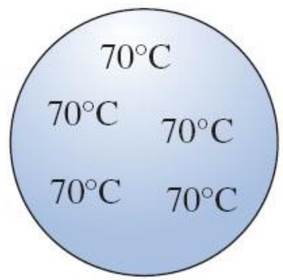
Transferência de Calor Aplicada a Sistemas Aeroespaciais

Prof. Dr. Alexandre Alves

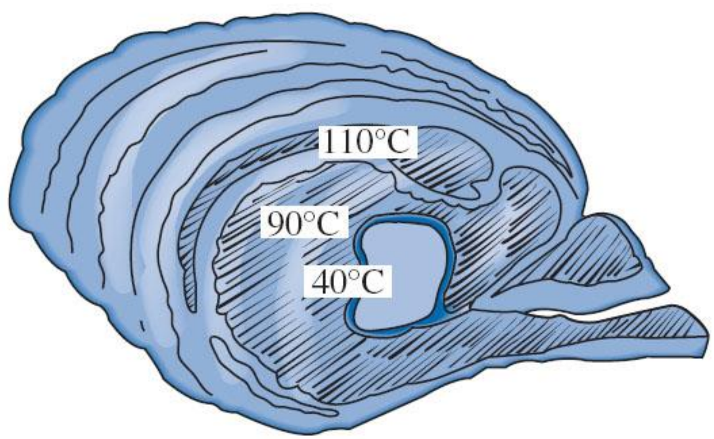
CONDUÇÃO EM REGIME TRANSIENTE

- Resfriamento e aquecimento de materiais, partes, peças e componentes aeroespaciais;
- Barreiras de proteção térmica, turbinas a gás, motor-foguete;
- Naves espaciais;
- Aeronaves;
- Foguetes;
- Partida e transiente de sistemas e subsistemas (turbobombas, trocadores de calor, condensadores, evaporadores etc).

Análise por sistemas de aglomerados (a temperatura muda com o tempo, mas é constante ao longo do corpo, ou seja, sem gradientes de temperatura)



(*a*) Bola de cobre



(*b*) Carne assada

Transferência de calor para o corpo durante o tempo dt. **=** Aumento de energia do corpo durante o tempo dt.

$$hA_s(T_\infty - T)\,dt = mc_p\,dT$$

$$dT = d(T - T_\infty) \qquad m = \rho V$$

$$\frac{d(T - T_\infty)}{T - T_\infty} = -\frac{hA_s}{\rho V c_p}\,dt$$

Integrando com: $T = T_i$ em $t = 0$

$T = T(t)$ em $t = t$

$$\ln\frac{T(t) - T_\infty}{T_i - T_\infty} = -\frac{hA_s}{\rho V c_p}\,t \qquad \textbf{(Equação 1)}$$

$$\frac{T(t) - T_\infty}{T_i - T_\infty} = e^{-bt} \qquad b = \frac{hA_s}{\rho V c_p} \qquad (1/\mathrm{s})$$

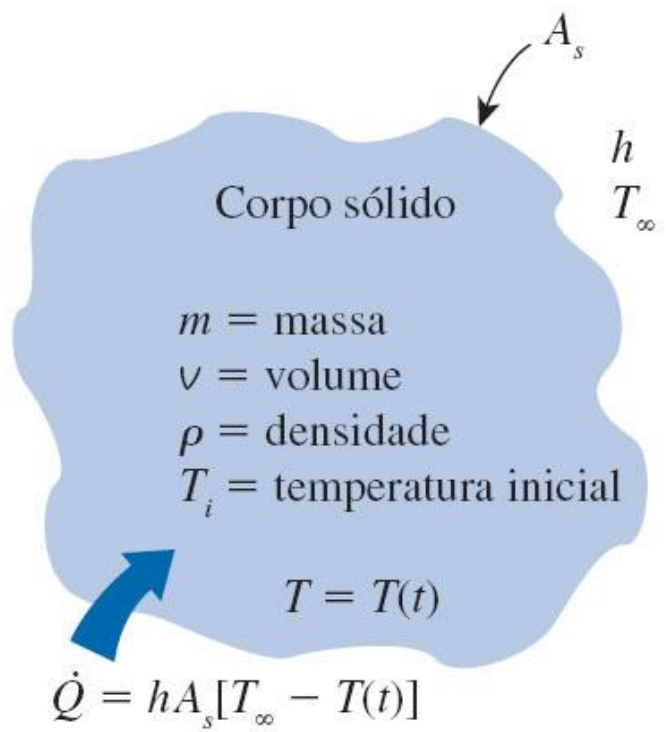
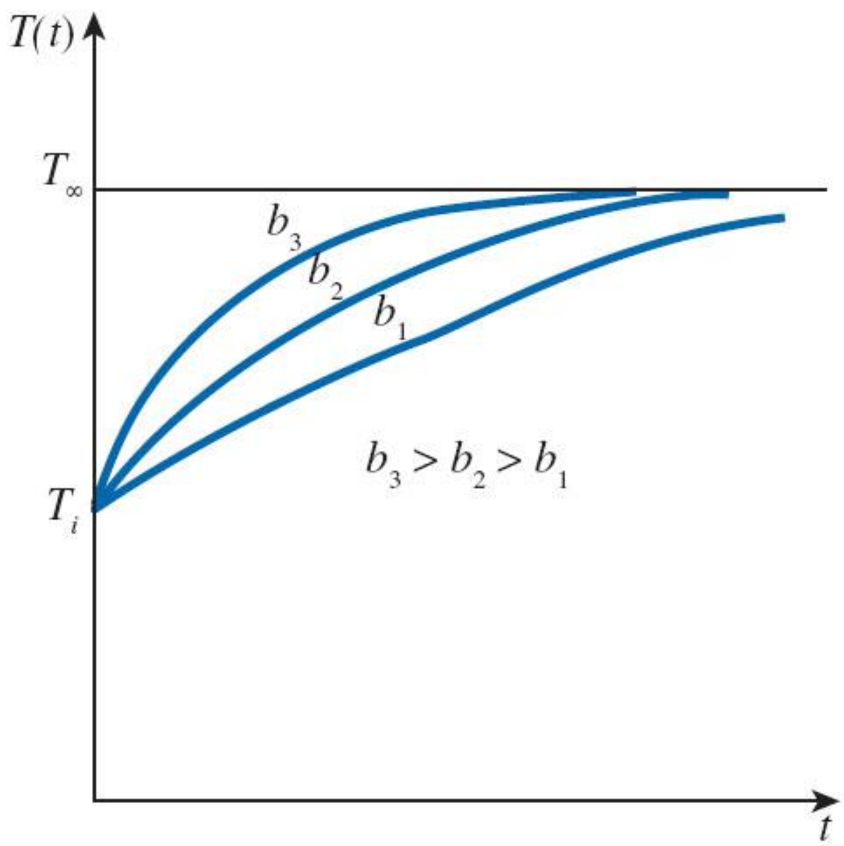


GRÁFICO RESULTANTE DO MODELAMENTO

- A equação 1 permite determinar a temperatura T(t) do corpo no momento t ou o tempo necessário para se chegar a temperatura T;

- A temperatura do corpo aproxima-se exponencialmente da temperatura ambiente T_∞. A temperatura do corpo muda rapidamente no início e vagarosamente mais tarde.



MÁXIMA TRANSFERÊNCIA DE CALOR

$$\dot{Q}(t) = hA_s[T(t) - T_\infty]$$

(W)

A taxa de transferência de calor por convecção entre o corpo e o ambiente em um determinado instante de tempo pode ser determinado pela lei de resfriamento de Newton.

$$Q = mc_p[T(t) - T_i]$$

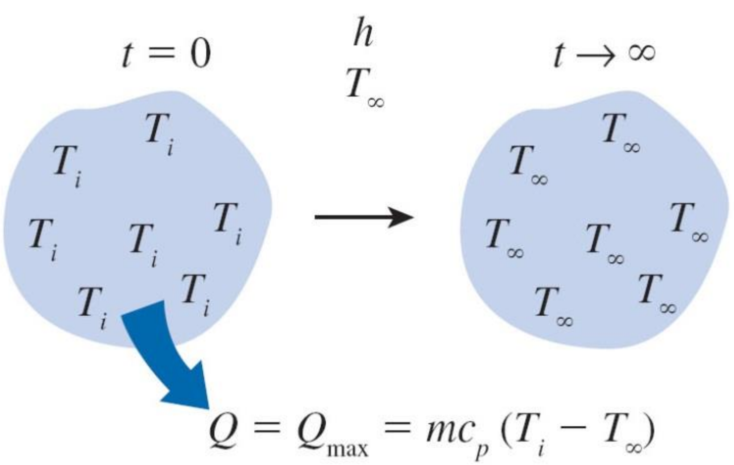
(kJ)

A quantidade total de calor transferido entre o corpo e o ambiente circundante durante um intervalo de tempo, onde t representa a mudança da quantidade de energia do corpo.

$$Q_{\max} = mc_p(T_\infty - T_i)$$

(kJ)

A quantidade de calor transferido atinge seu limite superior quando a temperatura do corpo atinge T_∞ (equilíbrio termodinâmico).



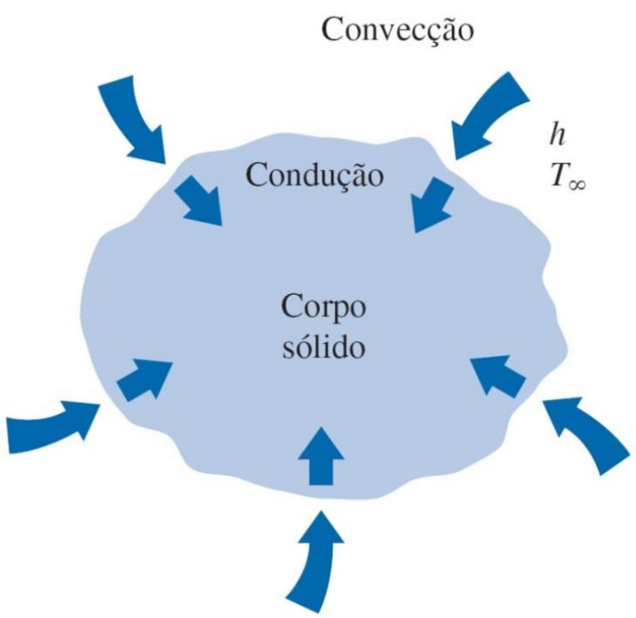
NÚMERO DE BIOT

$$L_c = \frac{V}{A_s}$$ Para elementos de geometria simples como paredes planas, cilindros e esferas.

$$\mathrm{Bi} = \frac{h}{k/L_c}\frac{\Delta T}{\Delta T} = \frac{\text{Convecção na superfície do corpo}}{\text{Condução no interior do corpo}}$$

$$\mathrm{Bi} = \frac{L_c/k}{1/h} = \frac{\text{Resistência a condução no interior do corpo}}{\text{Resistência a convecção na superfície do corpo}}$$

$$\mathrm{Bi} = \frac{hL_c}{k}$$



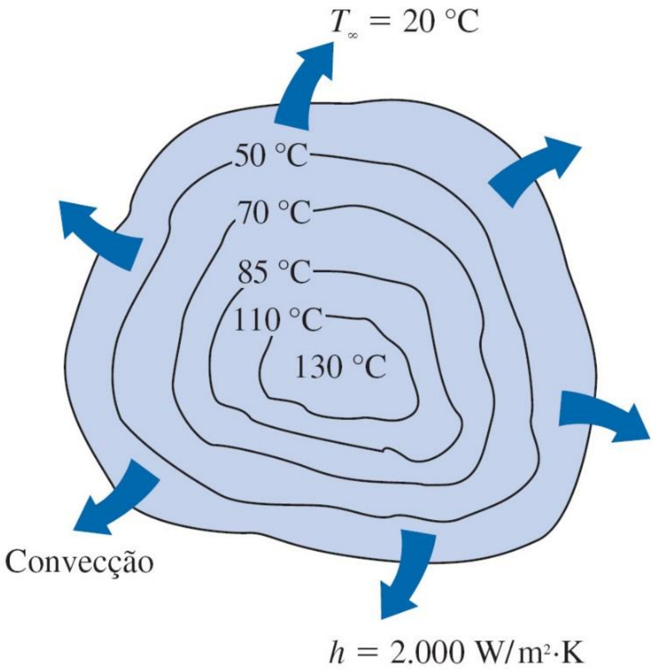
$$\mathrm{Bi} = \frac{\text{Convecção de calor}}{\text{Condução de calor}}$$

A análise de aglomerados é aplicável quando:

