

Capítulo 12 – Dinâmica de Corpos Rígidos

Breve Revisão

Dois pontos quaisquer de um corpo rígido têm sempre a mesma distância (fixa e constante no tempo). Para localizar qualquer ponto do corpo rígido basta fornecer a posição de 3 pontos A, B e C. Teremos então 9 coordenadas de posições. Com o elo de 3 equações das distâncias AB, BC e AC, sobrarão 6 coordenadas que corresponderão aos *6 graus de liberdade de um corpo rígido*: 3 de translação do CM e 3 de rotação.

Um corpo rígido pode ser descrito por 2 equações:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = M\vec{A} = \vec{F}^e$$

onde \vec{P} é o vetor momento linear do corpo rígido, M a sua massa, \vec{A} a aceleração do CM e \vec{F}^e a força resultante externa. Essa equação diferencial descreve a translação do CM.

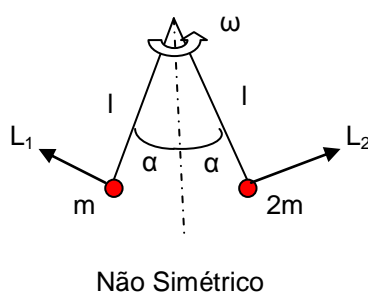
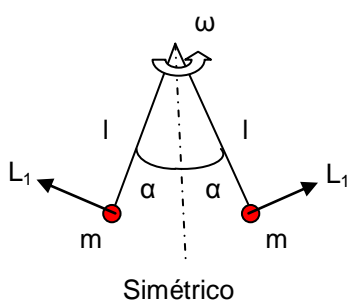
$$\frac{d\vec{L}'}{dt} = \vec{\tau}'^e$$

onde \vec{L}' é o vetor momento angular medido no CM e $\vec{\tau}'^e$ é o vetor torque medido no CM.

Todo corpo rígido que é *simétrico* em relação ao eixo de rotação, tem \vec{L} na mesma direção do eixo de rotação e mesma direção e sentido do vetor velocidade angular $\vec{\omega}$, isto é,

$$\vec{L} = I\vec{\omega} \text{ e no CM teremos } \vec{L}' = I_{CM}\vec{\omega} \text{ e } \vec{\tau}'^e = I_{CM}\vec{\alpha}$$

onde I é o momento de inércia em relação ao eixo senão vejamos. Duas barras sem massa, de comprimento l , girando com velocidade angular ω e formando um ângulo α em relação ao eixo.



$$\text{Caso Simétrico: } L = 2L_1 = 2lp = 2lm\omega l \sin(\alpha) = 2ml^2\omega \sin(\alpha)$$

$$\text{componente horizontal} = 0$$

$$\text{componente vertical} = 2L_1 \sin(\alpha) = [2ml^2 \sin^2(\alpha)]\omega \rightarrow \vec{L} = I\vec{\omega}$$

$$\text{Caso Não Simétrico: } L_1 = ml^2\omega \sin(\alpha); L_2 = 2ml^2\omega \sin(\alpha)$$

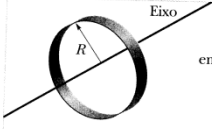
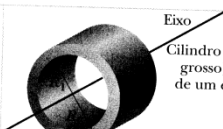
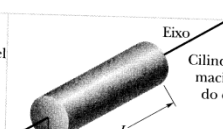
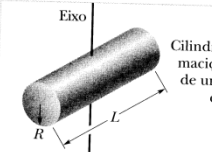
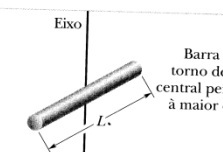
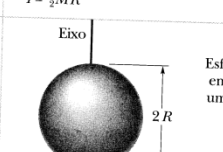
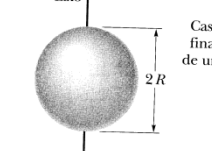
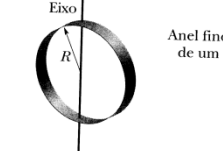
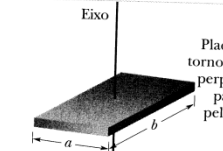
$$\text{componente horizontal} = (L_2 - L_1)\cos(\alpha) = ml^2\omega \sin(\alpha)\cos(\alpha)$$

$$\text{componente vertical} = (L_2 + L_1)\sin(\alpha) = [3ml^2 \sin^2(\alpha)]\omega \rightarrow \vec{L} \neq I\vec{\omega}$$

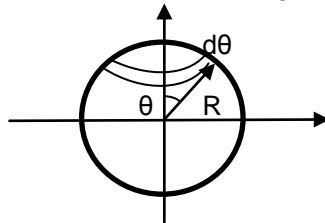
Momento de Inércia

definição: $I = \int r^2 dm$

O valor de I depende completamente do eixo de rotação escolhido.

