BCJ0204 – Fenômenos Mecânicos

Terceiro quadrimestre letivo de 2018

Coordenador de Teoria: Maximiliano Ujevic Tonino

Lista de Exercícios 6
Cinemática e Dinânica Rotacional - Momento Angular

1. Uma partícula de massa m executa um movimento circular, descrito pelo vetor posição

$$\mathbf{r} = R[\cos\theta(t)\ \mathbf{i} + \mathrm{sen}\,\theta(\mathrm{t})\ \mathbf{j}]\ ,$$

em que $\theta(t) = \theta_0 + \omega_0 t + \alpha t^2/2$, com R, θ_0, ω_0 e α constantes positivas. (a) Determine os vetores velocidade, $\mathbf{v}$, e aceleração, $\mathbf{a}$; (b) mostre que $\mathbf{v}$ é perpendicular ao vetor $\mathbf{r}$; (c) calcule $\mathbf{r} \times \mathbf{p}$, o produto vetorial entre os vetores posição e momento linear.

2. Um automóvel viajando a 80 km/h possui pneus com 75,0 cm de diâmetro. (a) Qual é a velocidade angular dos pneus (em rad/s) em torno dos seus eixos? (b) Se o carro é parado uniformemente em 30 voltas completas dos pneus (sem deslizamento), qual é o módulo da aceleração angular das rodas? (c) Que distância o carro percorre durante a frenagem?

3. Um pulsar é uma estrela de nêutrons em rápida rotação em torno de seu eixo a qual emite um feixe de radiação da mesma forma que um farol emite luz para orientar navios. Nós recebemos um pulso de radiação para cada rotação da estrela (por isso o nome *Pulsar*). O período T da rotação é encontrado medindo-se o intervalo de tempo entre os pulsos. O pulsar na nebulosa do Caranguejo tem um período de rotação de $T = 0,033$ s que está crescendo a uma taxa de $1,26 \times 10^{-5}$ s/ano. (a) Qual é a aceleração angular α do pulsar? (b) Se α é constante, daqui a quantos anos o pulsar vai parar de girar? (c) O pulsar teve origem em uma explosão de uma supernova observada em 1054. Supondo que a aceleração seja constante, encontre o período T inicial.

4. Dados dois vetores quaisquer $\mathbf{a} = a_x\ \mathbf{i} + a_y\ \mathbf{j} + a_z\ \mathbf{k}$ e $\mathbf{b} = b_x\ \mathbf{i} + b_y\ \mathbf{j} + b_z\ \mathbf{k}$, dependentes do tempo, (a) mostre explicitamente que

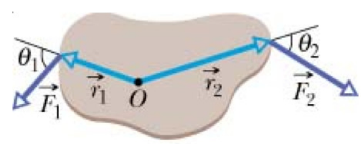
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \frac{\mathrm{d}\mathbf{a}}{\mathrm{d}t} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \frac{\mathrm{d}\mathbf{b}}{\mathrm{d}t}\ .$$

(b) No caso de uma partícula de massa m, se $\mathbf{r}$ é o seu vetor posição e $\mathbf{p}$ o seu vetor momento linear, mostre que

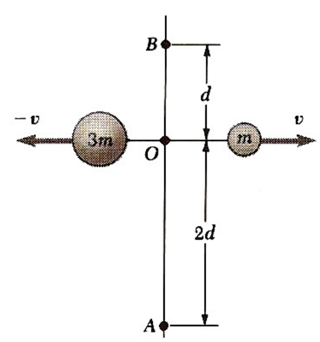
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathbf{r} \times \mathbf{p}) = \mathbf{r} \times \frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t}\ .$$

Como $\mathbf{l} \equiv \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ é o vetor momento angular, $\frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{F}$ e $\tau \equiv \mathbf{r} \times \mathbf{F}$, temos que $\frac{\mathrm{d}\mathbf{l}}{\mathrm{d}t} = \tau$.

5. O corpo da figura abaixo pode girar em torno de um eixo perpendicular à página passando por O e duas forças atuam sobre ele, como mostrado. Se $r_1 = 1,30$ m, $r_2 = 2,15$ m, $F_1 = 4,20$ N, e $F_2 = 4,90$ N, $\theta_1 = 75,0°$ e $\theta_2 = 60,0°$, qual é o torque resultante em torno do pivô em O?



6. Duas partículas se movem em sentidos opostos sobre uma reta. A partícula de massa m desloca-se para a direita, com velocidade v, enquanto a partícula de massa $3m$ se desloca para a esquerda, com velocidade $-v$. Qual o momento angular *total* do sistema em relação (a) ao ponto A, (b) ao ponto O e (c) ao ponto B?