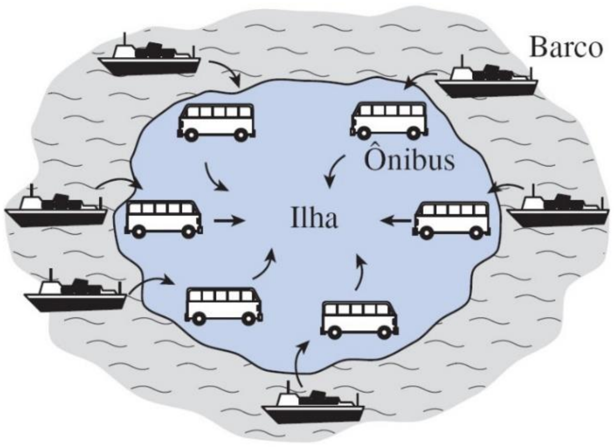
$$\mathrm{Bi} \leq 0{,}1$$

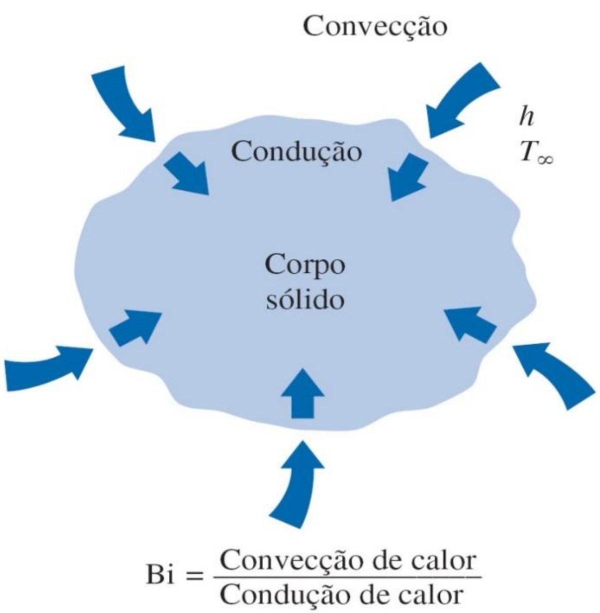
Quando Bi ≤ 0,1, a variação de temperatura dentro do corpo é pequena e o erro envolvido pode ser considerado desprezível .

EXEMPLO NÚMERO DE BIOT



Exemplo de corpos ideais para sistemas de aglomerados: Corpos relativamente pequenos e bons condutores de calor.



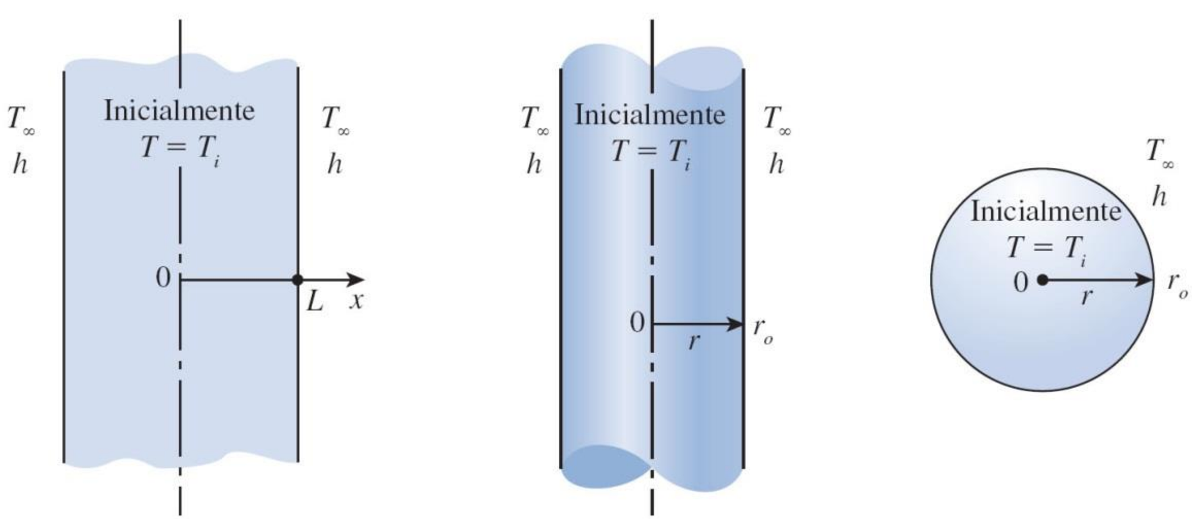


Uma placa é considerada infinita caso a sua espessura seja considerada pequena em consideração às suas outras dimensões, como por exemplo as paredes de uma casa. Um cilindro com raio pequeno em relação ao seu comprimento também pode ser considerado como infinito em sua modelagem matemática.

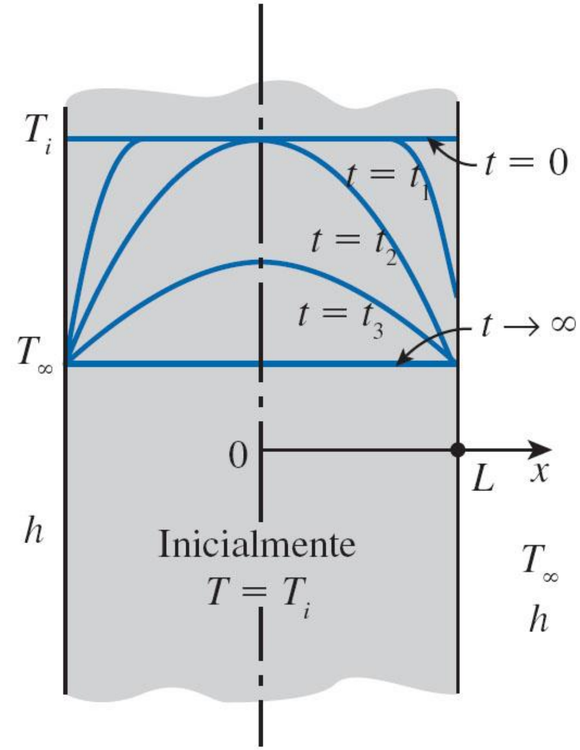
CONDUÇÃO COM EFEITOS ESPACIAIS (Bi > 0,1)

- Condução de calor transiente em grandes paredes planas, longos cilindros e esferas com efeitos espaciais (Bi > 0,1)

Hipótese: $T_\infty < T_i$ (resfriamento)

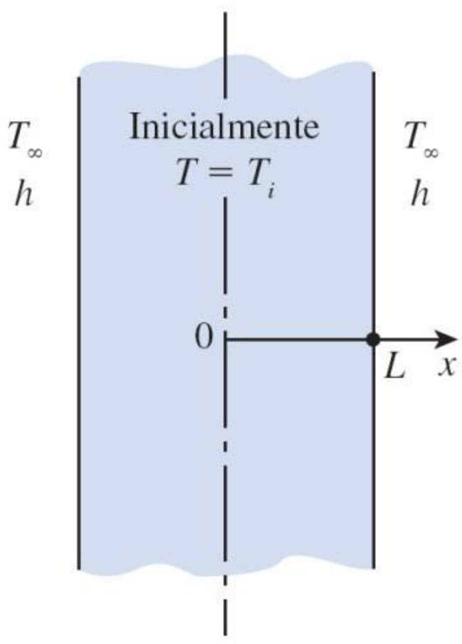


(a) Grande parede plana (b) Cilindro longo (c) Esfera



PROBLEMA DE CONDUÇÃO TRANSIENTE UNIDIMENSIONAL ADIMENSIONALIZADO

A formulação dos problemas de condução de calor para determinação da distribuição de temperatura transiente unidimensional em parede plana, cilindro ou esfera resulta em uma equação diferencial parcial cuja solução envolve séries infinitas e equações de difícil uso. A simplificação desse tipo de problemas pode ser obtida com o uso de soluções analíticas.



(a) Grande parede plana

Equação diferencial: $\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \dfrac{1}{\alpha}\dfrac{\partial T}{\partial t}$

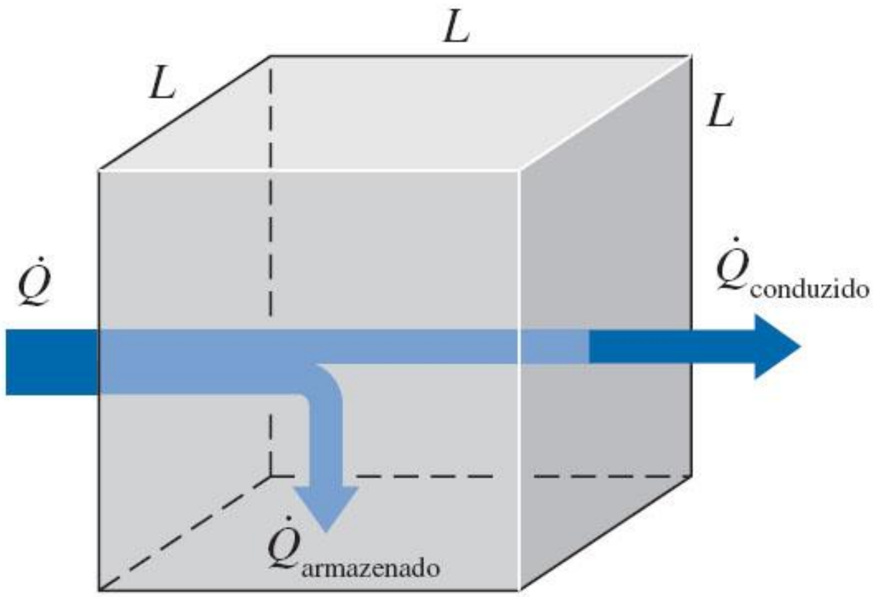
Condições de contorno: $\dfrac{\partial T(0, t)}{\partial x} = 0$ e $-k\dfrac{\partial T(L, t)}{\partial x} = h[T(L, t) - T_\infty]$

Condição inicial: $T(x, 0) = T_i$

$$\alpha = k/\rho c_p \quad X = x/L \quad \theta(x,\ t) = [T(x,\ t) - T_\infty]/[T_i - T_\infty]$$

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial X^2} = \frac{L^2}{\alpha}\frac{\partial\theta}{\partial t} \quad \text{e} \quad \frac{\partial\theta(1, t)}{\partial X} = \frac{hL}{k}\theta(1, t)$$

Número de Fourier (τ) = $\frac{\alpha t}{L^2}$



$$\text{Número de Fourier: } \tau = \frac{\alpha t}{L^2} = \frac{\dot{Q}_{\text{conduzido}}}{\dot{Q}_{\text{armazenado}}}$$

PROBLEMA DE CONDUÇÃO TRANSIENTE UNIDIMENSIONAL ADIMENSIONALIZADO

Número de Fourier (τ) = $\frac{\alpha t}{L^2}$

Equação diferencial adimensionalizada: → $$\frac{\partial^2\theta}{\partial X^2} = \frac{\partial\theta}{\partial\tau}$$

Condições de contorno adimensionalizadas: → $$\frac{\partial\theta(0,\tau)}{\partial X} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial\theta(1,\tau)}{\partial X} = -\mathrm{Bi}\,\theta(1,\tau)$$

Condição inicial adimensionalizada: → $$\theta(X,0) = 1$$

Onde:

$$\theta(X, \tau) = \frac{T(x, t) - T_i}{T_\infty - T_i}$$ → Temperatura adimensional

$$X = \frac{x}{L}$$ → Distância adimensional a partir do centro

$$\mathrm{Bi} = \frac{hL}{k}$$ → Número de Biot

$$\tau = \frac{\alpha t}{L^2} = \mathrm{Fo}$$ → Tempo adimensional (número de Fourier)

PROBLEMA DE CONDUÇÃO TRANSIENTE UNIDIMENSIONAL ADIMENSIONALIZADO

(*a*) Problema original da condução de calor:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial x},\ T(x,\ 0) = T_i$$

$$\frac{\partial T(0,\ t)}{\partial x} = 0,\ -k\frac{\partial T(L,\ t)}{\partial x} = h[T(L,\ t) - T_\infty]$$

$$T = F(x,\ L,\ t,\ k,\ \alpha,\ h,\ T_i,\ T_\infty)$$

(*b*) Problema adimensionalizado:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} = \frac{\partial \theta}{\partial \tau},\ \theta(X,\ 0) = 1$$

$$\frac{\partial \theta(0,\ \tau)}{\partial X} = 0,\ \frac{\partial \theta(1,\ \tau)}{\partial X} = -\mathrm{Bi}\,\theta(1,\ \tau)$$

$$\theta = f(X,\ \mathrm{Bi},\ \tau)$$

Existe a possibilidade de soluções aproximadas por meio do uso de gráficos e tabelas, o que simplifica as soluções analíticas para as seguintes condições:

- Geometrias simples (parede plana, cilindro ou esfera);
- Transferência de calor unidimensional e sem geração de calor no corpo;
- Todas as superfícies do corpo estarem submetidas à mesma temperatura.