 <p>Anel fino em torno de um eixo central</p> <p>$I = MR^2$</p> <p>(a)</p>	 <p>Cilindro oco (ou anel grosso) em torno de um eixo central</p> <p>$I = \frac{1}{2}M(R_1^2 + R_2^2)$</p> <p>(b)</p>	 <p>Cilindro (ou disco) maciço em torno do eixo central</p> <p>$I = \frac{1}{2}MR^2$</p> <p>(c)</p>
 <p>Cilindro (ou disco) maciço em torno de um diâmetro central</p> <p>$I = \frac{1}{12}MR^2 + \frac{1}{12}ML^2$</p> <p>(d)</p>	 <p>Barra fina em torno de um eixo central perpendicular à maior dimensão</p> <p>$I = \frac{1}{12}ML^2$</p> <p>(e)</p>	 <p>Esfera maciça em torno de um diâmetro</p> <p>$I = \frac{2}{5}MR^2$</p> <p>(f)</p>
 <p>Casca esférica fina em torno de um diâmetro</p> <p>$I = \frac{2}{3}MR^2$</p> <p>(g)</p>	 <p>Anel fino em torno de um diâmetro</p> <p>$I = \frac{1}{2}MR^2$</p> <p>(h)</p>	 <p>Placa fina em torno de um eixo perpendicular passando pelo centro</p> <p>$I = \frac{1}{12}M(a^2 + b^2)$</p> <p>(i)</p>

Vejamos o cálculo de uma casca esférica homogênea de massa M e raio R.



$$\sigma = \frac{dm}{dA} = \frac{M}{4\pi R^2}; dA = 2\pi r \cdot R d\theta = 2\pi R^2 \sin(\theta) d\theta, \quad \text{pois } r = R \sin(\theta)$$

$$I = \int r^2 dm = \sigma \int_0^\pi 2\pi r^4 d\theta = 2\pi \sigma R^4 \int_0^\pi \sin^3(\theta) d\theta = 2\pi \sigma R^4 \left[\int_0^\pi \sin(\theta)(1 - \cos^2(\theta)) d\theta \right]$$

$$I = 2\pi \sigma R^4 \left[-\cos(\theta) + \frac{\cos^3(\theta)}{3} \right]_0^\pi = 2\pi \sigma R^4 \left[2 - \frac{2}{3} \right] = \frac{8}{3} \pi \sigma R^4 = \frac{2}{3} MR^2$$

Teorema dos eixos paralelos

$$I = I_{CM} + Md^2$$

Teorema dos eixos perpendiculares

$$I_z = I_x + I_y \quad (\text{só válido para figuras planas})$$

Torque da gravidade

Suponha um campo gravitacional uniforme sobre um sistema de N partículas.

$$\vec{\tau}^e = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times m_i \vec{g} = \left[\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i \right] \times \vec{g} = M \vec{R} \times \vec{g}$$

onde M é a massa total do sistema e \vec{R} o vetor posição do CM.

Tudo se passa como se o sistema todo estivesse colapsado com massa M no CM. Se estivermos no referencial do CM, $\vec{R} = 0$ e $\vec{\tau}^e = 0$ e a força da gravidade não pode gerar aceleração angular. Além disso, no caso do campo gravitacional uniforme, o CM coincide com o Centro de Gravidade.

Energia Cinética

A energia cinética do sistema no laboratório T vale

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i v_i^2$$

Seja \vec{v}_i' e \vec{V} a velocidade da partícula i no CM e a velocidade do CM, respectivamente. Então

$$\vec{r}_i - \vec{R} = \vec{r}_i' \rightarrow \vec{v}_i = \vec{v}_i' + \vec{V}$$

logo, $T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i v_i'^2 + (\sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i') \cdot \vec{V} + \frac{1}{2} (\sum_{i=1}^N m_i) V^2$. Como o 2º. termo é nulo, teremos

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i v_i'^2 + \frac{1}{2} M V^2$$

Se o movimento do corpo rígido se faz num plano, então $\vec{\omega}$ é perpendicular a esse plano

$$\vec{v}_i' = \vec{\omega} \times \vec{r}_i' \rightarrow v_i' = \omega r_i' \sin(\alpha_i)$$

mas $d_i' = r_i' \sin(\alpha_i)$ é a distância da partícula i ao eixo de rotação no CM.

