Campos Vetoriais

©2011 Vinicius Cifú Lopes

UFABC, 2º quad. 2011

Este capítulo continua com o desenvolvimento necessário para responder às perguntas que fizemos no início de "Derivação Espacial". Estudaremos, principalmente, as funções cujo domínio e contradomínio estão contidos no mesmo espaço euclideano $\mathbb{R}^n$ e introduziremos o conceito de gradiente.

Campos vetoriais

Qual é a reta tangente a uma reta dada?

Qual é o plano tangente a um plano dado?

$\mathbb{R}^n$ é tanto um espaço de pontos (sistema de coordenadas) como um espaço tangente em cada ponto (vetores com módulo, direção e sentido).

O campo vetorial associará, a cada ponto, um vetor "tangente" a esse ponto, que funcionará como origem de um espaço vetorial ajustado. Em geral, pede-se que o campo, como função, seja contínuo ou (como definiremos futuramente) suficientemente derivável.

Um *campo vetorial* é uma função

$$F\colon \underbrace{\mathbb{R}^n}_{\text{pontos (pode ser subcjto.)}} \to \underbrace{\mathbb{R}^n}_{\text{direções}}$$

(note mesmo n).

Representação: em cada $x \in \mathbb{R}^n$, desenhe a seta de x a $x + F(x)$.

F é *central* ou *radial* (com respeito à origem) se $(\forall x)\ F(x) \parallel x$.

(Um *campo escalar* é simplesmente uma função escalar de várias variáveis: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.)

Para definir um campo, tudo o que precisamos é, dadas as n coordenadas de um ponto, combiná-las para produzir as n coordenadas de outro vetor, que será desenhado com sua base localizada no ponto dado. Em outras palavras: Simbolicamente, um campo geralmente se apresenta como uma lista entre parênteses de n expressões, sendo cada expressão uma função escalar, sempre das mesmas n variáveis. Graficamente, veremos alguns exemplos a seguir.

Para compreender a definição de campo central, lembre que um ponto x também é um vetor, que pode ser especialmente representado como a seta da origem até o próprio ponto x. Então F é central se $F(x)$ e x são vetores paralelos para qualquer x, ou seja, se sempre $F(x)$ é múltiplo escalar de x, existindo $\lambda_x \in \mathbb{R}$ de modo que $F(x) = \lambda_x x$. (Esse escalar pode variar, dependendo de x.) Nesse caso, quando aplicamos o vetor $F(x)$ ao ponto x, a reta que ele determina também deve passar pela origem, daí o nome "radial".

Dentre várias possibilidades, destacam-se duas: Quando o escalar λ_x, acima, é sempre positivo, dizemos que o campo é *centrífugo;* nesse caso, as setas que representam F graficamente apontam sempre para o sentido oposto à origem. Quando λ_x é sempre negativo, dizemos que o campo é *centrípeto* e as setas no gráfico apontam sempre para a origem, mesmo que (por ter um comprimento muito grande) cheguem a ultrapassá-la.

Exemplo ($n = 2$): $F(x, y) = (2, 1)$.
(Diagrama na lousa.)
seta de (x, y) a $(x + 2, y + 1)$.

Exemplo ($n = 2$): $F(x, y) = (-x, -y)$.
(Diagrama na lousa.)
seta de (x, y) a $(x - x, y - y) = 0$.
centrípeto.

Exercício ($n = 2$): Represente $F(x, y) = (-2, 3)$.

Exercício ($n = 2$): Represente

$$F(x, y) = \frac{(x, y)}{\|(x, y)\|} = \Big(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\Big).$$

(Marque uma bola aberta na origem.) Esse campo é central (exceto na origem)? Por quê? (É dito *centrífugo.*)
(Note que cada vetor é unitário.)

Dica: Será muito trabalhoso e impreciso desenhar tal campo a partir de um punhado de pontos (x, y) através do cálculo repetido de $(x, y)+F(x, y)$; vale a pena tentá-lo somente com uso de computador gráfico. O espírito do exercício é perceber isto: Comece mostrando que o campo é centrífugo e unitário, com base nas definições teóricas. Então bastará desenhar setas por todo o plano, sempre sobre retas que passam pela origem (radiais), apontadas em oposição à origem (centrífugas) e com comprimento 1 (unitárias). Isso será suficiente porque, ao determinar sua direção, seu sentido e seu módulo, descrevemos esses vetores completamente.