- O erro é inferior a 2% com τ > 0,2

Parede plana: $\theta_{\text{parede}} = \dfrac{T(x, t) - T_\infty}{T_i - T_\infty} = A_1 e^{-\lambda_1^2 \tau} \cos(\lambda_1 x/L), \quad \tau > 0{,}2$

Cilindro: $\theta_{\text{cilindro}} = \dfrac{T(r, t) - T_\infty}{T_i - T_\infty} = A_1 e^{-\lambda_1^2 \tau} J_0(\lambda_1 r/r_o), \quad \tau > 0{,}2$

Esfera: $\theta_{\text{esfera}} = \dfrac{T(r, t) - T_\infty}{T_i - T_\infty} = A_1 e^{-\lambda_1^2 \tau} \dfrac{\sin(\lambda_1 r/r_o)}{\lambda_1 r/r_o}, \quad \tau > 0{,}2$

Centro de parade plana $(x = 0)$: $\theta_{0,\ \text{parede}} = \dfrac{T_0 - T_\infty}{T_i - T_\infty} = A_1 e^{-\lambda_1^2 \tau}$

Centro de cilindro $(r = 0)$: $\theta_{0,\ \text{cilindro}} = \dfrac{T_0 - T_\infty}{T_i - T_\infty} = A_1 e^{-\lambda_1^2 \tau}$

Centro de esfera $(r = 0)$: $\theta_{0,\ \text{esfera}} = \dfrac{T_0 - T_\infty}{T_i - T_\infty} = A_1 e^{-\lambda_1^2 \tau}$

TABELAS PARA USO NAS SOLUÇÕES APROXIMADAS

TABELA 4–2

Coeficientes utilizados na solução aproximada do termo da condução de calor transiente unidimensional em paredes planas, cilindros e esferas (Bi = hL/k para parede plana de espessura $2L$ e Bi = hr_o/k para cilindro ou esfera de raio r_o)

	Parede plana		Cilindro		Esfera	
Bi	λ_1	A_1	λ_1	A_1	λ_1	A_1
0,01	0,0998	1,0017	0,1412	1,0025	0,1730	1,0030
0,02	0,1410	1,0033	0,1995	1,0050	0,2445	1,0060
0,04	0,1987	1,0066	0,2814	1,0099	0,3450	1,0120
0,06	0,2425	1,0098	0,3438	1,0148	0,4217	1,0179
0,08	0,2791	1,0130	0,3960	1,0197	0,4860	1,0239
0,1	0,3111	1,0161	0,4417	1,0246	0,5423	1,0298
0,2	0,4328	1,0311	0,6170	1,0483	0,7593	1,0592
0,3	0,5218	1,0450	0,7465	1,0712	0,9208	1,0880
0,4	0,5932	1,0580	0,8516	1,0931	1,0528	1,1164
0,5	0,6533	1,0701	0,9408	1,1143	1,1656	1,1441
0,6	0,7051	1,0814	1,0184	1,1345	1,2644	1,1713
0,7	0,7506	1,0918	1,0873	1,1539	1,3525	1,1978
0,8	0,7910	1,1016	1,1490	1,1724	1,4320	1,2236
0,9	0,8274	1,1107	1,2048	1,1902	1,5044	1,2488
1,0	0,8603	1,1191	1,2558	1,2071	1,5708	1,2732
2,0	1,0769	1,1785	1,5995	1,3384	2,0288	1,4793
3,0	1,1925	1,2102	1,7887	1,4191	2,2889	1,6227
4,0	1,2646	1,2287	1,9081	1,4698	2,4556	1,7202
5,0	1,3138	1,2403	1,9898	1,5029	2,5704	1,7870
6,0	1,3496	1,2479	2,0490	1,5253	2,6537	1,8338
7,0	1,3766	1,2532	2,0937	1,5411	2,7165	1,8673
8,0	1,3978	1,2570	2,1286	1,5526	2,7654	1,8920
9,0	1,4149	1,2598	2,1566	1,5611	2,8044	1,9106
10,0	1,4289	1,2620	2,1795	1,5677	2,8363	1,9249
20,0	1,4961	1,2699	2,2880	1,5919	2,9857	1,9781
30,0	1,5202	1,2717	2,3261	1,5973	3,0372	1,9898
40,0	1,5325	1,2723	2,3455	1,5993	3,0632	1,9942
50,0	1,5400	1,2727	2,3572	1,6002	3,0788	1,9962
100,0	1,5552	1,2731	2,3809	1,6015	3,1102	1,9990
∞	1,5708	1,2732	2,4048	1,6021	3,1416	2,0000

TABELA 4–3

Funções de Bessel do primeiro tipo de zero ordem e ordem primeira

λ_1	$J_0(\lambda_1)$	$J_1(\lambda_1)$
0,0	1,0000	0,0000
0,1	0,9975	0,0499
0,2	0,9900	0,0995
0,3	0,9776	0,1483
0,4	0,9604	0,1960
0,5	0,9385	0,2423
0,6	0,9120	0,2867
0,7	0,8812	0,3290
0,8	0,8463	0,3688
0,9	0,8075	0,4059
1,0	0,7652	0,4400
1,1	0,7196	0,4709
1,2	0,6711	0,4983
1,3	0,6201	0,5220
1,4	0,5669	0,5419
1,5	0,5118	0,5579
1,6	0,4554	0,5699
1,7	0,3980	0,5778
1,8	0,3400	0,5815
1,9	0,2818	0,5812
2,0	0,2239	0,5767
2,1	0,1666	0,5683
2,2	0,1104	0,5560
2,3	0,0555	0,5399
2,4	0,0025	0,5202
2,6	−0,0968	−0,4708
2,8	−0,1850	−0,4097
3,0	−0,2601	−0,3391
3,2	−0,3202	−0,2613

DETERMINAÇÃO DA TAXA DE CALOR TRANSFERIDO EM REGIME TRANSIENTE

$$Q_{max} = mc_p(T_\infty - T_i) = \rho V c_p(T_\infty - T_i) \qquad \text{(kJ)}$$

$$Q = \int_V \rho c_p[T(x,t) - T_i]dV$$

Quantidade real de calor transferido Q em tempo finito t pode ser expressa como a soma das mudanças de energia interna ao longo de toda geometria

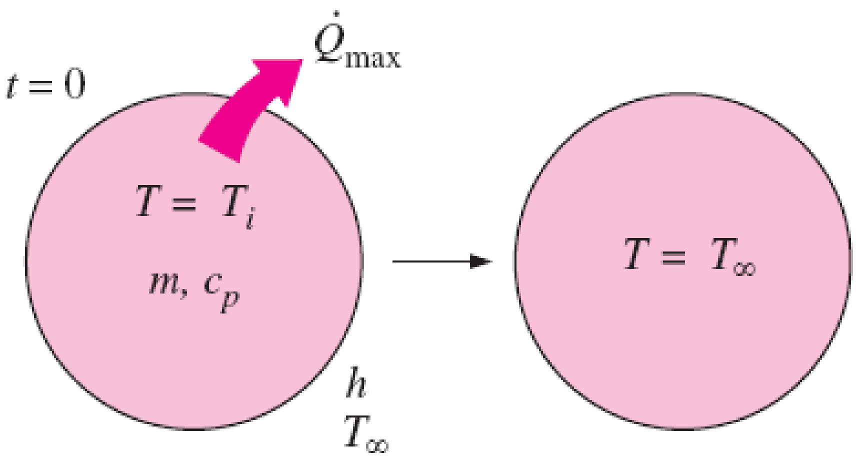
$$\frac{Q}{Q_{max}} = \frac{\int_V \rho c_p[T(x,t) - T_i]dV}{\rho c_p(T_\infty - T_i)V} = \frac{1}{V}\int_V (1-\theta)dV$$

Plane wall: $$\left(\frac{Q}{Q_{max}}\right)_{wall} = 1 - \theta_{0,\,wall}\frac{\sin\lambda_1}{\lambda_1}$$

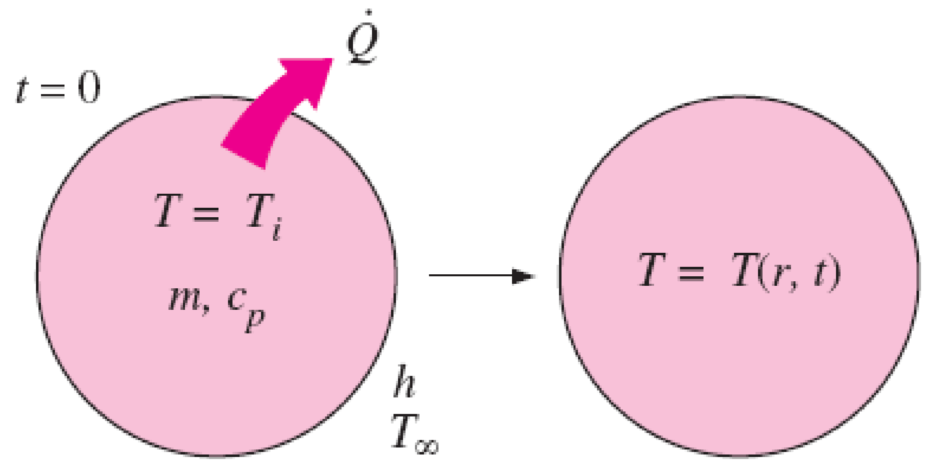
Cylinder: $$\left(\frac{Q}{Q_{max}}\right)_{cyl} = 1 - 2\theta_{0,\,cyl}\frac{J_1(\lambda_1)}{\lambda_1}$$

Sphere: $$\left(\frac{Q}{Q_{max}}\right)_{sph} = 1 - 3\theta_{0,\,sph}\frac{\sin\lambda_1 - \lambda_1\cos\lambda_1}{\lambda_1^3}$$

DETERMINAÇÃO DA TAXA DE CALOR TRANSFERIDO EM REGIME TRANSIENTE



Máxima quantidade de calor transferida (T $\longrightarrow$ ∞)



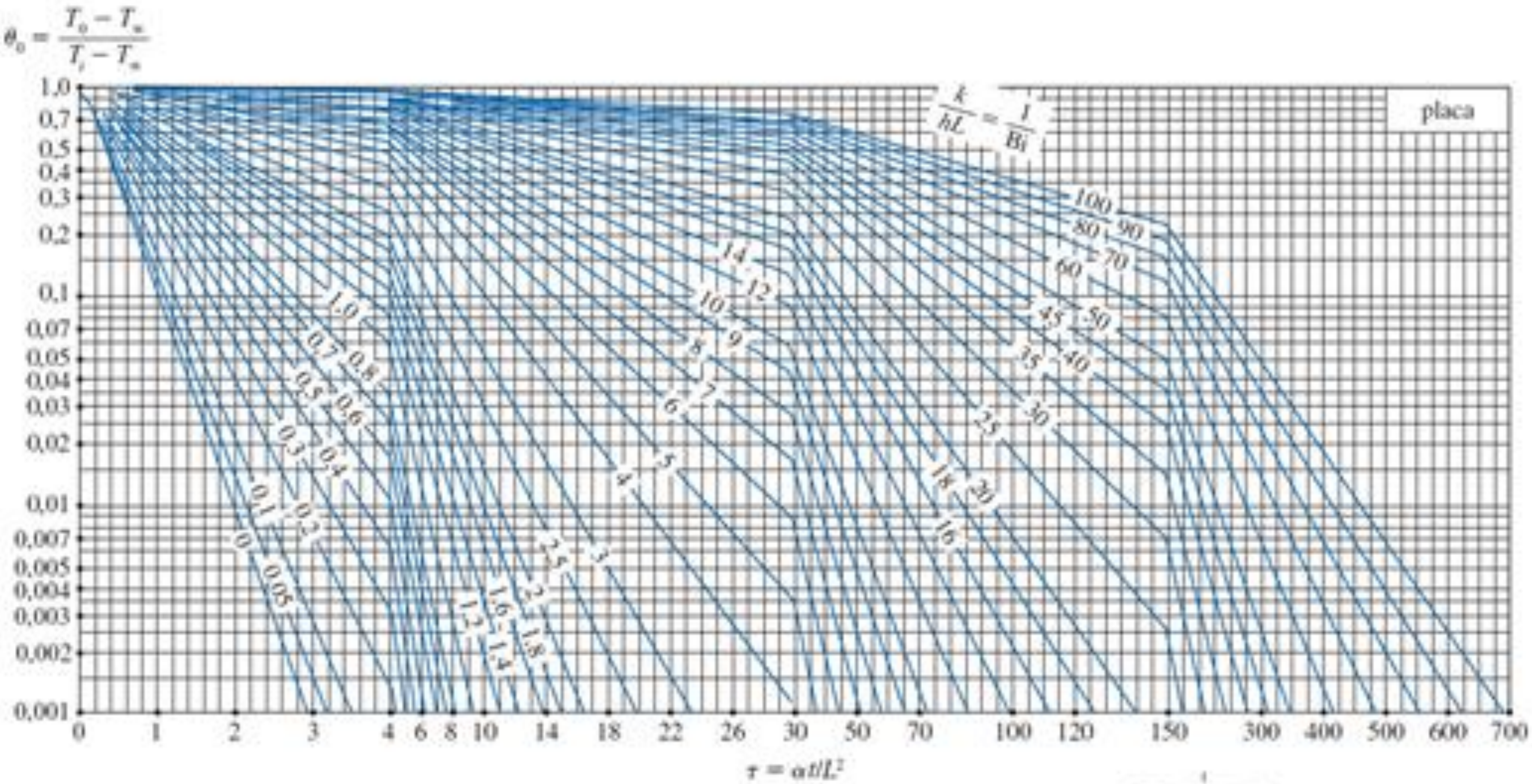
$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{Bi} = \ldots \\ \dfrac{h^2 \alpha t}{k^2} = \mathrm{Bi}^2 \tau = \cdots \end{array}\right\} \quad \frac{Q}{Q_{max}} = \cdots$$

(Gröber chart)

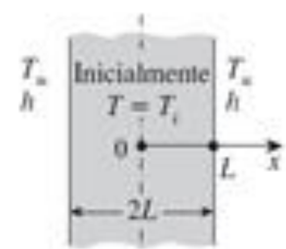
Quantidade de calor de fato transferida no tempo t.

