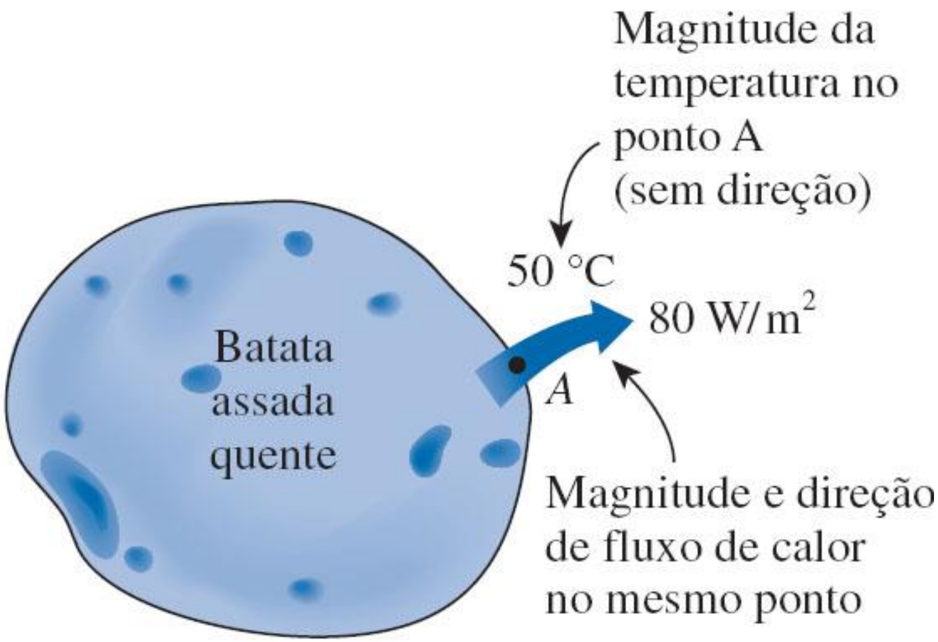
UFABC

Transferência de Calor Aplicada a Sistemas Aeroespaciais

Prof. Dr. Alexandre Alves

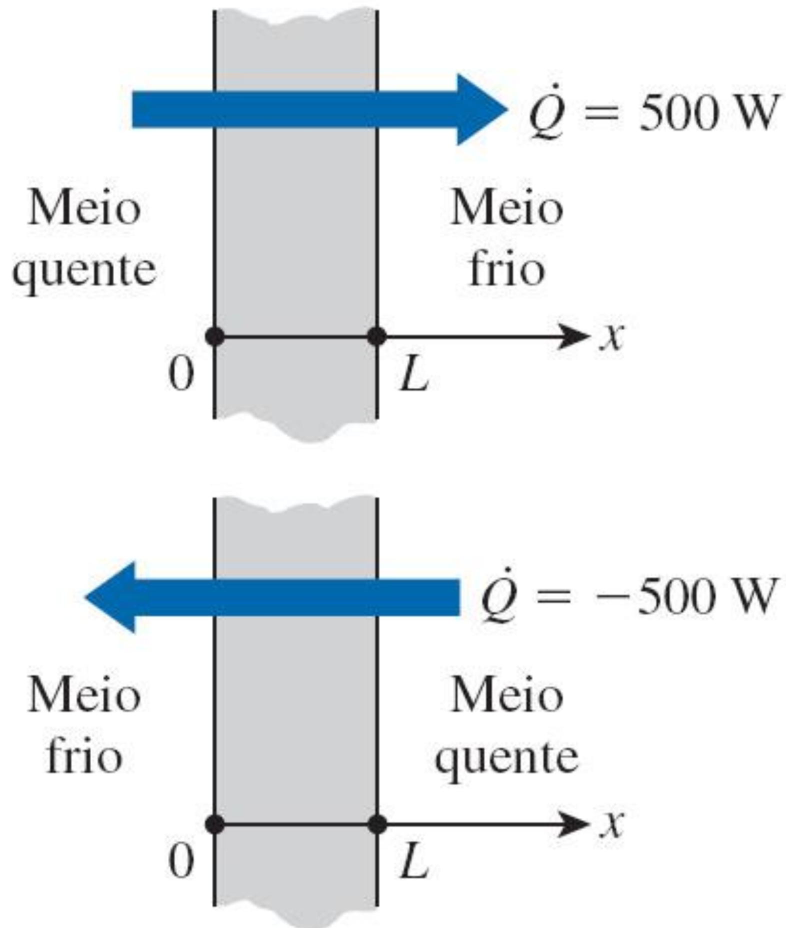
Equações de condução de calor

Quanto maior a diferença de temperatura, maior a transferência de calor



A transferência de calor tem direção e magnitude, portanto é uma grandeza *vetorial*.

SENTIDO DO FLUXO TÉRMICO

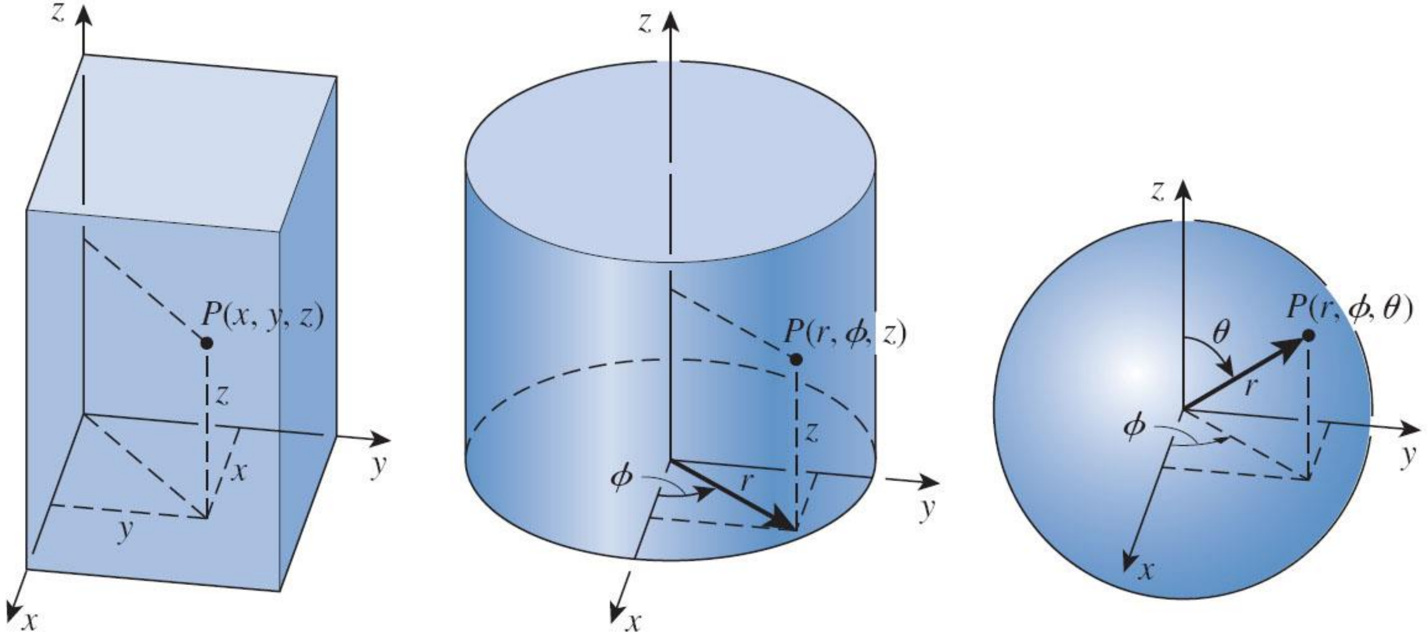


Direção da transferência de calor (positiva na direção de x e negativa na direção contrária)

