Aula 29 (1/Abr)

Na aula de hoje:

* Revisão da aula anterior.
* Oscilador Harmônico Quântico 2D, usando quantões circulares.
* Simetrias em Mec. Clássica
* Simetrias em Mec. Quântica

Revisão da última aula

* Evolução temporal dos valores médios.
* Oscilador Harmônico Clássico 2D.
* Oscilador Harmônico Quântico 2D.

Capítulo 7: Exemplos de Quantificação Canônica

7.2 Oscilador Harmônico Quântico em 2D

7.2.3) OHQ em 2D usando quantões circulares (cont.)

Vimos a interpretação de $\hat{a}_e$ e $\hat{a}_d$ (bem como $\hat{a}_e^+$ e $\hat{a}_d^+$) como destruindo (criando) quanta de momento angular, respectivamente, no sentido inverso e directo.

<u>Nota</u>: É claro que para cada nível de energia identificado por <u>n</u>, existe uma degenerescência <u>n+1</u>

$$(n_e, n_d) \longrightarrow n = n_e + n_d \Rightarrow E_n = \hbar\omega(n+1)$$

$$\searrow$$

$$
\begin{aligned}
(0,n) &\Longrightarrow m = n \\
(1,n-1) &\Longrightarrow m = n-2 \\
(2,n-2) &\Longrightarrow m = n-4 \\
\vdots \qquad & \qquad \vdots \qquad \vdots \\
(n-1,1) &\Longrightarrow m = -n+2 \\
(n,0) &\Longrightarrow m = -n
\end{aligned}
$$

7.2.4) Auto-funções do OHQ em 2D usando quantões circulares

Estas f.o serão simultaneamente auto funções de $\hat{H}$ e $\hat{L}_z$.

A acção dos ops. criação / destruição circulares é

$$\hat{a}_d^+ |m_e, m_d\rangle = |m_e, m_d+1\rangle$$

$$\hat{a}_d |m_e, m_d\rangle = m_d |m_e, m_d-1\rangle$$

$$\hat{a}_e^+ |m_e, m_d\rangle = |m_e+1, m_d\rangle$$

$$\hat{a}_e |m_e, m_d\rangle = m_e |m_e-1, m_d\rangle$$

Nota: Estados não estão normalizados como no caso 1D.

Usando as definições $\hat{a}_d = \hat{a}_x - i\hat{a}_y$ e de $\hat{a}_d^+ = \hat{a}_x^+ + i\hat{a}_y^+$, podemos representá-los no espaço das posições $\{|x,y\rangle = |\vec{r}\rangle\}$ como

$$\langle\vec{r}|\hat{a}_d|\phi\rangle = \langle\vec{r}|\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{\mu\omega}{\hbar}}(\hat{X}-i\hat{Y}) + \frac{i}{\sqrt{\mu\omega\hbar}}(\hat{P}_x - i\hat{P}_y)|\phi\rangle\right.$$

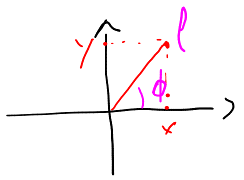
$$= \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{\mu\omega}{\hbar}}(x-iy) + \sqrt{\frac{\hbar}{\mu\omega}}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)\right)\phi(x)$$

$$\langle \vec{r}\,|\,\hat{a}_d^{\dagger}\,|\,\phi\rangle = \langle \vec{r}\,|\,\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{\mu\omega}{\hbar}}\left(\hat{X}+i\hat{Y}\right)-\frac{i}{\sqrt{\mu\omega\hbar}}\left(\hat{P}_x+i\hat{P}_y\right)\right)|\,\phi\rangle$$

$$=\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{\mu\omega}{\hbar}}(x+iy)-\sqrt{\frac{\hbar}{\mu\omega}}\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right)\right)\phi(x)$$

sendo que $\hat{a}_e$ e $\hat{a}_e^{\dagger}$ são obtidos trocando $i \longrightarrow -i$.

