BCJ0203

Fenômenos Eletromagnéticos

(Parte Teórica) - Aula 4

12 de junho de 2019

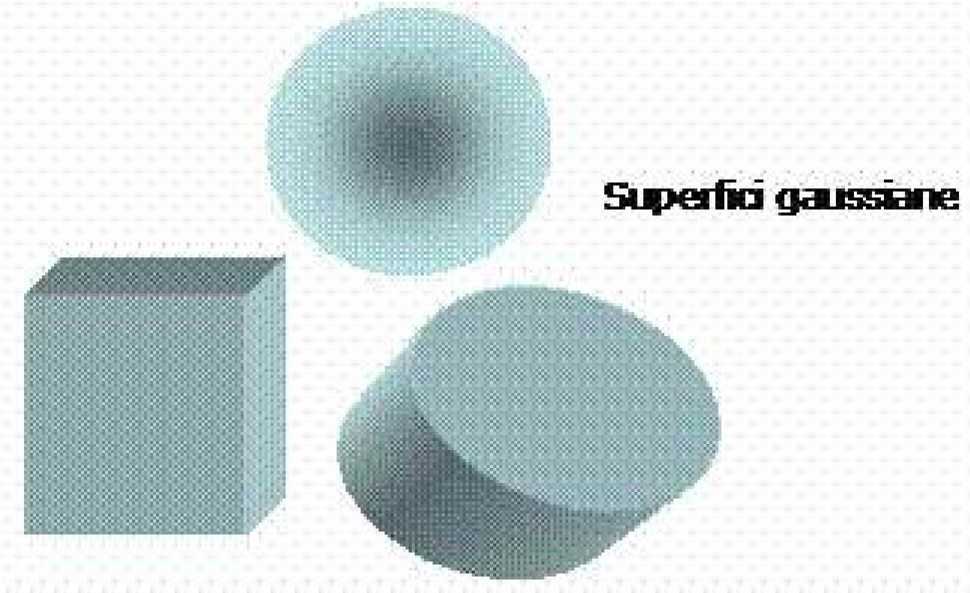
Prof. Felipe Chen

Aplicações da Lei de Gauss

Escolha da superfície gaussiana:

A superfície gaussiana deve sempre ser escolhida aproveitando a simetria da distribuição de cargas. Assim, o campo elétrico E seria constante na superfície e pode sair da integral.

$$\Phi_E = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{q_{\text{in}}}{\epsilon_0}$$



Superfície gaussiana

A **superfície gaussiana** escolhida deve satisfazer uma ou mais das seguintes **condições**:

1. Por simetria, o campo elétrico E é constante sobre a superfície.

2. Quando os vetores $\vec{E}$ e $d\vec{A}$ são paralelos, o produto escalar $\vec{E} \cdot d\vec{A} = EdA$

3. Quando os vetores $\vec{E}$ e $d\vec{A}$ são perpendiculares, o produto escalar $\vec{E} \cdot d\vec{A} = 0$

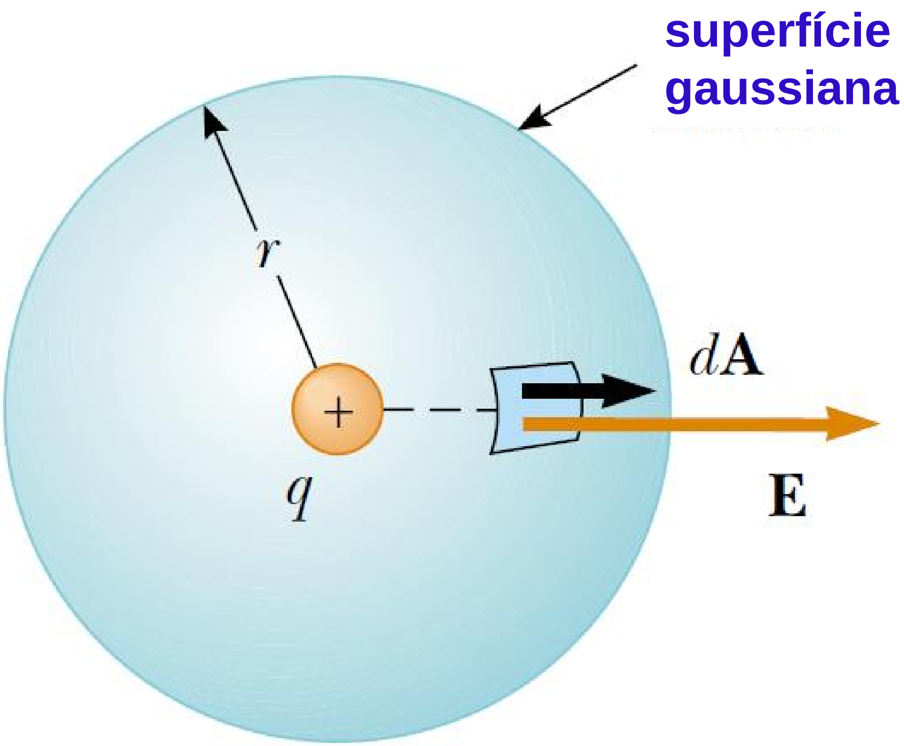
$$\Phi_E = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{q_{\text{in}}}{\epsilon_0}$$

Campo elétrico de uma carga pontual

Usando a Lei de Gauss, calcular o campo elétrico devido a uma carga pontual isolada *q*.

A superfície gaussiana escolhida é uma esfera de raio *r* com centro na carga pontual.

Como a carga pontual é positiva, o campo elétrico é radial saindo da superfície e, é normal à superfície em todo ponto.



Campo elétrico de uma carga pontual

Se cumpre a condição (2) onde $\vec{E}$ e $d\vec{A}$ são paralelos.

$$\vec{E} \cdot d\vec{A} = EdA$$

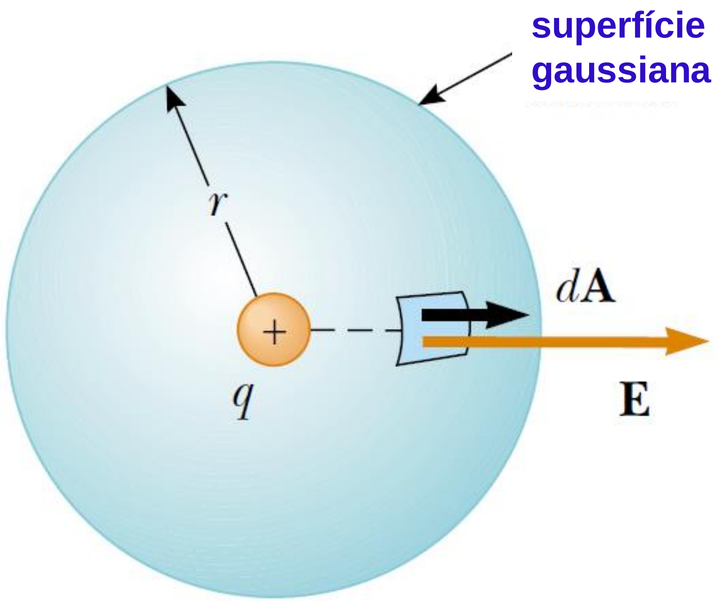
A Lei de Gauss fornece:

$$\Phi_E = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \oint E\, dA = \frac{q}{\epsilon_0}$$

Por simetria, o campo E é constante em toda parte sobre a superfície satisfazendo a condição (1).

$$\oint E\, dA = E \oint dA = E(4\pi r^2) = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$$\boxed{E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} = k_e \frac{q}{r^2}}$$

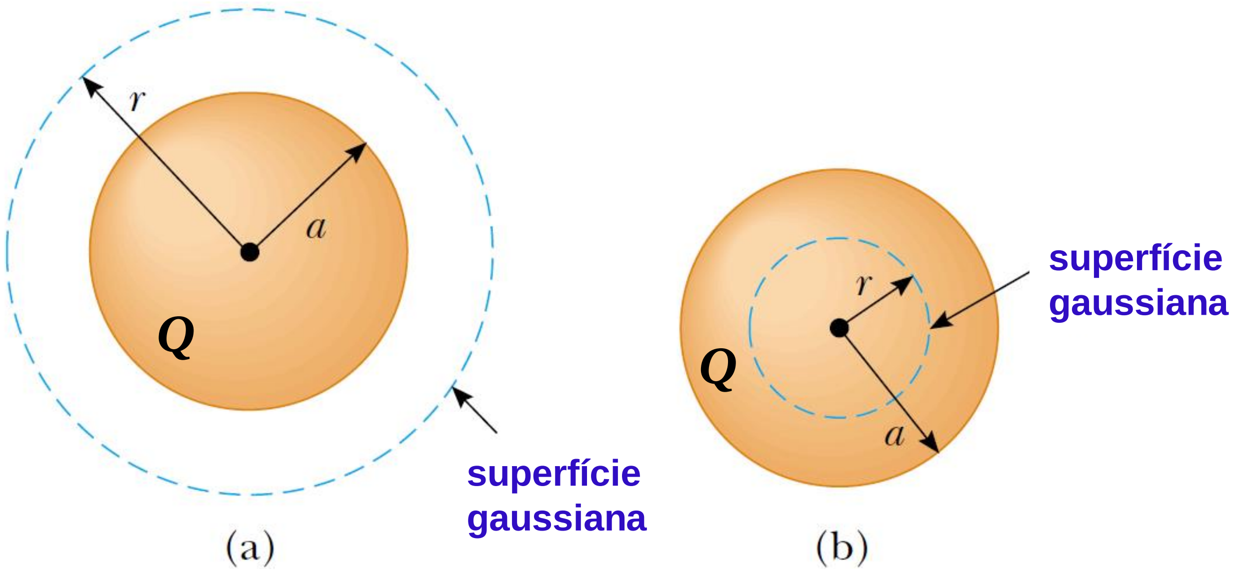


Distribuição de carga com simetria esférica

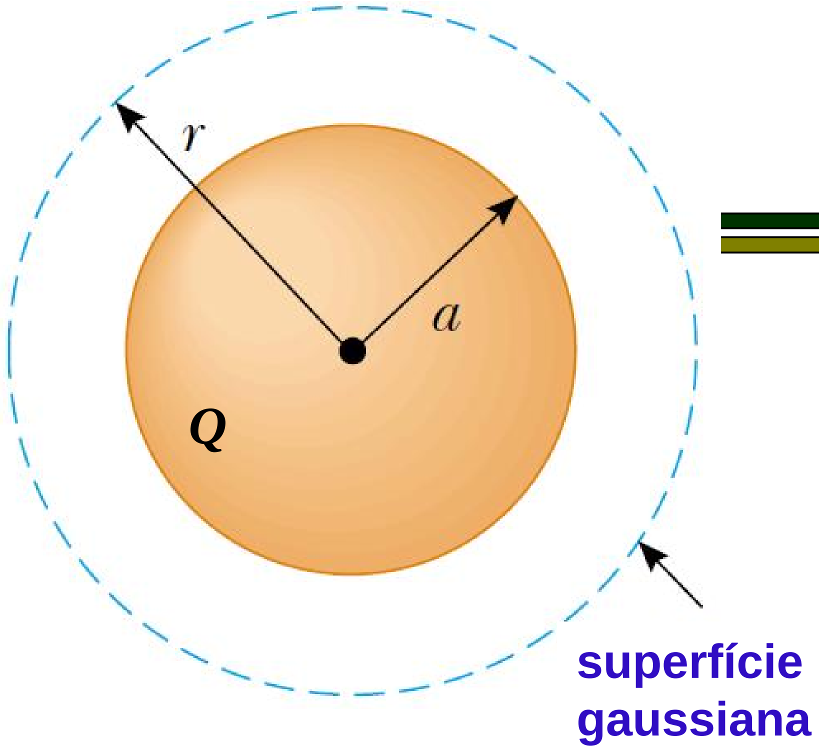
Uma esfera isolante de raio a tem uma densidade volumétrica de carga uniforme ρ e uma carga positiva total Q.

(a) Calcule a magnitude do campo elétrico em um ponto fora da esfera.

(b) Encontre a magnitude do campo elétrico em um ponto dentro da esfera.



Solução:



(a) Campo elétrico em um ponto fora da esfera.

A distribuição de carga é esfericamente simétrica, por isso, se escolhe novamente uma superfície gaussiana esférica de raio *r* e concêntrica com a esfera carregada.