UFABC

DIFERENTES SISTEMAS DE COORDENADAS

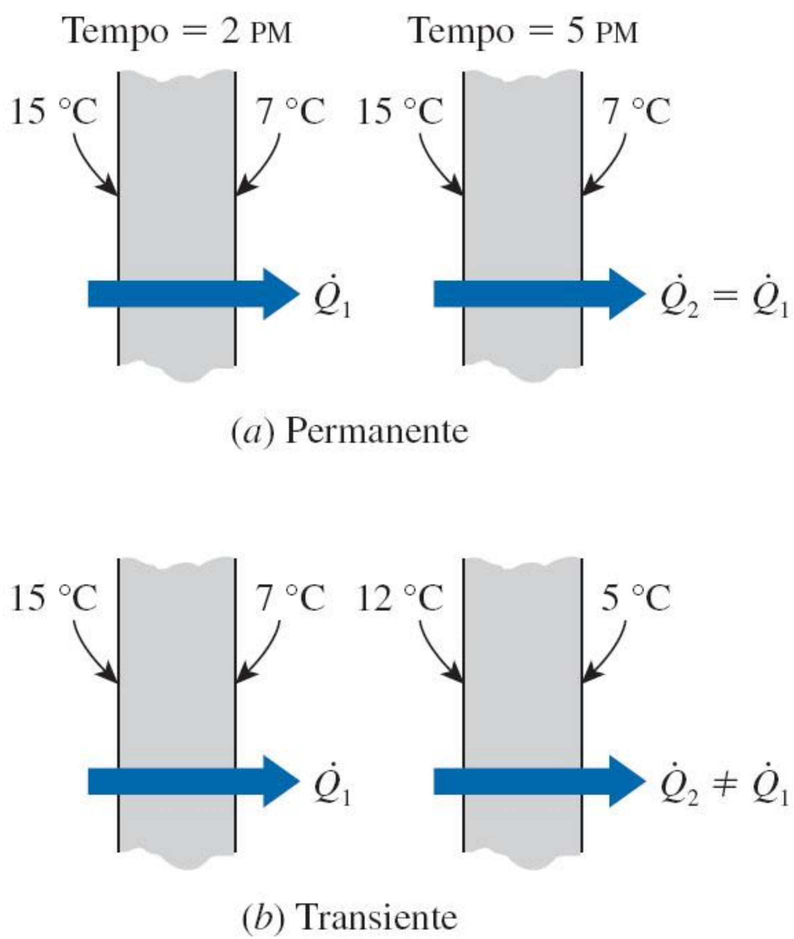
- ✓ retangular $T(x, y, z, t)$
- ✓ cilíndrica $T(r, \phi, z, t)$
- ✓ esférica $T(r, \phi, \theta, t)$.



T(x,y,z,t) depende de todas as variáveis

UFABC

DIFERENTES TIPOS DE PROBLEMAS DE TRANSFERÊNCIA DE CALOR



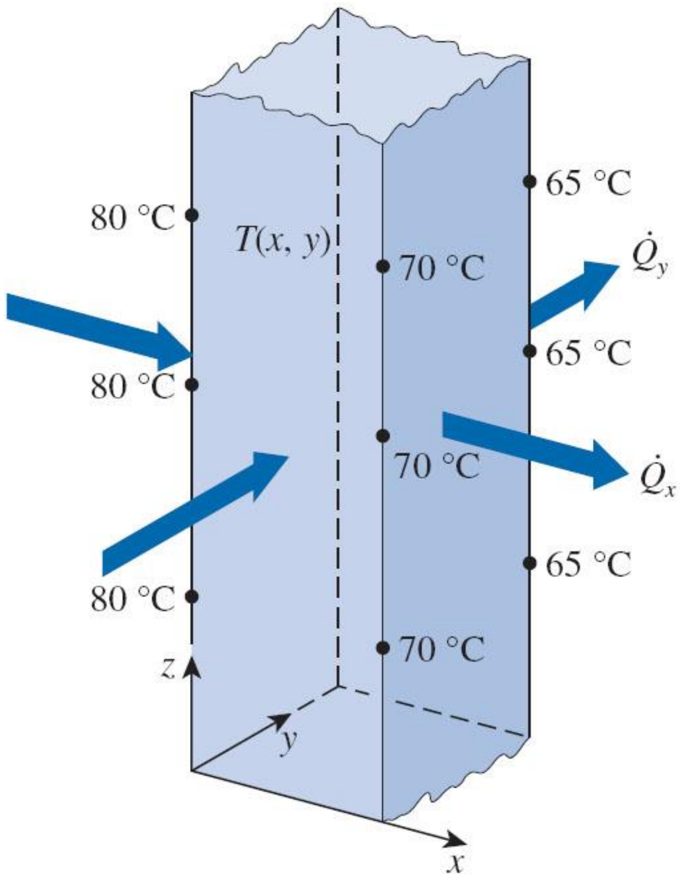
Condução de calor transiente e permanente em uma parede plana

MODOS DE VARIAÇÃO DE TEMPERATURA

- Na maioria dos sistemas a temperatura varia ao longo do corpo com o tempo, como, por exemplo, uma maçã na geladeira;

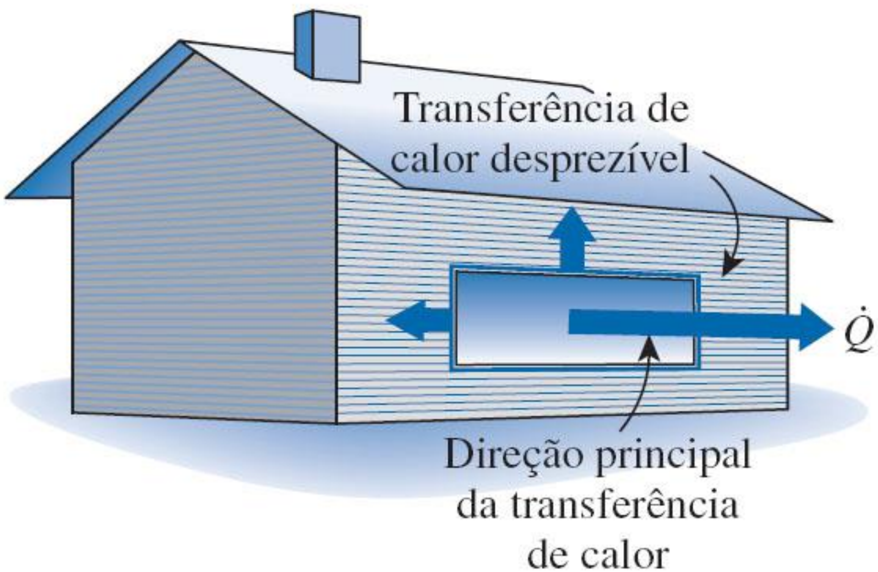
- Entretanto, em sistemas **aglomerados** a temperatura não varia ao longo do corpo, mas varia com o tempo. Ou seja, nestes sistemas considera-se que a temperatura do corpo varia uniformemente com o tempo;

- Pode-se citar como exemplo de sistema aglomerado uma barra metálica aquecida sendo resfriada enquanto sua temperatura é medida com uso de um *termopar*.



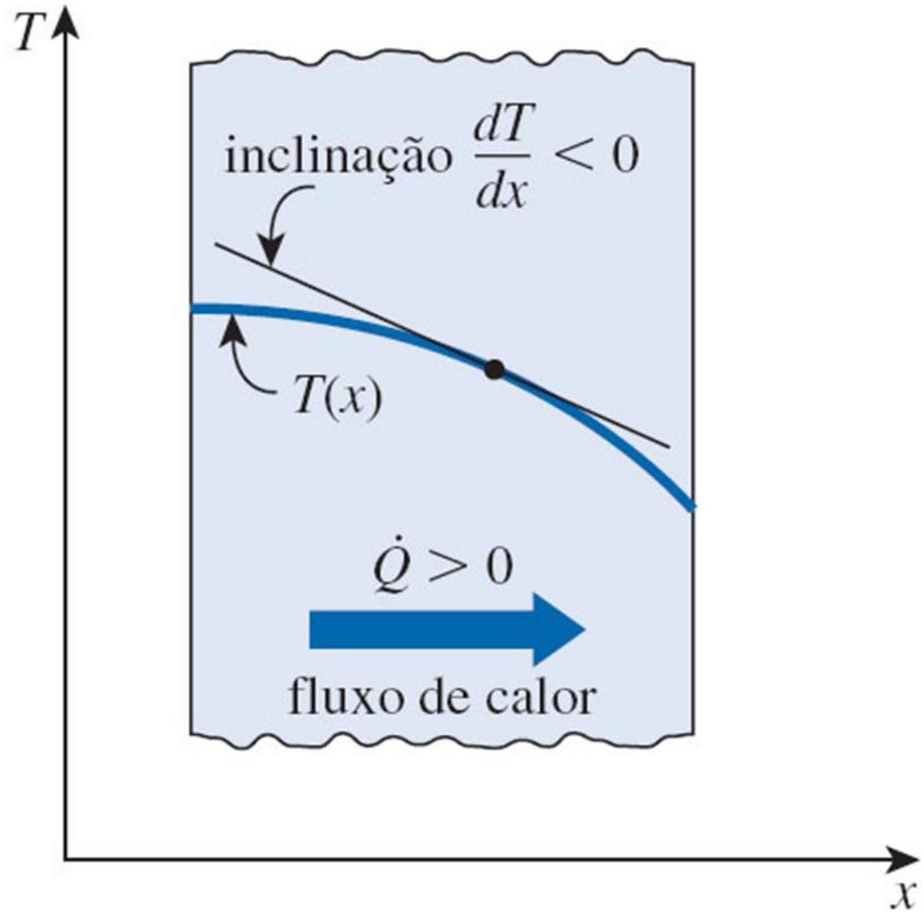
A transferência de calor bidimensional em uma barra longa e retangular.

