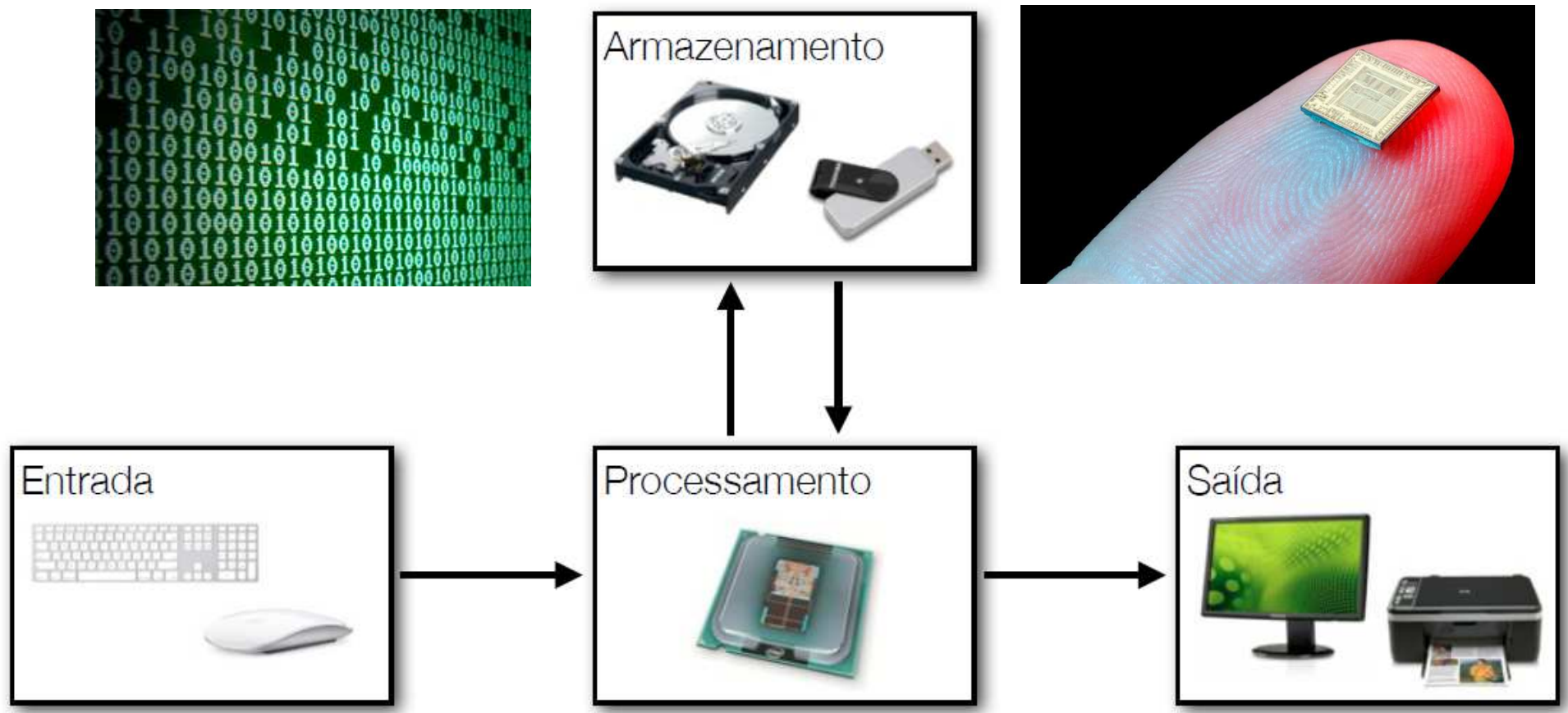
Um estado quântico (puro) de um sistema de dois níveis pode ser representado com um ponto sobre uma esfera de raio 1. Esta esfera é denominada Esfera de Bloch.



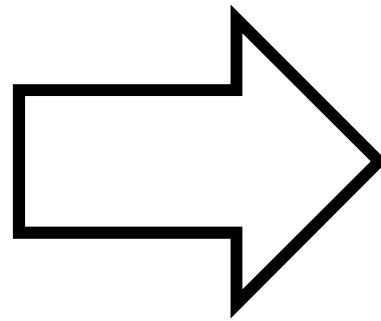


# Como a informação é codificada em computadores?

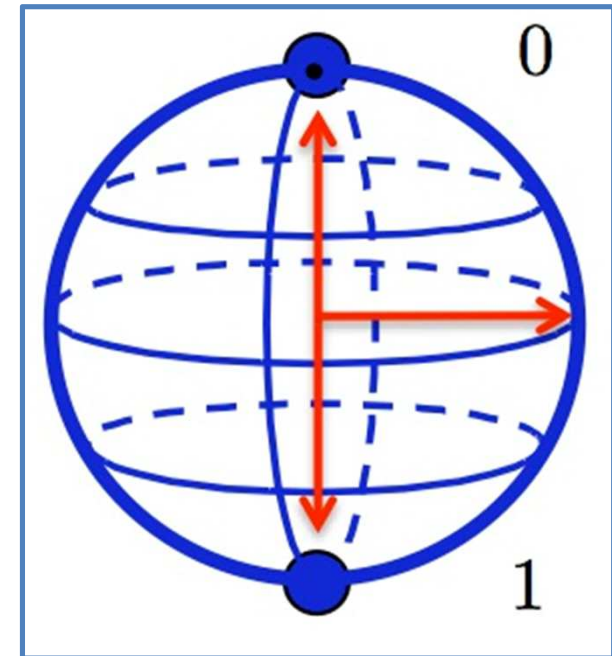
BIT: a menor quantidade (parcela ) de informação processada por um computador. Toda a informação é codificada em termos de 0 (zero) e 1 (um).



Desse modo, enquanto em um sistema clássico, o sistema deve estar em um ou outro estado, em um sistema quântico, podemos ter superposições e, podemos ter um estado, que pode ser representado na superfície de uma esfera (esfera de Bloch)



qubit  
(q-bit)

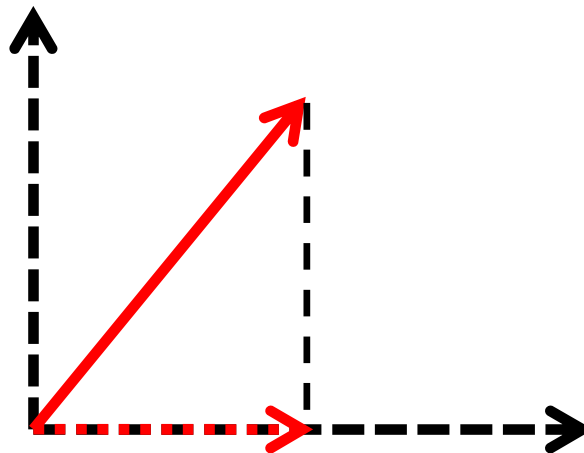


Na área de Informação Quântica, podemos utilizar um sistema de 2 níveis para armazenar informação e, diferentemente, de sistemas clássicos em que um bit estará no estado 0 ou no estado 1, em um sistema quântico ele pode estar em uma superposição destes dois estados.