As condições (1) e (2) são satisfeitas.

$$\Phi_E = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{q_{\text{in}}}{\epsilon_0}$$

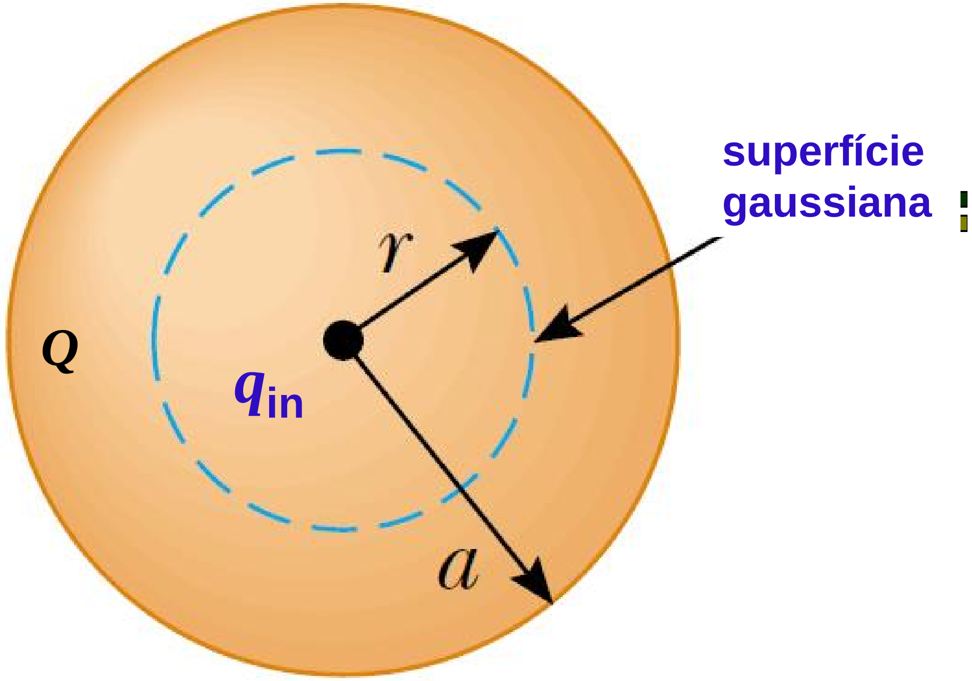
O campo elétrico é:

$$\boxed{E = k_e \frac{Q}{r^2}}$$

para $r > a$

Solução:

(b) Campo elétrico em um ponto dentro da esfera.



Para pontos dentro da esfera carregada (r < a) novamente a superfície gaussiana é uma esfera concêntrica com a esfera carregada.

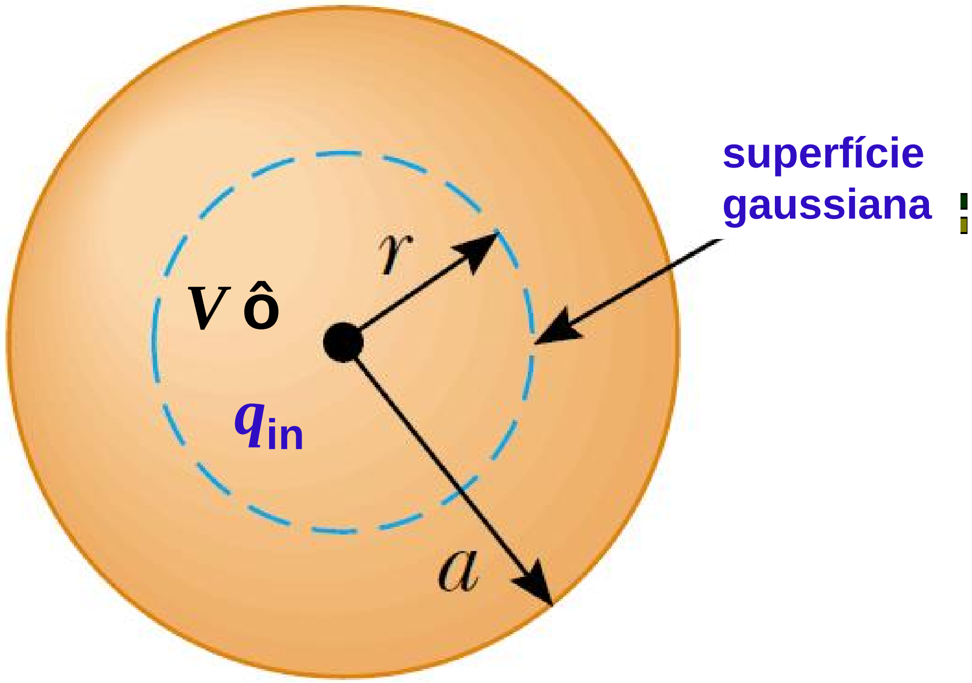
As condições (1) e (2) são satisfeitas.

$$\Phi_E = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{q_{in}}{\epsilon_0}$$

É preciso calcular a carga liquida (q_{in}) dentro da superfície gaussiana.

Neste caso $q_{in} < Q$ $\qquad r < a$

Solução:



Seja ***V*** **ô o volume da esfera carregada encerrada pela superfície gaussiana.**

$$q_{\text{in}} = \rho V' = \rho\left(\tfrac{4}{3}\pi r^3\right)$$

A Lei de Gauss fornece:

$$\oint E\, dA = E \oint dA = E\,(4\pi r^2) = \frac{q_{\text{in}}}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{q_{\text{in}}}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\rho\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\rho}{3\epsilon_0}\, r$$

Mas → $\rho = Q/\frac{4}{3}\pi a^3$

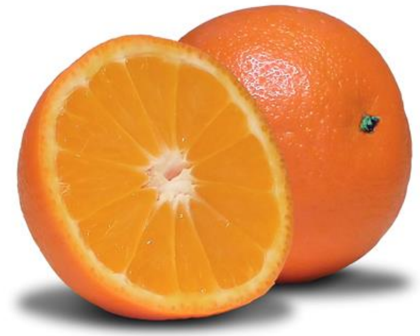
$$\boxed{E = \frac{Qr}{4\pi\epsilon_0 a^3} = k_e \frac{Q}{a^3}\, r}$$

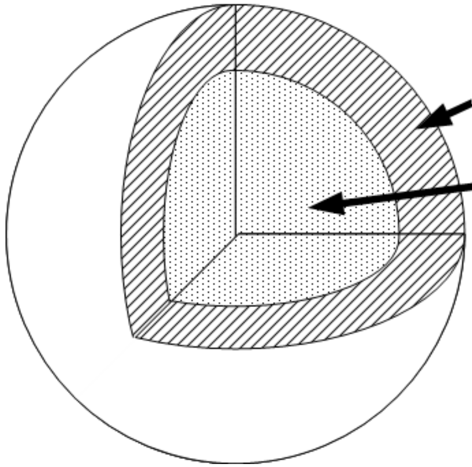
para $r < a$

Campo elétrico devido a uma casca fina esférica

Uma casca esférica fina de raio a tem uma carga total Q distribuída uniformemente sobre sua superfície. Encontre o campo elétrico em todos os pontos:

(A) Fora da casca
(B) No interior da casca

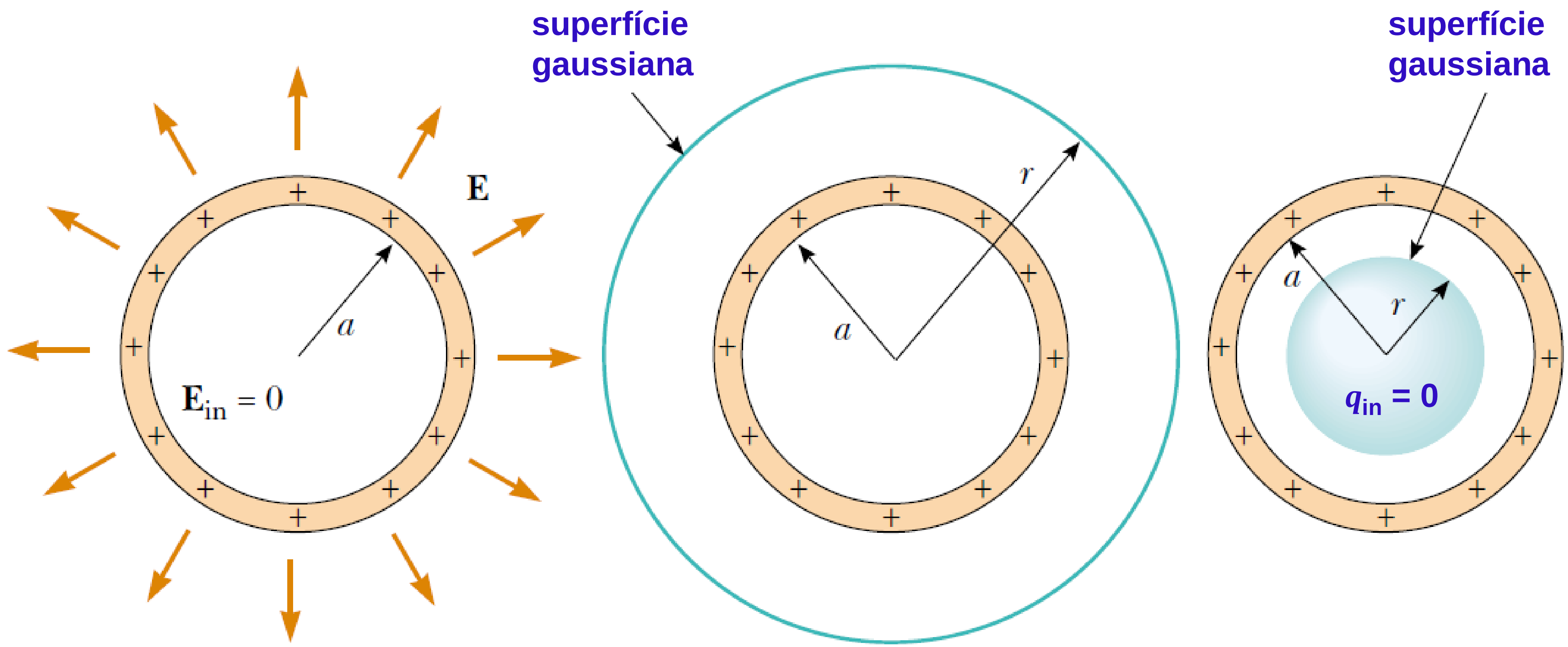




Campo elétrico devido a uma casca fina esférica

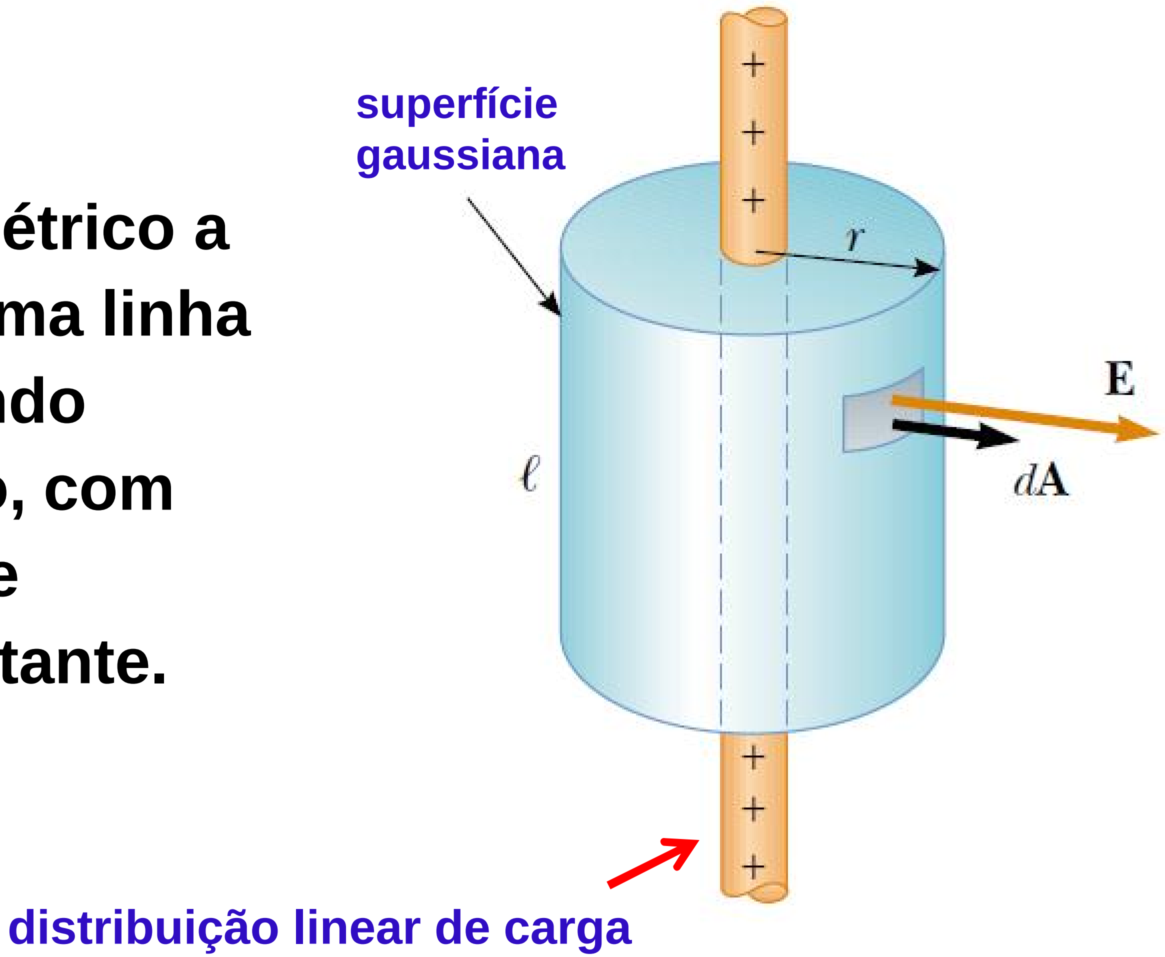
$$r > a \quad \Rightarrow \quad E = k_e \frac{Q}{r^2}$$