A relação da razão Q/Q_{max} é determinada usando as cartas de Gröber.

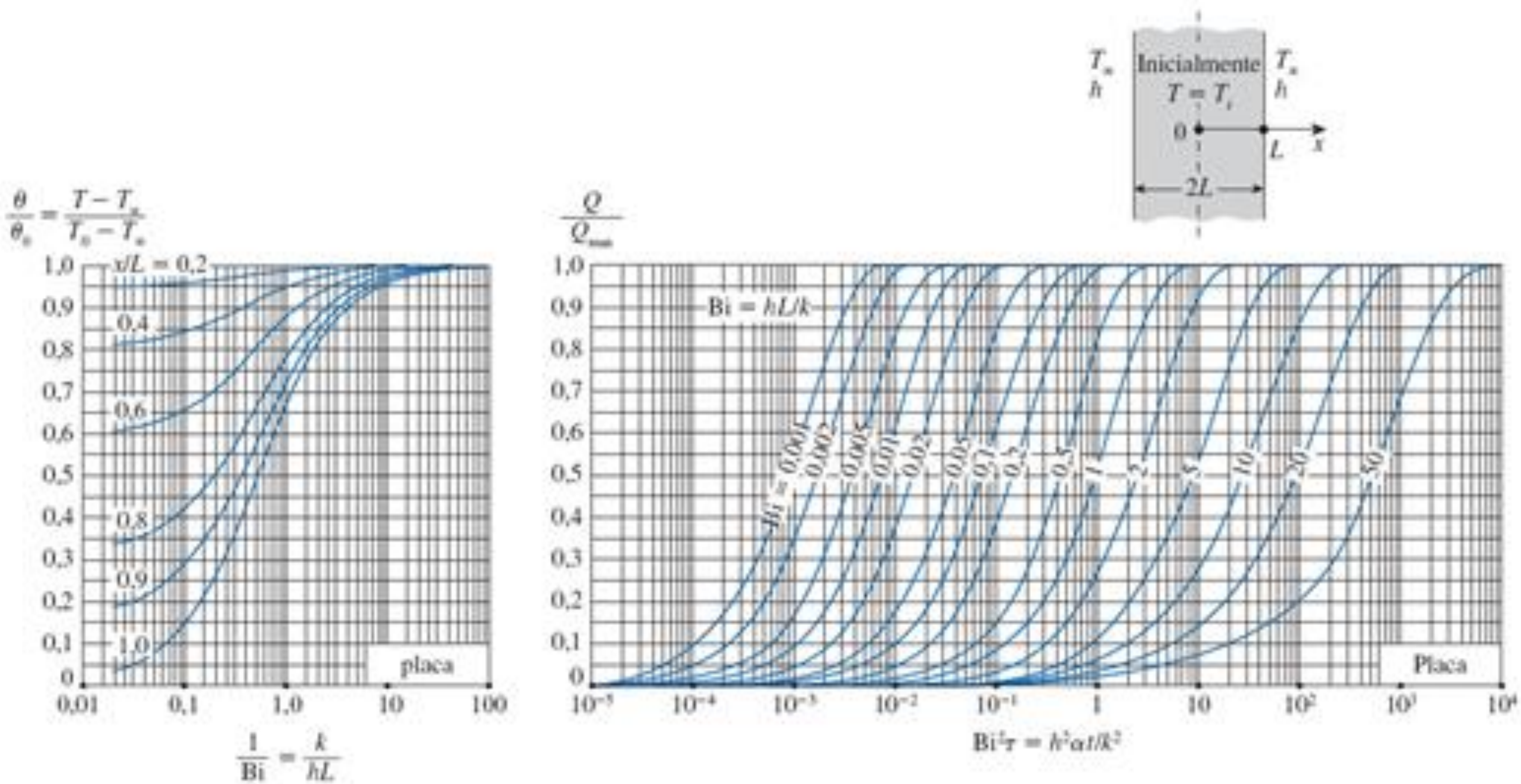
GRÁFICOS DE HEISLER/GRÖBER - PLACA



(*a*) Temperatura no plano central (de M. P. Heisler, "Temperature Charts for Induction and Constant Temperature Heating". Trans. ASME 69, 1947, pp. 227-36. Impresso com permissão da ASME International.)



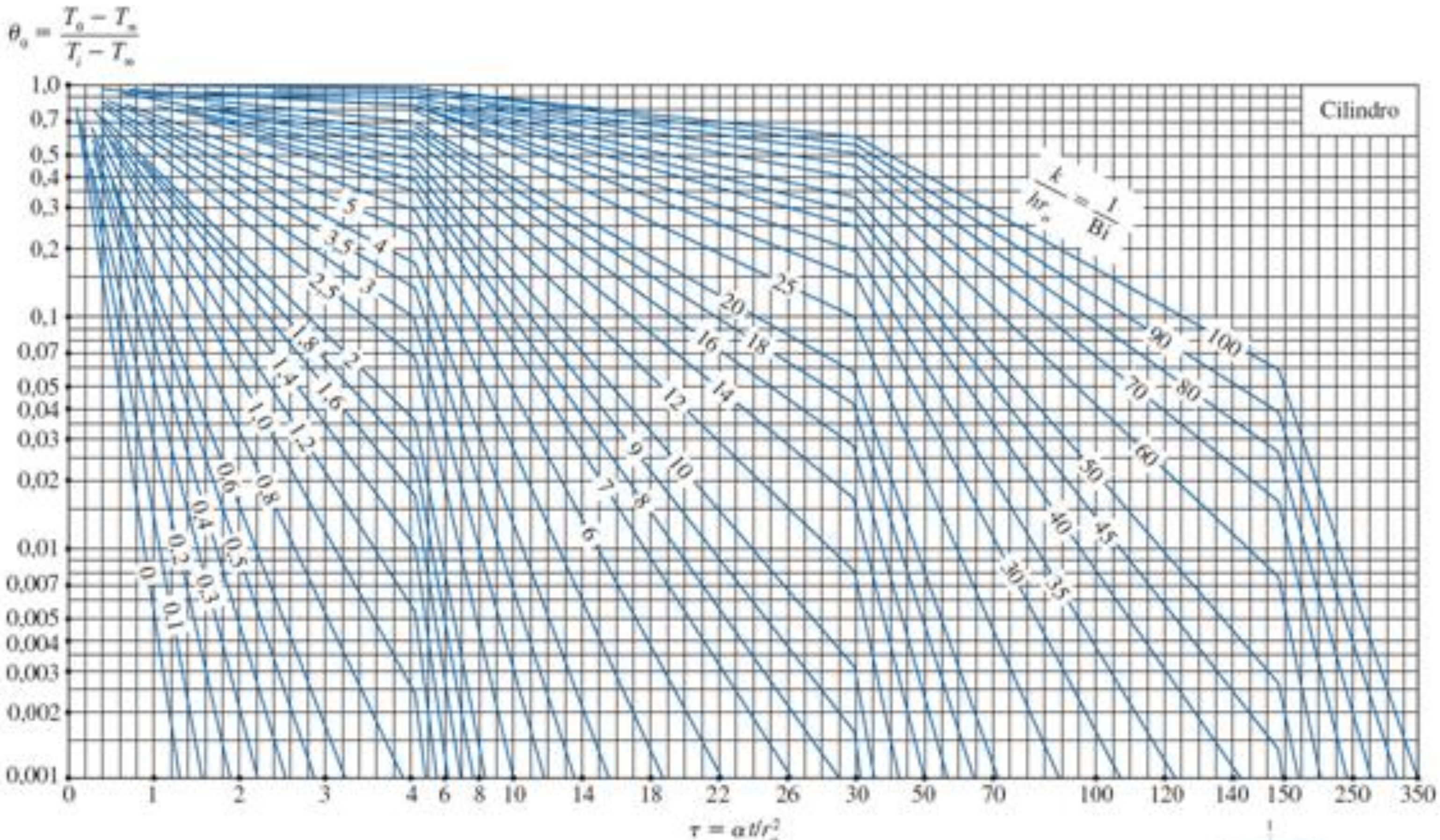
GRÁFICOS DE HEISLER/GRÖBER - PLACA



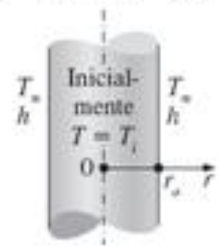
(*b*) Distribuição de temperatura (de M. P. Heisler, "Temperature charts for induction and constant temperature heating". *Trans. ASME 69*, 1947, pp. 227-36. Impresso com permissão da ASME International.)

(*c*) Transferência de calor (de H. Gröber et al.)

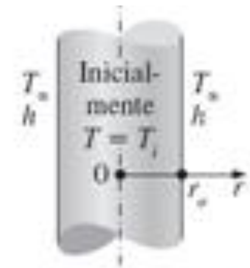
GRÁFICOS DE HEISLER/GRÖBER - CILINDRO

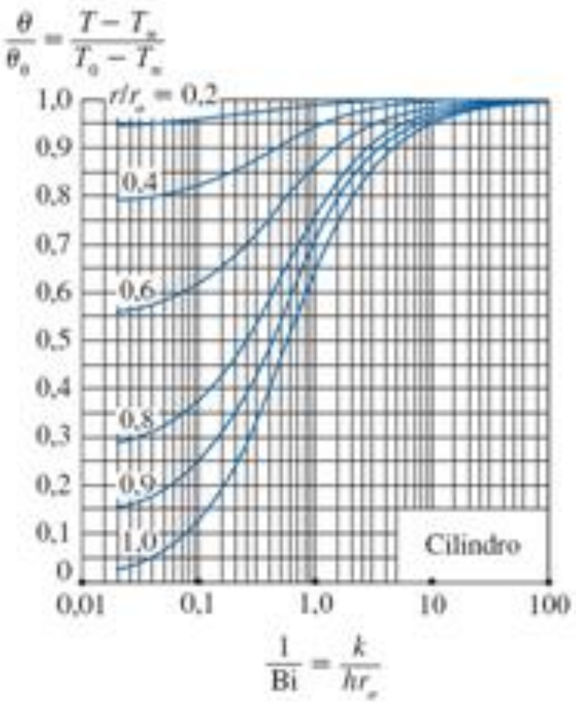


(*a*) Temperatura na linha central (de M. P. Heisler, "Temperature Charts for Induction and Constant Temperature Heating". *Trans. ASME 69*, 1947, pp. 227-36. Impresso com permissão da ASME International.)