Como temos simetria de rotação em xOy, podemos usar coordenadas polares



$$\left.\begin{aligned} x &= \rho\cdot\cos\phi \\ y &= \rho\,\mathrm{sen}\,\phi \end{aligned}\right\} \Rightarrow x \pm i y = \rho\cdot e^{\pm i\phi},$$

$$\hookrightarrow \quad \begin{aligned} \rho &= \sqrt{x^2+y^2} \\ \phi &= \mathrm{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) \end{aligned}$$

bem como

$$\frac{\partial}{\partial x}\pm i\frac{\partial}{\partial y} = \underbrace{\frac{\partial\rho}{\partial x}}_{=\frac{x}{\rho}=\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\rho}+\underbrace{\frac{\partial\phi}{\partial x}}_{=-y/\rho^2=-\frac{\mathrm{sen}\,\phi}{\rho}}\frac{\partial}{\partial\phi}\pm i\left(\underbrace{\frac{\partial\rho}{\partial y}}_{=\frac{y}{\rho}=\mathrm{sen}\,\phi}\frac{\partial}{\partial\rho}+\underbrace{\frac{\partial\phi}{\partial y}}_{=\frac{x}{\rho^2}=\frac{\cos\phi}{\rho}}\frac{\partial}{\partial\phi}\right)$$

$$= e^{\pm i\phi}\frac{\partial}{\partial\rho}\pm i\,\frac{e^{\pm i\phi}}{\rho}\frac{\partial}{\partial\phi}$$

$$= e^{\pm i\phi}\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\pm\frac{i}{\rho}\frac{\partial}{\partial\phi}\right)$$

que permite que escrevamos

$$\langle x|\hat{a}_d|\phi\rangle = \frac{1}{2} e^{-i\phi}\left(\sqrt{\frac{\mu\omega}{\hbar}}\rho + \sqrt{\frac{\hbar}{\mu\omega}}\left(\frac{\partial}{\partial\rho} - \frac{i}{\rho}\frac{\partial}{\partial\phi}\right)\right)\phi(x,y)$$

$$\langle x|\hat{a}_d|\phi\rangle = \frac{1}{2} e^{+i\phi}\left(\sqrt{\frac{\mu\omega}{\hbar}}\rho - \sqrt{\frac{\hbar}{\mu\omega}}\left(\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{i}{\rho}\frac{\partial}{\partial\phi}\right)\right)\phi(x,y)$$

sendo que $\hat{a}_e$ e $\hat{a}_e^+$ obtêm-se $i \longrightarrow -i$.

Podemos proceder como para o caso 1D. Começamos por calcular $\phi_{(0,0)}(\vec{r})$. Usando o facto que

$$|\phi_{(0,0)}\rangle = |\phi_{n_x=0}\rangle \otimes |\phi_{n_y=0}\rangle$$

$$\Rightarrow \langle\vec{r}|\phi_{00}\rangle = \sqrt{\frac{\mu\omega}{\pi\hbar}} \cdot e^{-\frac{\mu\omega}{2\hbar}(x^2+y^2)}$$

coord. polares

$$= \sqrt{\frac{\omega\mu}{\pi\hbar}} \cdot e^{-\frac{\mu\omega}{2\hbar}\cdot\rho^2}$$

