Wolfram|Alpha Step-by-Step Solution

Wolfram|Alpha Input: Integrate[(R^2 + z^2)^(-3/2), {z, -L/2, L/2}]

STEP 1

Take the integral:

$$\int \frac{1}{(R^2+z^2)^{3/2}}\,dz$$

STEP 2

For the integrand $\frac{1}{(R^2+z^2)^{3/2}}$, (assuming all variables are positive) substitute $z = R\tan(u)$ and $dz = R\sec^2(u)\,du$. Then $(R^2+z^2)^{3/2} = (R^2\tan^2(u)+R^2)^{3/2} = R^3\sec^3(u)$ and $u = \tan^{-1}\left(\frac{z}{R}\right)$:

$$= R\int \frac{\cos(u)}{R^3}\,du$$

STEP 3

Factor out constants:

$$= \frac{1}{R^2}\int \cos(u)\,du$$

STEP 4

The integral of $\cos(u)$ is $\sin(u)$:

$$= \frac{\sin(u)}{R^2} + \text{constant}$$

STEP 5

Substitute back for $u = \tan^{-1}\left(\frac{z}{R}\right)$:

$$= \frac{\sin\left(\tan^{-1}\left(\frac{z}{R}\right)\right)}{R^2} + \text{constant}$$

STEP 6

Simplify using $\sin(\tan^{-1}(z)) = \frac{z}{\sqrt{z^2+1}}$:

Answer:

$$= \frac{z}{R^2\sqrt{R^2+z^2}} + \text{constant}$$

Um segmento retilíneo de fio, de comprimento L, transporta uma corrente i. Mostre que o módulo do campo magnético $\mathbf{B}$ produzido por este segmento, a uma distância R do segmento ao longo de sua mediatriz (veja a Fig. 31-37), é

$$B = \frac{\mu_o i}{2\pi R} \frac{L}{\sqrt{L^2 + 4R^2}}.$$

Mostre que esta expressão se reduz a um resultado esperado quando $L \to \infty$.

► Suponha que o fio esteja sobre o eixo z, com a origem localizada no meio do fio. A lei de Biot e Savart

$$dB = \left| \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{d\mathbf{z} \times \mathbf{r}}{r^3} \right| = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{\text{sen}\,\theta}{r^2}\, dz.$$

Observando que

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{z^2 + R^2} \\ \text{sen}\,\theta &= \frac{R}{r} = \frac{R}{\sqrt{z^2 + R^2}}, \end{aligned}$$

encontramos sem muito trabalho que

$$\begin{aligned} B &= \frac{\mu_0 i}{4\pi}\, R \int_{-L/2}^{L/2} \frac{dz}{(z^2 + R^2)^{3/2}} \\ &= \frac{\mu_0 i}{4\pi}\, R\, \frac{1}{R^2}\, \frac{z}{(z^2 + R^2)^{1/2}} \Big|_{-L/2}^{L/2} \\ &= \frac{\mu_0 i}{2\pi R}\, \frac{L}{\sqrt{L^2 + 4R^2}}. \end{aligned}$$

Um disco de plástico fino de raio R tem uma carga q uniformemente distribuida sobre sua superfície. O disco gira com uma freqüência angular ω em torno do seu eixo. Mostre que: *(a)* o campo magnético no centro do disco é

$$B = \frac{\mu_0 \omega q}{2\pi R},$$

(b) o momento de dipolo magnético do disco é

$$\mu = \frac{\omega q R^2}{4}.$$

(Sugestão: O disco girando é equivalente a um conjunto de espiras de corrente.)

► **(a)** Considere um pequeno anel de raio r e espessura dr, contendo uma carga dq dada por

$$dq = \frac{q}{\pi R^2}(2\pi r\, dr),$$

ou seja, a carga por unidade de área vezes a área do anel. Num tempo $T = 2\pi/\omega$ toda a carga do anel passa por um ponto fixo perto do anel, logo a corrente equivalente é:

$$di = \frac{dq}{T} = \frac{2\pi q r\, dr/(\pi R^2)}{2\pi/\omega} = \frac{q\omega r\, dr}{\pi R^2}.$$

Pela Eq. 24, com $z = 0$ (repare na diferença de notação), esse anel gera no centro do disco um campo $d\mathbf{B}$ cuja magnitude é dada por

$$dB = \frac{\mu_0 di}{2r} = \frac{\mu_0}{2r}\left(\frac{q\omega r\,dr}{\pi R^2}\right).$$

Assim, o campo total é:

$$B = \int dB = \frac{\mu_0 q\omega}{2\pi R^2}\int_0^R dr = \frac{\mu_0 q\omega}{2\pi R}.$$

(b) O momento de dipolo será dado por

$$\begin{aligned} \mu = \int A\,di &= \int_0^R (\pi r^2)\,\frac{\omega q r\,dr}{\pi R^2} \\ &= \frac{\omega q}{R^2}\int_0^R r^3 dr \\ &= \frac{\omega q R^2}{4}. \end{aligned}$$

Exercício 1. Calcule, por meio da Lei de Biot Savart, o campo elétrico no eixo de uma espira circular.

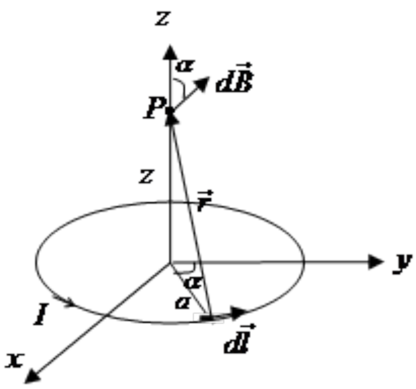

Figura 1: Campo gerado por uma espira circular

Resolução. Podemos escrever a Lei de Biot-Savart do seguinte modo:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int I\frac{d\vec{l}\times\hat{r}}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int I\frac{d\vec{l}\times\vec{r}}{r^3} \tag{1}$$

Para a espira, vale:

$$\mathrm{d}\vec{l} = a\,\mathrm{d}\theta\hat{\theta} \tag{2}$$

$$\vec{r} = -a\hat{\imath} + z\hat{\jmath} \tag{3}$$

Pela simetria do problema, só teremos campo paralelo ao eixo da espira. Logo precisamos calcular apenas uma componente do campo gerado por cada elemento de corrente:

$$\mathrm{d}\vec{B} = \mathrm{d}\vec{B}_1\cos\alpha \tag{4}$$

Onde:

$$\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+z^2}} \tag{5}$$

Então, aplicando a Lei de Biot-Savart (para calcular apenas o elemento de campo):

$$\mathrm{d}\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}I\frac{\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{r}}{r^3}\cos\alpha \tag{6}$$

Fazendo as devidas substituições:

$$\mathrm{d}\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Ia}{\left(z^2+a^2\right)^{3/2}}ad\theta\hat{k} \tag{7}$$

Integrando de 0 a 2π para cobrir toda a espira, encontramos o campo desejado:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I a^2}{2\left(a^2 + z^2\right)^{3/2}} \hat{k}$$