# Postulado II

Se  $|\Psi\rangle$  é um vetor que representa um dado estado físico e  $|\phi\rangle$  é um outro estado, existe a probabilidade  $P(\Psi \rightarrow \phi)$  de encontrar o estado  $|\phi\rangle$  no estado  $|\Psi\rangle$ , que é dada por:

$$P(\Psi \rightarrow \phi) = |\langle\phi|\Psi\rangle|^2 \leq 1$$



# Como determino a probabilidade de obter cara ou coroa?

Considere uma moeda cujo estado seja descrito por:

Qual a probabilidade de obtermos o resultado Cara (H) em um lançamento desta moeda?

Temos:  $|\Psi\rangle = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$

Queremos saber qual a probabilidade de obter Cara (H), que é representado por:  $|H\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Podemos escrever um estado no chamado “espaço dual” como:  $\langle H| = (1 \ 0)$

Em nossa notação, chamamos um estado  $\langle\Psi|$  de “Bra”, que é representado por um **vetor linha**.

Para calcular a probabilidade, basta fazer o módulo ao quadrado do produto:

$$P(H) = |\langle H|\Psi\rangle|^2 = \left| (1 \ 0) * \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} \right|^2 = \left| 1 * \frac{1}{2} + 0 * \frac{\sqrt{3}}{2} \right|^2 = \frac{1}{4}$$

Ou seja, a probabilidade de obter Cara em um lançamento é de  $\frac{1}{4}$  (25%).

Obviamente, a probabilidade de obter Coroa é:

$$P(T) = |\langle T|\Psi\rangle|^2 = 1 - P(H) = \frac{3}{4}$$

Observe que na nossa notação:

$|\Psi\rangle \longrightarrow \text{“KET”}$  (vetor coluna)

$\langle\phi| \longrightarrow \text{“BRA”}$  (vetor linha)

$\langle\phi|\Psi\rangle \longrightarrow \text{“BRA(C)KET”}$  (número)

# Postulado III

Para cada propriedade física  $A$  (energia, posição, momento...), existe um “operador” associado que atua no espaço de vetores.

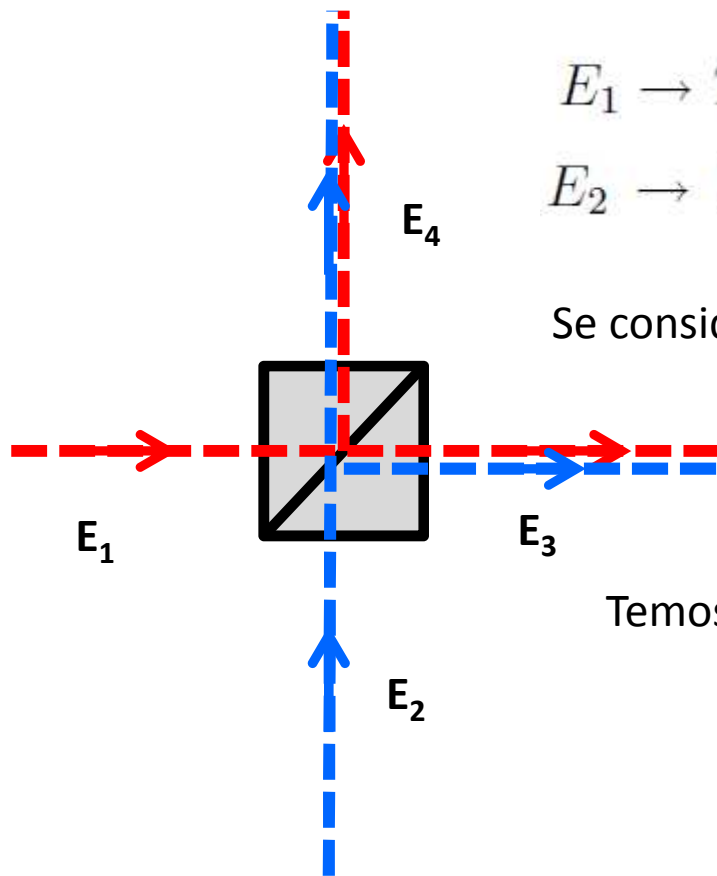
Observação Técnica: Os operadores são Hermitianos, ou seja, matrizes cujos auto-valores são sempre reais.

# Postulado IV

Se o sistema físico está em um estado  $|\Psi\rangle$  e realizamos uma medida do operador  $A$ , o sistema “colapsará” para um estado  $|\phi\rangle$  que está no subespaço de auto-vetores do operador  $A$ .

Considere um separador de feixe, que separa a intensidade da luz em uma parte transmitida (T) e uma refletida (R). Isso também deve ser verdade no nível de um único fóton.

Como podemos descrever (matematicamente) a operação do separador de feixe.



$$\begin{aligned} E_1 &\rightarrow TE_3 + RE_4 \\ E_2 &\rightarrow RE_3 + TE_4 \end{aligned} \quad \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} T & R \\ R & T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_3 \\ E_4 \end{pmatrix}$$

Se considerarmos que não há perdas no separador de feixe:

$$\begin{pmatrix} T & R \\ R & T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T^* & R^* \\ R^* & T^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Temos ainda que:  $|T|^2 + |R|^2 = 1$