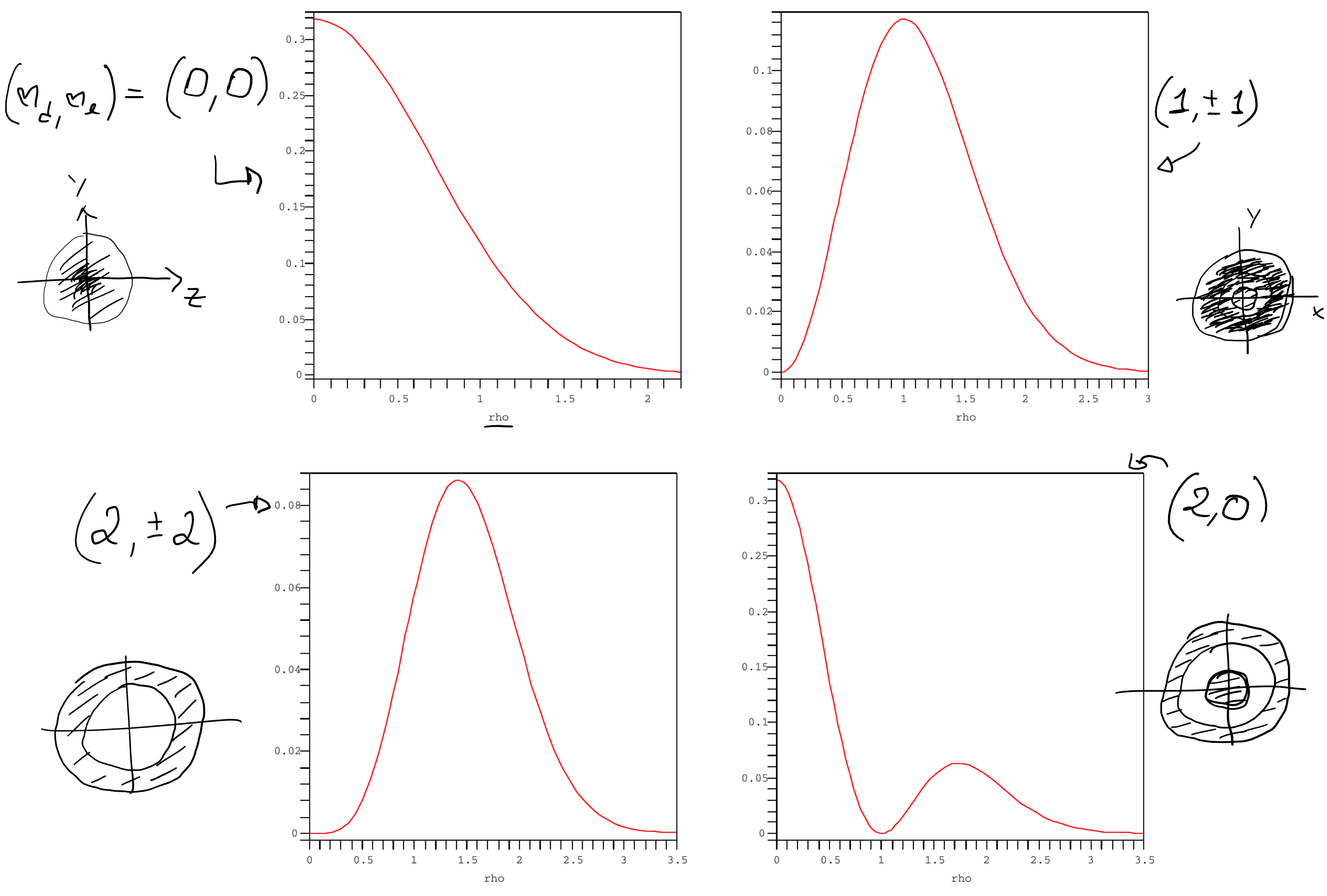
que tem $\underline{n=0}$ e $\underline{m=0}$.

<u>Nota</u>: Usando $\hat{a}_e|\phi_{00}\rangle = 0 = \hat{a}_d|\phi_{00}\rangle$ dará também este resultado.

Actuando com $\hat{a}_d^+$ e $\hat{a}_e^+$ poderemos obter recursivamente os auto-estados simultâneos de $\hat{H}$ e $\hat{L}_z$.

$$
n=1\,,\quad
\begin{cases}
m=1\,, & \Phi_{(n_e=0,n_d=1)}(\rho,\phi) = \dfrac{\omega\mu}{\sqrt{\pi}\hbar}e^{i\phi}\rho e^{-\frac{\mu\omega}{2\hbar}\rho^2}\,, \\
m=-1\,, & \Phi_{(n_e=1,n_d=0)}(\rho,\phi) = \dfrac{\omega\mu}{\sqrt{\pi}\hbar}e^{-i\phi}\rho e^{-\frac{\mu\omega}{2\hbar}\rho^2}\,,
\end{cases}
$$

$$
n=2\,,\quad
\begin{cases}
m=2\,, & \Phi_{(n_e=0,n_d=2)}(\rho,\phi) = \left(\dfrac{\omega\mu}{\hbar}\right)^{3/2} e^{2i\phi}\dfrac{\rho^2}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\mu\omega}{2\hbar}\rho^2}\,, \\
m=0\,, & \Phi_{(n_e=1,n_d=1)}(\rho,\phi) = \sqrt{\dfrac{\omega\mu}{\pi\hbar}}\left[\dfrac{\omega\mu}{\hbar}\rho^2-1\right]e^{-\frac{\mu\omega}{2\hbar}\rho^2}\,, \\
m=-2\,, & \Phi_{(n_e=2,n_d=0)}(\rho,\phi) = \left(\dfrac{\omega\mu}{\hbar}\right)^{3/2} e^{-2i\phi}\dfrac{\rho^2}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\mu\omega}{2\hbar}\rho^2}\,.
\end{cases}
$$