- ✓ Unidimensional
- ✓ Bidimensional
- ✓ Tridimensional



A transferência de calor através da janela de uma casa pode ser considerada unidimensional.

$$\dot{Q}_{\text{cond}} = -kA\frac{dT}{dx} \qquad \text{(W)}$$



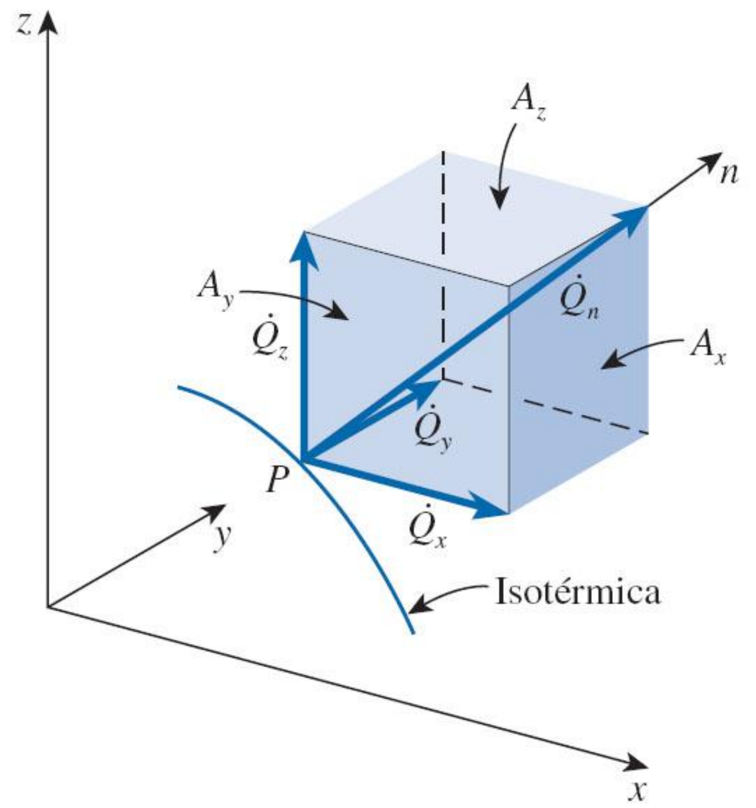
LEI DE FOURIER PARA TRANSFERÊNCIA DE CALOR MULTIDIMENSIONAL

$$\dot{Q}_n = -kA\frac{\partial T}{\partial n} \qquad \text{(W)}$$

$$\vec{\dot{Q}}_n = \dot{Q}_x \vec{i} + \dot{Q}_y \vec{j} + \dot{Q}_z \vec{k}$$

$$\dot{Q}_x = -kA_x \frac{\partial T}{\partial x}, \qquad \dot{Q}_y = -kA_y \frac{\partial T}{\partial y},$$

$$\dot{Q}_z = -kA_z \frac{\partial T}{\partial z}$$



UFABC

TRANSFERÊNCIA DE CALOR COM GERAÇÃO DE CALOR

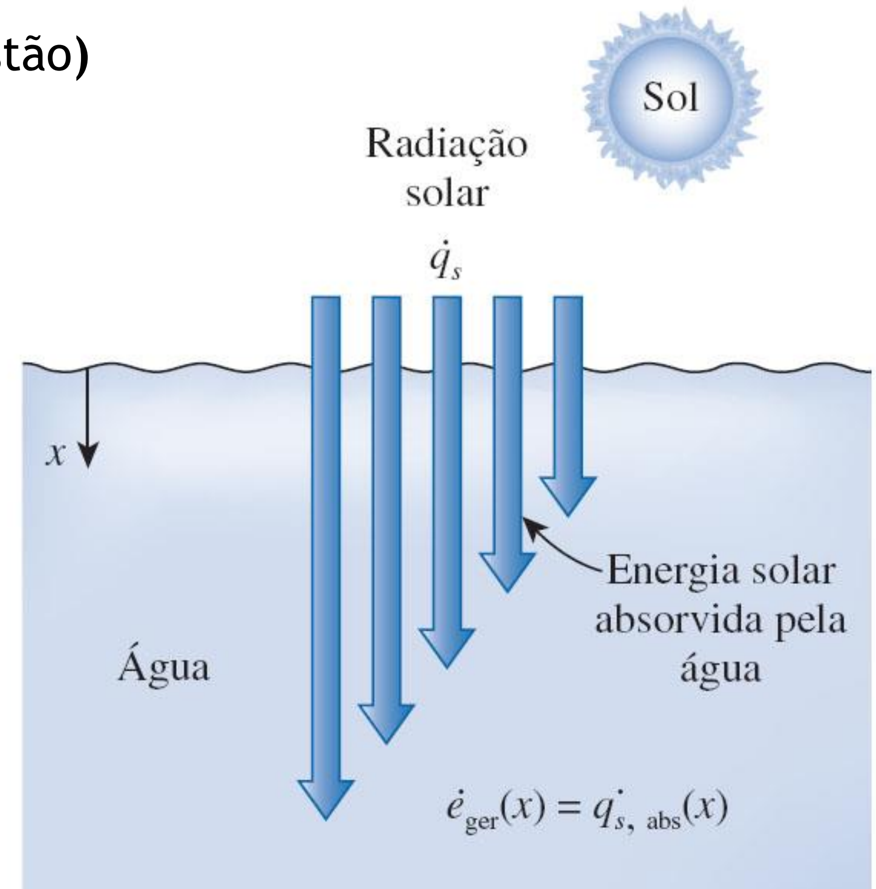
- Resistência elétrica (forno tubular)

- Reação química exotérmica (combustão)

$$\boxed{\dot{E}_{gen} = \int_V \dot{e}_{gen}\, dV \qquad \text{(W)}}$$

$$\dot{E}_{gen} = \dot{e}_{gen} V,$$

A absorção da radiação solar pela água pode ser tratada como geração de calor. Diferentemente de um corpo opaco que a radiação é absorvida na superfície em alguns mícrons



EQUAÇÃO DE CONDUÇÃO DE CALOR UNIDIMENSIONAL

Taxa de condução de calor em x

\-

Taxa de condução de calor em x + Δx

\+

Taxa de geração de calor dentro do elemento

=

Taxa de variação da energia contida no elemento

EQUAÇÃO DE CONDUÇÃO DE CALOR UNIDIMENSIONAL

$$\dot{Q}_x - \dot{Q}_{x+\Delta x} + \dot{E}_{\text{gen, element}} = \frac{\Delta E_{\text{element}}}{\Delta t}$$ **(equação 2-6)**

$$\Delta E_{\text{element}} = E_{t+\Delta t} - E_t = mc(T_{t+\Delta t} - T_t) = \rho c A \Delta x (T_{t+\Delta t} - T_t)$$

$$\dot{E}_{\text{gen, element}} = \dot{e}_{\text{gen}} V_{\text{element}} = \dot{e}_{\text{gen}} A \Delta x$$

Substituting into Eq. 2–6, we get

$$\dot{Q}_x - \dot{Q}_{x+\Delta x} + \dot{e}_{\text{gen}} A \Delta x = \rho c A \Delta x \frac{T_{t+\Delta t} - T_t}{\Delta t}$$