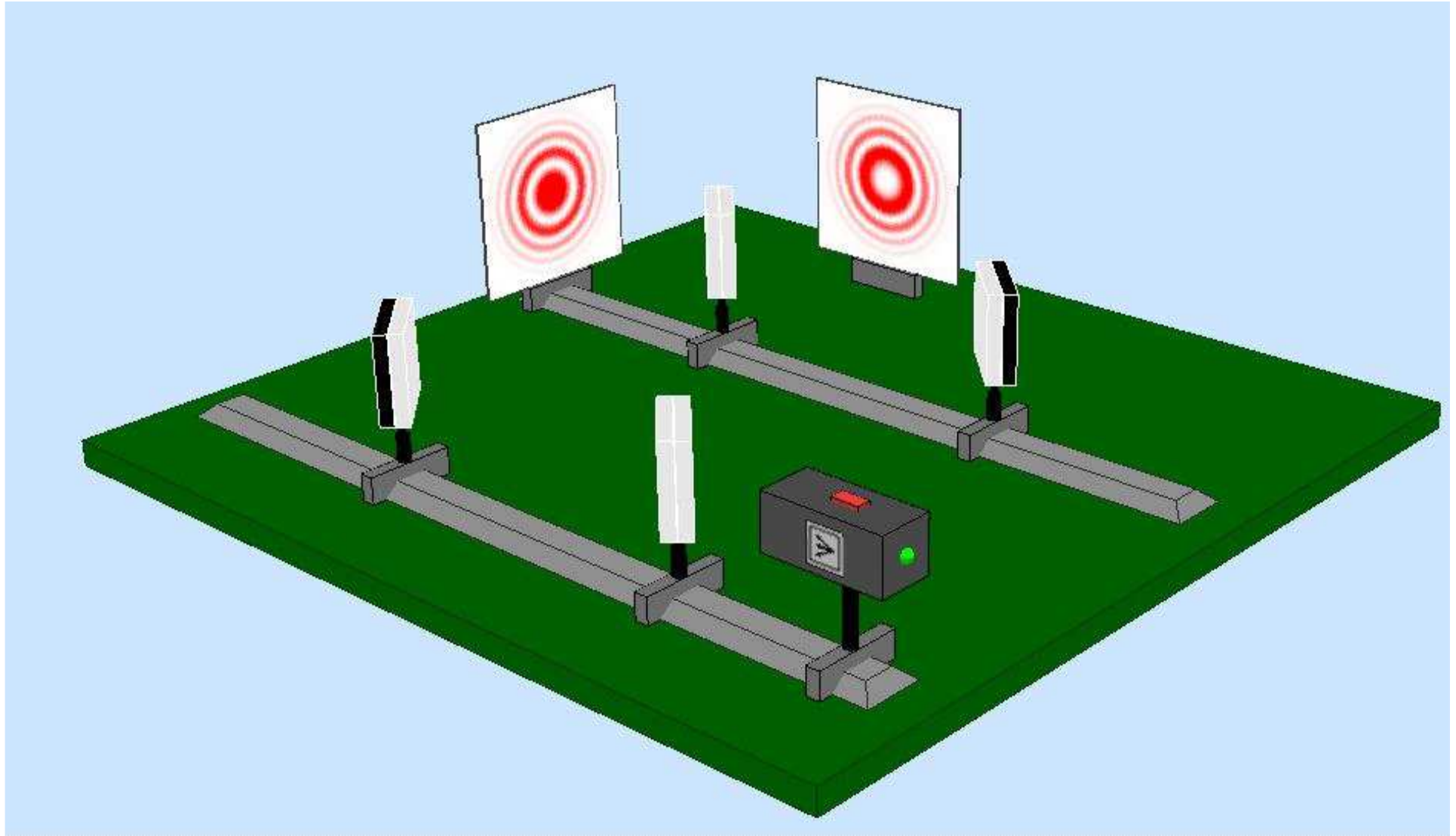
$$R^*T + RT^* = 0.$$

Se considerarmos um separador de feixe 50\50:

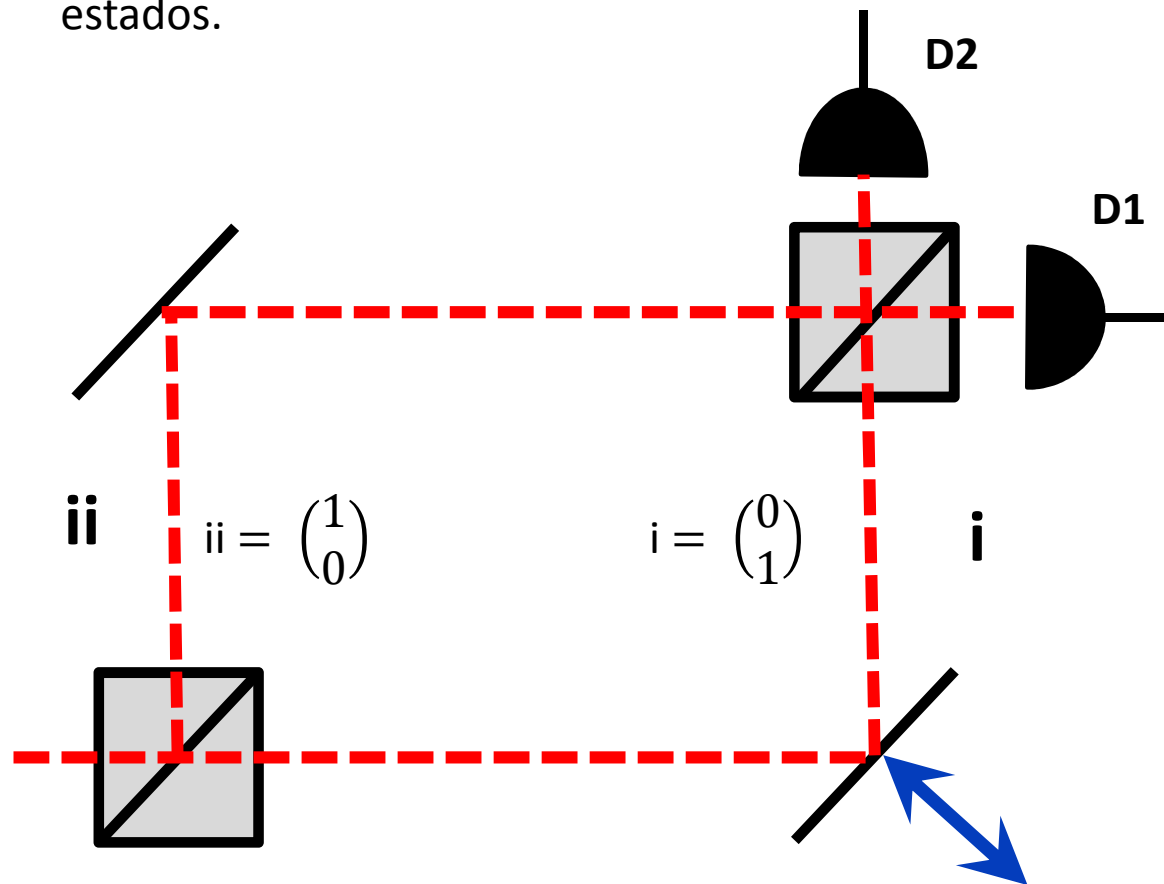
$$B = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}$$



**Observe que os padrões de interferência nos anteparos são complementares. Isso é verdade para um grande número de fótons , mas também para um único fóton.**



Vamos voltar ao interferômetro de Mach-Zehnder para dar um exemplo, bastante interessante das possibilidades (ao menos, teóricas) da propriedade de superposição de estados.



Considere o sistema ao lado, como já vimos antes, ao mudar o comprimento de um dos caminhos, por exemplo, o caminho i, podemos ajustar para ver interferência construtiva ou destrutiva em um dos detectores D1 ou D2, ou seja, veríamos intensidade diferente de zero em um detector e nula no outro. Como já dissemos antes, mesmo que baixássemos a intensidade até ter um único fóton por vez no interferômetro, teríamos o mesmo resultado que no observamos na ótica.