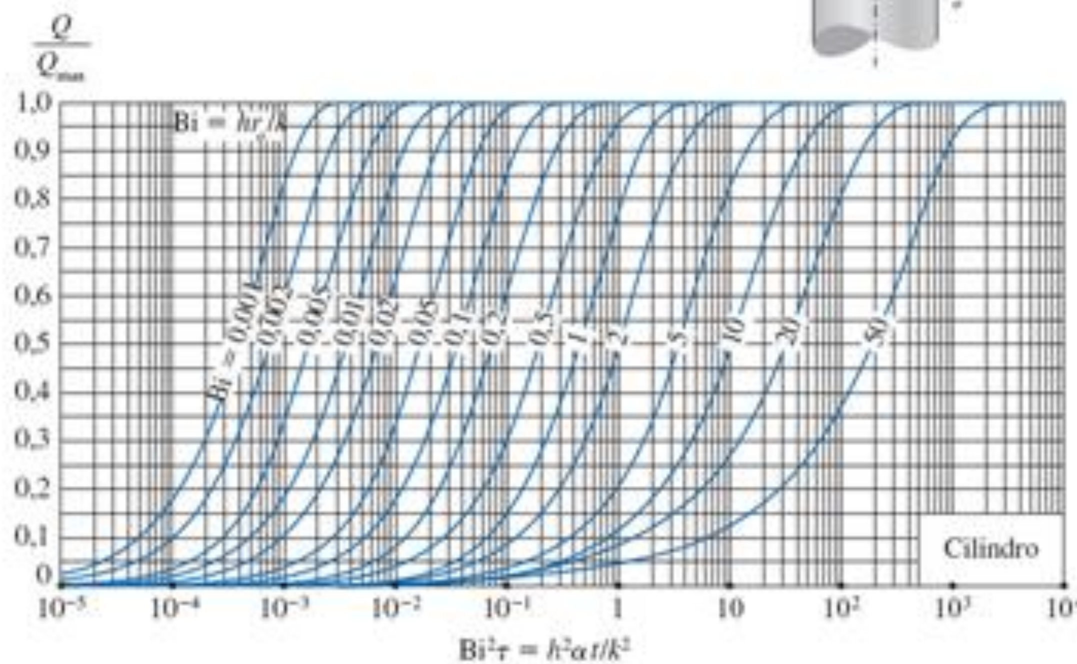


GRÁFICOS DE HEISLER/GRÖBER - CILINDRO



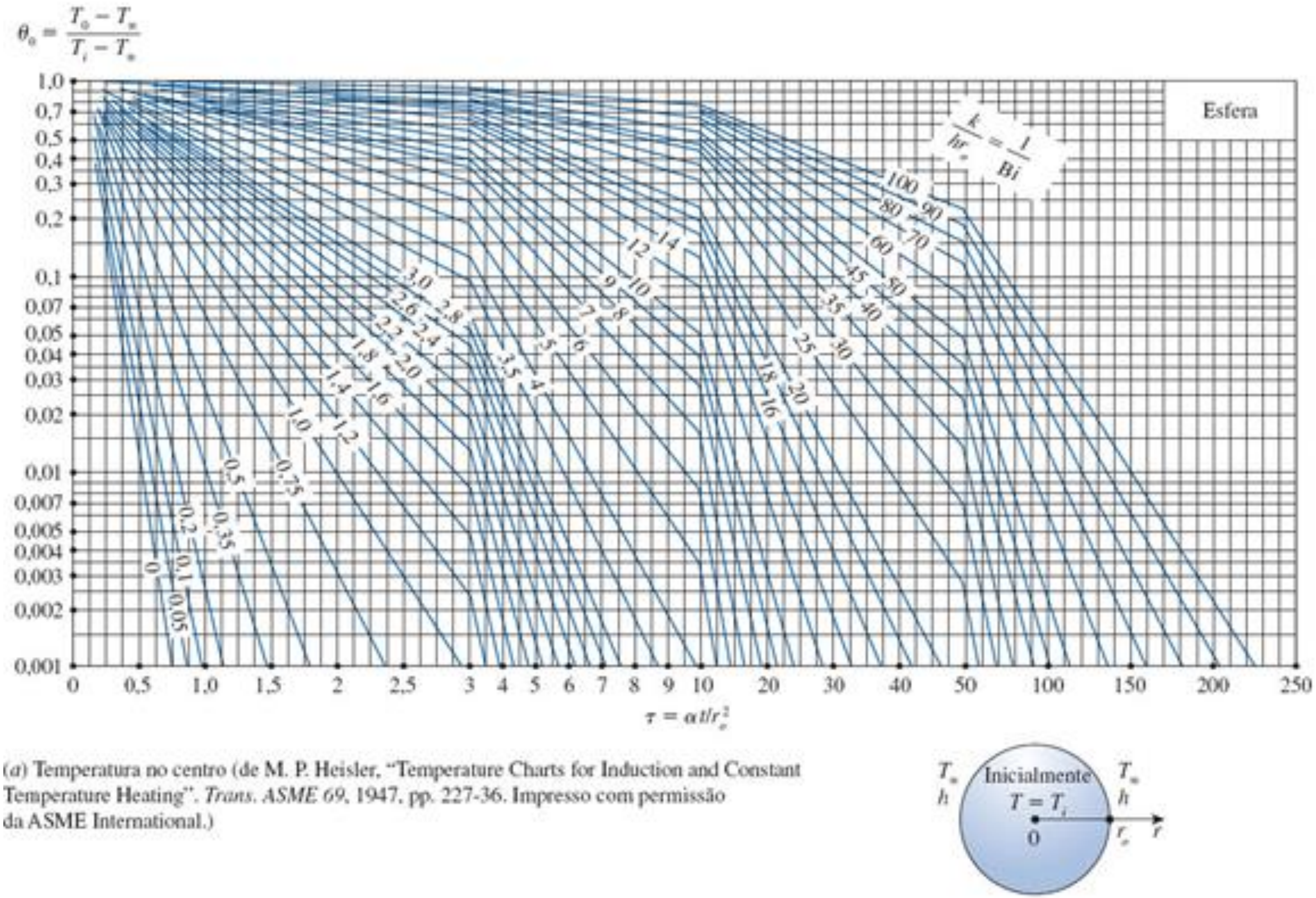


(*b*) Distribuição de temperatura (de M. P. Heisler, "Temperature Charts for Induction and Constant Temperature Heating". *Trans. ASME 69*, 1947, pp. 227-36. Impresso com permissão da ASME International.)



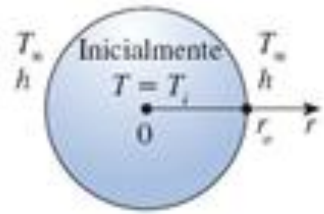
(*c*) Transferência de calor (de H. Gröber et al.)

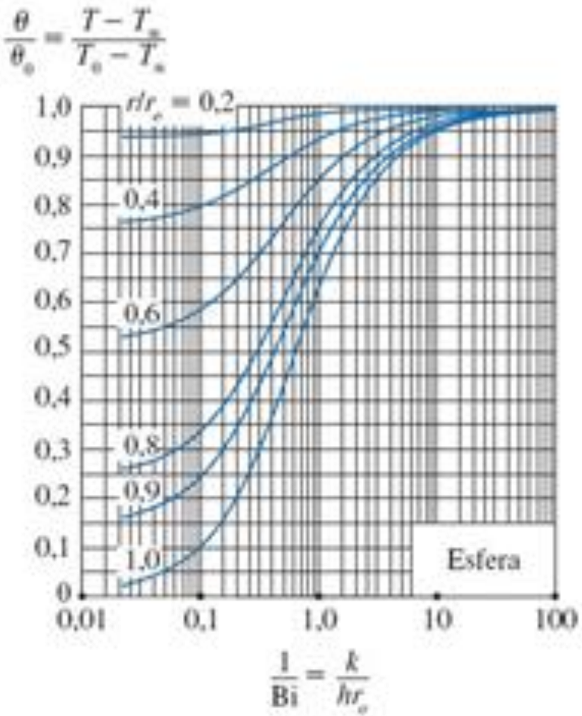
GRÁFICOS DE HEISLER/GRÖBER - ESFERA



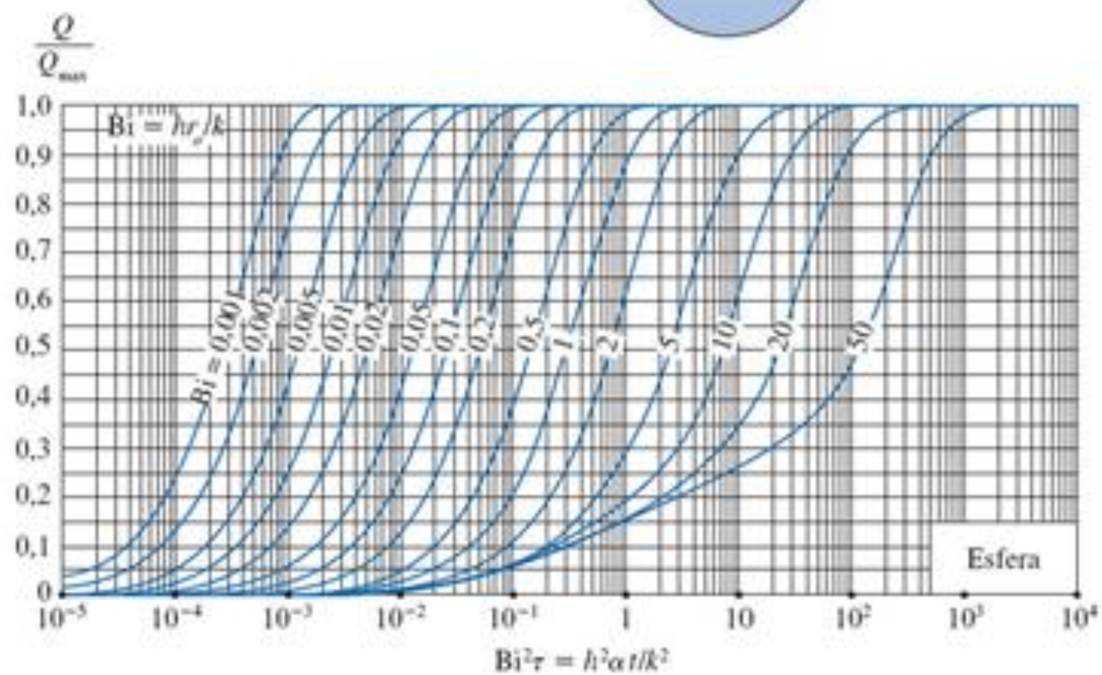
(*a*) Temperatura no centro (de M. P. Heisler, "Temperature Charts for Induction and Constant Temperature Heating". *Trans. ASME 69*, 1947, pp. 227-36. Impresso com permissão da ASME International.)

GRÁFICOS DE HEISLER/GRÖBER - ESFERA



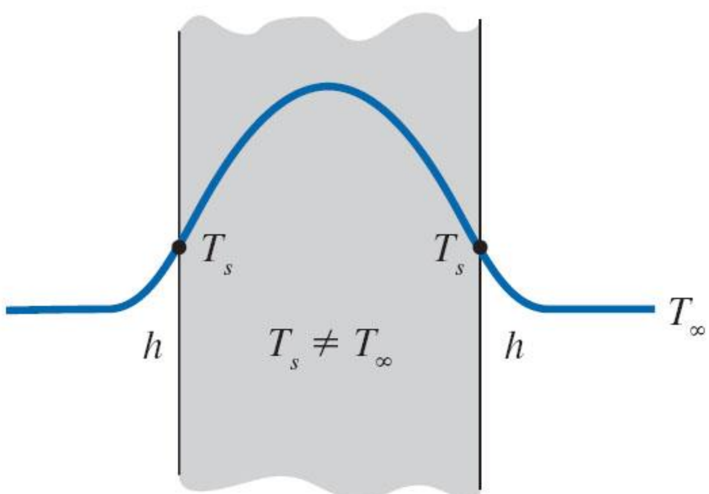


(*b*) Distribuição de temperatura (de M. P. Heisler, "Temperature Charts for Induction and Constant Temperature Heating". *Trans. ASME 69*, 1947, pp. 227-36. Impresso com permissão da ASME International.)

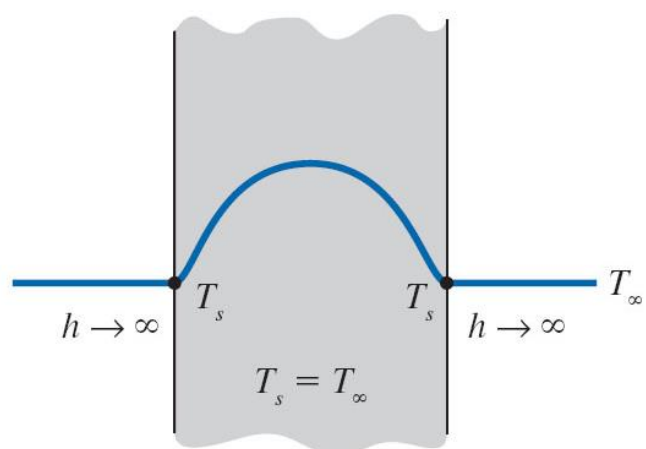


(*c*) Transferência de calor (de H. Gröber et al.)

A condição de coeficiente de convecção infinita é: $\frac{1}{Bi} = \frac{k}{h.L}$ e corresponde a $h \longrightarrow \infty$ quando a temperatura da superfície do corpo é mantida a T_∞ em todos durante toda a análise (Os efeitos de camada limite térmica são desprezados).