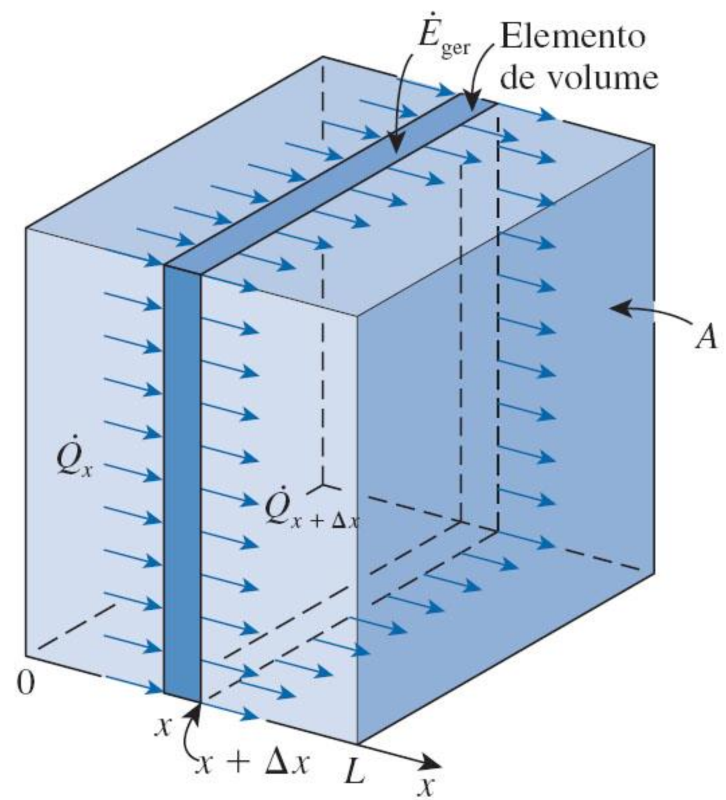
Dividing by $A\Delta x$ gives

$$-\frac{1}{A}\frac{\dot{Q}_{x+\Delta x} - \dot{Q}_x}{\Delta x} + \dot{e}_{\text{gen}} = \rho c \frac{T_{t+\Delta t} - T_t}{\Delta t}$$

Taking the limit as $\Delta x \to 0$ and $\Delta t \to 0$ yields

$$\boxed{\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial x}\left(kA\frac{\partial T}{\partial x}\right) + \dot{e}_{\text{gen}} = \rho c \frac{\partial T}{\partial t}}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\dot{Q}_{x+\Delta x} - \dot{Q}_x}{\Delta x} = \frac{\partial \dot{Q}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-kA\frac{\partial T}{\partial x}\right)$$ **Pela lei de Fourier**



$$A_x = A_{x+\Delta x} = A$$

EQUAÇÃO DE CONDUÇÃO DE CALOR UNIDIMENSIONAL

Condutividade variável (varia com a temperatura)

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right) + \dot{e}_{\text{gen}} = \rho c \frac{\partial T}{\partial t}}$$

Na maioria dos casos em aplicações práticas, a condutividade apesar de variar com a temperatura, pode ser considerada constante no valor médio.

Condutividade constante

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\dot{e}_{\text{gen}}}{k} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t} \qquad \alpha = \frac{k}{\rho C_P}$$

(1) *Steady-state:* $(\partial/\partial t = 0)$

$$\frac{d^2T}{dx^2} + \frac{\dot{e}_{\text{gen}}}{k} = 0$$

(2) *Transient, no heat generation:* $(\dot{e}_{\text{gen}} = 0)$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$$

(3) *Steady-state, no heat generation:* $(\partial/\partial t = 0 \text{ and } \dot{e}_{\text{gen}} = 0)$

$$\frac{d^2T}{dx^2} = 0$$

TAREFA

- Fazer as mesmas deduções para esferas e cilindros

$$\frac{1}{r^n}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^n k \frac{\partial T}{\partial r}\right) + \dot{e}_{\text{gen}} = \rho c \frac{\partial T}{\partial t}$$

n = 0 para parede plana

n = 1 para cilindro

n = 2 para esfera

No caso de parede plana *r* é substituído por *x*

EXEMPLOS DESSAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS (EXEMPLOS 2-2 A 2-4)

- Panela aquecida em um fogão (fundo da panela considerada como uma parede plana infinita);

- Resistência de um aquecedor;

- Esfera metálica.

EQUAÇÃO DA CONDUÇÃO DE CALOR MULTIDIMENSIONAL

Taxa de condução de calor em x, y e z. **-** Taxa de condução de calor em x + Δx, y + Δy, z + Δz **+** Taxa de geração de calor dentro do elemento **=** Taxa de variação da energia dentro do elemento

EQUAÇÃO DA CONDUÇÃO DE CALOR MULTIDIMENSIONAL

or

$$\dot{Q}_x + \dot{Q}_y + \dot{Q}_z - \dot{Q}_{x+\Delta x} - \dot{Q}_{y+\Delta y} - \dot{Q}_{z+\Delta z} + \dot{E}_{\text{gen, element}} = \frac{\Delta E_{\text{element}}}{\Delta t} \qquad \text{(2–36)}$$

Noting that the volume of the element is $V_{\text{element}} = \Delta x \Delta y \Delta z$, the change in the energy content of the element and the rate of heat generation within the element can be expressed as

$$\Delta E_{\text{element}} = E_{t+\Delta t} - E_t = mc(T_{t+\Delta t} - T_t) = \rho c \Delta x \Delta y \Delta z (T_{t+\Delta t} - T_t)$$

$$\dot{E}_{\text{gen, element}} = \dot{e}_{\text{gen}} V_{\text{element}} = \dot{e}_{\text{gen}} \Delta x \Delta y \Delta z$$

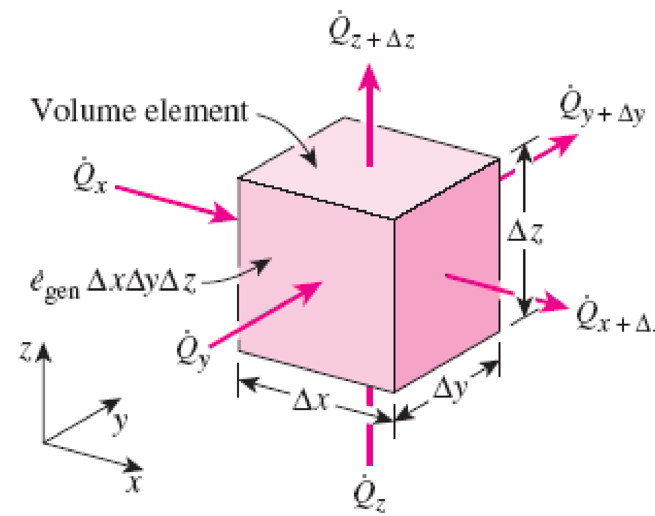
Substituting into Eq. 2–36, we get

$$\dot{Q}_x + \dot{Q}_y + \dot{Q}_z - \dot{Q}_{x+\Delta x} - \dot{Q}_{y+\Delta y} - \dot{Q}_{z+\Delta z} + \dot{e}_{\text{gen}} \Delta x \Delta y \Delta z = \rho c \Delta x \Delta y \Delta z \frac{T_{t+\Delta t} - T_t}{\Delta t}$$

Dividing by $\Delta x \Delta y \Delta z$ gives

$$-\frac{1}{\Delta y \Delta z} \frac{\dot{Q}_{x+\Delta x} - \dot{Q}_x}{\Delta x} - \frac{1}{\Delta x \Delta z} \frac{\dot{Q}_{y+\Delta y} - \dot{Q}_y}{\Delta y} - \frac{1}{\Delta x \Delta y} \frac{\dot{Q}_{z+\Delta z} - \dot{Q}_z}{\Delta z} + \dot{e}_{\text{gen}} =$$

$$\rho c \frac{T_{t+\Delta t} - T_t}{\Delta t} \qquad \text{(2–37)}$$



Condução de calor tridimensional através de um elemento de volume retangular.