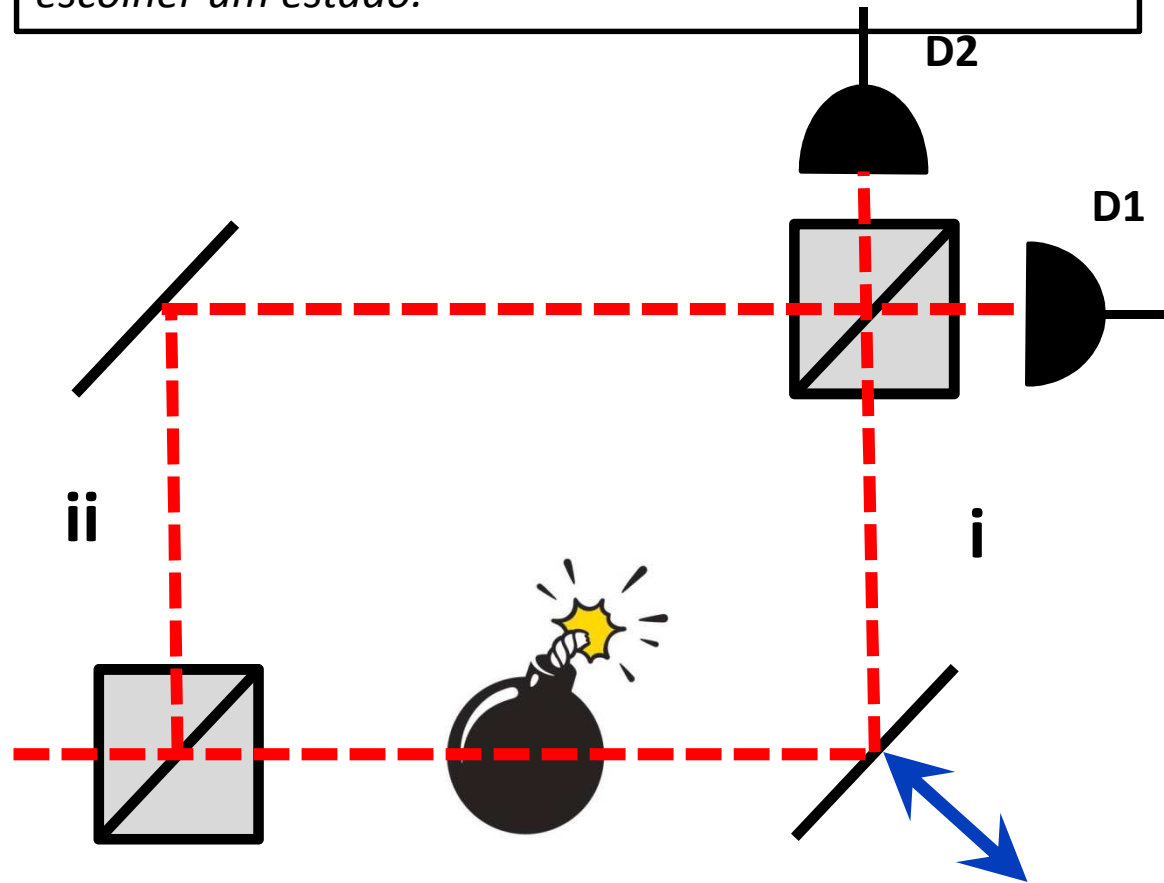
Se temos um único fóton, por que caminho ele irá? A resposta da mecânica quântica é “enquanto não pudermos definir (“medir” por qual caminho ele vai, ele irá por ambos).

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} (|i\rangle + |ii\rangle)$$

**Neste caso, temos auto-estados de caminho!!**

## Detector Quântico de Bombas

*“Um objeto existe em todos os seus possíveis estados antes da medida. O ato de medir o objeto o “força” a escolher um estado.”*



Interferômetro Mach-Zehnder

Ajustamos o interferômetro para a luz ir 100% para detector D2, sempre temos o click em D2.

Colocamos uma bomba no caminho i. Se a bomba está ativa, ela absorve um fóton e explode. Se inativa, ela não interage com o fóton.

Se o fóton segue por i, então: D1 = 0% e D2 = 0%. (fóton foi absorvido)

Se o fóton segue por ii, então: D1 = 50% e D2 = 50% (não há mais interferência)

Portanto, toda vez que tenho, click em D1, sei que tenho uma bomba em i, **mas NÃO houve interação do fóton com a bomba e ela não explodiu!!**

Este resultado apresentado é um “experimento de pensamento”, em que se evidencia vantagem no uso da propriedade dos estados quânticos: a superposição. Tal propriedade não é possível em sistemas clássicos.

Outro fator curioso sobre o qual refletir: como discutimos anteriormente, para realizar uma medida é necessário que tenhamos a interação de um aparato “clássico” com o sistema quântico, o que modifica o estado do sistema quântico. Neste caso, aparentemente, podemos fazer a medida (presença da bomba) sem de fato interagir o fóton com a bomba. Como isso é possível? É um paradoxo?

Vale a pena a leitura do artigo científico onde este esquema foi relatado e como isso seria possível.

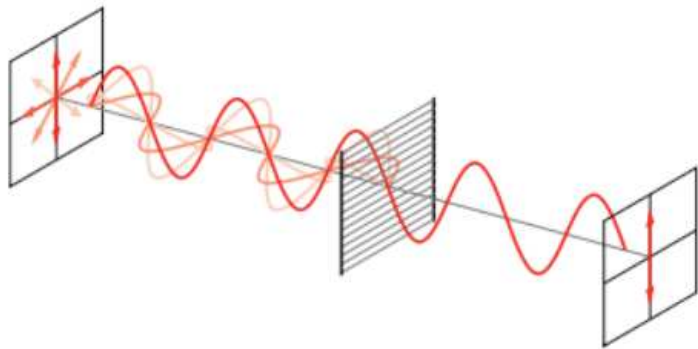
**Quantum mechanical interaction-free measurements,**  
Foundations of Physics, **23**, 987(1993)  
Avshalom C. Elitzur, Lev Vaidman

# Polarização da Luz

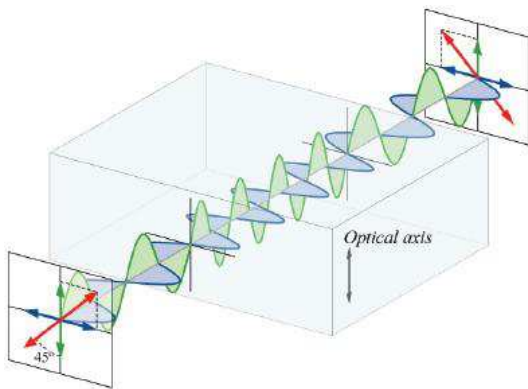
Também podemos descrever a polarização da luz como um sistema de 2 níveis.

Polarização da luz é a direção na qual o campo elétrico oscila.

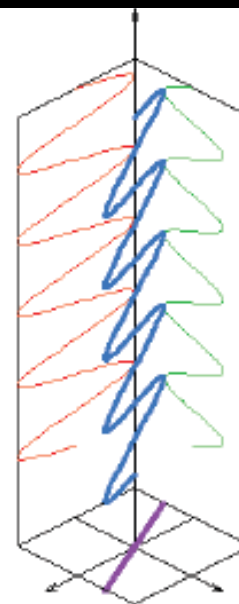
$$E_x(t) = E_{0,x} \cos(\omega t + kz + \delta) \text{ e } E_y(t) = E_{0,y} \cos(\omega t + kz + \delta)$$



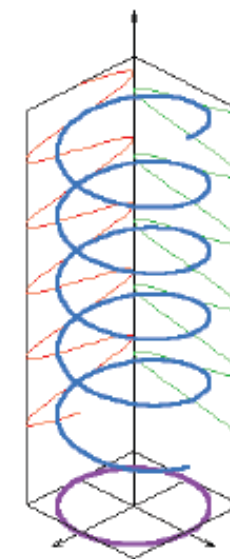
Polarizador: Filtra (seleciona) uma polarização específica.



Birrefringência: Diferentes polarizações viajam através do material com diferentes velocidades. Podemos usar estes materiais para mudar a polarização da luz, chamadas lâminas de retardo de meia onda ou quarto de onda.

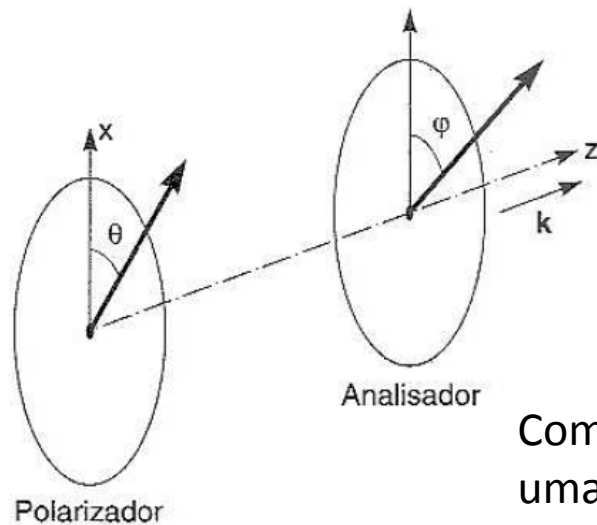


Linear



Circular

# Descrição Matemática da polarização da Luz



Considere dois polarizadores em série:

- O primeiro define a direção da polarização;
- O segundo realiza uma media de polarização.