Convém conhecermos mais dois exemplos importantes:

Exemplo ($n = 3$): Campo gravitacional A de grande massa M centrada na origem.
Força gravitacional sobre massa m distante d:

$$\frac{GMm}{d^2}$$

Aceleração de m:
Módulo: $ma = \dfrac{GMm}{d^2} \Rightarrow a = \dfrac{GM}{d^2}$.
Direção e sentido: centrípeta (unitário $u = \dfrac{(-x, -y, -z)}{\|(x, y, z)\|}$).

Então

$$\|A(x,y,z)\| = \frac{GM}{\|(x,y,z)\|^2}$$

e

$$A(x,y,z) = \|A(x,y,z)\|.u = \frac{GM}{\|(x,y,z)\|^2} \cdot \frac{(-x,-y,-z)}{\|(x,y,z)\|} =$$
$$= -\frac{GM}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \cdot (x,y,z) \text{ (centrípeto).}$$

Cargas elétricas de mesmo sinal: centrífugo.

Exemplo ($n = 2$): $F(x,y) = \frac{1}{\|(x,y)\|}(-y,x)$.

- não se define na origem;
- é ortogonal ao campo identidade: $\langle F(x,y)|(x,y)\rangle = 0$;
- circular anti-horário.

(Diagrama na lousa.)

O operador ∇

É o "vetor"

$$\nabla = \Big(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\Big).$$

Podemos aplicá-lo de três modos:

Lê-se ∇ como "nabla" ou ainda "del" (cuidado para não confundir com o "del" ∂).

Usaremos ∇ em três operações: gradiente, divergente e rotacional. Essas operações são diferentes "formas de derivar" funções escalares e campos, cada uma adequada a uma aplicação, como veremos futuramente.

(a) multiplicá-lo por escalar: dada $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

$$\operatorname{grad} f = \nabla f = \Big(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\Big)$$

é o *gradiente* de f e campo sobre $\mathbb{R}^n$.

Ex.: $f = x^3 \operatorname{sen} y + z \Rightarrow \operatorname{grad} f = (3x^2 \operatorname{sen} y, x^3 \cos y, 1)$.

(b) tomar seu produto interno com vetor: dado $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$,

$$\operatorname{div} F = \langle \nabla | F\rangle = \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \ldots + \frac{\partial F_n}{\partial x_n}$$

é o *divergente* de F e função $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Ex.: $F = (x^2y, 2^x z \operatorname{sen} y, x+3) \Rightarrow \operatorname{div} F = 2xy + 2^x z \cos y + 0$.

A notação para o divergente, para cada autor, dependerá obviamente da notação para produto interno: você poderá encontrar, por exemplo, $\nabla \cdot F$.

(c) tomar seu produto vetorial com vetor: dado $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$\operatorname{rot} F = \nabla \times F = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}$$

é o *rotacional* de F e campo sobre $\mathbb{R}^3$.

Ex. (lousa):

$F = (x^2y, z\ln|x|, y + \operatorname{sen} z) \Rightarrow \operatorname{rot} F = (1 - \ln|x|, 0, x^{-1}z - x^2)$.

Em inglês, o rotacional chama-se *curl*.

Existem regras de soma e produto para grad, div e rot. (Demidovich 2375, 2381, 2384).
Também:

(i) $\operatorname{div}(\operatorname{grad} f) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$ *laplaciano* de f, indicado $\nabla^2 f$ ou Δf.

(ii) $\operatorname{div}(\operatorname{rot} F) = 0$ (Schwarz).

(iii) $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) = 0$ (Schwarz).

Por exemplo, a primeira componente de $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f)$ é

$$\frac{\partial F_3}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_3} = \frac{\partial}{\partial x_2}\Big(\frac{\partial f}{\partial x_3}\Big) - \frac{\partial}{\partial x_3}\Big(\frac{\partial f}{\partial x_2}\Big) = 0.$$

Um campo $U\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ é dito *conservativo* quando existe um *potencial* $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tal que $U = \operatorname{grad} f$.

Teorema: Isso ocorre se e somente se $\operatorname{rot} U \equiv 0$.

(Para domínio $\subset \mathbb{R}^3$, é preciso conectividade simples, isto é, domínio sem buracos.)

O potencial é simplesmente um campo escalar; em alguns estudos, pode-se entender $-f$ em vez de f.