Noting that the heat transfer areas of the element for heat conduction in the x, y, and z directions are $A_x = \Delta y \Delta z$, $A_y = \Delta x \Delta z$, and $A_z = \Delta x \Delta y$, respectively, and taking the limit as Δx, Δy, Δz and $\Delta t \to 0$ yields

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial T}{\partial z}\right) + \dot{e}_{\text{gen}} = \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \tag{2–38}$$

since, from the definition of the derivative and Fourier's law of heat conduction,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta y \Delta z} \frac{\dot{Q}_{x+\Delta x} - \dot{Q}_x}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta y \Delta z}\frac{\partial Q_x}{\partial x} = \frac{1}{\Delta y \Delta z}\frac{\partial}{\partial x}\left(-k\Delta y \Delta z \frac{\partial T}{\partial x}\right) = -\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right)$$

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{1}{\Delta x \Delta z} \frac{\dot{Q}_{y+\Delta y} - \dot{Q}_y}{\Delta y} = \frac{1}{\Delta x \Delta z}\frac{\partial Q_y}{\partial y} = \frac{1}{\Delta x \Delta z}\frac{\partial}{\partial y}\left(-k\Delta x \Delta z \frac{\partial T}{\partial y}\right) = -\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right)$$

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{1}{\Delta x \Delta y} \frac{\dot{Q}_{z+\Delta z} - \dot{Q}_z}{\Delta z} = \frac{1}{\Delta x \Delta y}\frac{\partial Q_z}{\partial z} = \frac{1}{\Delta x \Delta y}\frac{\partial}{\partial z}\left(-k\Delta x \Delta y \frac{\partial T}{\partial z}\right) = -\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial T}{\partial z}\right)$$

Eq. 2–38 is the general heat conduction equation in rectangular coordinates. In the case of constant thermal conductivity, it reduces to

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\dot{e}_{gen}}{k} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t} \qquad (2\text{–}39)$$

where the property $\alpha = k/\rho c$ is again the *thermal diffusivity* of the material. Eq. 2–39 is known as the **Fourier-Biot equation**, and it reduces to these forms under specified conditions:

UFABC

EQUAÇÃO DA CONDUÇÃO DE CALOR MULTIDIMENSIONAL

(1) *Steady-state:*
(called the **Poisson equation**)

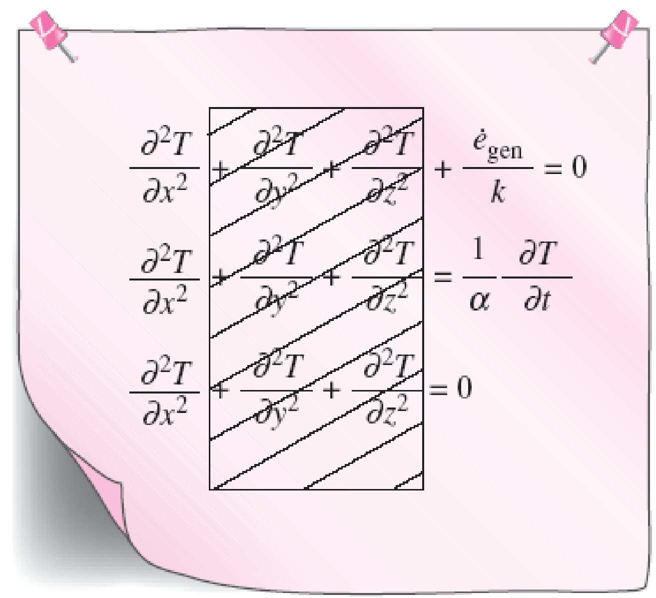
$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\dot{e}_{\text{gen}}}{k} = 0$$

(2) *Transient, no heat generation:*
(called the **diffusion equation**)

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$$

(3) *Steady-state, no heat generation:*
(called the **Laplace equation**)

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0$$

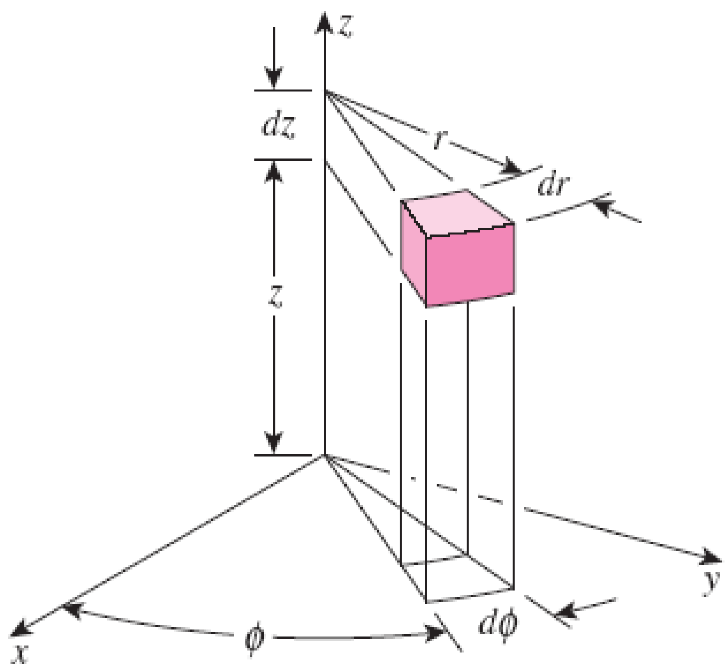


As equações de condução de calor <u>tridimensionais</u> são *reduzidas* para o caso <u>*unidimensional*</u> quando a temperatura varia apenas em uma direção.

COORDENADAS CILÍNDRICAS

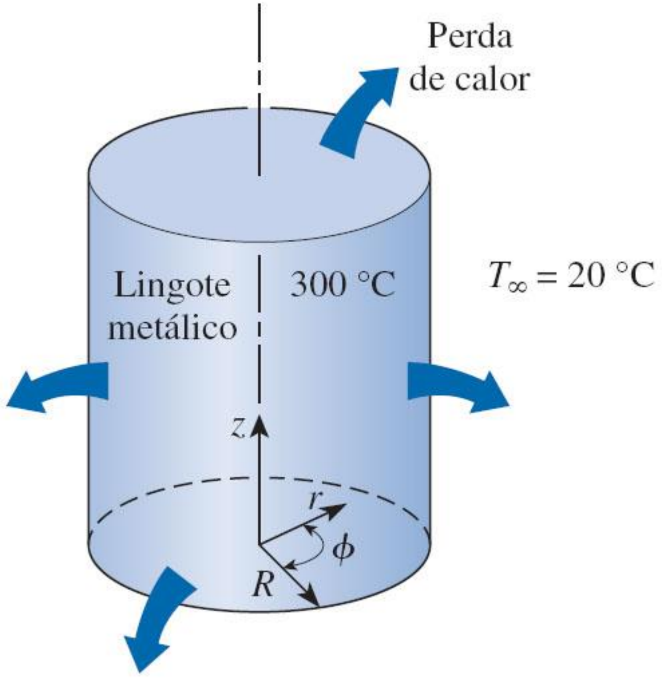
$$x = r\cos\phi, \qquad y = r\sin\phi, \qquad \text{and} \qquad z = z$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(kr\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial T}{\partial \phi}\left(k\frac{\partial T}{\partial \phi}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial T}{\partial z}\right) + \dot{e}_{\text{gen}} = \rho c\frac{\partial T}{\partial t}$$