A intensidade após o analisador é dada por:

$$I / I_0 = \cos^2 (\theta - \varphi) \quad (\text{Lei de Malus})$$

Como já vimos antes, a probabilidade de encontrar um fóton em uma “dada situação”, deve ser proporcional a intensidade do campo elétrico:

$$P(\varphi, \theta) = \cos^2 (\theta - \varphi)$$

Usando as relações trigonométricas podemos escrever ainda:

$$\cos (\theta - \varphi) = \cos \theta \cos \varphi + \sin \theta \sin \varphi$$

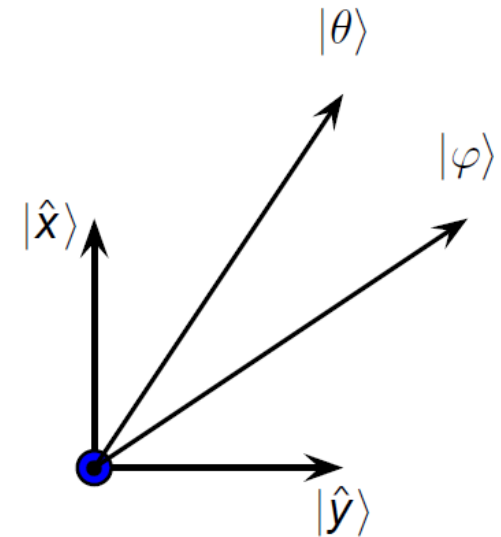
$$\cos (\theta - \varphi) = (\cos \varphi \quad \sin \varphi) \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}$$

Como definimos anteriormente:

$$|\theta\rangle \equiv \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} \quad (\text{ket})$$

$$\langle\varphi| \equiv (\cos \varphi \quad \sin \varphi) \quad (\text{bra})$$

$$\langle\varphi|\theta\rangle = (\cos \varphi \quad \sin \varphi) \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} = \cos(\theta - \varphi)$$



$$P(\varphi, \theta) = |\langle\varphi|\theta\rangle|^2$$

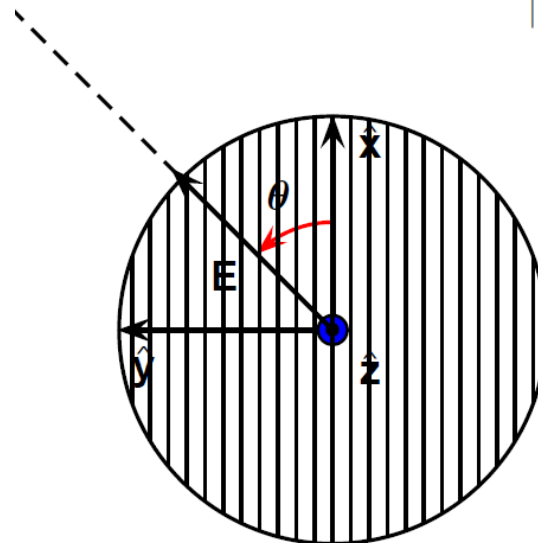
Resultado esperado da Física Quântica.

$$|\theta\rangle = \cos \theta |\hat{x}\rangle + \sin \theta |\hat{y}\rangle$$

$$|C_1|^2 = \cos^2 \theta$$

$$|C_2|^2 = \sin^2 \theta$$

$$|C_1|^2 + |C_2|^2 = 1$$



Veja que a resposta descrição clássica para o campo eletromagnético é a mesma que temos para o estado quântico, que pode ser obtida para um único fóton. Portanto, podemos considerar os fenômenos observados na óptica clássica, como a realização de um grande número de medidas (em geral, em torno de  $10^{15}$  experimentos simultâneos). Assim, obtemos facilmente a distribuição de probabilidade consolidada para um fenômeno.

As regras da óptica geométrica desenvolvidas no século XVII e da óptica ondulatória do século XVIII, são as regras da quântica do século XX, na condição de grande número de eventos.

Assim podemos utilizar a luz, em especial a polarização, para descrever todos os fenômenos quânticos e desenvolver intuição sobre estes fenômenos.



# Qual é a linguagem usada em Física Quântica?

Na aula de hoje, utilizamos uma forma de representar os estados dos sistemas quânticos que é denominada NOTAÇÃO DE DIRAC. Essa forma de descrever os sistemas quânticos é a mais contemporânea e, utilizando o ferramental da álgebra linear, apresenta diversas vantagens e permite realizar cálculos de forma bastante concisa e refinada.

Nos próximos slides temos uma apresentação dos elementos desta descrição matemática com a apresentação de propriedades destes entes matemáticos. A ideia de inserir estas informações aqui é mais para que o aluno perceba que o que foi desenvolvido como ilustração para um caso simples de 2 níveis, pode ser estendido para uma dimensão arbitrária e que esta matemática está muito bem estabelecida.

**Não é escopo desta disciplina a discussão da notação de Dirac, nem mesmo a sua utilização. Contudo, aqui foi inserido para ilustrar como é feita a descrição de Física Quântica. Em geral, isto pode ser estudado em disciplinas de Mecânica Quântica, como a oferecida pelo Bacharelado em Física.**

# Notação de Dirac (caso geral de espaço discreto)

Nos livros de física quântica (mais avançados), em geral, é utilizada a notação de Dirac. O estado quântico (função de onda) do sistema é representado pelo vetor de estado:

Vetor de estado  $|\alpha\rangle \rightarrow \text{"ket"}, \alpha \text{ rótulo identificador.}$

Um vetor de estado contém todas as informações sobre o estado físico do sistema.

**Dimensionalidade:** é determinada pela natureza do sistema físico considerado.

**Estrutura de espaço vetorial:** estão definidas as operações de soma de vetores e multiplicação de um vetor por um número complexo.

a) A soma de dois vetores  $|\alpha\rangle, |\beta\rangle$  é um terceiro vetor  $|\gamma\rangle$ ,  
 $|\alpha\rangle + |\beta\rangle = |\gamma\rangle$

que satisfaz as propriedades:

(a1) Associativa:  $|\alpha\rangle + (|\beta\rangle + |\gamma\rangle) = (|\alpha\rangle + |\beta\rangle) + |\gamma\rangle$

(a2) Comutativa:  $|\alpha\rangle + |\beta\rangle = |\beta\rangle + |\alpha\rangle$

(a3) Vetor Nulo  $|\otimes\rangle$ :  $|\alpha\rangle + |\otimes\rangle = |\alpha\rangle$  para qualquer  $|\alpha\rangle$

(a4) Vetor Inverso:  $|\alpha\rangle + |-\alpha\rangle = |\otimes\rangle$  para todo  $|\alpha\rangle$

b) O produto de um vetor  $|\alpha\rangle$  por um número complexo  $c$  é o vetor  $c|\alpha\rangle$  que satisfaz as propriedades:

(b1) Associativa:  $(c_1 c_2)|\alpha\rangle = c_1(c_2|\alpha\rangle)$

(b2) Distributiva:  $(c_1 + c_2)|\alpha\rangle = c_1|\alpha\rangle + c_2|\alpha\rangle$

$c(|\alpha\rangle + |\beta\rangle) = c|\alpha\rangle + c|\beta\rangle$

(b3)  $1|\alpha\rangle = |\alpha\rangle$  para qualquer  $|\alpha\rangle$

**Produto Escalar Hermiteano:** operação que associa a todo par de vetores  $|\alpha\rangle$  e  $|\beta\rangle$  um número complexo que será indicado pelo símbolo  $(\beta, \alpha)$ , satisfazendo as propriedades:

$$\begin{aligned} \text{(p1)} \quad & (\alpha, \beta + \gamma) = (\alpha, \beta) + (\alpha, \gamma) \\ \text{(p2)} \quad & (\alpha, c\beta) = c(\alpha, \beta) \\ \text{(p3)} \quad & (\alpha, \beta) = (\beta, \alpha)^* \\ \text{(p4)} \quad & (\alpha, \alpha) \text{ é real} \\ & 0 \leq (\alpha, \alpha) < \infty \quad (\alpha, \alpha) = 0 \Leftrightarrow |\alpha\rangle = |\otimes\rangle \end{aligned}$$

Consequência das propriedades: Linearidade do produto escalar com respeito ao segundo argumento e antilinearidade com respeito ao primeiro argumento

$$\begin{aligned} (\alpha, c_1\beta + c_2\gamma) &= c_1(\alpha, \beta) + c_2(\alpha, \gamma) \\ (c_1\beta + c_2\gamma, \alpha) &= c_1^*(\beta, \alpha) + c_2^*(\gamma, \alpha) \end{aligned}$$

Ortogonalidade: Dois vetores são ortogonais se  $(\alpha, \beta) = 0$

Norma:  $\| |\alpha\rangle \| = (\alpha, \alpha)^{1/2}$

$(\alpha, \alpha) = 1 \rightarrow$  vetor de estado normalizado

Se o espaço dos vetores de estado tem dimensão  **$N$** , existe uma **base de vetores de estado** dada por  $N$  vetores ortonormais,

$$(\phi_i, \phi_j) = \delta_{ij} \quad i, j = 1, \dots, N$$

tal que qualquer vetor de estado pode ser escrito como:

$$|\alpha\rangle = \sum_{i=1}^N \alpha_i |\phi_i\rangle \quad \alpha_i = \langle \phi_i | \alpha \rangle$$

# Espaço Dual: “Bras”

- Dado um espaço vetorial podemos definir funções lineares com valores complexos dos vetores do espaço,

$$a(|\alpha\rangle) = \langle a|\alpha\rangle$$

Linearidade:  $a(c_\alpha|\alpha\rangle + c_\beta|\beta\rangle) = c_\alpha\langle a|\alpha\rangle + c_\beta\langle a|\beta\rangle$

a) Soma de funções lineares

$$\langle a|\alpha\rangle = \langle a_1|\alpha\rangle + \langle a_2|\alpha\rangle$$

(a1) Associativa:  $\langle a_1|\alpha\rangle + (\langle a_2|\alpha\rangle + \langle a_3|\alpha\rangle) =$   
 $(\langle a_1|\alpha\rangle + \langle a_2|\alpha\rangle) + \langle a_3|\alpha\rangle$

(a2) Comutativa:  $\langle a_1|\alpha\rangle + \langle a_2|\alpha\rangle = \langle a_2|\alpha\rangle + \langle a_1|\alpha\rangle$

(a3) Função Nula:  $\langle \otimes|\alpha\rangle = 0$ , para qualquer  $|\alpha\rangle$

(a4) Função Inversa:  $\langle a|\alpha\rangle + \langle -a|\alpha\rangle = \langle \otimes|\alpha\rangle$

b) Produto da função linear por um número complexo:

$$\langle ca|\alpha\rangle = c\langle a|\alpha\rangle$$

(b1) Associativa:  $(c_1c_2)\langle a|\alpha\rangle = c_1(c_2\langle a|\alpha\rangle)$

(b2) Distributiva:  $(c_1 + c_2)\langle a|\alpha\rangle = c_1\langle a|\alpha\rangle + c_2\langle a|\alpha\rangle$   
 $c(\langle a_1|\alpha\rangle + \langle a_2|\alpha\rangle) = c\langle a_1|\alpha\rangle + c\langle a_2|\alpha\rangle$

(b3)  $1\langle a|\alpha\rangle = \langle a|\alpha\rangle$

- Estrutura de espaço vetorial: **Espaço Dual do espaço de partida.**
- Correspondência dual: A cada vetor  $|\alpha\rangle$  associamos uma função linear  $\langle\alpha|$  tal que o seu valor no vetor  $|\beta\rangle$  seja

$$a(|\beta\rangle) = \langle\alpha|\beta\rangle = (\alpha, \beta)$$

Na notação de Dirac, um vetor do espaço dual é chamado de “*bra*”. Os produtos escalares entre dois vetores do espaço vetorial aparecem como *brackets*

$$\underbrace{\langle \alpha | \beta \rangle}_{\text{bra(c)ket}}$$

Correspondência entre vetores do espaço vetorial e do espaço dual é tal que

$$\begin{array}{ccc} |\alpha\rangle & \xrightarrow{\text{DC}} & \langle \alpha| \\ c|\alpha\rangle & \xrightarrow{\text{DC}} & c^* \langle \alpha| \\ c_\alpha |\alpha\rangle + c_\beta |\beta\rangle & \xrightarrow{\text{DC}} & c_\alpha^* \langle \alpha| + c_\beta^* \langle \beta| \end{array}$$

Dada uma base no espaço vetorial podemos achar uma base correspondente no espaço dual:  $\{|\phi_n\rangle\} \xrightarrow{\text{DC}} \{\langle \phi_n|\}$

$$|\alpha\rangle = \sum_n \alpha_n |\phi_n\rangle \xrightarrow{\text{DC}} \langle \alpha| = \sum_n \alpha_n^* \langle \phi_n|$$

tal que

$$\langle \alpha | \beta \rangle = \sum_n \alpha_n^* \beta_n = (\alpha, \beta)$$

# Operadores Lineares

- Ação de um operador linear num vetor do espaço vetorial transforma esse vetor em outro vetor do mesmo espaço:

$$|\beta\rangle = \hat{X}|\alpha\rangle$$

Linearidade:  $\hat{X}(c_\alpha|\alpha\rangle + c_\beta|\beta\rangle) = c_\alpha\hat{X}|\alpha\rangle + c_\beta\hat{X}|\beta\rangle$

a) Soma de operadores lineares

$$(\hat{X} + \hat{Y})|\alpha\rangle = \hat{X}|\alpha\rangle + \hat{Y}|\alpha\rangle$$

(a1) Comutativa:  $\hat{X} + \hat{Y} = \hat{Y} + \hat{X}$

(a2) Associativa:  $\hat{X} + (\hat{Y} + \hat{Z}) = (\hat{X} + \hat{Y}) + \hat{Z} = \hat{X} + \hat{Y} + \hat{Z}$

b) Produto de operadores lineares

$$(\hat{X}\hat{Y})|\alpha\rangle = \hat{X}(\hat{Y}|\alpha\rangle)$$

(b1) Não-Comutativa (em geral):  $\hat{X}\hat{Y} \neq \hat{Y}\hat{X}$

(b2) Associativa:  $\hat{X}(\hat{Y}\hat{Z}) = (\hat{X}\hat{Y})\hat{Z}$

# Representação de um vetor de estado em uma Base

$$\{|\phi_n\rangle, n = 1, 2, \dots\}$$

1) Vetores de estado são representados em termos de suas componentes nessa base:

$$|\alpha\rangle = \sum_n \alpha_n |\phi_n\rangle = \sum_n |\phi_n\rangle \langle \phi_n | \alpha \rangle \quad \alpha_n = \langle \phi_n | \alpha \rangle$$

➡  $\alpha_n = \langle \phi_n | \alpha \rangle \rightarrow$  elementos da matriz coluna que representa o vetor de estado  $|\alpha\rangle$  na base  $\{|\phi_n\rangle\}$ .