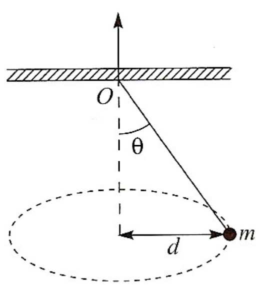
7. Uma partícula de 3,0 kg com velocidade $\mathbf{v} = (5,0\ \mathrm{m/s})\ \mathbf{i} - (6,0\ \mathrm{m/s})\ \mathbf{j}$ está em $x = 3,0$ m, $y = 8,0$ m. Ela é puxada por uma força de 7,0 N no sentido negativo de x. Em torno da origem, quais são (a) o momento angular da partícula, (b) o torque que atua sobre a partícula e (c) a taxa na qual o momento angular está variando?

8. Um disco de vinil de massa 0,10 kg e raio 0,10 m gira livremente em torno de um eixo vertical que passa pelo seu centro com uma velocidade angular de 4,7 rad/s. O momento de inércia do disco em trono do seu eixo de rotação é igual a $5,0 \times 10^{-4}$

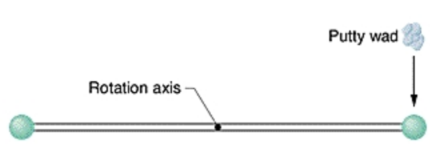
kg·m^2. Um pedaço de massa de vidraceiro úmida de massa 0,020 kg cai verticalmente e se gruda na borda do disco. Qual a velocidade angular do disco imediatamente após a massa se grudar nele?

9. Uma porta de 15 kg e 70 cm de largura, suspensa por dobradiças bem azeitadas, está aberta de 90°, ou seja, com seu plano perpendicular ao plano do batente. Ela leva um empurrão na beirada aberta, com impacto equivalente ao de uma massa de 1 kg, com velocidade de 2,5 m/s. Quanto tempo leva para fechar-se?

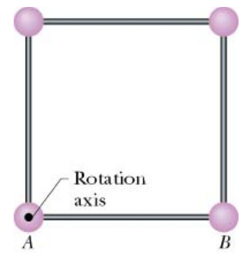
10. Uma bolinha presa a um fio de massa desprezível gira em torno de um eixo vertical com velocidade escalar constante, mantendo-se a uma distância $d = 0,5$ m do eixo; o ângulo θ é igual a 30° (veja figura). O fio passa sem atrito através de um orifício O numa placa, e é puxado lentamente para cima até que o ângulo θ passa a 60°. (a) Que comprimento do fio foi puxado? (b) De que fator variou a velocidade de rotação?



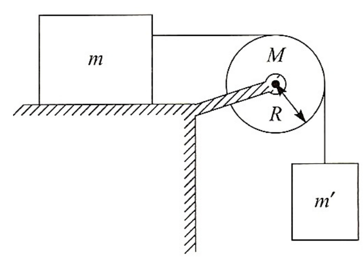
11. Duas bolas, cada uma de massa M, estão presas às extremidades de uma haste fina de massa desprezível, de comprimento d. A haste está livre para girar em um plano vertical sem atrito em torno de um eixo horizontal que passa pelo seu centro. Com a haste inicialmente horizontal, um pedaço de massa de vidraceiro úmida, de massa m, cai sobre uma das bolas, batendo nela com uma velocidade v_0 e ficando grudada na bola. (a) Qual o módulo da velocidade angular do sistema imediatamente após a batida do pedaço de massa de vidraceiro? (b) Qual o valor mínimo de v_0, em função de m, M, d e g, tal que a haste consiga dar uma volta completa?



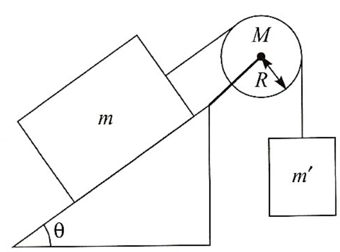
12. Quatro partículas, cada uma de massa 0,20 kg, estão colocadas nos vértices de um quadrado de 0,50 m de lado. As partículas estão conectadas por hastes de massas desprezíveis. Este corpo rígido pode girar num plano vertical em torno do eixo horizontal A que passa por umas das partículas. O corpo é abandonado a partir do repouso com a haste AB na horizontal, como mostrado na figura. (a) Qual é o momento de inércia do corpo em torno do eixo A? (b) Qual é a velocidade angular do corpo em torno do eixo A no instante em que a haste AB passa pela posição vertical?



13. Um bloco de massa m, que pode deslizar com atrito desprezível sobre um plano inclinado de inclinação θ em relação à horizontal, está ligado por um fio, que passa sobre uma polia de raio R e massa M, a uma massa $m' > m$ suspensa (vide figura abaixo). O sistema é solto em repouso. Calcule, por conservação da energia, a velocidade v de m' após cair de uma altura h.

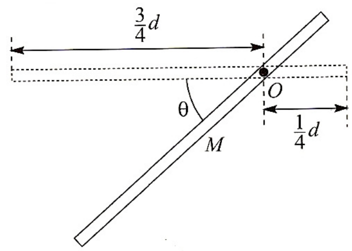


14. Calcule o efeito da massa M da polia, de raio R, sobre o sistema da figura abaixo. A massa m, que desliza sem atrito, está ligada à massa suspensa m' pelo fio que passa sobre a polia. Determine (a) a aceleração a do sistema; (b) as tensões T e T' nos fios ligados a m e m'.