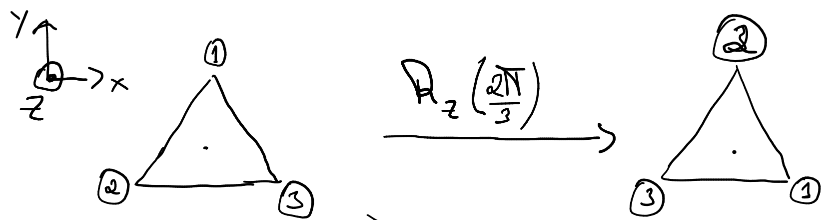
Capítulo 8: Simetrias em Mecânica Quântica

Neste capítulo vamos estudar as implicações da existência de simetrias num sistema quântico

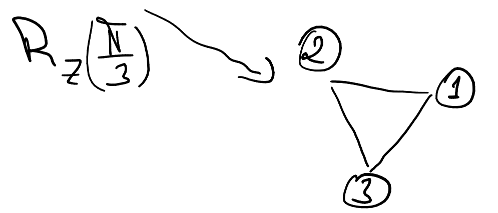
Refs.:
* Sakurai, 1.6, 2.1, 3.1, 4.
* Shankar, 2.8, 11, 12

Comecemos por clarificar o que entendemos ser uma simetria do sistema.

Um sist. é dito simétrico ou invariante por uma dada transformação (de simetria), se após a transformação o sist. fica igual ao que era antes da transformação.



$\Rightarrow$ Simétrico por $R_z\left(\frac{2\pi}{3}\right)$

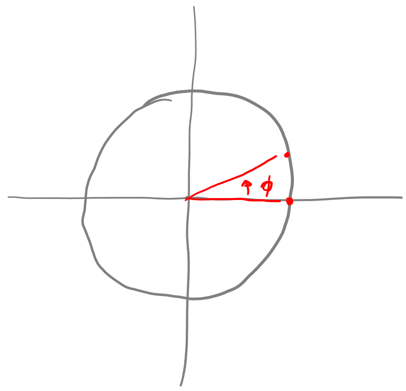


$\Rightarrow$ Não simétrico por $R_z(\pi/3)$

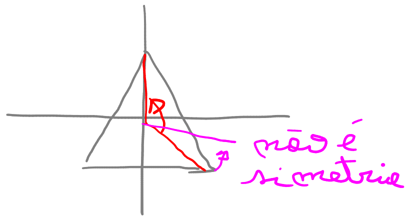
Triângulo é simétrico por $R_z(\frac{2\pi}{3})$, mas não é simétrico por $R_z(\frac{\pi}{3})$.

Vamos distinguir dois tipos de simetrias de um sistema/objecto:

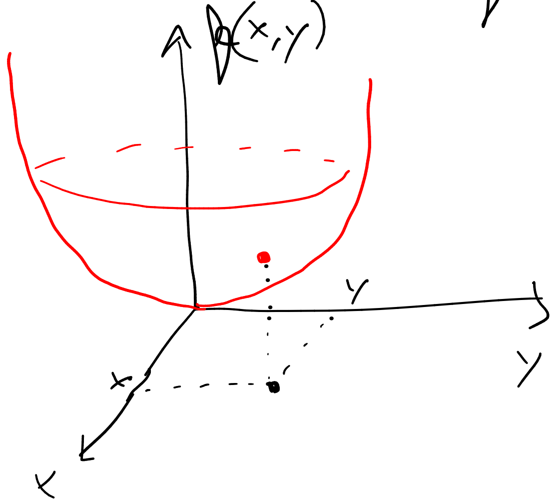
↳ <u>simetrias contínuas</u>, como por ex. a simetria rotacional de um círculo;



↳ <u>simetrias discretas</u>, como as simetrias de rotação de um triângulo;



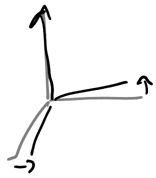
<u>Exemplo</u>: Consideremos função $f(x,y)=x^2+y^2$