2) Um operador linear é representado em termos de uma matriz determinada através da ação do operador em cada um dos vetores da base:

$$\hat{X}|\phi_n\rangle = \sum_m |\phi_m\rangle X_{mn} = \sum_m |\phi_m\rangle \langle \phi_m | \hat{X} | \phi_n \rangle \quad X_{mn} = \langle \phi_m | \hat{X} | \phi_n \rangle$$

➡  $X_{mn} = \langle \phi_m | \hat{X} | \phi_n \rangle \rightarrow$  elementos da matriz que representa o operador  $\hat{X}$  na base  $\{|\phi_n\rangle\}$ .



# Autovalores e autovetores de um observável

Equação de autovalores para um operador  $\hat{G}$ :

$$\hat{G}|g\rangle = g|g\rangle.$$

O número, em geral complexo,  $g$  é o autovalor e  $|g\rangle$  o autovetor.

**Correspondência:** Variáveis dinâmicas clássicas  $\rightarrow$  operadores hermiteanos

$$\hat{A}|a\rangle = a|a\rangle \quad \hat{A}^\dagger = \hat{A}.$$

Propriedades da equação de autovalores para operadores hermiteanos:

1. Autovalores são reais;
2. Autovetores com diferentes autovalores são ortogonais;
3. Autovetores de um operador hermiteano definem uma base no espaço de vetores de estado.

A probabilidade é sempre não-negativa e a soma das probabilidades de se medir todos os autovalores de um observável é igual a um;

$$p(a_i, \alpha) = |\langle a_i | \alpha \rangle|^2$$

$$\sum_i p(a_i, \alpha) = \sum_i \langle \alpha | a_i \rangle \langle a_i | \alpha \rangle = \langle \alpha | \alpha \rangle = 1$$

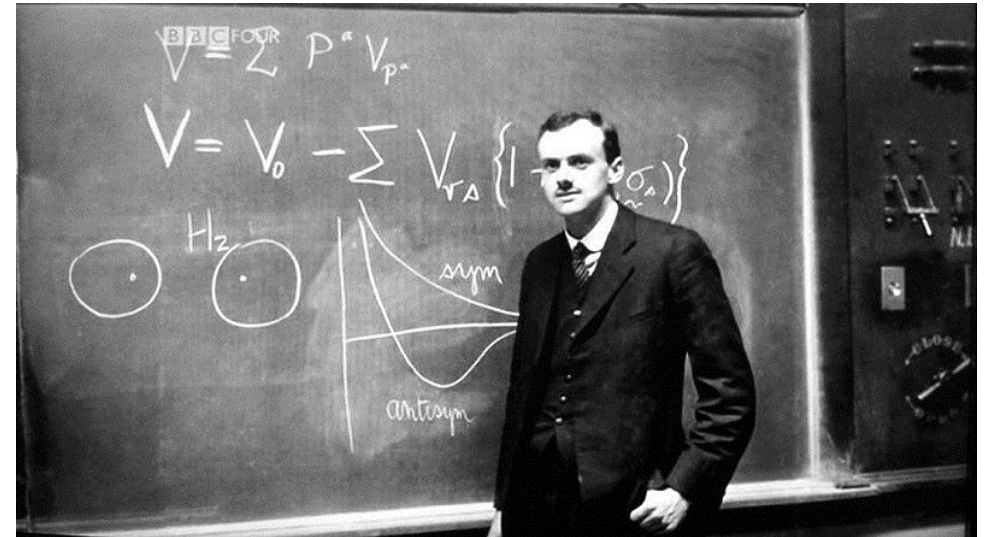
Valor médio das medidas de um observável se o sistema está no estado  $|\alpha\rangle$ :

$$\langle \hat{A} \rangle_\alpha = \sum_i a_i p(a_i, \alpha) = \sum_i \langle \alpha | a_i \rangle a_i \langle a_i | \alpha \rangle$$

Então:

$$\langle \hat{A} \rangle_\alpha = \langle \alpha | \hat{A} | \alpha \rangle$$

A Notação de Dirac pode parecer difícil em um primeiro olhar, mas a estrutura concisa permite a descrição de sistemas quânticos com elegância e eficiência.



Nesta disciplina, não será exigido o uso da notação de Dirac, mas seu conhecimento pode ser bastante útil para o estudo de disciplinas mais avançadas que se utilizem de Física Quântica.