Se $\operatorname{rot} U \neq 0$, então U não é conservativo. Se $\operatorname{rot} U = 0$, então U é conservativo de alguma função escalar f, e veremos como encontrar f nestes exemplos:

Exemplo: $U(x,y,z) = (xy, yz, 3x^2)$. Temos

$$\operatorname{rot} U = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xy & yz & 3x^2 \end{vmatrix} =$$

$$= \Big(\frac{\partial}{\partial y}3x^2 - \frac{\partial}{\partial z}yz, \frac{\partial}{\partial z}xy - \frac{\partial}{\partial x}3x^2, \frac{\partial}{\partial x}yz - \frac{\partial}{\partial y}xy\Big) =$$

$$= (-y, -6x, -x) \not\equiv 0.$$

Então U não é conservativo.

Exemplo: $U(x,y,z) = (4xy+z, 2x^2+5z^3, 15yz^2+x)$. Temos

$$\operatorname{rot} U = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 4xy+z & 2x^2+5z^3 & 15yz^2+x \end{vmatrix} =$$

$$\begin{aligned} &= \big(\tfrac{\partial}{\partial y}(15yz^2+x) - \tfrac{\partial}{\partial z}(2x^2+5z^3), \\ &\quad - \tfrac{\partial}{\partial x}(2x^2+5z^3) + \tfrac{\partial}{\partial z}(4xy+z), \\ &\quad \tfrac{\partial}{\partial x}(15yz^2+x) - \tfrac{\partial}{\partial y}(4xy+z) \big) = \\ &\qquad = (15z^2 - 15z^2, -1+1, 4x-4x) = (0,0,0) \equiv 0. \end{aligned}$$

Então U é conservativo $\Rightarrow U = \operatorname{grad} f$ para alguma f. Vamos achar f:

$$U = \nabla f \Leftrightarrow (4xy+z, 2x^2+5z^3, 15yz^2+x) = \Big(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\Big) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 4xy+z \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 2x^2+5z^3 \\ \frac{\partial f}{\partial z} = 15yz^2+x \end{cases}$$

Então

$$f = \int \frac{\partial f}{\partial x}\, dx = \int (4xy+z)\, dx = 2x^2y + zx + A(y,z)$$

(constante da integração quanto a x: independe de x; depende de y, z).

Assim,

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2x^2 + \frac{\partial A}{\partial y} \text{ e } \frac{\partial f}{\partial z} = x + \frac{\partial A}{\partial z}.$$

Agora, repetimos o procedimento:

Obtemos

$$\begin{cases} 2x^2 + \frac{\partial A}{\partial y} = 2x^2 + 5z^3 \\ x + \frac{\partial A}{\partial z} = 15yz^2 + x \end{cases}$$

De $\frac{\partial A}{\partial y} = 5z^3$ vem

$$A = \int \frac{\partial A}{\partial y}\, dy = \int 5z^3\, dy = 5z^3y + B(z)$$

(constante da integração quanto a y: independe de y; depende de z — x não aparece porque não consta em $A(y,z)$).

Tínhamos $\frac{\partial A}{\partial z} = 15yz^2$, mas agora

$$\frac{\partial A}{\partial z} = 15yz^2 + \frac{dB}{dz} \Rightarrow B'(z) = 0 \Rightarrow B(z) = C \text{ constante.}$$

Assim:
$A(y,z) = 5z^3y + B(z) = 5z^3y + C$ e
$f(x,y,z) = 2x^2y + zx + A(y,z) = 2x^2y + zx + 5z^3y + C$.
De fato, temos $\nabla f = U$! (Verifique!!)

Exercício: Decida se o campo

$$U(x,y,z) = (5x^4y^3 - 7, 3x^5y^2 + z\cos(yz), y\cos(yz))$$

é conservativo; em caso afirmativo, de qual função U é gradiente?
(Verifique $U = \operatorname{grad} f$.)

Para $n = 3$, está disponível o teste de conservação com o rotacional nulo. Para outros valores de n, porém, ainda vale esse método para determinar a "primitiva" (cujo gradiente será o campo dado): basta eliminar repetidamente as variáveis até chegar a $n = 1$, quando se trata de uma primitiva tradicional.

Uso do gradiente em cálculos
Tome

- $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ curva;
- $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ função escalar;
- $f \circ \gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ composta FUV.