$$r < a \quad \Rightarrow \quad E = 0$$



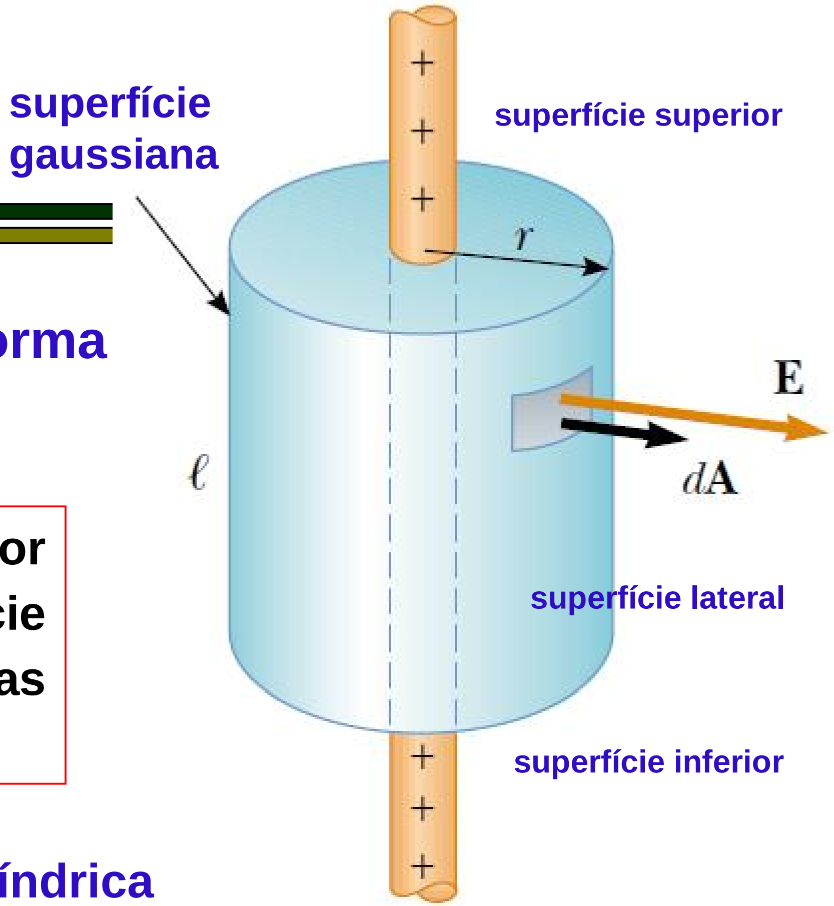
Distribuição de carga com simetria cilíndrica

Encontre o campo elétrico a uma distância *r* de uma linha de carga positiva tendo comprimento infinito, com carga por unidade de comprimento λ constante.



Solução:

A superfície gaussiana escolhida tem forma cilíndrica, com raio *r* e comprimento *l*.



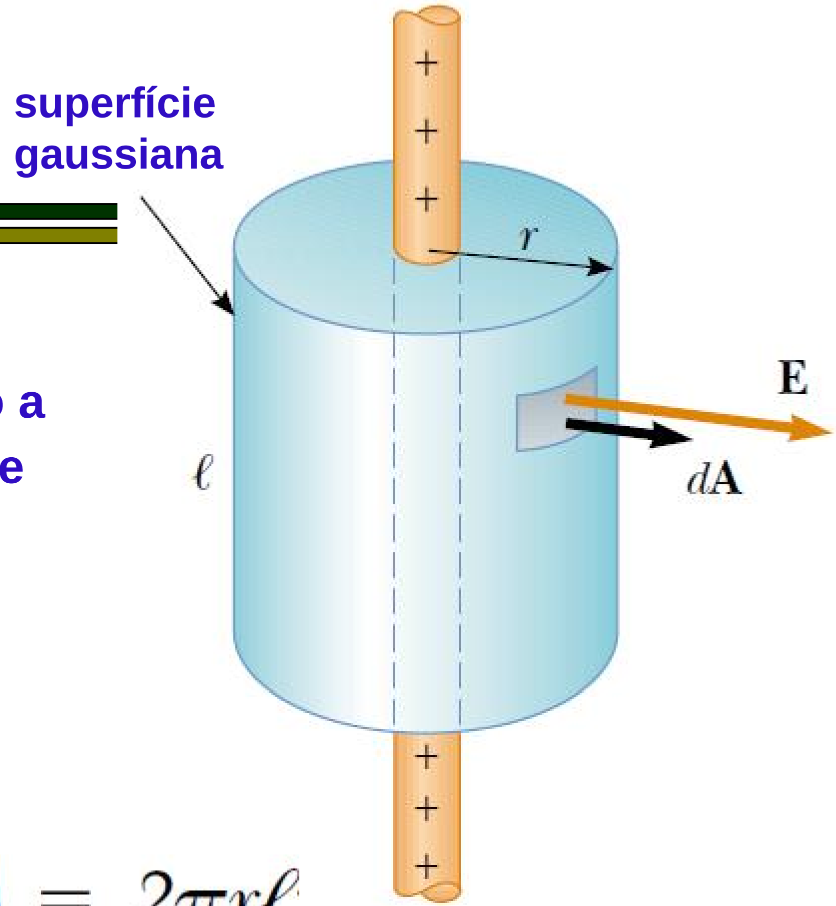
Da figura ao lado se percebe que o vetor campo elétrico *E* é normal à superfície gaussiana e constante, cumprindo as condições (1) e (2).

O fluxo através da superfície gaussiana cilíndrica pode ser expresso como:

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int_{\sup} \vec{E} \cdot d\vec{A} + \int_{lat} \vec{E} \cdot d\vec{A} + \int_{\inf} \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

sup: superfície superior
lat: superfície lateral
inf: superfície inferior

Solução:



O fluxo através das superfícies superior e inferior é nulo porque o campo E é paralelo a essas superfícies. Assim, o fluxo resultante acontece através da superfície lateral.

$$\Phi_E = \int_{lat} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int_{lat} E dA = E \int_{lat} dA$$

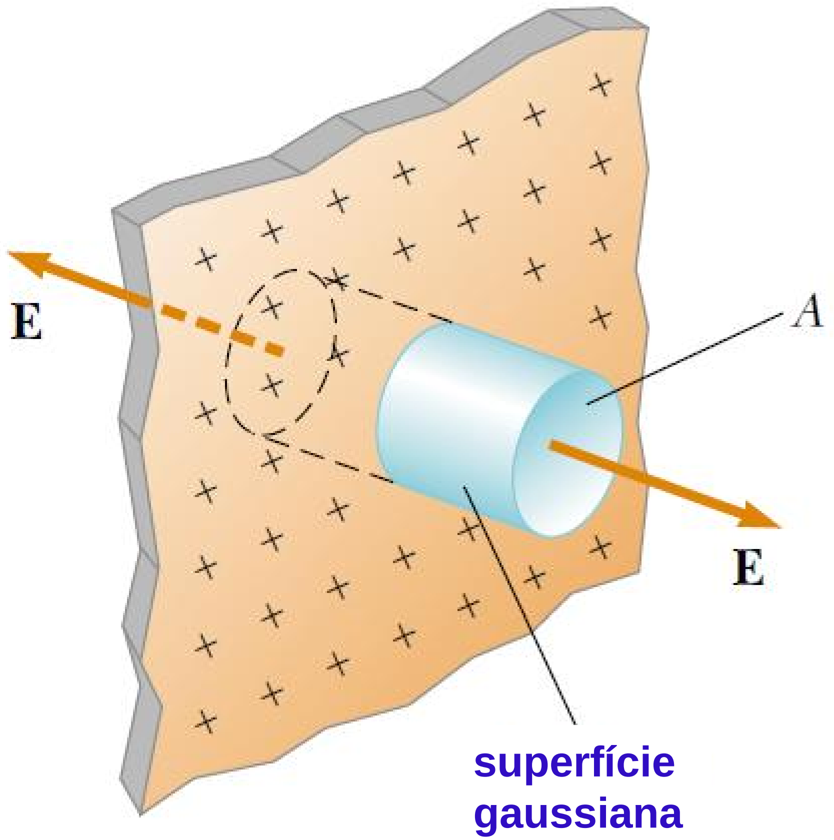
$$\Phi_E = EA = \frac{q_{in}}{\epsilon_0} = \frac{\lambda \ell}{\epsilon_0} \qquad A = 2\pi r \ell$$

$$E(2\pi r \ell) = \frac{\lambda \ell}{\epsilon_0} \qquad \boxed{E = \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0 r} = 2k_e \frac{\lambda}{r}}$$

Folha plana carregada

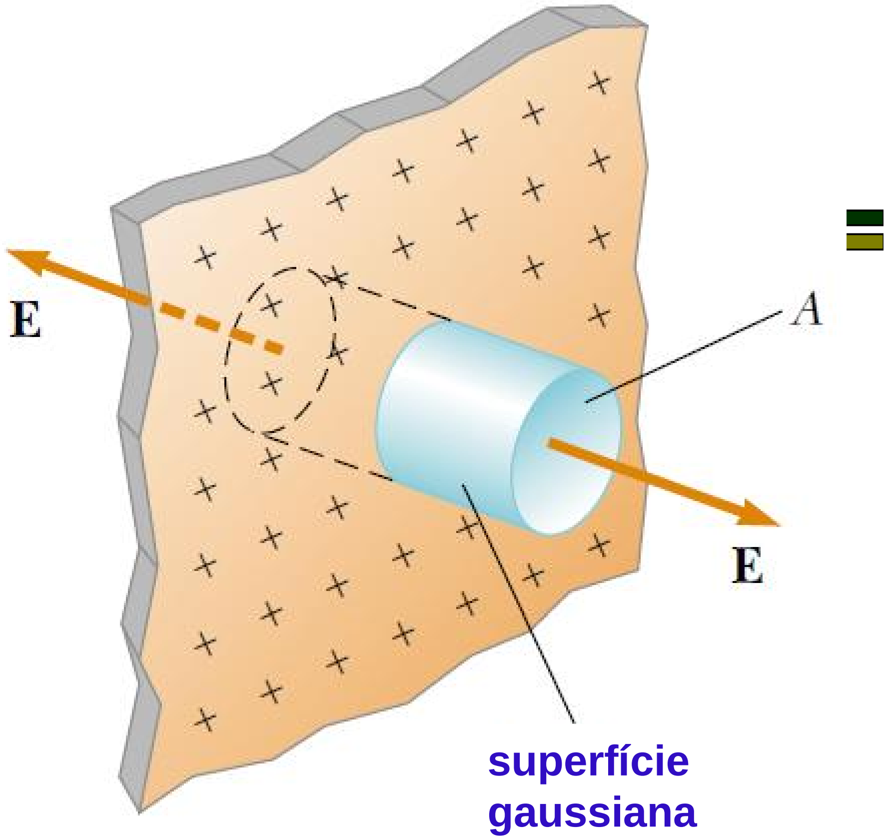
Uma folha plana não condutora e eletricamente carregada

Encontre o campo elétrico devido a um plano não condutor, infinito, com carga por unidade de área σ uniforme.



Solução:

O vetor campo $\boldsymbol{E}$ é perpendicular ao plano carregado, saindo pelos dois lados.