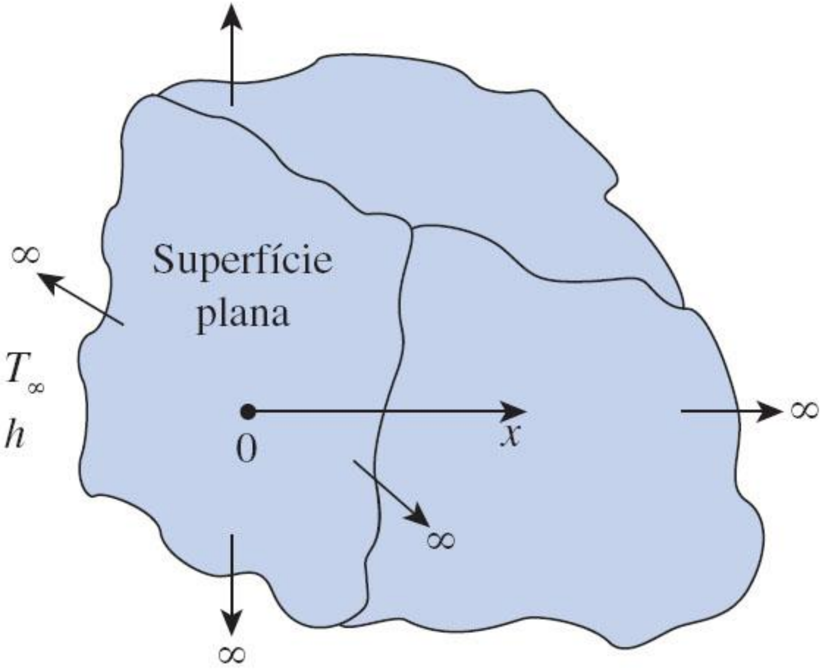


(a) Coeficiente de convecção finito



(b) Coeficiente de convecção infinito

CONDUÇÃO DE CALOR TRANSIENTE EM SÓLIDOS SEMI-INFINITO



Esquema de um corpo semi-infinito.

Por curtos períodos de tempo, a maioria dos corpos pode ser modelada como sólidos semi-infinitos, já que o calor não tem tempo suficiente para penetrar profundamente no corpo.

- Sólido semi-infinito: Um corpo idealizado que tem *única superfície plana* e se estende até o infinito em todas as direções.
- A Terra, por exemplo, pode ser considerada meio semi-infinito na determinação da variação da temperatura nas proximidades da superfície.
- Uma parede espessa pode ser modelada como um meio semi-infinito se estamos interessados na variação de temperatura na região perto de uma das superfícies e outra superfície está muito longe para ter alguma influência sobre a região de interesse durante o período de observação.

SOLUÇÃO ANALÍTICA PARA O CASO DE TEMP. CONSTANTE T_S NA SUPERFÍCIE

Differential equation: $$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$$

Boundary conditions: $T(0, t) = T_s$ and $T(x \to \infty, t) = T_i$

Initial condition: $T(x, 0) = T_i$

Similarity variable: $$\eta = \frac{x}{\sqrt{4\alpha t}}$$

$$\frac{d^2T}{d\eta^2} = -2\eta\frac{dT}{d\eta}$$

$T(0) = T_s$ and $T(\eta \to \infty) = T_i$

$$\frac{T - T_s}{T_i - T_s} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\eta e^{-u^2}du = \text{erf}(\eta) = 1 - \text{erfc}(\eta)$$

$$\text{erf}(\eta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\eta e^{-u^2}du$$ Função de erro

$$\text{erfc}(\eta) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\eta e^{-u^2}du$$ Função de erro complementar

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t} \quad \text{and} \quad \eta = \frac{x}{\sqrt{4\alpha t}}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{dT}{d\eta}\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{x}{2t\sqrt{4\alpha t}}\frac{dT}{d\eta}$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{dT}{d\eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{4\alpha t}}\frac{dT}{d\eta}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{d}{d\eta}\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{1}{4\alpha t}\frac{d^2T}{d\eta^2}$$

Transformação de variáveis nas derivadas da equação de condução de calor por meio da utilização da regra da cadeia.

SOLUÇÃO ANALÍTICA PARA O CASO DE TEMP. CONSTANTE T_S NA SUPERFÍCIE

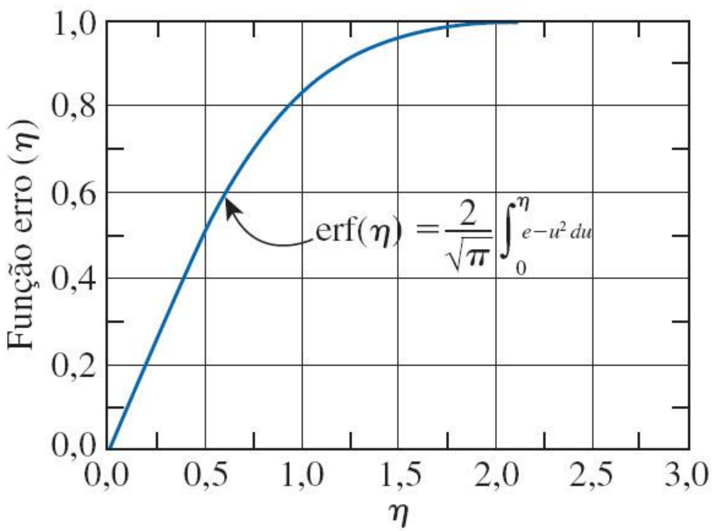


TABELA 4–4

Função erro complementar

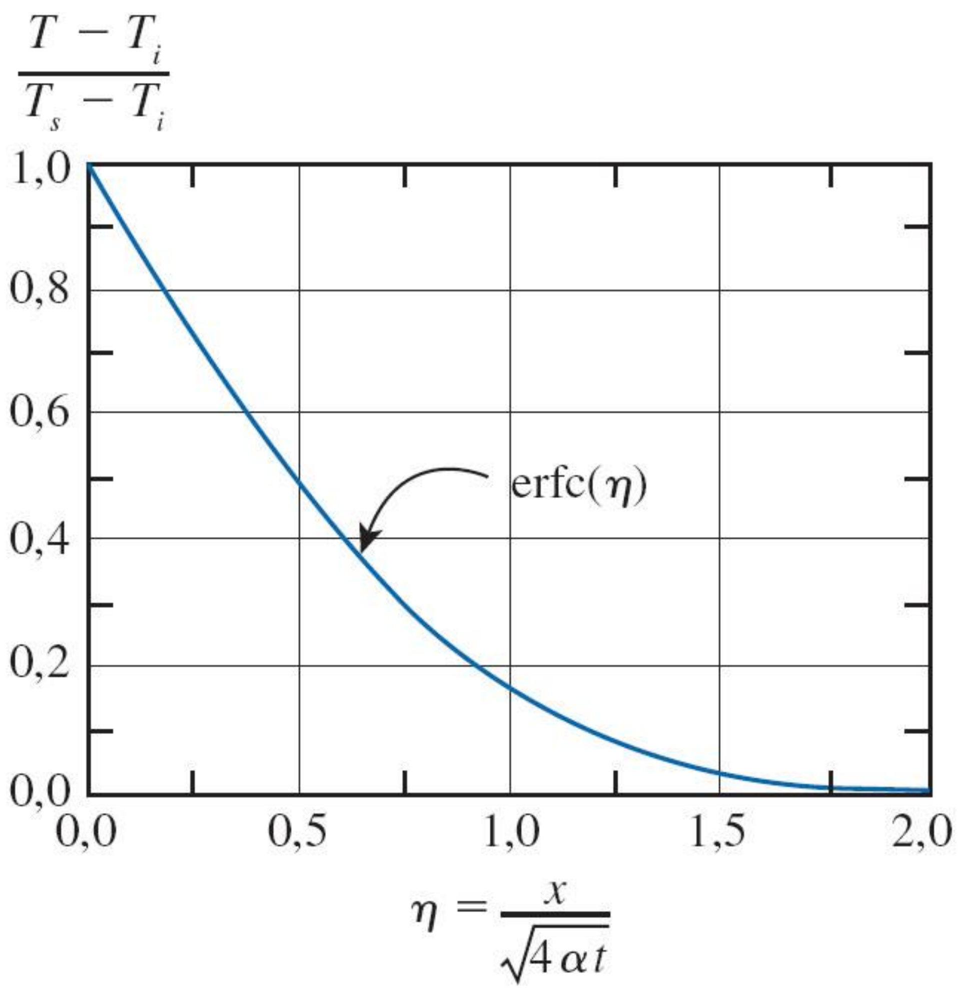
η	erfc (η)	η	erfc (η)	η	erfc (η)
0,00	1,00000	0,38	0,5910	0,76	0,2825
0,02	0,9774	0,40	0,5716	0,78	0,2700
0,04	0,9549	0,42	0,5525	0,80	0,2579
0,06	0,9324	0,44	0,5338	0,82	0,2462
0,08	0,9099	0,46	0,5153	0,84	0,2349
0,10	0,8875	0,48	0,4973	0,86	0,2239
0,12	0,8652	0,50	0,4795	0,88	0,2133
0,14	0,8431	0,52	0,4621	0,90	0,2031
0,16	0,8210	0,54	0,4451	0,92	0,1932
0,18	0,7991	0,56	0,4284	0,94	0,1837
0,20	0,7773	0,58	0,4121	0,96	0,1746
0,22	0,7557	0,60	0,3961	0,98	0,1658
0,24	0,7343	0,62	0,3806	1,00	0,1573
0,26	0,7131	0,64	0,3654	1,02	0,1492
0,28	0,6921	0,66	0,3506	1,04	0,1413
0,30	0,6714	0,68	0,3362	1,06	0,1339
0,32	0,6509	0,70	0,3222	1,08	0,1267
0,34	0,6306	0,72	0,3086	1,10	0,1198
0,36	0,6107	0,74	0,2953	1,12	0,1132

Função de erro é a função matemática padrão, assim como as funções seno e tangente, cujo valor varia entre 0 e 1.

Conhecendo a distribuição de temperatura, o fluxo de calor na superfície pode ser determinado a partir da lei de Fourier como:

$$\dot{q}_s = -k\frac{\partial T}{\partial x}\bigg|_{x=0} = -k\frac{dT}{d\eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}\bigg|_{\eta=0} = -kC_1 e^{-\eta^2}\frac{1}{\sqrt{4\alpha t}}\bigg|_{\eta=0} = \frac{k(T_s - T_i)}{\sqrt{\pi\alpha t}}$$

SOLUÇÃO ANALÍTICA PARA O CASO DE TEMP. CONSTANTE T_S NA SUPERFÍCIE



Distribuição de temperatura adimensional para condução transiente no sólido semi-infinito cuja superfície é mantida a uma temperatura constante T_s.

SOLUÇÃO ANALÍTICA PARA 4 DIFERENTES CASOS

Case 1: Specified Surface Temperature, T_s = constant

$$\frac{T(x,\ t) - T_i}{T_s - T_i} = \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}\right) \quad \text{and} \quad \dot{q}_s(t) = \frac{k(T_s - T_i)}{\sqrt{\pi \alpha t}}$$

Case 2: Specified Surface Heat Flux, $\dot{q}_s$ = constant.

$$T(x,\ t) - T_i = \frac{\dot{q}_s}{k}\left[\sqrt{\frac{4\alpha t}{\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{4\alpha t}\right) - x\operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}\right)\right]$$

Case 3: Convection on the Surface, $\dot{q}_s(t) = h[T_\infty - T(0,\ t)]$.