(Diagrama na lousa.)
Veremos ("Diferenciação") condições em que valem estas regras:

$$(f\circ\gamma)'(t) = \langle \nabla f(\gamma(t)) | \gamma'(t)\rangle \text{ (regra da cadeia)}$$
$$\frac{\partial f}{\partial u}(a) = \langle \nabla f(a) | u\rangle \text{ para } u \text{ unitário}$$

Lembre que, quando calculado em um ponto qualquer (a), o gradiente de f é um vetor. A primeira equação é uma forma da Regra da Cadeia: em relação à regra que já conhecemos, a diferença é a substituição do produto de números pelo produto interno de vetores.

Usaremos isso com curvas de nível e direção de maior crescimento.
Exercício (Demidovich 1879): Usando ∇f, derive novamente $f(x,y,z) = x^2 - 3yz + 5$ no ponto $(1,2,-1)$ na direção $(1,1,1)$.

Curvas/superfícies de nível
Assuma $f\colon D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}$.
$S_c = \{\, x \in D \mid f(x) = c \,\}$ é a *superfície de nível c.* (Diagrama na lousa.)
(Para $n = 2$, diz-se "curva de nível".)

Você já conhece curvas de nível de seus estudos de Geografia: isotérmicas, isobáricas e isoietas são curvas em um mapa ao longo das quais, respectivamente, a temperatura, a pressão e a precipitação são constantes.

Suponha $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^n$ curva contida em S_c, isto é, $\operatorname{Im}\gamma \subseteq S_c$. (Diagrama na lousa.)
Então $f(\gamma(t)) = c$ para todo $t \in I$.
Derive:

$$\langle \nabla f(\gamma(t)) | \gamma'(t) \rangle = c' = 0.$$

Se $I \ni 0$, $\gamma(0) = a$ e $\gamma'(0) = v$, temos

$$\langle \nabla f(a) | v \rangle = 0, \text{ donde } \nabla f(a) \perp v.$$

Tomando todos os γ's (todos os v's tangentes a S_c em a):

$$\nabla f(a) \perp S_c.$$

Na última passagem do raciocínio, generalizamos o cálculo feito para uma curva γ qualquer, desde que passe por a no instante 0, mas com qualquer direção. Desse modo, obtemos o mesmo resultado para qualquer vetor v (correspondente a $\gamma'(0)$) tangente à superfície em a. Como $\nabla f(a)$ é um vetor ortogonal a todos eles, então é ortogonal à própria superfície.

Exemplo: Determinar a reta normal e o plano tangente à superfície de nível de $f(x, y, z) = x^2 + 3y^2 + 4z^2$ com $c = 8$ por $a = (1, -1, 1)$.
Temos $\nabla f(x, y, z) = (2x, 6y, 8z)$,
$f(a) = f(1, -1, 1) = 1 + 3 + 4 = 8 = c$ (importante),
$S_c = \{\, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + 3y^2 + 4z^2 = 8 \,\}$ é um elipsóide (dim = 2).

É importante, ao determinar-se uma tangência, verificar se o ponto realmente pertence à superfície dada, ou seja, se $a \in S_c$.

Então $\nabla f(a) = (2, -6, 8) \perp S_c$.
Reta normal por a:

$$\begin{aligned}(x, y, z) &= a + \lambda \nabla f(a) \quad (\lambda \in \mathbb{R}) \\ &= (1 + 2\lambda, -1 - 6\lambda, 1 + 8\lambda) \quad (\lambda \in \mathbb{R})\end{aligned}$$

Plano tangente por a: (diagrama na lousa)

$$(x, y, z) = a + v \text{ onde } v \perp \nabla f(a);$$

mas

$$v \perp \nabla f(a) \Leftrightarrow \langle v | \nabla f(a) \rangle = 0 \Leftrightarrow 2v_x - 6v_y + 8v_z = 0$$

e também

$$v = (x, y, z) - a = (x - 1, y + 1, z - 1),$$

donde o plano é

$$2(x - 1) - 6(y + 1) + 8(z - 1) = 0,$$
$$\text{ou seja, } x - 3y + 4z - 8 = 0.$$

É fácil abstrair a fórmula geral para o plano tangente: basta simplificar a equação $\langle \nabla f(a) | x - a \rangle = 0$, obtendo-se

$$\sum_{i=1}^{n} (\tfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)) x_i - \sum_{i=1}^{n} (\tfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)) a_i = 0.$$

Exercício: Determine a reta normal e o plano tangente a $x^2 + 2y^2 - 3z^3 = 5$ no ponto $(0, 1, -1)$. (Quais são f, c, a?)

Direção de maior crescimento

(Diagrama na lousa.)