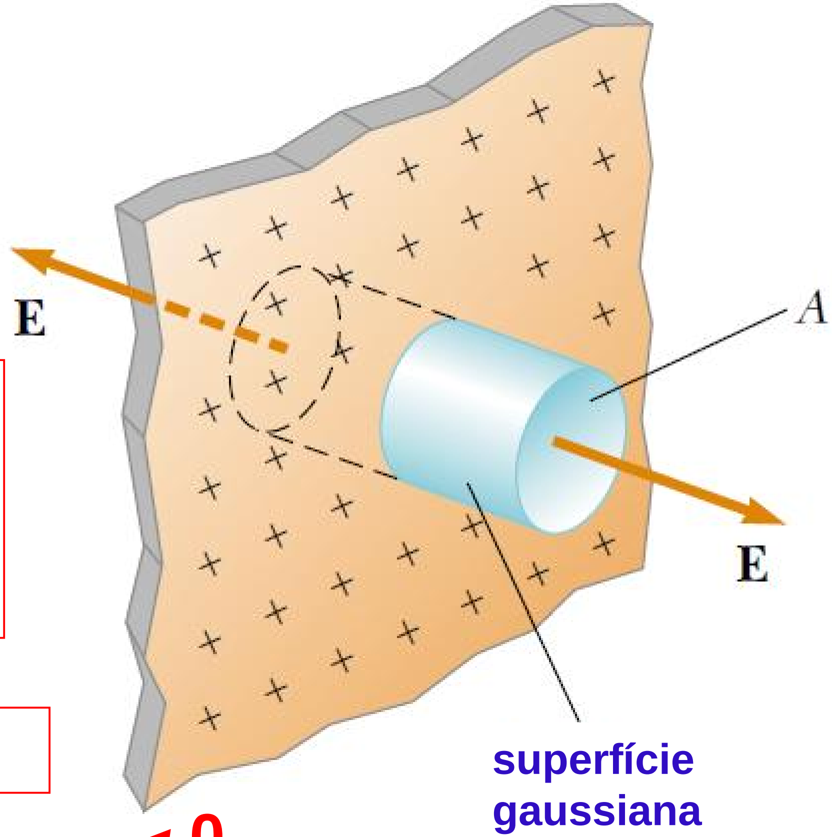


O fluxo através da superfície gaussiana cilíndrica pode ser expresso como:

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int_{esq} \vec{E} \cdot d\vec{A} + \int_{lat} \vec{E} \cdot d\vec{A} + \int_{dir} \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

esq: superfície esquerda
lat: superfície lateral
dir: superfície direita

Solução:



Com relação à superfície gaussiana, o campo ***E*** é perpendicular às superfícies esquerda e direita, e paralela à superfície lateral.

As condições (1), (2) e (3) são cumpridas.

$$\Phi_E = \oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \int_{esq} \vec{E}\cdot d\vec{A} + \underbrace{\int_{lat} \vec{E}\cdot d\vec{A}}_{0} + \int_{dir} \vec{E}\cdot d\vec{A}$$

$$\Phi_E = \int_{esq} \vec{E}\cdot d\vec{A} + \int_{dir} \vec{E}\cdot d\vec{A} = \int_{esq} EdA + \int_{dir} EdA$$

Solução:

$$\Phi_E = \int_{esq} EdA + \int_{dir} EdA = E\int_{esq} dA + E\int_{dir} dA = EA + EA = 2EA$$

Segundo a Lei de Gauss: $$\Phi_E = 2EA = \frac{q_{in}}{\epsilon_0}$$

$$\Phi_E = 2EA = \frac{q_{in}}{\epsilon_0} = \frac{\sigma A}{\epsilon_0} \qquad q_{in} = \sigma A$$

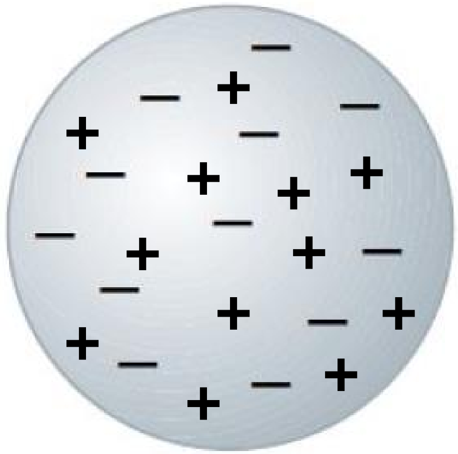
$$\boxed{E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}}$$

Condutores em equilíbrio eletrostático

Condutor elétrico?

Equilíbrio eletrostático?

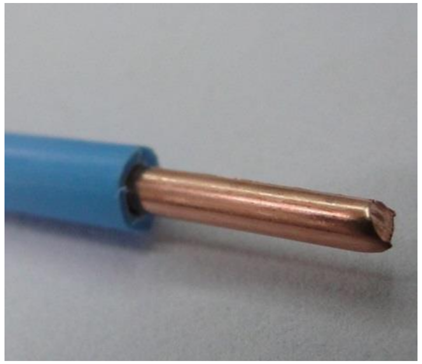
As cargas elétricas estão estáticas.
Não existe o movimento delas.



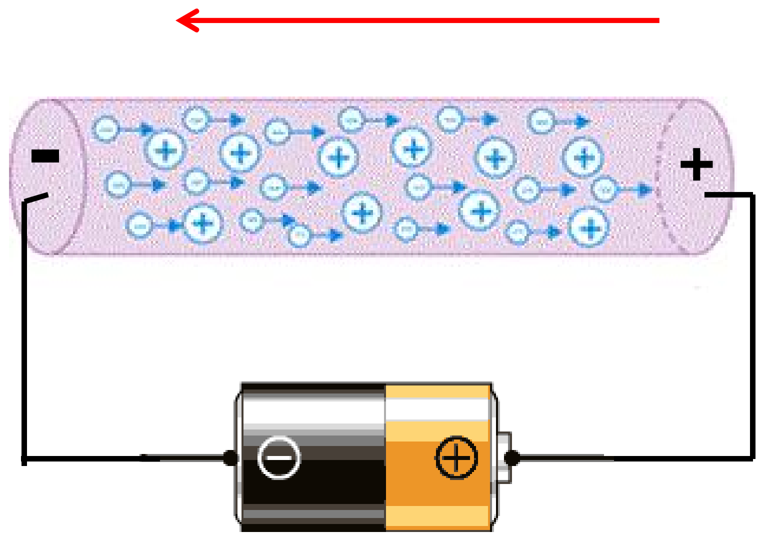
Força elétrica resultante em cada carga é zero.

Condutor elétrico

Condutor: são materiais nos quais as cargas elétricas (elétrons) se deslocam de maneira relativamente livre, exemplos: cobre, alumínio e prata.



$\vec{E}$



Em um condutor elétrico existem elétrons que não estão presos a nenhum átomo e são livres para se mover dentro do material.

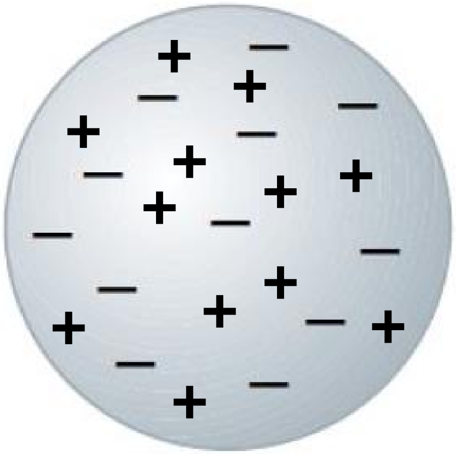
Quando se aplica um campo E no condutor, existe um movimento ordenado dos elétrons chamado de corrente elétrica.

Condutor em equilíbrio eletrostático

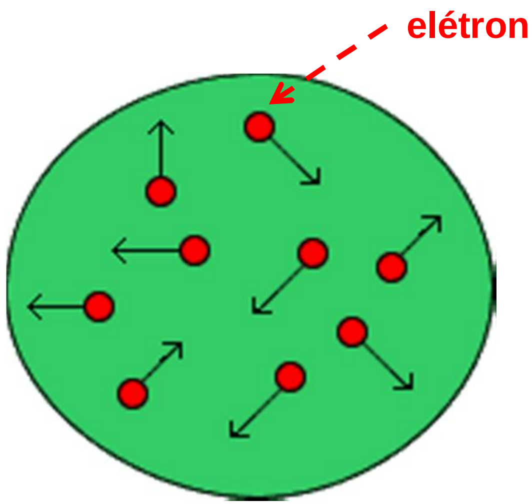
Condutor eletricamente neutro

Quando não existe campo elétrico externo:

nenhum movimento ordenado dos elétrons ocorre dentro do condutor e ele está em equilíbrio eletrostático. Podemos falar então, que não existe corrente elétrica.



Na verdade, existe um movimento caótico dos elétrons causado, por exemplo, pela temperatura ambiente, mas, o efeito médio seria uma corrente elétrica nula.



Condutor neutro e isolado

Condutor neutro, isolado e em equilíbrio eletrostático

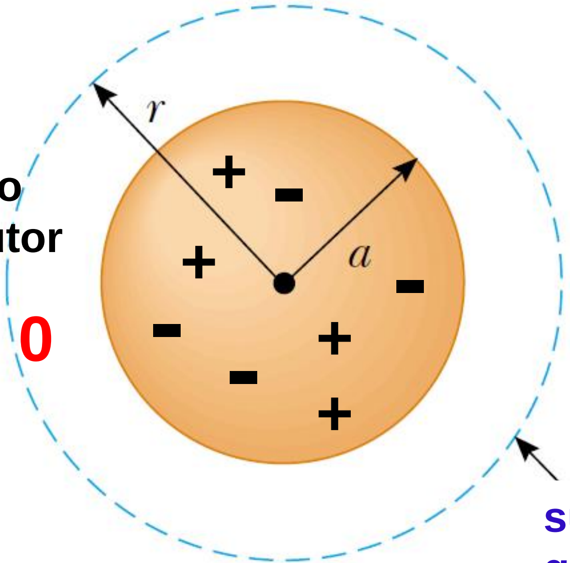
Lei de Gauss

$$\oint E\, dA = E \oint dA = E\,(4\pi r^2) = \frac{q_{in}}{\epsilon_0}$$

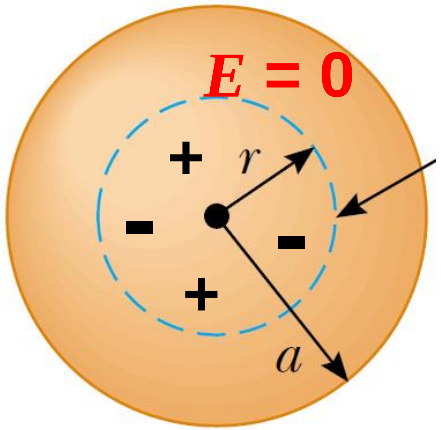
Como q_{in} é zero $\Rightarrow$ $E = 0$

fora do condutor

$E = 0$



superfície gaussiana



superfície gaussiana

No interior do condutor $E = 0$ (condição de equilíbrio)

Condutor neutro e isolado

Condutor **neutro**, isolado e em **equilíbrio** eletrostático e colocado **dentro de um campo elétrico externo**.

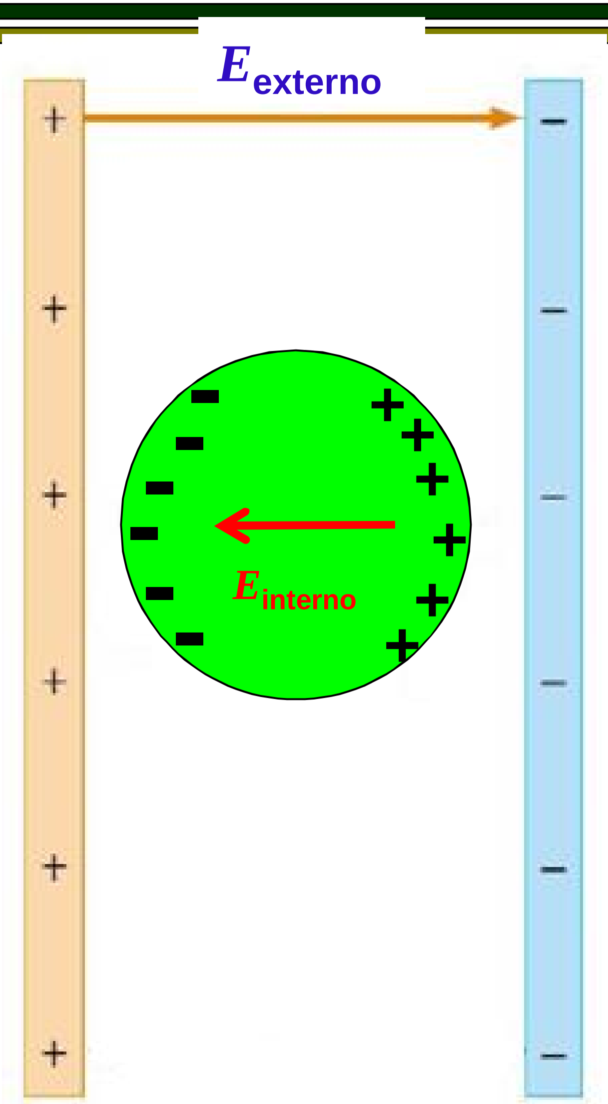
Propriedade do condutor:

(1) O **campo elétrico resultante** é **nulo** em qualquer ponto dentro do condutor.