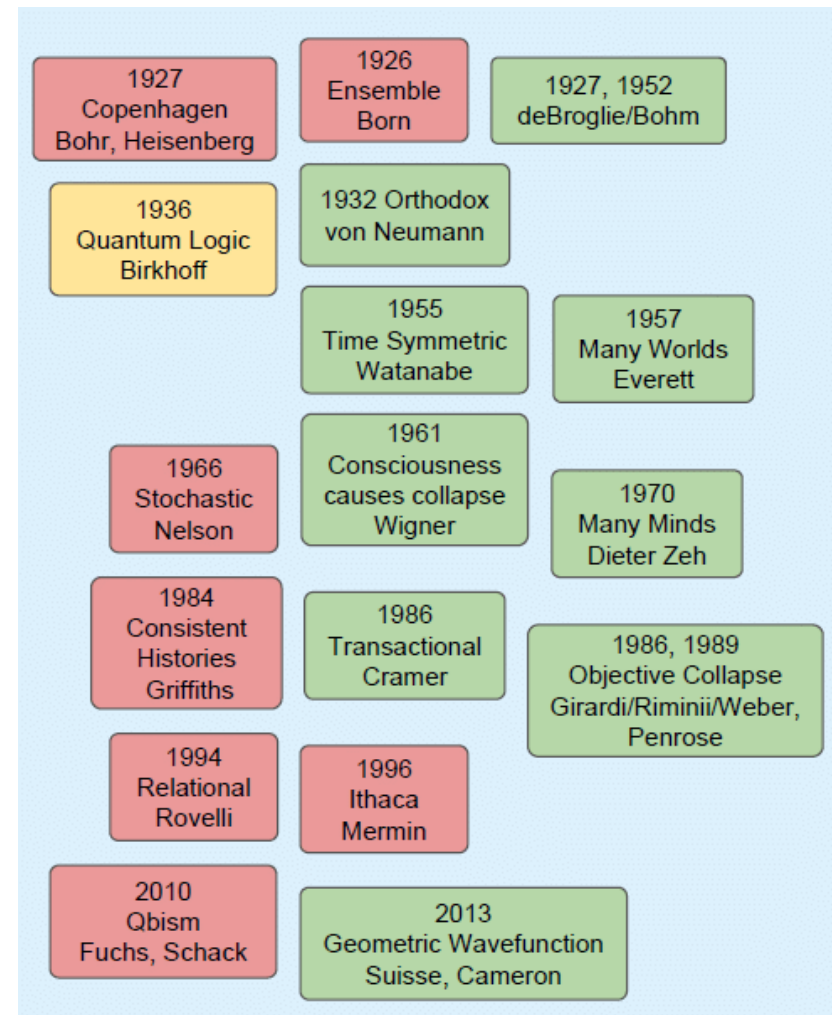
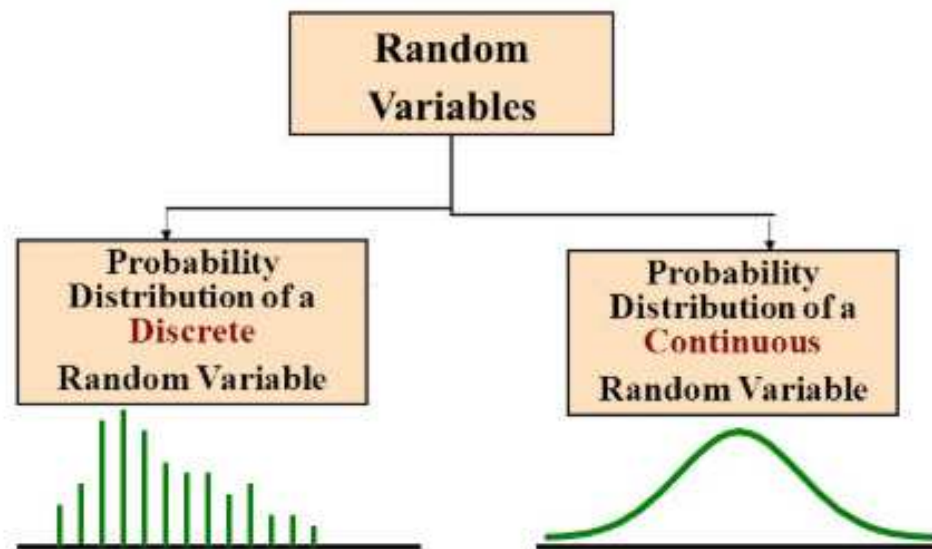
$$\begin{aligned}\langle n | \hat{A} \hat{B} | n' \rangle &= \langle n | \hat{A} \left( \sum_{n''} | n'' \rangle \langle n'' | \right) \hat{B} | n' \rangle \\ &= \sum_{n''} \langle n | \hat{A} | n'' \rangle \langle n'' | \hat{B} | n' \rangle\end{aligned}$$

# Exercícios sobre sistemas de dois níveis e polarização

Os assuntos da aula de hoje não são abordados na lista de exercícios gerais já divulgadas. Por isso, uma lista sobre estes temas estará disponível esta semana juntamente com os slides da aula.

O entendimento destes tópicos será bastante relevante para as questões futuras a serem abordadas. Apenas por meio da prática é possível um entendimento adequado.

Na próxima aula, iremos discutir a relação entre os estados quânticos apresentados hoje e as funções de onda, bem como espaços discretos e contínuos em física quântica. Além disso, abordaremos o tópico das diversas interpretações na Física Quântica, o que está entre a física e a filosofia.



### **Na aula de hoje (15/10/19)**

- Interferômetros e fótons únicos;
- Polarização da luz;
- Postulados da física quântica;
- Notação de Dirac.

### **Na próxima aula (18/10/19)**

- Relação entre estados quânticos e funções de onda.
- Espaços discretos e contínuos na física quântica.
- Probabilidade e interpretações em Física Quântica.



Perguntas, dúvidas, comentários, aflições?

## Cronograma e conteúdo programático da disciplina (parte 1)

Semana	Dia	Aula	Conteúdo
1	<del>24/09 (Ter)</del>	<del>1</del>	<del>Apresentação a disciplina; Evidências experimentais da teoria quântica : radiação do Corpo Negro.</del>
	<del>---</del>	<del>---</del>	<del>-----</del>
2	<del>01/10 (Ter)</del>	<del>2</del>	<del>Evidências experimentais da teoria quântica: efeito foto-elétrico, efeito Compton, espectros atômicos</del>
	<del>03/10 (Qui)</del>	<del>3</del>	<del>Modelos atômicos, Modelo quântico de Bohr, Experimento de Franck-Hertz, Hipótese de de Broglie e ondas de matéria.</del>
3	<del>08/10 (Ter)</del>	<del>4</del>	<del>Revisitando ondas; interferência (fótons e elétrons) e interferômetros; dualidade onda-partícula e princípio de complementaridade; Princípio de incerteza de Heisenberg.</del>
	<del>---</del>	<del>---</del>	<del>-----</del>
4	<del>15/10 (Ter)</del>	<del>5</del>	<del>Interferômetros e fótons únicos, polarização da luz, postulados da física quântica e notação de Dirac</del>
	17/10 (Qui)	6	Relação entre estados quânticos e funções de onda. Espaços discretos e contínuos na física quântica. Probabilidade e interpretações em Física Quântica.
5	22/10 (Ter)	7	Mecânica Quântica Ondulatória, Determinação eurística da Equação de Schrodinger, propriedades da equação de Schrodinger e funções de ondas.
	---	---	-----
6	<b>29/10 (Ter)</b>	<b>P1</b>	<b>Primeira Avaliação</b>
	31/10 (Qui)	8	Potenciais simples: poço de potencial, Espaço de estados e transições entre estados de energia; Elétrons em currais quânticos e o gato de Schrodinger.



## Cronograma e conteúdo programático da disciplina (parte 2)

Semana	Dia	Aula	Conteúdo
7	05/11 (Ter)	9	Potenciais simples: poço quadrado finito; operadores e valores médios de observáveis, pontos quânticos e suas aplicações.
	---	---	-----
8	12/11 (Ter)	10	Potenciais simples: Oscilador Harmônico Quântico. Armadilhas de íons e princípios de informação quântica. Requisitos essenciais de um computador quântico, Emaranhamento Quântico.
	14/11 (Qui)	11	Potenciais simples: potenciais degraus, reflexão, Transmissão de Ondas, Tunelamento. Tempo de tunelamento em uma barreira (revisitando o princípio de incerteza de Heisenberg). Microscópios de tunelamento e mapeamento de átomos e moléculas.
9	19/11 (Ter)	12	Equação de Schrodinger em três dimensões: O cubo quântico (coordenadas cartesianas), O átomo de Hidrogênio (coordenadas esféricas), Separação de variáveis e a quantização de Momento Angular e Energia.
	---	---	-----
10	26/11 (Ter)	13	Funções de ondas do átomo de Hidrogênio; Orbitais; Significado físico dos números quânticos atômicos. Imagens, Abstrações e Interpretações.
	28/11(Qui)	14	Introdução (noções gerais) aos Átomos de muitos elétrons, spin (quarto número quântico atômico) e tabela periódica. O fim de um começo.
11	03/12 (Ter)	P2	<b>Segunda Avaliação da Disciplina</b>
	---	---	-----
12	10/12 (Ter)	Psub\REC	<b>Avaliação Substitutiva ou Avaliação de Recuperação</b>
13			
	<b>14 a 21/9</b>		<b>Lançamento de conceitos e faltas</b>