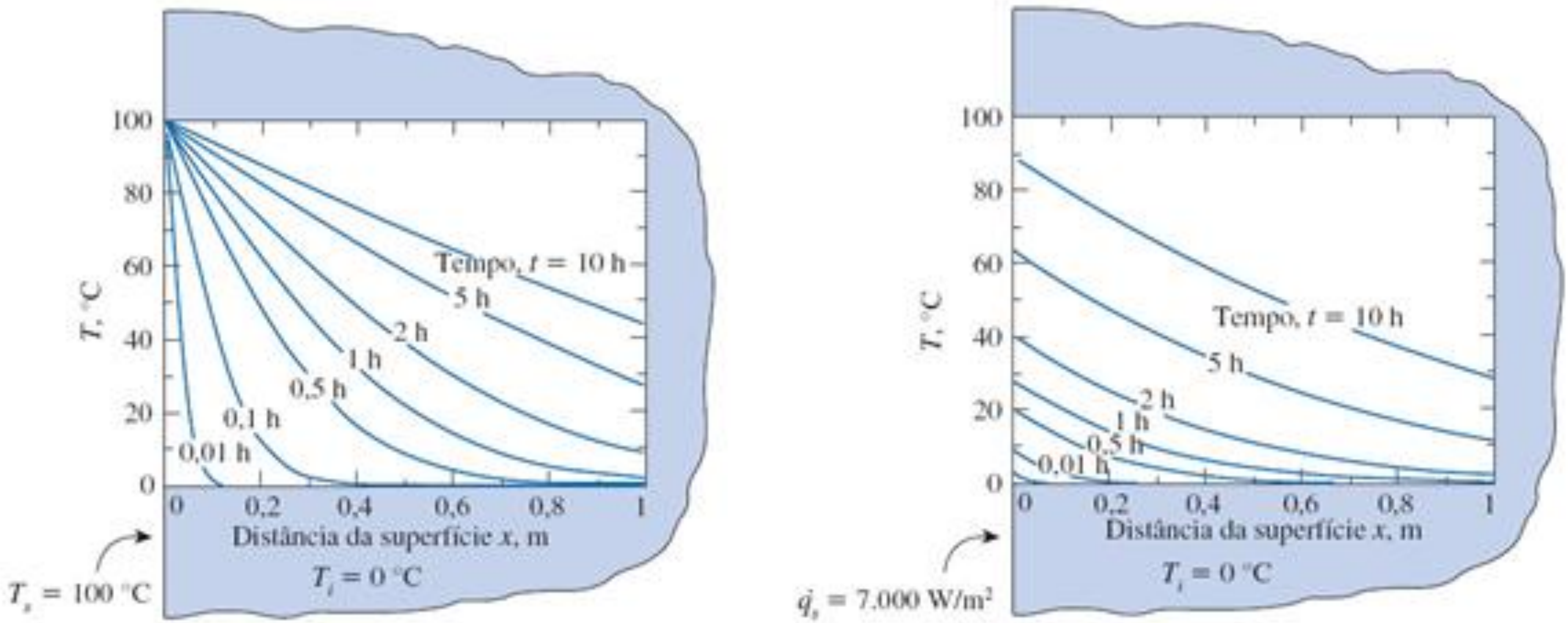
$$\frac{T(x,t) - T_i}{T_\infty - T_i} = \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}\right) - \exp\left(\frac{hx}{k} + \frac{h^2 \alpha t}{k^2}\right)\operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}} + \frac{h\sqrt{\alpha t}}{k}\right)$$

Case 4: Energy Pulse at Surface, e_s = constant.

$$T(x,\ t) - T_i = \frac{e_s}{k\sqrt{\pi t/\alpha}}\exp\left(-\frac{x^2}{4\alpha t}\right)$$

Soluções analíticas para diferentes condições de contorno na superfície

SOLUÇÃO ANALÍTICA PARA OS CASOS: T_S = CTE / Q_S = CTE

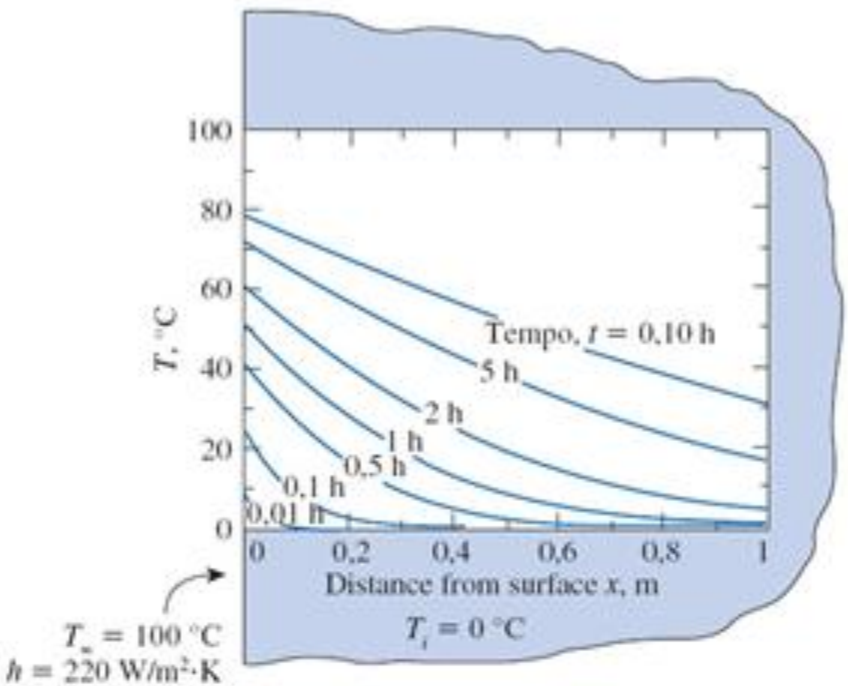


(a) Temperatura da superfície especificada, T_s = constante.

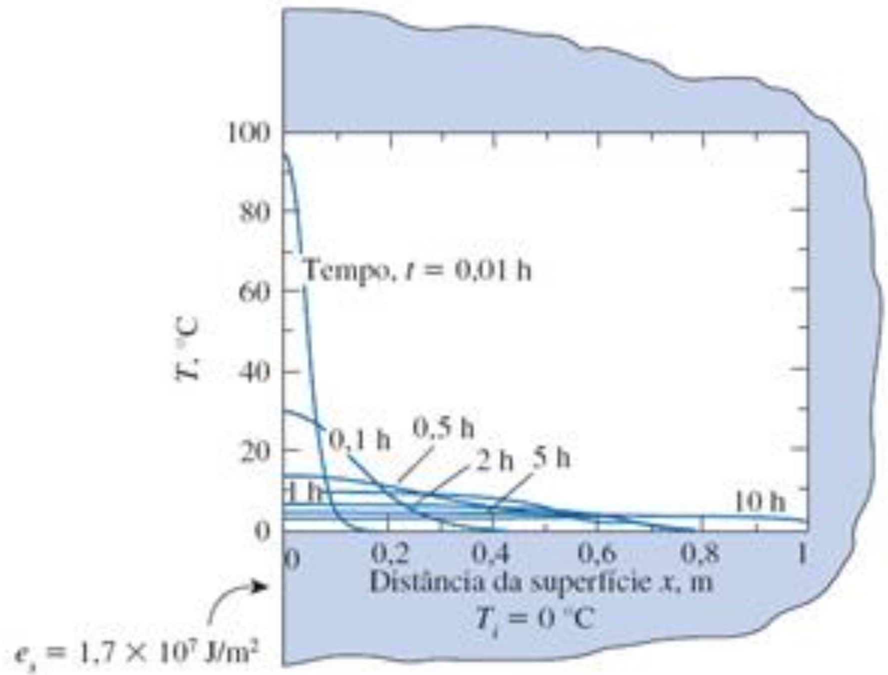
(b) Fluxo de calor na superfície especificado, $\dot{q}_s$ = constante.

Variações de temperatura com a posição e o tempo em um bloco grande de ferro fundido ($\alpha = 2{,}31 \text{ X } 10^{-5}\ \mathrm{m^2/s}$, k = 80,2 W/m.K), inicialmente a 0 °C, sob condições térmicas na superfície.

SOLUÇÃO ANALÍTICA PARA OS CASOS: CONVECÇÃO NA SUPERFÍCIE / E_S = CTE

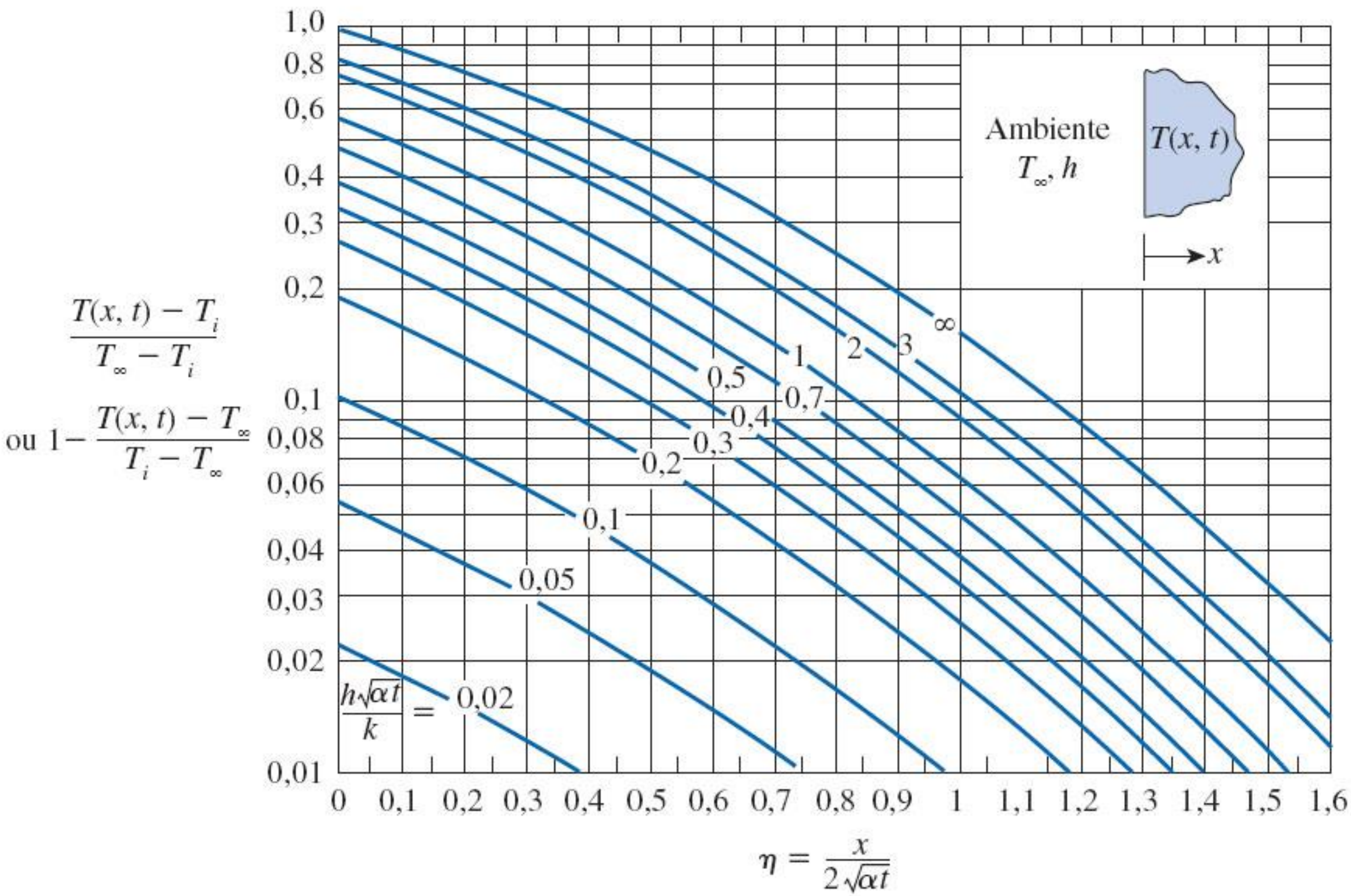


(c) Convecção na superfície



(d) Pulso de energia na superfície, e_s = constante

Variações de temperatura com a posição e o tempo em um bloco grande de ferro fundido ($\alpha = 2{,}31 \times 10^{-5}\ \mathrm{m^2/s}$, k = 80,2 W/m.K), inicialmente a 0 °C, sob condições térmicas na superfície.



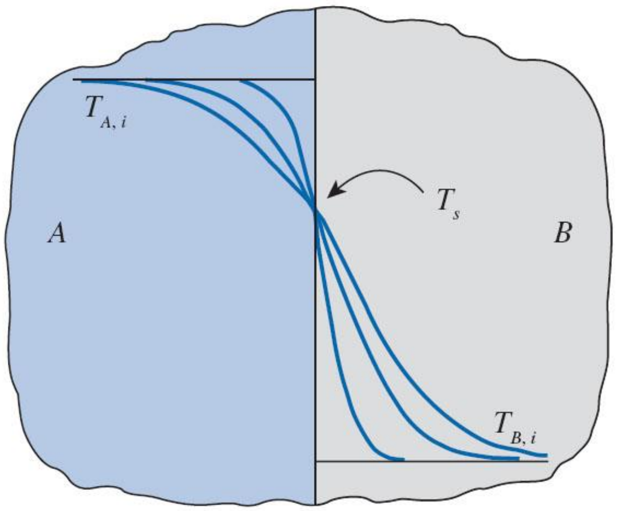
Variação da temperatura com a posição e o tempo em um sólido semi-infinito inicialmente à temperatura T_i submetido à convecção para o ambiente a T_∞ com coeficiente de transferência de calor por convecção h.

CONTATO DE DOIS SÓLIDOS SEMI-INFINITOS

Quando dois grandes corpos *A* e *B*, inicialmente em temperaturas uniformes $T_{A,i}$ e $T_{B,i}$ são postos em contato, eles atingem instantaneamente a igualdade de temperatura na superfície de contato.