O campo elétrico resultande dentro do condutor é:

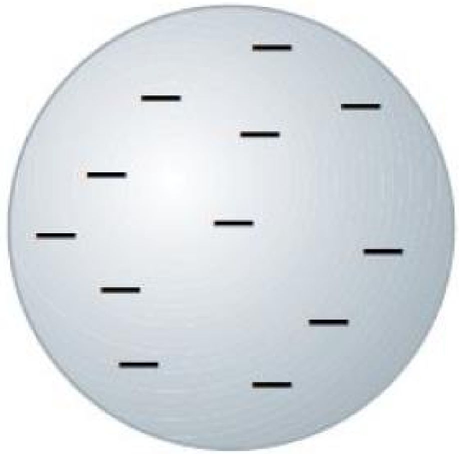
$$E = E_{ext} \,\text{ï}\, E_{int} = 0$$

(condição de equilíbrio eletrostático)



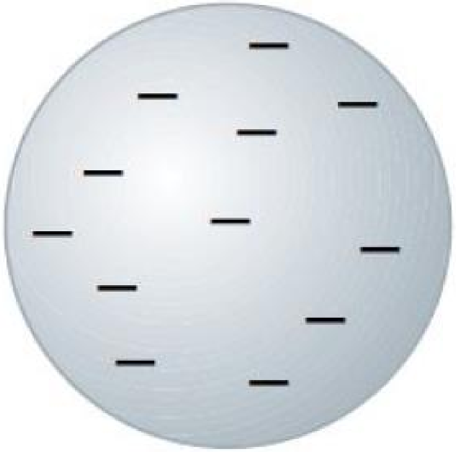
Condutor carregado e isolado

Quando o condutor fica carregado com um excesso de elétrons, o que acontece?



Condutor carregado e isolado

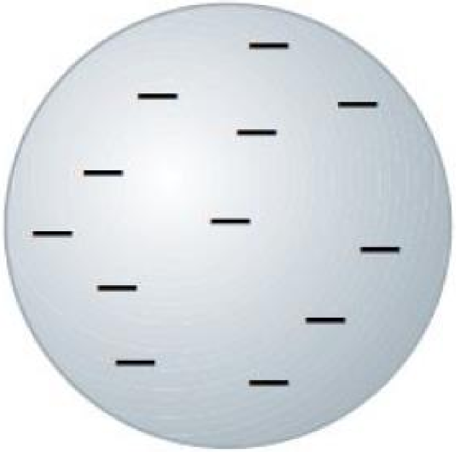
Quando o condutor fica carregado com um excesso de elétrons, o que acontece?
Os elétrons se repelem uns aos outros e aparece uma corrente elétrica (movimento dos elétrons). O sistema está fora do equilíbrio.



Condutor carregado e isolado

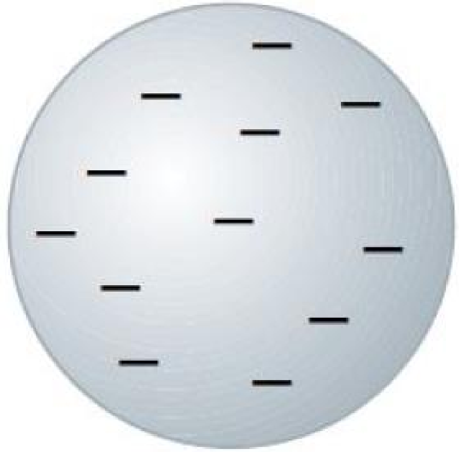
Quando o condutor fica carregado com um excesso de elétrons, o que acontece?
Os elétrons se repelem uns aos outros e aparece uma corrente elétrica (movimento dos elétrons). O sistema está fora do equilíbrio.

Essa corrente elétrica se manterá por sempre?



Condutor carregado e isolado

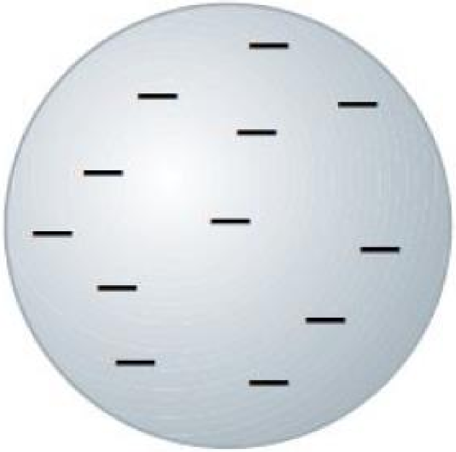
Quando o condutor fica carregado com um excesso de elétrons, o que acontece?
Os elétrons se repelem uns aos outros e aparece uma corrente elétrica (movimento dos elétrons). O sistema está fora do equilíbrio.



Essa corrente elétrica se mantém para sempre?
Não, a tendência é que o sistema atinja novamente o equilíbrio eletrostático.

Condutor carregado e isolado

Quando o condutor fica carregado com um excesso de elétrons, o que acontece?
Os elétrons se repelem uns aos outros e aparece uma corrente elétrica (movimento dos elétrons). O sistema está fora do equilíbrio.

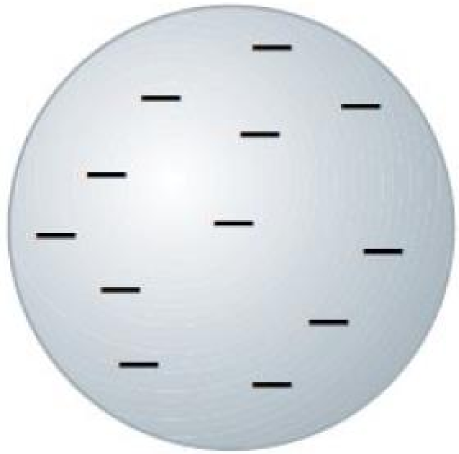


Essa corrente elétrica se mantém para sempre?
Não, a tendência é que o sistema atinja novamente o equilíbrio eletrostático.

Que acontece com os elétrons em excesso quando já o condutor está novamente em equilíbrio?

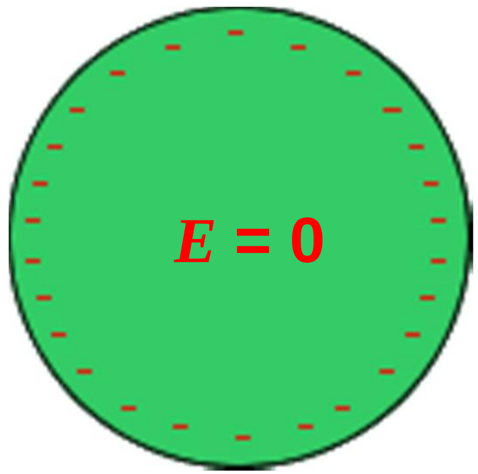
Condutor carregado e isolado

Quando o condutor fica carregado com um excesso de elétrons, o que acontece?
Os elétrons se repelem uns aos outros e aparece uma corrente elétrica (movimento dos elétrons). O sistema está fora do equilíbrio.



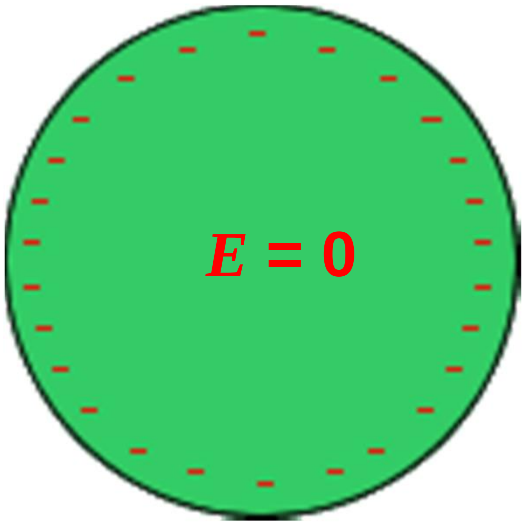
Essa corrente elétrica se mantém para sempre?
Não, a tendência é que o sistema atinja novamente o equilíbrio eletrostático.

Que acontece com os elétrons em excesso quando já o condutor está novamente em equilíbrio?
Os elétrons se afastam o mais possível uns dos outros ficando distribuídos na superfície do condutor. Desta forma, o campo elétrico no interior do condutor novamente é nulo, que é a condição de equilíbrio.



Condutor carregado

Condutor carregado, isolado e em equilíbrio eletrostático.



Propriedade do condutor:

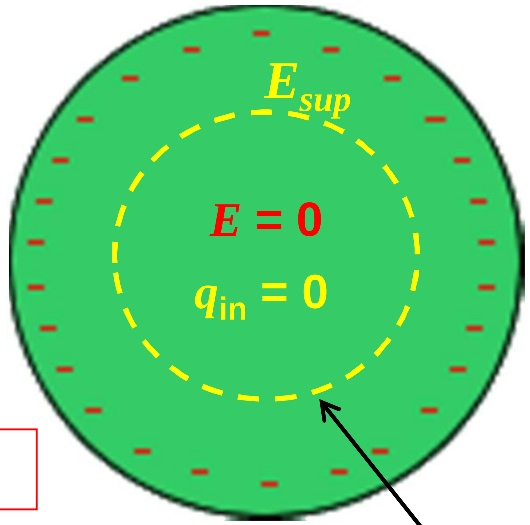
(2) Se o condutor isolado tiver uma carga elétrica líquida, a carga em excesso fica inteiramente sobre sua superfície.

Se pode usar a Lei de Gauss para demonstrar esta propriedade.

Condutor carregado

Condutor carregado, isolado e em equilíbrio eletrostático.

Lei de Gauss $\oint E\,dA = E \oint dA = E\,(4\pi r^2) = \dfrac{q_{\text{in}}}{\epsilon_0}$



superfície gaussiana

E = campo elétrico resultante dentro do condutor = 0

$\Rightarrow$ $q_{\text{in}} = 0$ (carga líquida dentro da superfície gaussiana deve ser nula)

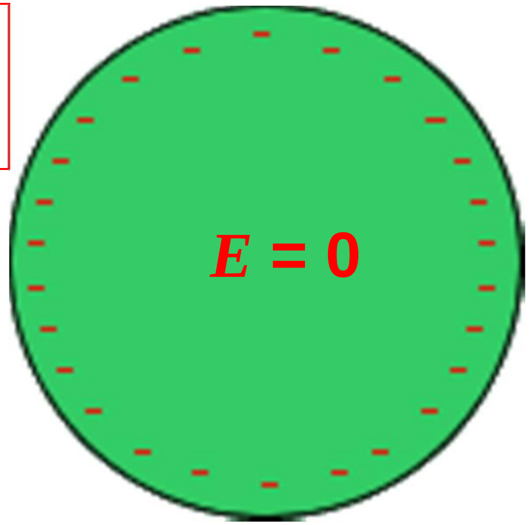
Como $q_{\text{in}} = 0 \Rightarrow E_{sup} = 0$ (campo elétrico na superfície gaussiana)

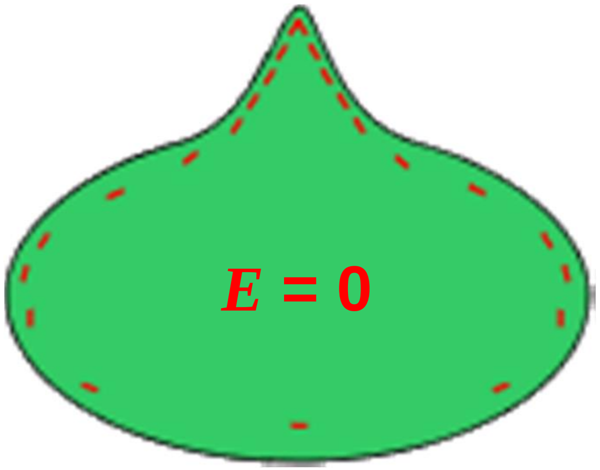
$\Rightarrow$ Qualquer excesso de carga elétrica no condutor deve residir na superfície do condutor.

Condutor carregado

Condutor carregado, isolado e em equilíbrio eletrostático.