Se fizermos a seguinte transformação de variáveis

$$\left.\begin{aligned} x &\longrightarrow \tilde{x} \equiv x\cos\theta - y\,\text{sen}\,\theta \\ y &\longrightarrow \tilde{y} \equiv x\,\text{sen}\,\theta + y\cos\theta \end{aligned}\right]$$

rotação em torno do eixo O_z



ficamos com

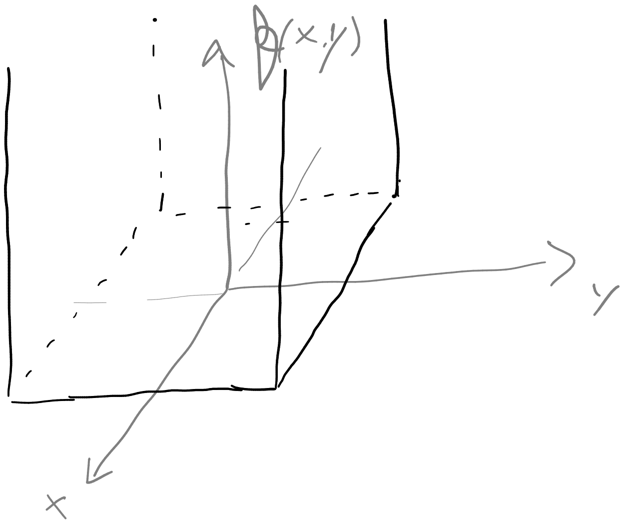
$$f(x,y) \longrightarrow f(\tilde{x},\tilde{y}) = \tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 = \left(x^2\cos^2\theta - \cancel{2xy\cos\theta\,\text{sen}\,\theta} + y^2\,\text{sen}^2\theta\right) + \left(x^2\,\text{sen}^2\theta + \cancel{2xy\,\text{sen}\,\theta\cos\theta} + y^2\cos^2\theta\right)$$

$$= x^2 + y^2 = f(x,y)$$

a função é invariante por esta rotação em torno Oz por ângulo (arbitrário) $\underline{\underline{\theta}}$. ↳ Sistema com simetria contínua.

<u>Exemplo</u>: Considere função $f(x,y)$

$$f(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \in [-L,L] \\ \infty, & \text{se } x \notin [-L,L] \\ 0, & \text{se } y \in [-L,L] \\ \infty, & \text{se } y \notin [-L,L] \end{cases}$$



Esta função será apenas invariante se $\theta = 0, \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{2\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \ldots$

↳ $-\frac{\pi}{2}$ $\left\| \begin{array}{l} x \longrightarrow \tilde{x} = y \\ y \longrightarrow \tilde{y} = -x \end{array} \right.$ $\Rightarrow f(\tilde{x},\tilde{y}) = \ldots = f(x,y)$

↳ Sistema com simetrias discretas.

(8.1) Mecânica Clássica e Simetrias

Teorema de Noether: Se $\mathcal{L}$ é inv. quando fazemos transformação $q \rightarrow q + \delta q$, então teremos quantidade conservada associada a esta simetria.

Para formulação H, é semelhante

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad e \quad \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$$

se H não depender de $q_i \Rightarrow p_i = $ const.

Vamos de seguida concentrar-nos em transformações contínuas infinitesimais.

Seja H invariante pela transf. infinitesimal dada por

$$q_i \longrightarrow \tilde{q}_i \equiv q_i + \varepsilon \cdot \frac{\partial g}{\partial p_i} \equiv q_i + \delta q_i$$

$$p_i \longrightarrow \tilde{p}_i \equiv p_i - \varepsilon \cdot \frac{\partial g}{\partial q_i} \equiv p_i + \delta p_i$$

onde $g = g(q_i, p_i)$.

Nota: Uma transformação simetria contínua pode ser sempre feita infinitesimalmente, i.e. muito pequena.

Nota: A transf. de variáveis em cima é uma transf. canónica, i.e.

$$(q_i, p_i, t) \longrightarrow (Q_i, P_i, t)$$

$$Q_i = Q_i(q_i, p_i, t) \qquad P_i = P_i(q_i, p_i, t)$$

preserva as eqs de Hamilton (que dão as eqs do movimento).

$$(q_i, p_i, t) \longrightarrow (Q_i, P_i, t)$$

$$\mathcal{H}(q_i, p_i, t) \longrightarrow \mathcal{K}(Q_i, P_i, t)$$

$$\left.\begin{aligned} \dot{p}_i &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \\ \dot{q}_i &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \end{aligned}\right] \longrightarrow \left[\begin{aligned} \dot{P}_i &= -\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial Q_i} \\ \dot{Q}_i &= \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial P_i} \end{aligned}\right.$$