Se os dois corpos são do mesmo material com propriedades constantes, a simetria térmica exige que a temperatura da superfície de contato seja a média aritmética, $T_s = (T_{A,i}+T_{B,i})/2$.

Se os corpos são de materiais diferentes, a temperatura da superfície T_s será diferente da média aritmética.



Contato de dois sólidos semi-infinitos com temperaturas inicias diferentes.

CONTATO DE DOIS SÓLIDOS SEMI-INFINITOS

$$\dot{q}_{s,A} = \dot{q}_{s,B} \rightarrow -\frac{k_A(T_s - T_{A,i})}{\sqrt{\pi\alpha_A t}} = \frac{k_B(T_s - T_{B,i})}{\sqrt{\pi\alpha_B t}} \rightarrow \frac{T_{A,i} - T_s}{T_s - T_{B,i}} = \sqrt{\frac{(k\rho c_p)_B}{(k\rho c_p)_A}}$$

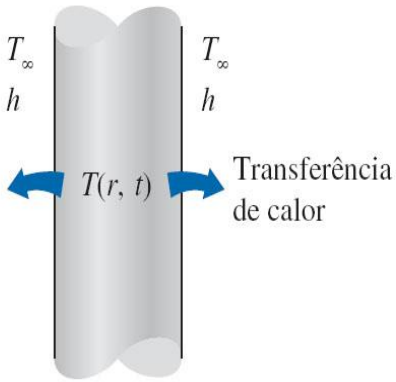
A temperatura da interface de dois corpos que entram em contato é dominada pelo corpo com maior $k\rho c_p$.

$$T_s = \frac{\sqrt{(k\rho c_p)_A}T_{A,i} + \sqrt{(k\rho c_p)_B}T_{B,i}}{\sqrt{(k\rho c_p)_A} + \sqrt{(k\rho c_p)_B}}$$

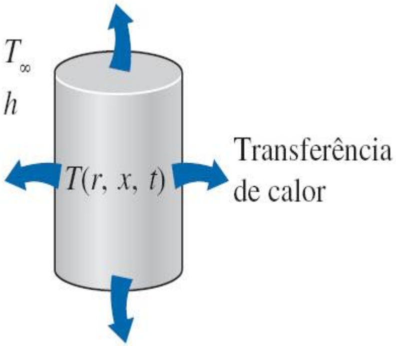
EXEMPLO: Quando uma pessoa com temperatura da pele a 35°C toca em um bloco de alumínio e, em seguida, em um bloco de madeira, ambos a 15°C, a superfície de contato será de 15,9°C no caso do alumínio and 30°C no caso da madeira.

- Utilizando-se a abordagem de superposição chamada de solução produto, os gráficos e soluções para temperatura transiente podem ser aplicados na solução de problemas *bidimensionais* e *tridimensionais* de condução de calor transiente, encontrados em geometrias como cilindro curto, barra retangular ou chapa semi-infinita, desde que *todas* as superfícies do sólido estejam submetidas à convecção para o *mesmo* fluido à temperatura T_∞, com o *mesmo* coeficiente de transferência de calor h e sem geração de calor;

- A solução para essas geometrias multidimensionais pode ser expressa como o *produto* das soluções para geometrias unidimensionais cuja intersecção é geometria multidimensional.



(*a*) Cilindro longo



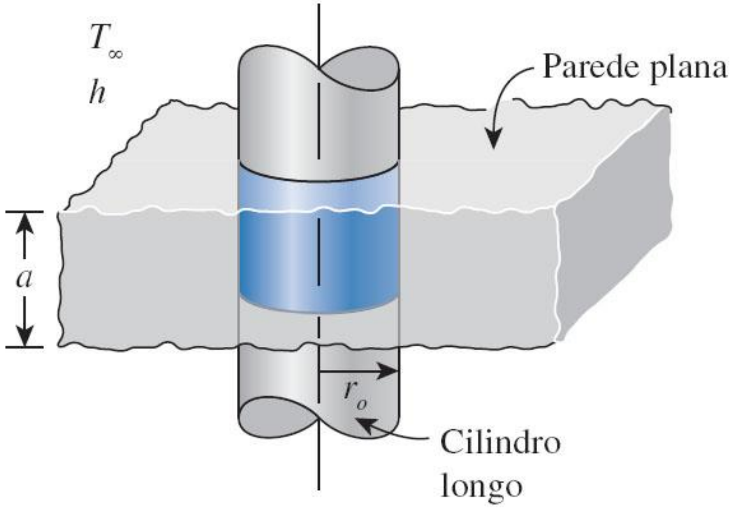
(*b*) Cilindro curto (bidimensional)

A temperatura de um cilindro curto exposto à convecção de todas as superfícies varia em ambas as direções, axial e radial; então o calor é transferido em ambas as direções.

- *A solução para uma geometria multidimensional é o produto das soluções das geometrias unidimensionais cuja intersecção é o corpo multidimensional.*

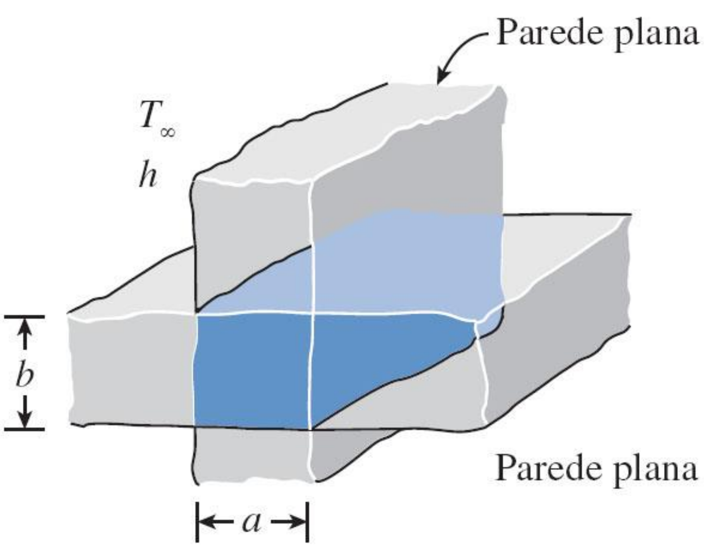
- A solução para um cilindro curto bidimensional de altura *a* e raio r_o é igual ao *produto* das soluções para uma parede unidimensional plana de espessura *a* e um cilindro longo de radio r_o.

$$\left(\frac{T(r,x,t)-T_\infty}{T_i-T_\infty}\right)_{\substack{\text{short}\\ \text{cylinder}}} = \left(\frac{T(x,t)-T_\infty}{T_i-T_\infty}\right)_{\substack{\text{plane}\\ \text{wall}}} \left(\frac{T(r,t)-T_\infty}{T_i-T_\infty}\right)_{\substack{\text{infinite}\\ \text{cylinder}}}$$



Um cilindro curto de raio r_o e altura *a* é a *intersecção* de um cilindro longo de raio r_o e uma parede plana de espessura *a*.

$$\left(\frac{T(x, y, t) - T_\infty}{T_i - T_\infty}\right)_{\substack{\text{rectangular}\\ \text{bar}}} = \theta_{\text{wall}}(x, t)\theta_{\text{wall}}(y, t)$$



$$\theta_{\text{wall}}(x, t) = \left(\frac{T(x, t) - T_\infty}{T_i - T_\infty}\right)_{\substack{\text{plane}\\ \text{wall}}}$$

$$\theta_{\text{cyl}}(r, t) = \left(\frac{T(r, t) - T_\infty}{T_i - T_\infty}\right)_{\substack{\text{infinite}\\ \text{cylinder}}}$$

$$\theta_{\text{semi-inf}}(x, t) = \left(\frac{T(x, t) - T_\infty}{T_i - T_\infty}\right)_{\substack{\text{semi-infinite}\\ \text{solid}}}$$

A barra sólida longa de perfil retangular $a \times b$ é a *intersecção* de duas paredes de espessura a e b.

A transferência de calor transiente para geometria bidimensional formada pela intersecção de duas geometrias unidimensionais 1 e 2 é

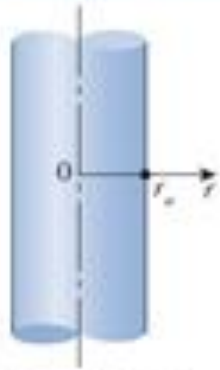
$$\left(\frac{Q}{Q_{\max}}\right)_{\text{total, 2D}} = \left(\frac{Q}{Q_{\max}}\right)_1 + \left(\frac{Q}{Q_{\max}}\right)_2 \left[1 - \left(\frac{Q}{Q_{\max}}\right)_1\right]$$

A transferência de calor transiente para um corpo tridimensional formado pela intersecção de três corpos unidimensionais 1, 2, e 3 é

$$\left(\frac{Q}{Q_{\max}}\right)_{\text{total, 3D}} = \left(\frac{Q}{Q_{\max}}\right)_1 + \left(\frac{Q}{Q_{\max}}\right)_2 \left[1 - \left(\frac{Q}{Q_{\max}}\right)_1\right] + \left(\frac{Q}{Q_{\max}}\right)_3 \left[1 - \left(\frac{Q}{Q_{\max}}\right)_1\right]\left[1 - \left(\frac{Q}{Q_{\max}}\right)_2\right]$$

TABELA 4–5

Soluções multidimensionais expressas como produtos de soluções unidimensionais para corpos que estão inicialmente a uma temperatura uniforme T_i e expostos à convecção em todas as superfícies para um meio a T_∞



$\theta(r, t) = \theta_{cil}(r, t)$

Cilindro infinito

$\theta(x, r, t) = \theta_{cil}(r, t)\,\theta_{semi\text{-}inf}(x, t)$

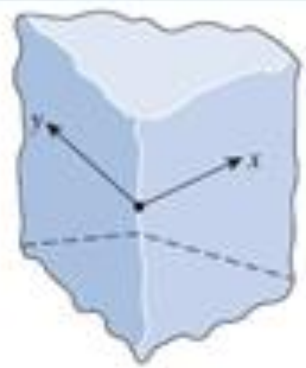
Cilindro semi-infinito

$\theta(x, r, t) = \theta_{cil}(r, t)\,\theta_{parede}(x, t)$

Cilindro curto

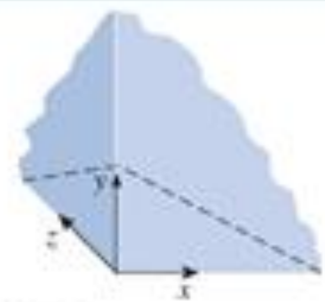
$\theta(x, t) = \theta_{semi\text{-}inf}(x, t)$

Meio semi-infinito



$\theta(x, y, t) = \theta_{semi\text{-}inf}(x, t)\,\theta_{semi\text{-}inf}(y, t)$

Quarto do meio infinito

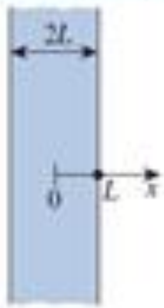


$\theta(x, y, z, t) =$
$\theta_{semi\text{-}inf}(x, t)\,\theta_{semi\text{-}inf}(y, t)\,\theta_{semi\text{-}inf}(z, t)$

Região de quina de meio grande

TABELA 4–5

Soluções multidimensionais expressas como produtos de soluções unidimensionais para corpos que estão inicialmente a uma temperatura uniforme T_i e expostos à convecção em todas as superfícies para um meio a T_∞

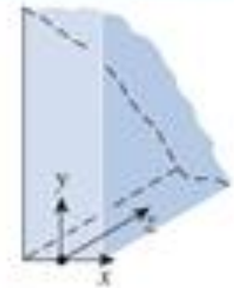


$\theta(x, t) = \theta_{parede}(x, t)$

Placa infinita (ou parede plana)

$\theta(x, y, t) = \theta_{parede}(x, t)\,\theta_{semi\text{-}inf}(y, t)$

Placa semi-infinita



$\theta(x, y, z, t) =$
$\theta_{parede}(x, t)\,\theta_{semi\text{-}inf}(y, t)\,\theta_{semi\text{-}inf}(z, t)$

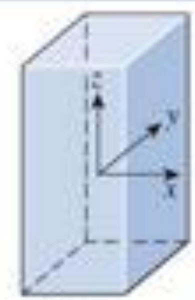
Quarto de placa infinita

$\theta(x, y, t) = \theta_{parede}(x, t)\,\theta_{parede}(y, t)$

Barra retangular infinita

$\theta(x, y, z, t) =$
$\theta_{parede}(x, t)\,\theta_{parede}(y, t)\,\theta_{semi\text{-}inf}(z, t)$

Barra retangular semi-infinita



$\theta(x, y, z, t) =$
$\theta_{parede}(x, t)\,\theta_{parede}(y, t)\,\theta_{parede}(z, t)$

Paralelepípedo retangular

FIM – CONDUÇÃO DE CALOR