Temos:

$$\begin{gathered} \tfrac{\partial f}{\partial u}(a) = \langle \nabla f(a) | u \rangle = \|\nabla f(a)\| . \cancelto{1}{\|u\|} . \cos\theta \\ \operatorname{proj}_u \nabla f(a) = (\|\nabla f(a)\| . \cos\theta) . u \end{gathered}$$

Então $\frac{\partial f}{\partial u}(a)$ é a componente escalar de $\nabla f(a)$ na direção de u.

Neste raciocínio, mantenha o ponto a fixo, de modo que o vetor $\nabla f(a)$ também é constante. Conforme u assume todas as possíveis direções e sentidos, o ângulo θ varia e também $\frac{\partial f}{\partial u}(a)$ varia.

Temos $\frac{\partial f}{\partial u}(a) = \|\nabla f(a)\| \cos\theta$ e (quando $\nabla f(a) \neq 0$):

$$\frac{\partial f}{\partial u}(a) \text{ é } \left\{ \begin{matrix} \text{máximo} \\ \text{mínimo} \\ \text{zero} \end{matrix} \right\} \Leftrightarrow \cos\theta = \left\{ \begin{matrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{matrix} \right\} \Leftrightarrow \theta = \left\{ \begin{matrix} 0 \\ \pi \\ \pm\pi/2 \end{matrix} \right\}.$$

Então, no ponto a,

$$f \left\{ \begin{matrix} \text{cresce mais} \\ \text{decresce mais} \\ \text{mantém-se} \end{matrix} \right\} \text{ na direção e sentido } \left\{ \begin{matrix} \nabla f(a) \\ -\nabla f(a) \\ \text{ortogonais a } \nabla f(a) \end{matrix} \right\}.$$

Note que, quando $\cos\theta = -1$, esse número é *negativo* e f diminui!

Exemplo (Guidorizzi): Para (x, y) no plano, montanha com altura $f(x, y) = 5 - x^2 - 4y^2$. Alpinista em $(1, 1)$ quer caminho mais íngreme ($f(1, 1) = 0$).

Escalará sempre no sentido do gradiente

$$\nabla f(x, y) = (-2x, -8y).$$

Para determinar caminho $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, $t \geqslant 0$, resolvemos PVI:

$$\gamma(0) = (1, 1),\ \gamma'(t) \parallel \nabla f(\gamma(t)).$$

Pondo $\gamma'(t) = \nabla f(\gamma(t))$, vem:

$$x'(t) = -2x(t),\ x(0) = 1 \Rightarrow x(t) = e^{-2t}$$
$$y'(t) = -8y(t),\ y(0) = 1 \Rightarrow y(t) = e^{-8t}$$

Então $y = x^4$ e altura do alpinista é $f(x, x^4) = 5 - x^2 - 4x^8$.

Nesse raciocínio, substituímos diretamente paralelismo por igualdade, entre $\gamma'(t)$ e $\nabla f(\gamma(t))$, porque a velocidade de escalada do alpinista não importa para o traçado de seu percurso; essa simplificação possibilitou-nos eliminar uma função desconhecida (o fator de proporcionalidade em função do tempo).

Resolvemos as EDOs correspondentes pelo método comum de separação de variáveis e obtivemos uma parametrização do caminho do alpinista, cujas coordenadas horizontais então obedecem a relação $y = x^4$. Isso não significa, imediatamente, que no instante t o alpinista esteja em $(x(t), y(t))$, porque essa solução para γ não considerou a dificuldade da escalada, as condições do alpinista, etc. Ainda mais: note que, por essa parametrização, o alpinista jamais chegará ao cume localizado na origem (por quê?), afinal, $x(t), y(t) \to 0$ somente com $t \to \infty$. Outra parametrização possível e mais realista é tomar $x = 1 - s$ e $y = (1 - s)^4$, que também satisfaz $y = x^4$, com $s \in [0, 1]$; verifique que a curva δ assim descrita satisfaz $\delta(0) = (1, 1)$, $\delta(1) = (0, 0)$ e $\delta'(s) \parallel \nabla f(\delta(s))$ (de fato, $\delta'(s) = 2(1 - s) \cdot \nabla f(\delta(s))$).

Exercício: Temperatura no plano: $f(x, y) = 5x^2 - 2y^3$. No ponto $(1, 3)$, identifique as direções e sentidos em que a temperatura mais cresce; mais diminui; a isoterma estende-se. Esquematize isso graficamente.