Se o condutor não tem forma esférica, as cargas não se distribuem uniformemente sobre a superfície do condutor.



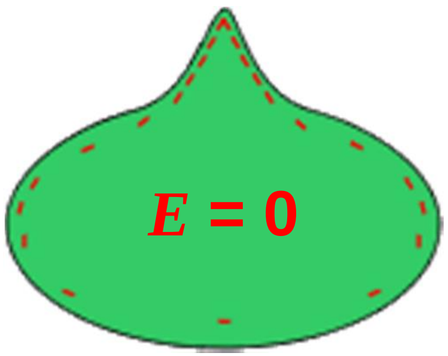


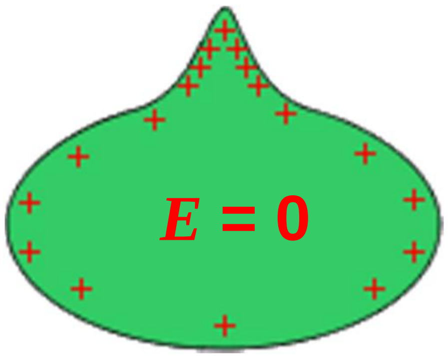
A densidade de carga superficial σ muda ao longo da superfície de um condutor não esférico.

O campo elétrico imediatamente exterior ao condutor carregado de forma irregular, pode ser calculado usando a Lei de Gauss.

Condutor carregado

Condutor carregado, isolado e em equilíbrio eletrostático.





Propriedade do condutor:

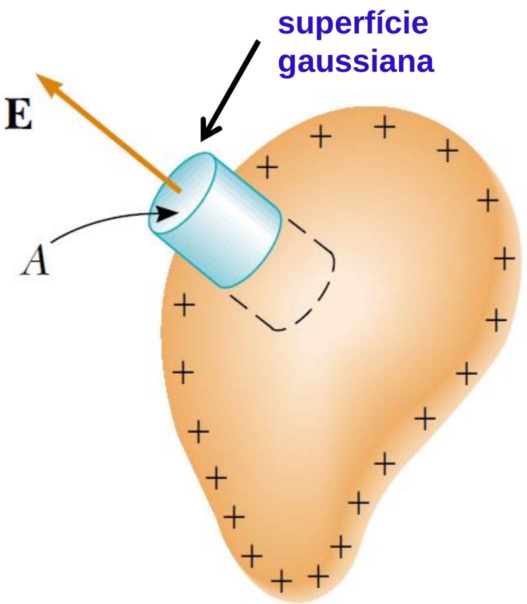
(3) O campo elétrico imediatamente exterior ao condutor carregado é perpendicular à superfície do condutor e tem uma magnitude σ/ε_0, onde σ é a carga por unidade de área nesse ponto.

Se pode usar a Lei de Gauss para demonstrar esta propriedade.

Condutor carregado

Condutor carregado, isolado e em equilíbrio eletrostático.

A superfície gaussiana é um pequeno cilindro. Um extremo do cilindro fica na parte externa do condutor e o outro extremo na parte interna.



$$\Phi_E = \oint E\,dA = EA = \frac{q_{\text{in}}}{\epsilon_0}$$

Condutor carregado

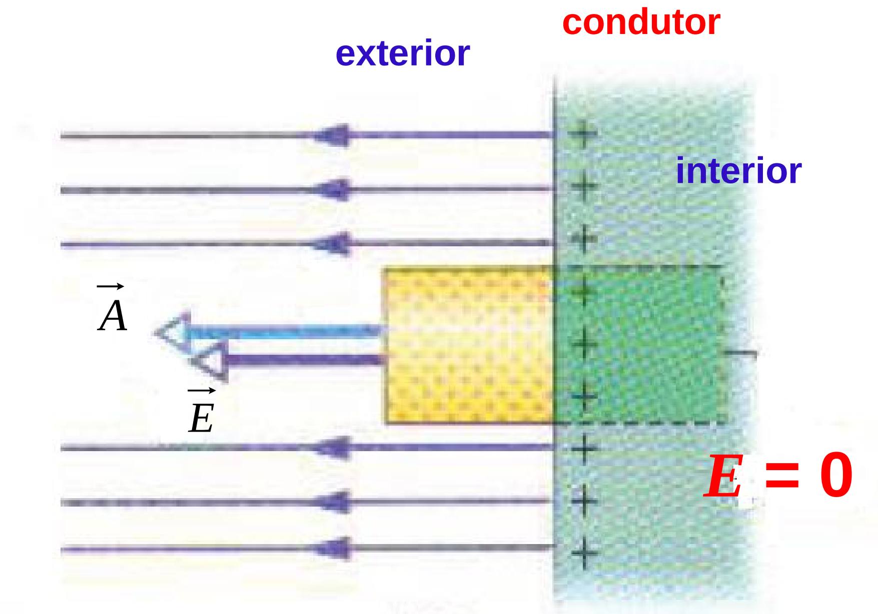
$$\Phi_E = \oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \int_{ext} \vec{E}\cdot d\vec{A} + \cancel{\int_{lat} \vec{E}\cdot d\vec{A}}^{\,0} + \cancel{\int_{\text{int}} \vec{E}\cdot d\vec{A}}^{\,0}$$

$$\Phi_E = \oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \int_{ext} \vec{E}\cdot d\vec{A}$$

$$EA = \frac{q_{\text{in}}}{\epsilon_0} = \frac{\sigma A}{\epsilon_0}$$

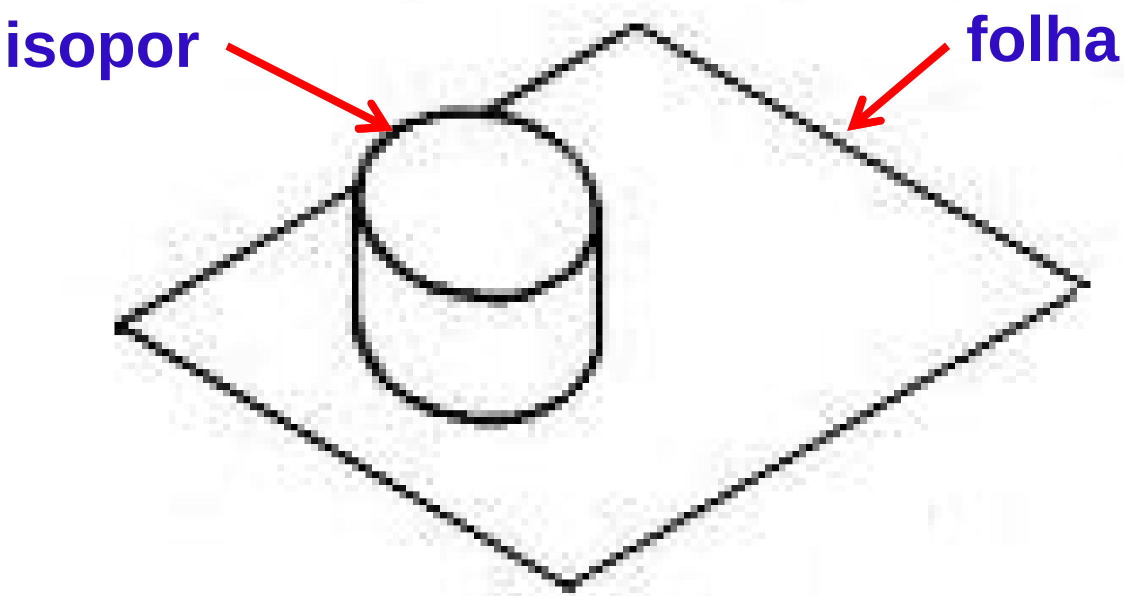
$$q_{\text{in}} = \sigma A$$

$$\boxed{E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}}$$



Exemplo 1: Aplicação da Lei de Gauss: folha carregada

Um pedaço de isopor de 10 g tem uma carga líquida de ï 0,7 μC e flutua acima do centro de uma folha horizontal grande de plástico que tem densidade de carga uniforme sobre sua superfície. Qual é a carga por área sobre a folha plástica?

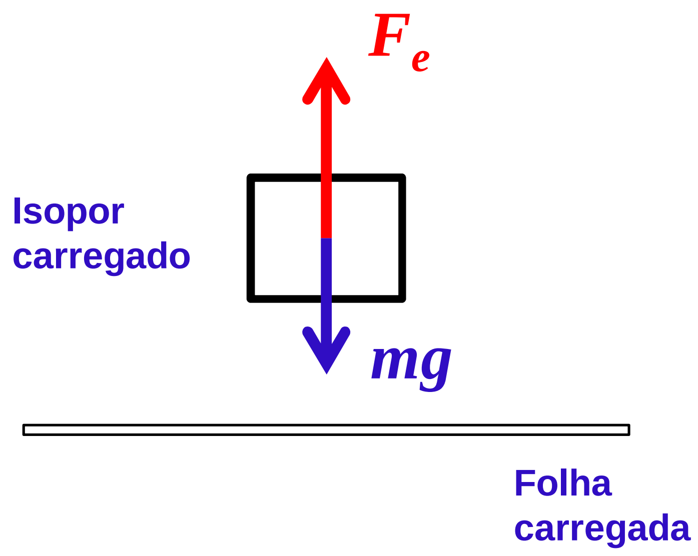


Solução: Vista lateral do sistema

O pedaço de isopor está equilibrado pelas forças elétrica (folha) e gravitacional (peso).

$$F_e \;\text{ï}\; mg = 0$$

$$\boxed{qE \;\text{ï}\; mg = 0}$$



q = carga do isopor

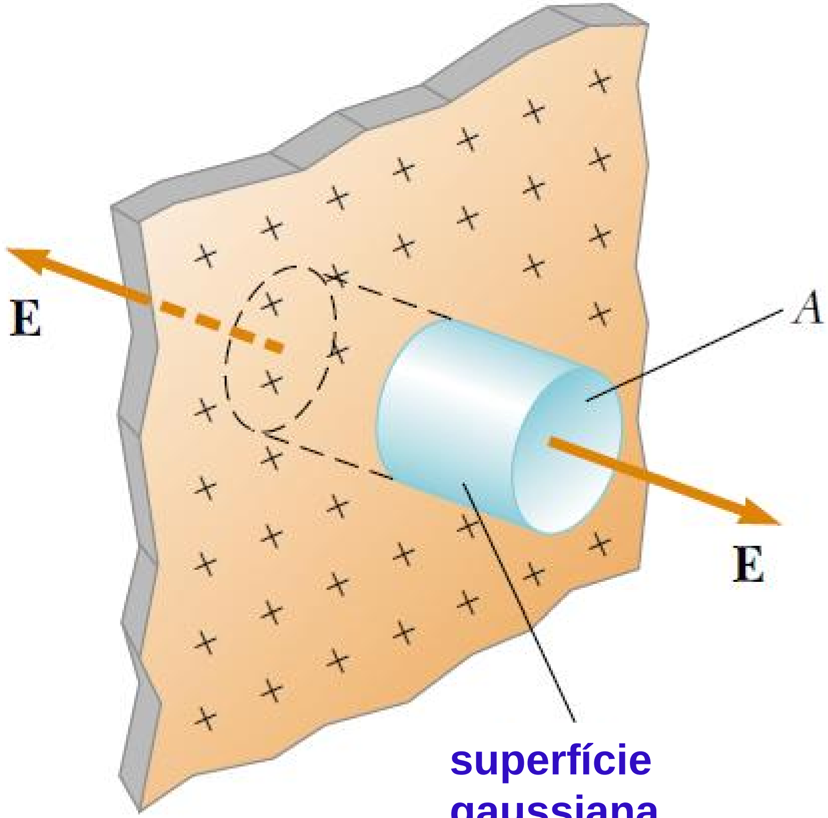
E = campo elétrico produzido pela folha carregada

m = massa do isopor

Solução:

Lembrando que para uma folha carregada, o campo elétrico vem dado por:

$$\boxed{E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}}$$

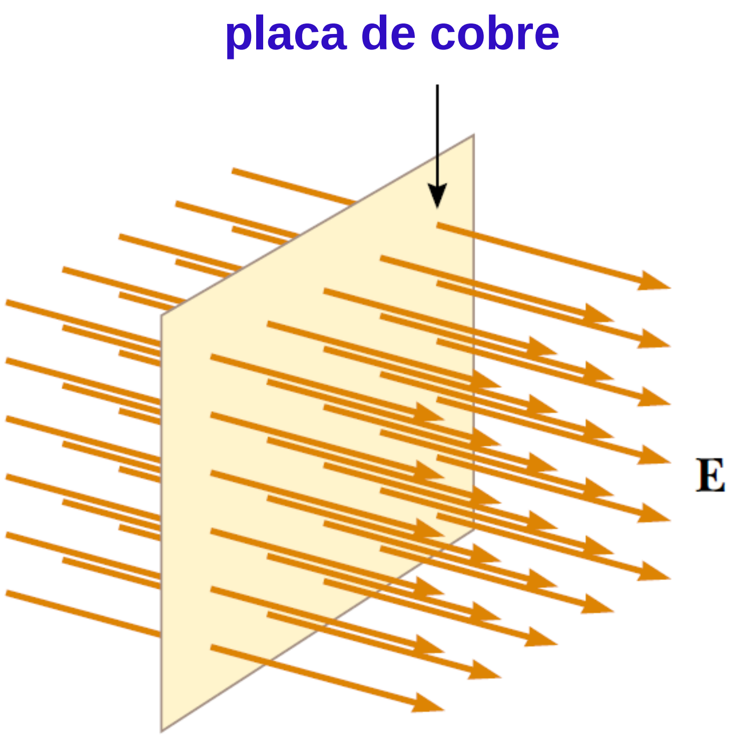


$$\frac{q\,\sigma}{2\,\varepsilon_0} - mg = 0 \qquad \sigma = \frac{Q}{A}$$

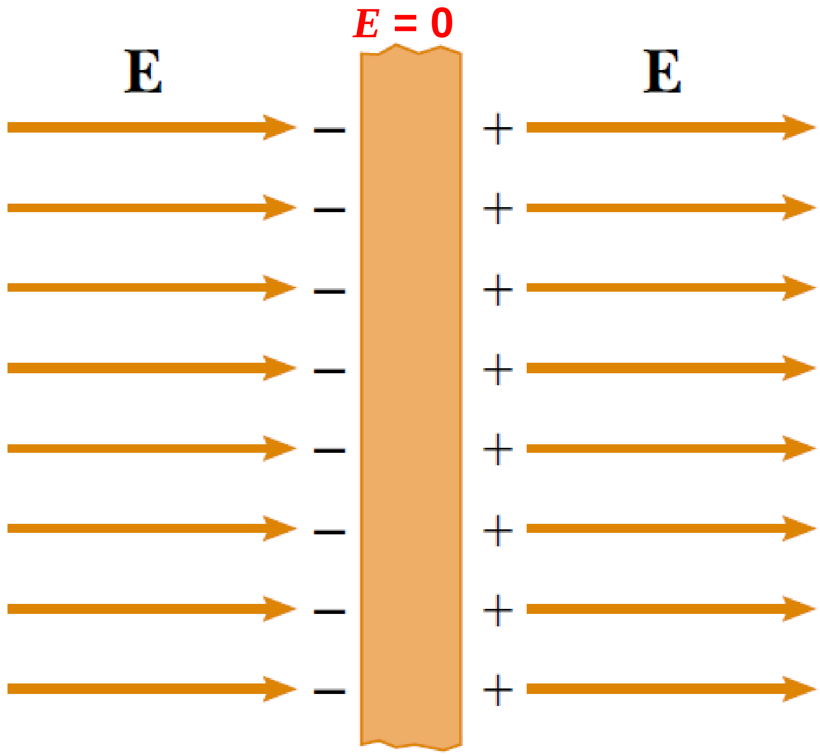
$$\sigma = \frac{Q}{A} = \frac{2\,\epsilon_0\,mg}{q} = \frac{2\left(8.85\times10^{-12}\right)(0.01)(9.8)}{-0.7\times10^{-6}} = \boxed{-2.48\ \mu\text{C}/\text{m}^2}$$

Exemplo 2: Condutor em equilíbrio eletrostático

Uma placa quadrada de cobre com lados de 50 cm não tem carga líquida alguma e é colocada em uma região de campo elétrico uniforme de 80 kN/C orientado perpendicularmente à placa. Encontre (a) a densidade de carga de cada face da placa e (b) a carga total em cada face.



Solução:



O campo elétrico dentro da placa é zero.

A densidade de carga superficial em qualquer uma das faces da placa é:

$$\sigma = \varepsilon_0 E$$

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

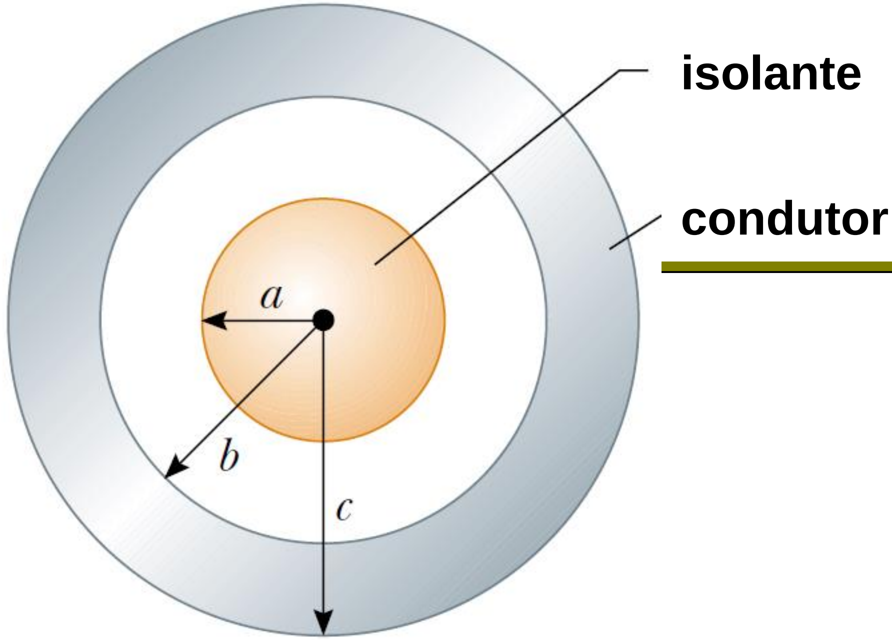
(a) $\sigma = \left(8.00 \times 10^4\right)\left(8.85 \times 10^{-12}\right) = 7.08 \times 10^{-7} \ \text{C/m}^2$

face direita (+) e face esquerda (-)

(b) $Q = \sigma A = \left(7.08 \times 10^{-7}\right)(0.500)^2 \ \text{C} \Rightarrow Q = 1.77 \times 10^{-7} \ \text{C} = \boxed{177 \ \text{nC}}$

face direita (+) e face esquerda (-)

Exemplo 3:



Uma esfera sólida isolante de raio a tem uma densidade de carga uniforme ρ e uma carga total Q.

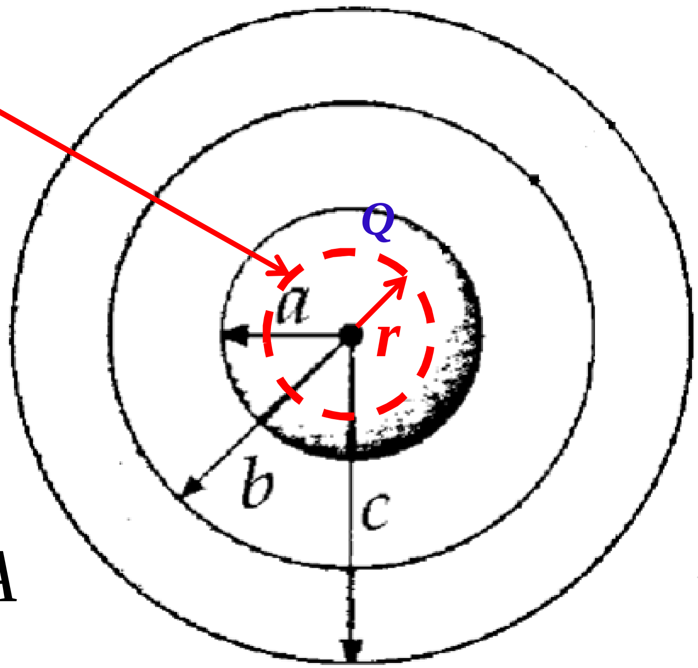
Concentricamente com esta esfera tem uma esfera condutora oca não carregada cujos raios interno e externo são b e c, respectivamente.

(a) Encontrar a magnitude do campo elétrico nas regiões:

$$r < a \qquad a < r < b \qquad b < r < c$$

(b) Determinar a carga induzida por unidade de área sobre as superfícies interna e externa da esfera oca.

Solução:



(a) Campo elétrico na região: $r < a$

Usando a Lei de Gauss:

$$\Phi_E = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{q_{\text{in}}}{\epsilon_0}$$

$$\vec{E} \cdot d\vec{A} = E dA$$

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = E\left(4\pi r^2\right) = \frac{q_{\text{in}}}{\epsilon_0}$$

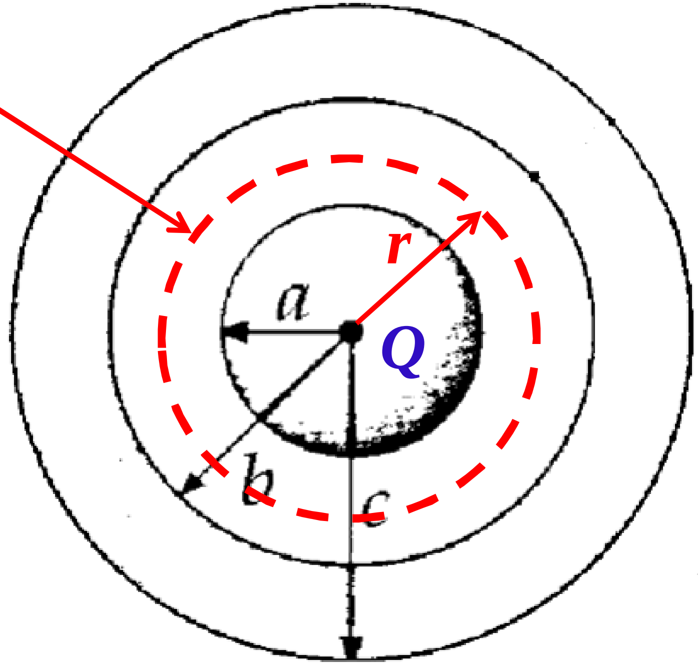
onde $q_{in} < Q$ **(carga dentro da SG)**

$$\boxed{E = \frac{q_{in}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}}$$

Como: $\rho = \dfrac{q_{in}}{V} \Rightarrow q_{\text{in}} = \rho\left(\dfrac{4}{3}\pi r^3\right)$

$$\boxed{E = \frac{\rho r}{3\,\epsilon_0} \quad \textbf{para} \quad r < a}$$

Solução:



(a) Campo elétrico na região:

$$a < r < b$$

$$\boxed{\vec{E} \cdot d\vec{A} = EdA}$$

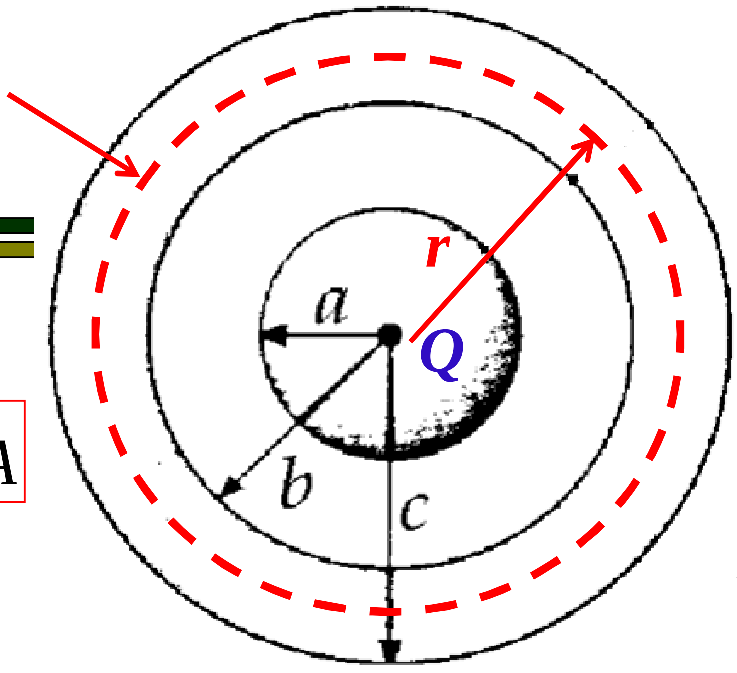
$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = E\left(4\pi r^2\right) = \frac{q_{\text{in}}}{\epsilon_0}$$

$$\boxed{E = \frac{q_{in}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}}$$

onde q_{in} = Q (carga dentro da SG)

$$\Rightarrow \quad \boxed{E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \quad \textbf{para} \quad a < r < b}$$

Solução:



(a) Campo elétrico na região:

$$b < r < c$$

$$\boxed{\vec{E} \cdot d\vec{A} = E dA}$$

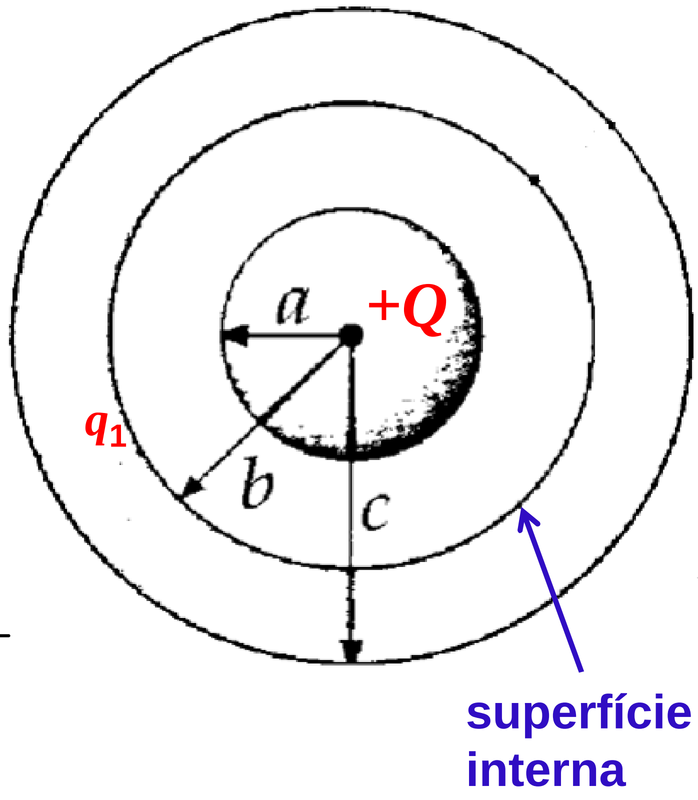
$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = E\left(4\pi r^2\right) = \frac{q_{\text{in}}}{\epsilon_0}$$

Dentro do condutor oco o campo elétrico é nulo

$$\Rightarrow \quad \boxed{E = 0 \quad \text{para} \quad b < r < c}$$

Solução:

(b) Determinar a carga induzida por unidade de área sobre as superfícies interna e externa da esfera oca.



A definição de densidade superficial de carga é:

$$\sigma = \frac{q}{A} = \frac{q}{4\pi r^2}$$

Para a superfície interna da esfera condutora oca temos:

$$\sigma_1 = \frac{q_1}{4\pi b^2}$$

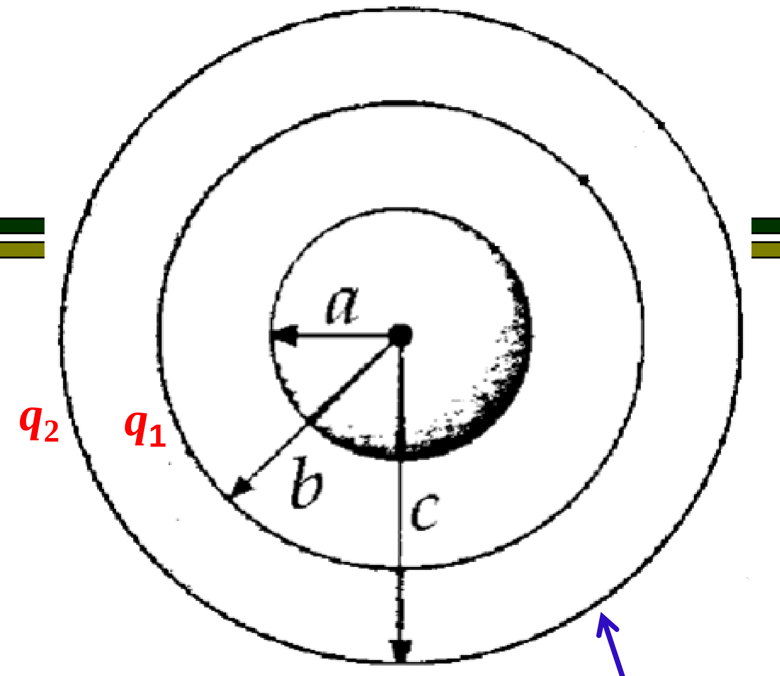
(q_1 carga induzida na superfície interna)

Como no interior do condutor $E = 0$

$$\boxed{q_1 + Q = 0} \Rightarrow \boxed{q_1 = -Q} \Rightarrow \boxed{\sigma_1 = \frac{-Q}{4\pi b^2}}$$

(densidade superficial de carga na superfície interna)

Solução:



A densidade superficial de carga na superfície externa é:

$$\sigma_2 = \frac{q_2}{4\pi c^2}$$

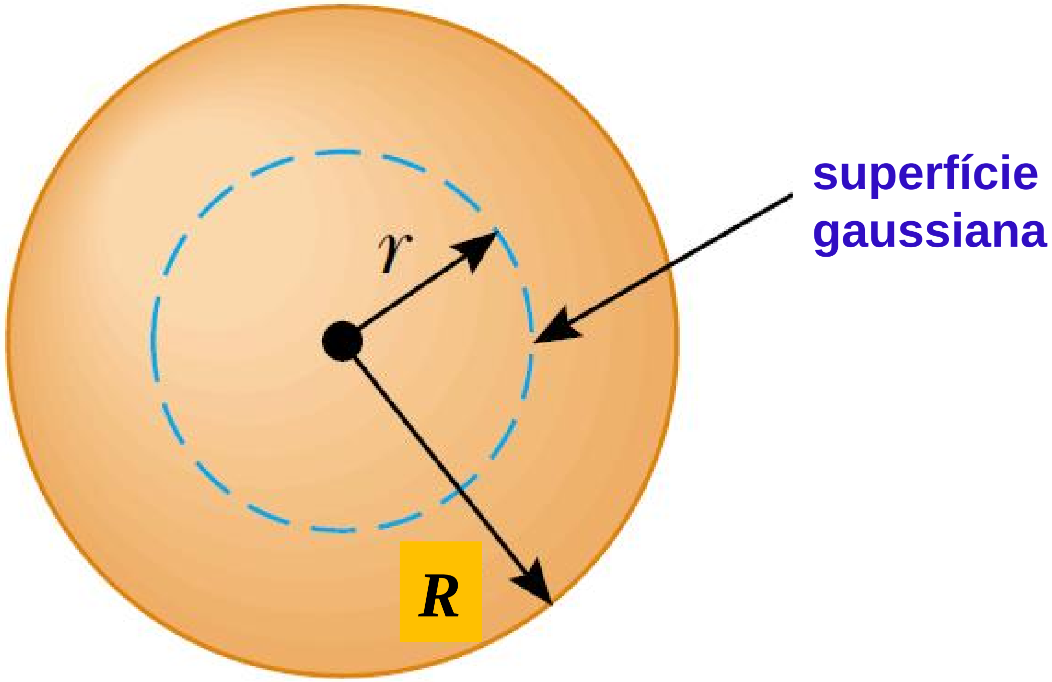
Como a esfera condutora oca está eletricamente neutra, então:

$$q_1 + q_2 = 0$$

$$\boxed{q_2 = - q_1}$$

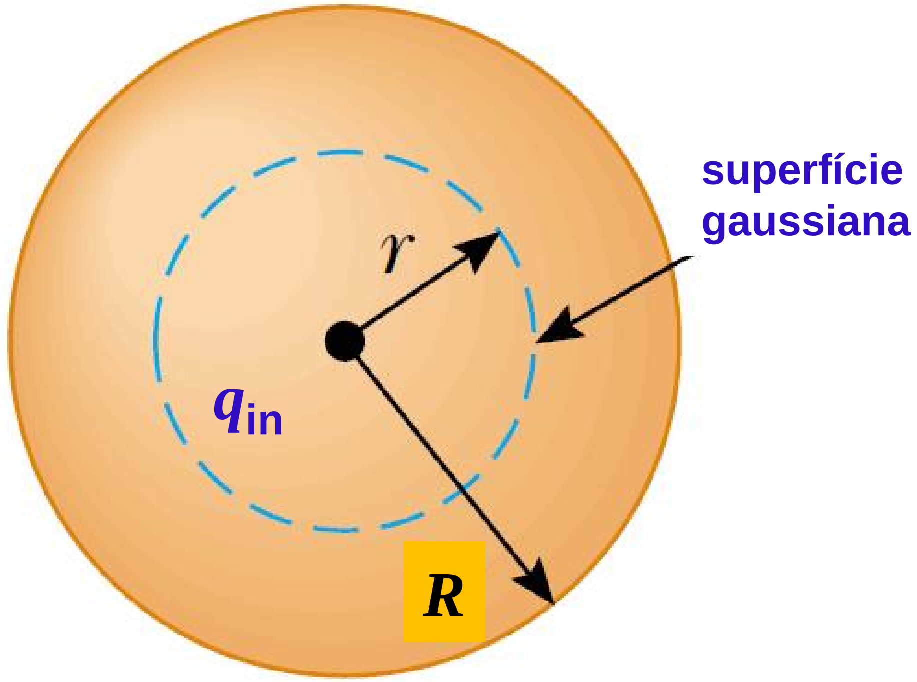
$$\sigma_2 = \frac{q_2}{4\pi c^2} = \frac{-q_1}{4\pi c^2} = \frac{-(-Q)}{4\pi c^2} \Rightarrow \boxed{\sigma_2 = \frac{Q}{4\pi c^2}}$$

Exemplo 4:



Uma distribuição de carga esfericamente simétrica e com raio R, tem uma densidade de carga $\rho = a/r$, onde a é uma constante. Encontrar o campo elétrico em função de r (para $r < R$).

Solução:



Segundo a Lei de Gauss:

$$\Phi_E = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{q_{\text{in}}}{\epsilon_0}$$

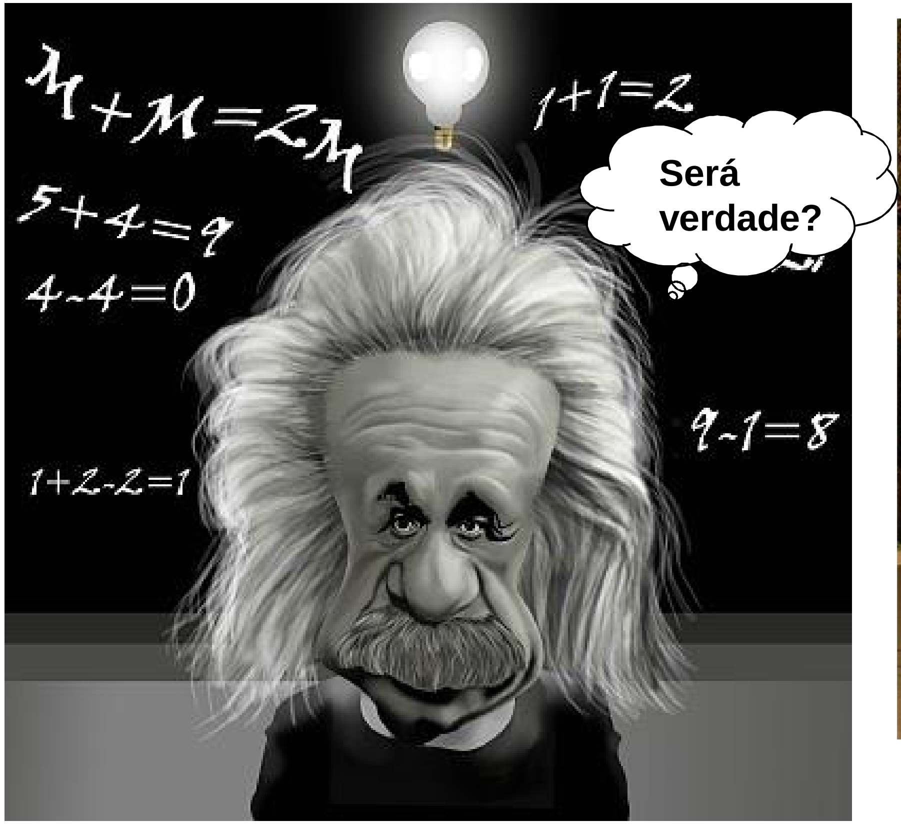
A carga q_{in} não é constante

$$q_{in} = \int \rho dV = \int_0^r \frac{a}{r} 4\pi r^2 dr = 4\pi a \int_0^r r dr = 4\pi a \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^r = 2\pi a r^2$$

$$E\left(4\pi r^2\right) = \frac{2\pi a r^2}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad \boxed{E = \frac{a}{2\varepsilon_0}}$$

(o campo elétrico dentro da esfera é constante)

FIM



Gaiola de Faraday