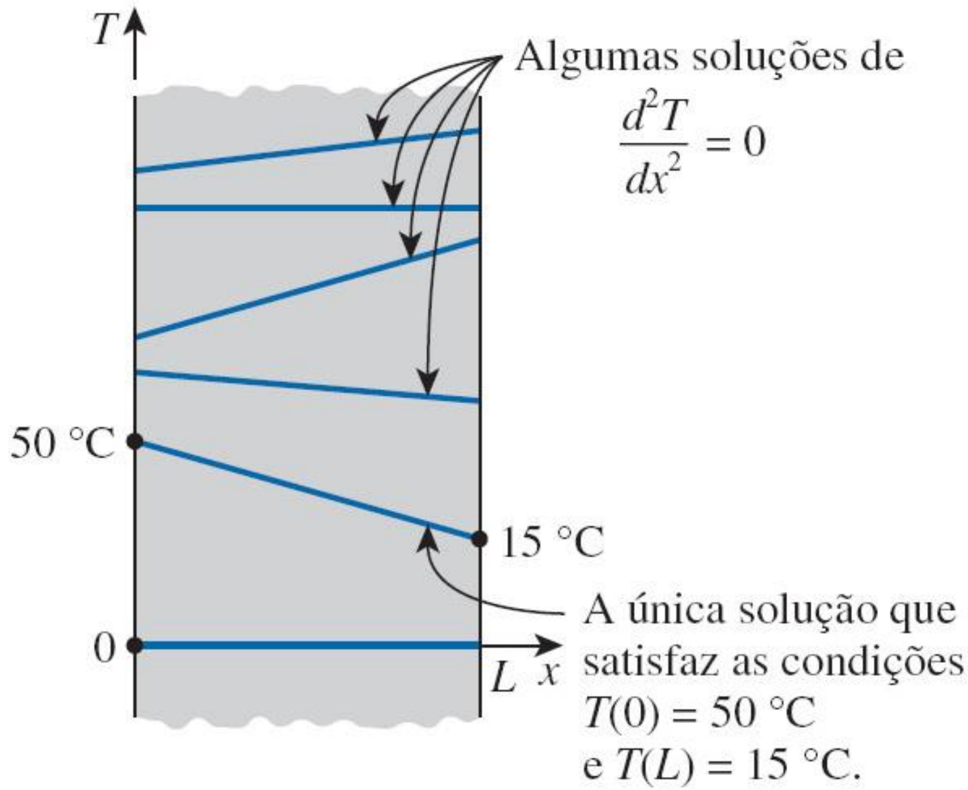


EXEMPLO 2-5

Um pequeno lingote metálico de formato cilíndrico de raio R e altura h é aquecido em um forno até a temperatura de 300°C, retirado e deixado para resfriar em temperatura ambiente T_∞ = 20°C por convecção e radiação. Considerando que o lingote é resfriado uniformemente em toda a sua superfície externa e a variação da condutividade térmica do material em função da temperatura é desprezível, determine a equação diferencial que descreve a variação de temperatura do lingote durante o processo de resfriamento.

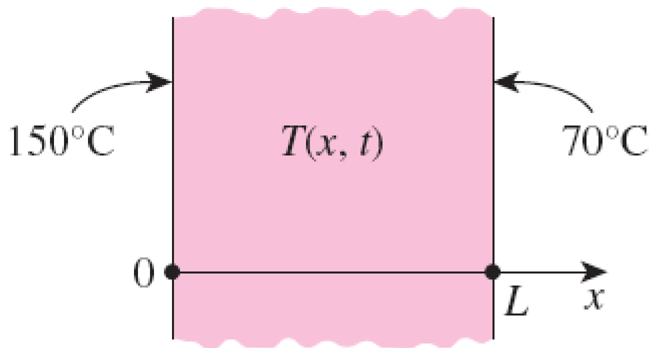


CONDIÇÕES DE CONTORNO



Para descrever completamente o problema de transferência de calor, duas condições de contorno devem ser fornecidas para cada direção do sistema de coordenadas, onde a transferência de calor é significativa.

$$T(0, t) = T_1$$
$$T(L, t) = T_2$$



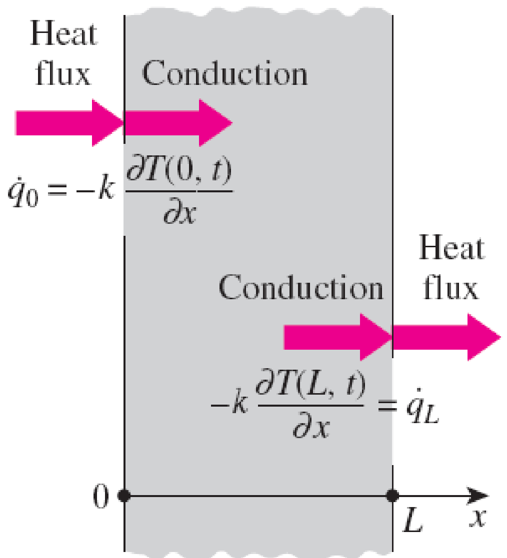
$$T(0, t) = 150°\text{C}$$
$$T(L, t) = 70°\text{C}$$

CONDIÇÕES DE CONTORNO

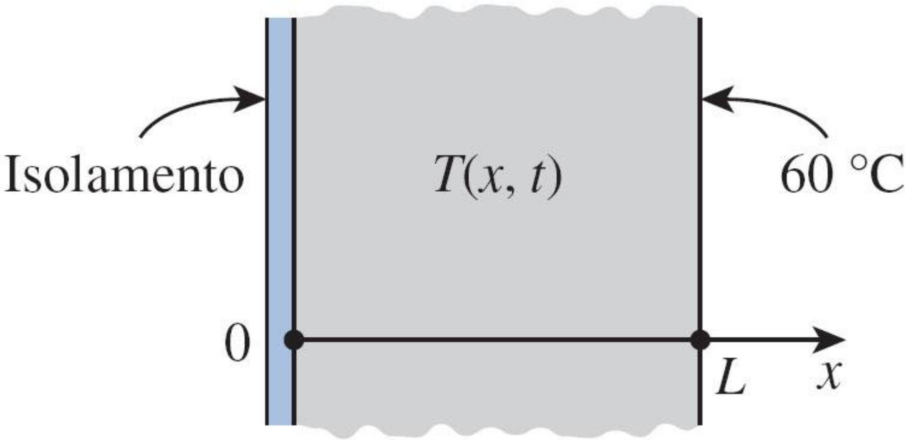
$$\dot{q} = -k\frac{\partial T}{\partial x} = \left(\begin{matrix}\text{Heat flux in the} \\ \text{positive } x - \text{direction}\end{matrix}\right) \qquad (\text{W/m}^2)$$

Para uma parede plana de espessura L, a qual recebe um fluxo de calor de 50 W/m², o fluxo específico de acordo com as condições de contorno pode ser expresso conforme abaixo:

$$-k\frac{\partial T(0, t)}{\partial x} = 50 \qquad \text{and} \qquad -k\frac{\partial T(L, t)}{\partial x} = -50$$