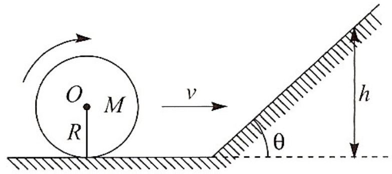


15. Uma haste metálica delgada, de comprimento d e massa M, pode girar livremente em torno de um eixo horizontal, que a atravessa perpendicularmente, à distância $d/4$ de uma

extremidade. A haste é solta a partir do repouso, na posição horizontal. (a) Calcule o momento de inércia I da haste, com respeito ao eixo em torno do qual ela gira. (b) Calcule a velocidade angular ω adquirida pela haste após ter caído de um ângulo θ, bem como a aceleração angular α.

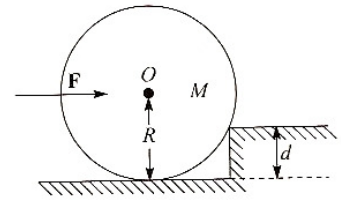


16. Uma roda cilíndrica homogênea, de raio R e massa M, rola sem deslizar sobre um plano horizontal, deslocando-se com velocidade v, e sobe sobre um plano inclinado de inclinação θ, continuando a rolar sem deslizamento. Até que altura h o **centro da roda** subirá sobre o plano inclinado?

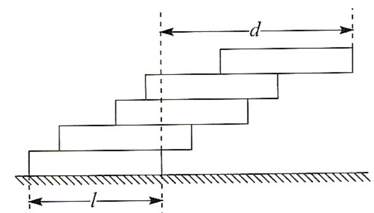


17. Determinar a aceleração do centro de massa de (a) um disco maciço uniforme e (b) um aro uniforme que rolam por um plano inclinado de inclinação θ. (c) Qual o coeficiente de atrito de rolamento mínimo necessário para manter o movimento de rolamento puro do disco e do aro?

18. Calcule a magnitude da força $\mathbf{F}$ horizontal que é preciso aplicar, em direção ao eixo O, para conseguir que um tambor cilíndrico, de massa M e raio R, suba um degrau de altura $d < R$.



19. Empilham-se 5 blocos idênticos, de comprimento ℓ cada um, sobre uma mesa horizontal. Qual é a distância d máxima entre as extremidades do último e do primeiro bloco (vide figura) para que a pilha não desabe? (*Sugestão*: considere as condições de equilíbrio, sucessivamente, de cima para baixo. Faça a experiência! Use blocos de madeira, livros, tijolos, dominós,... idênticos.)



Respostas: **1.** (a) $\mathbf{v} = R(w_0 + \alpha t)[-\sin\theta\ \mathbf{i} + \cos\theta\ \mathbf{j}]$, $\mathbf{a} = [-R\alpha\sin\theta - R(w_0+\alpha t)^2\cos\theta]\ \mathbf{i} + [R\alpha\cos\theta - R(w_0 + \alpha t)^2\sin\theta]\ \mathbf{j}$; (b) $\mathbf{v}\cdot\mathbf{r} = 0 \Rightarrow \mathbf{v} \perp \mathbf{r}$; (c) $mR^2(w_0 + \alpha t)\ \mathbf{k}$. **2.** (a) 59,3 rad/s; (b) -9,33 rad/s^2; (c) 70,7 m. **3.** (a) $-2,34 \times 10^{-9}$ rad/s^2; (b) $2,7 \times 10^3$ anos; (c) 0,024 s. **5.** -3,85 m·N **k**. **6.** (a) $4mvd$ **k**; (b) 0; (c) $-2mvd$ **k**. **7.** (a) -174 (kg·m^2/s) **k**; (b) 56 m·N **k**; (c) 56 m·N **k**. **8.** 3,4 rad/s. **9.** 2,2 s. **10.** (a) 0,6 m; (b) 1,4. **11.** (a) $mv_0/[d(M + m/2)]$; (b) $\sqrt{(2M + m)gd/m}$. **12.** (a) 0,20 kg·m^2; (b) 6,3 rad/s. **13.** (a) $a = m'g/(m + m' + M/2)$; (b) $T = ma$, $T' = m'(g - a)$. **14.** $v^2 = 2gh(m' - m\sin\theta)/(m + m' + M/2)$. **15.** (a) $7Md^2/48$; (b) $\omega^2 = 24g\sin\theta/(7d), \alpha = 12g\cos\theta/(7d)$. **16.** $R + 3v^2/(4g)$. **17.** (a) $(2g\sin\theta)/3$; (b) $(g\sin\theta)/2$; (c) $\mu_{disco} = (\tan\theta)/3$, $\mu_{aro} = (\tan\theta)/2$. **18.** $F = Mg\sqrt{d(2R - d)}/(R - d)$. **19.** $(25/24)l$.