<u>Exercício</u>: Mostrar que a transformação

$$q_i \longrightarrow Q_i \equiv q_i + \varepsilon \cdot \frac{\partial g}{\partial p_i}$$

$$p_i \longrightarrow P_i \equiv p_i - \varepsilon \cdot \frac{\partial g}{\partial q_i}$$

é canônica. Por exemplo mostre que

$$\{f, \mathcal{H}\}_{q,p} = \{\tilde{f}, \mathcal{K}\}_{Q,P}$$

onde $\mathcal{K}(Q,P,t) = \mathcal{H}(Q(q,p,t), P(q,p,t), t)$
e $\tilde{f}(Q,P,t) = f(Q(q,p,t), P(q,p,t), t)$. [Dica: Mantenha apenas os termos de primeira ordem em ε.]

<u>Teorema</u>: Se $\mathcal{H}$ for invariante pela transformação infinitesimal anterior, então $g(q_i, p_i)$ é uma quantidade conservada do sistema. Chamamos a g gerador da transformação.

<u>Demonstração</u>: Se H é inv. nesta transf. então $\delta\mathcal{H} = 0$. Podemos escrever

$$\delta\mathcal{H} = 0 \iff \sum_i \left[\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \underbrace{\delta q_i}_{= \varepsilon \frac{\partial g}{\partial p_i}} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \underbrace{\delta p_i}_{= -\varepsilon \frac{\partial g}{\partial q_i}} \right] = 0$$

$$\iff \underbrace{\sum_i \left[\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right]}_{= \{\mathcal{H}, g\}} \varepsilon = 0$$

$$\Longleftrightarrow \varepsilon \cdot \{\mathcal{H}, g\} = 0$$

$\Longrightarrow$ g é uma constante do movimento.

$\square$

<u>Exemplo</u>: Consideremos partícula em 1D. Se escolhermos como gerador

$$g = p$$

qual será transf. infinitesimal gerada?

$$x \longrightarrow \tilde{x} = x + \varepsilon \frac{\partial g}{\partial p}$$

$=p$

$$= x + \varepsilon$$

$$p \longrightarrow \tilde{p} = p - \varepsilon \frac{\partial g}{\partial q}$$

$=p$

$$= p$$

que é uma translação infinitesimal.

Concluímos então que o gerador dos translações é o momento.

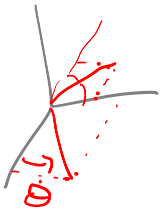
Exemplo: Qual a transformação gerada pelo momento angular ao longo de z (também para partícula massa m, em 2D)?

$$\hookrightarrow g = l_z = x p_y - y \cdot p_x$$

As transfs serão

$$\Rightarrow \begin{cases} \tilde{x} = x + \varepsilon.(-y) = x - \varepsilon y \\ \tilde{y} = y + \varepsilon . x = y + \varepsilon . x \\ \tilde{p}_x = p_x - \varepsilon . p_y = p_x - \varepsilon . p_y \\ \tilde{p}_y = p_y - \varepsilon .(-p_x) = p_y + \varepsilon p_x \end{cases}$$

que é rotação infinitesimal em torno do eixo O_z, i.e. rotação de ângulo, $\theta \simeq \theta + \varepsilon$,



$$\begin{cases} \tilde{x} = x\cos\theta - y\,\mathrm{sen}\,\theta \\ \tilde{y} = x\,\mathrm{sen}\,\theta + y\cos\theta \end{cases}$$

$$\theta \simeq 0+\varepsilon \implies \begin{cases} \tilde{x} = x.\left(1-\mathcal{O}(\varepsilon^2)\right) - y.\left(\varepsilon - \mathcal{O}(\varepsilon^3)\right) \\ \tilde{y} = x\left(\varepsilon - \mathcal{O}(\varepsilon^3)\right) + y\left(1-\mathcal{O}(\varepsilon^2)\right) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \tilde{x} = x - \varepsilon . y \\ \tilde{y} = y + \varepsilon x \end{cases}$$

Em suma, o momento angular ao longo de z, l_z, é o gerador das rotações em torno de Oz.

Para cada transf. infinitesimal canônica (i.e. que preserve a dinâmica) temos um gerador específico.

<u>Nota:</u> O gerador de uma dada transformação só será uma quantidade conservada se essa

transformação por uma si-
metria do Hamiltoniano.