SISTEMA ISOLADO TERMICAMENTE



$$\frac{\partial T(0,t)}{\partial x} = 0$$

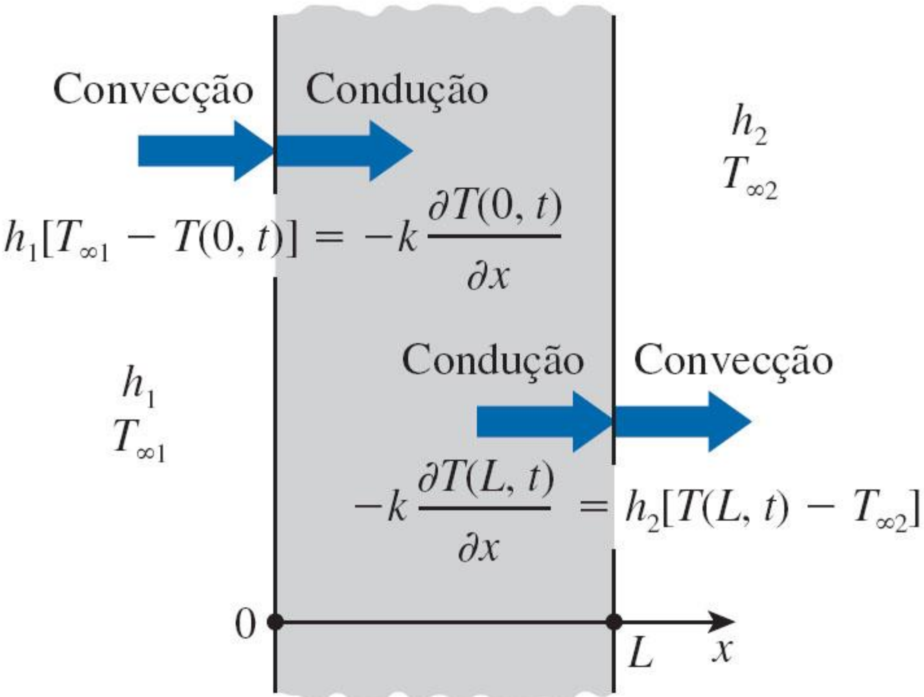
$$T(L,t) = 60\ °C$$

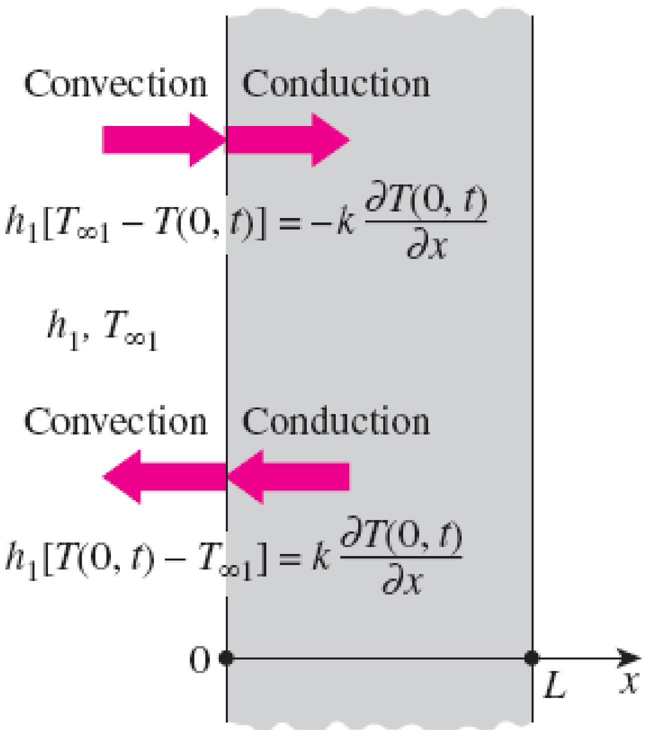
$$k\frac{\partial T(0,t)}{\partial x} = 0 \qquad \text{or} \qquad \frac{\partial T(0,t)}{\partial x} = 0$$

CONDUÇÃO E CONVECÇÃO DE CALOR COMBINADAS

$$-k\frac{\partial T(0,t)}{\partial x} = h_1[T_{\infty 1} - T(0,t)]$$

$$-k\frac{\partial T(L,t)}{\partial x} = h_2[T(L,t) - T_{\infty 2}]$$



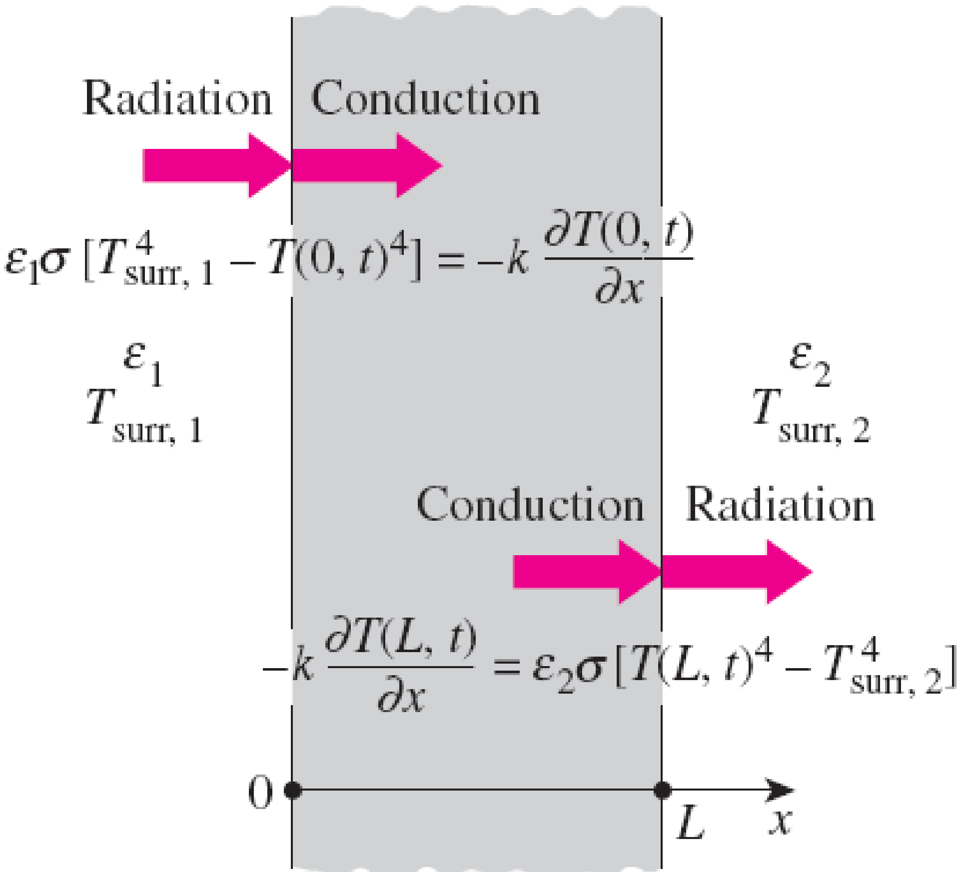


A direção assumida da transferência de calor em um contorno não tem efeito sobre a expressão (equivale a multiplicar por -1)

CONDUÇÃO E RADIAÇÃO DE CALOR COMBINADAS

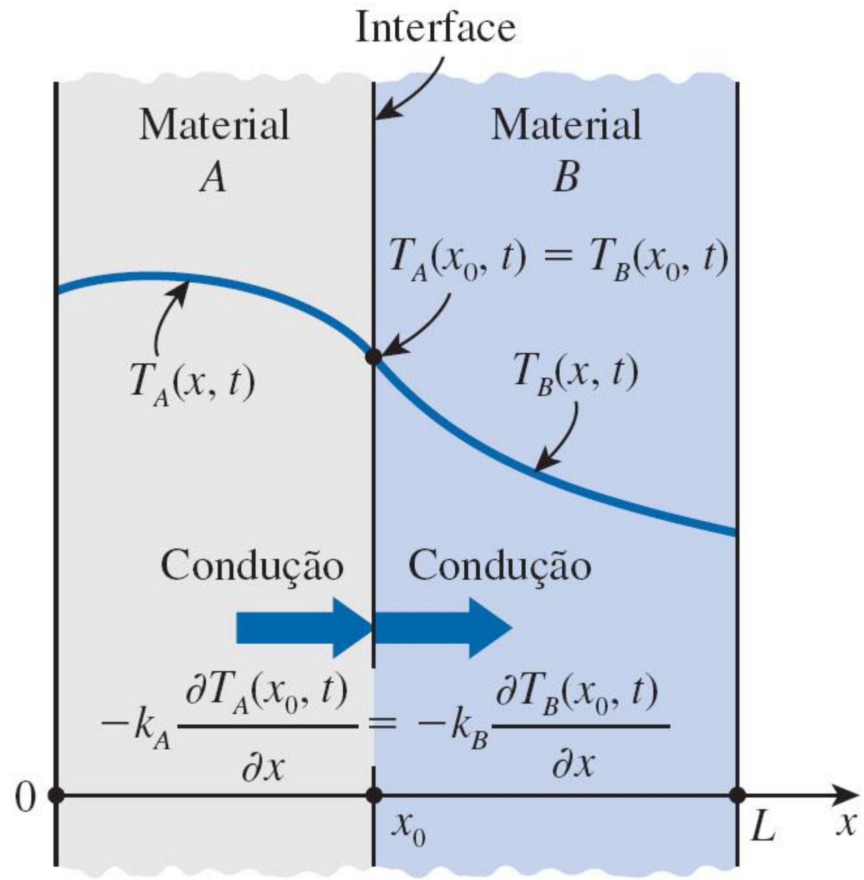
$$-k\frac{\partial T(0,t)}{\partial x} = \varepsilon_1\sigma[T^4_{\text{surr},1} - \mathrm{T}(0,t)^4]$$

$$-k\frac{\partial T(L,t)}{\partial x} = \varepsilon_2\sigma[T(L,t)^4 - T^4_{\text{surr},2}]$$



CONDIÇÃO DE CONTORNO INTERFACE

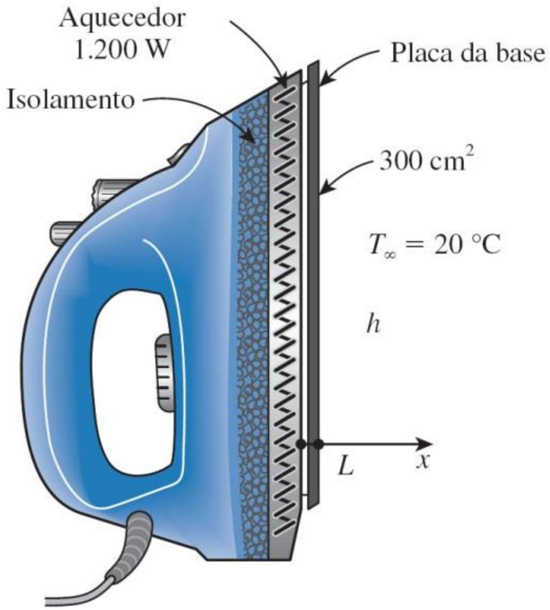
$$-k_A \frac{\partial T_A(x_0, t)}{\partial x} = -k_B \frac{\partial T_B(x_0, t)}{\partial x}$$



$$T_A(x_0, t) = T_B(x_0, t)$$

EXEMPLO 2-12

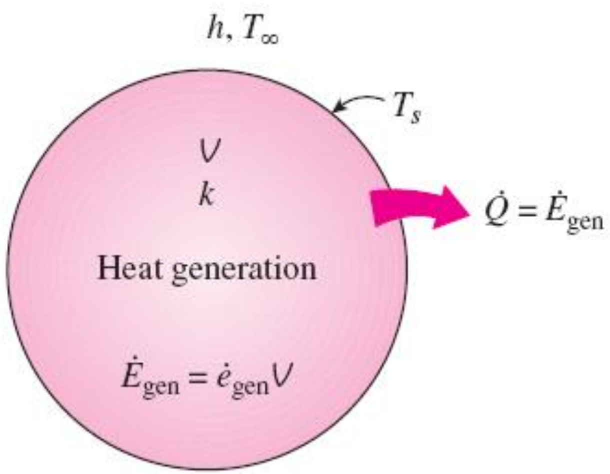
Considere que a placa da base de ferro de passar de 1200 W tenha a espessura L = 0,5 cm, área da base A = 300 cm^2 e condutividade térmica k = 15 W/m.K. A superfície interna da placa é submetida a uma fluxo de calor uniforme gerado pela resistência elétrica interna, enquanto a superfície perde calor para o meio externo (T_∞ = 20°C) por convecção, como mostrado na figura abaixo. Considerando que o coeficiente de transferência de calor por convecção é h = 80 W/m^2.K e desprezando a perda de calor por radiação, obtenha a expressão para a variação de temperatura na placa da base de ferro e avalie as temperaturas nas superfícies internas e externas.



TAREFA

- Estudar os exemplos do Çengel 2-13 e 2-14

GERAÇÃO DE CALOR EM SÓLIDOS



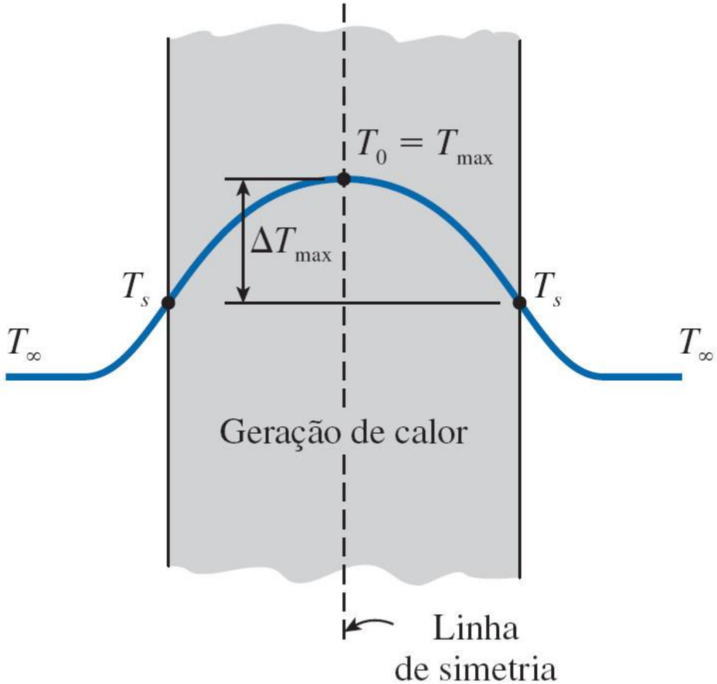
Em condições permanentes, todo o calor gerado no sólido deve ser liberado através da superfície externa.

$$\dot{Q} = \dot{e}_{gen}V \qquad \text{(W)}$$

$$\dot{Q} = hA_s(T_s - T_\infty) \qquad \text{(W)}$$

Igualando as duas equações acima fica:

$$T_s = T_\infty + \frac{\dot{e}_{gen}V}{hA_s}$$



A temperatura máxima em um sólido simétrico com geração de calor uniforme ocorre no seu centro.

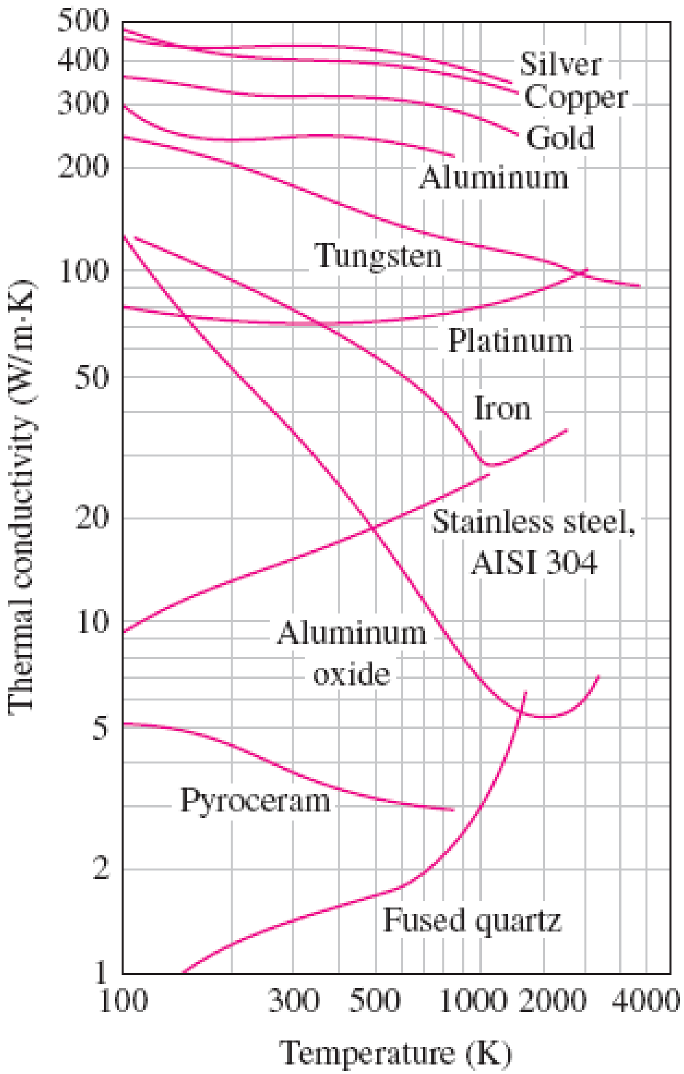
TAREFA

- Estudar os exemplos do Çengel 2-17 e 2-19

CONDUTIVIDADE TÉRMICA VARIÁVEL K (T)

Na maioria dos problemas, a variação da condutividade térmica, para muitos materiais, é pequena e pode ser desprezada e a condutividade média é utilizada. Porém, em alguns casos se a variação da condutividade térmica com a temperatura em um intervalo de tempo específico for muito grande, será necessário levar em consideração essa variação para reduzir o erro.

CONDUTIVIDADE TÉRMICA VARIÁVEL K (T)



$$k_{avg} = \frac{\int_{T_1}^{T_2} k(T)dT}{T_2 - T_1}$$

$$\dot{Q}_{\text{plane wall}} = k_{avg} A \frac{T_1 - T_2}{L} = \frac{A}{L} \int_{T_2}^{T_1} k(T)dT$$

$$\dot{Q}_{\text{cylinder}} = 2\pi k_{avg} L \frac{T_1 - T_2}{\ln(r_2/r_1)} = \frac{2\pi L}{\ln(r_2/r_1)} \int_{T_2}^{T_1} k(T)dT$$

$$\dot{Q}_{\text{sphere}} = 4\pi k_{avg} r_1 r_2 \frac{T_1 - T_2}{r_2 - r_1} = \frac{4\pi r_1 r_2}{r_2 - r_1} \int_{T_2}^{T_1} k(T)dT$$