Logo, $\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i v_i'^2 = \frac{1}{2} \omega^2 \sum_{i=1}^N m_i d_i'^2 = \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2$. Portanto,

$$T = \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2 + \frac{1}{2} M V^2$$

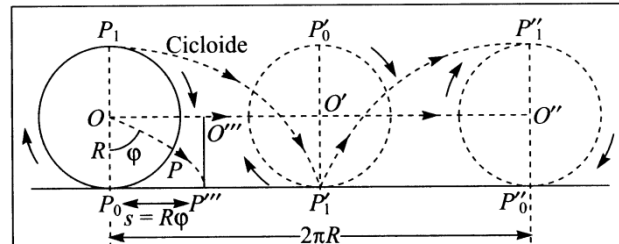
Rolamento

Uma roda *rola sem escorregar* se cada ponto da periferia toca um e somente um ponto do plano horizontal.

Na figura abaixo, se um ponto P da periferia está a um ângulo ϕ da vertical, se o disco rolar sem deslizar, ele tocará o solo a uma distância

$$s = R\phi$$

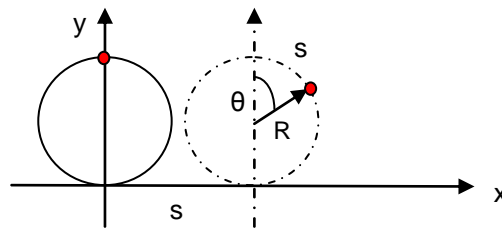
Essa também será a distância percorrida pelo CM.



Derivando em relação ao tempo

$$V = R\omega$$

O ponto P_1 descreve uma curva chamada *ciclóide*. Obtenha a curva ciclóide

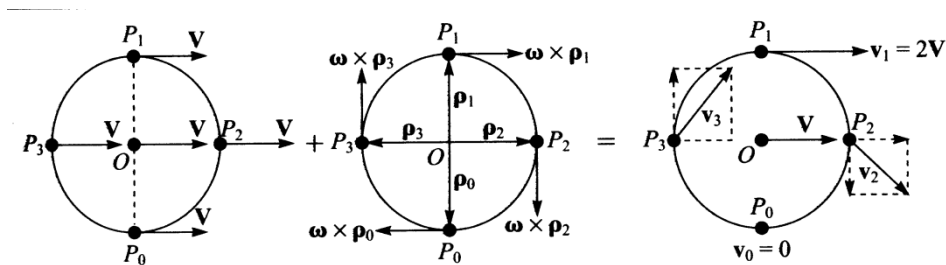


$$x = s + R \sin(\theta) ; \quad y = R + R \cos(\theta) ; \quad s = R\theta \quad \rightarrow \quad \text{curva parametrizada pelo ângulo } \theta$$

A velocidade de um ponto qualquer do disco é dada por

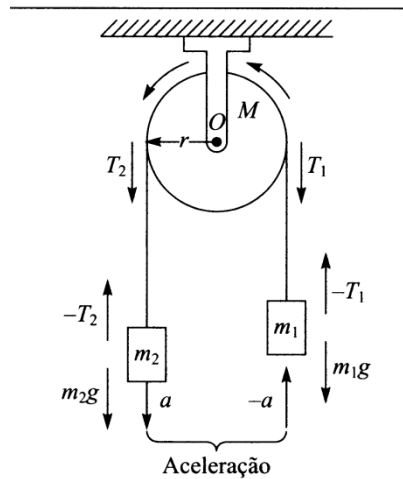
$$\vec{v} = \vec{V} + \vec{\omega} \times \vec{r}$$

Onde $\vec{\omega}$ é perpendicular ao plano da figura (entrando). Em particular, na periferia, $|\vec{r}| = R$.



Num rolamento sem escorregamento, a força de atrito não realiza trabalho pois não há deslocamento ($v = 0$) do ponto de contacto, logo conserva energia mecânica.

A Máquina de Atwood



Uma polia no formato de um disco homogêneo de raio r e massa M tem 2 corpos de massas m_1 e m_2 presos por uma corda sem massa e inextensível. Supondo que a corda role sem deslizar pela polia, determine a aceleração a do sistema.

Vamos adotar o sentido positivo para baixo.

Equações de translação:

$$T_1 - m_1g = m_1a \quad (1)$$

$$m_2g - T_2 = m_2a \quad (2)$$

Equação de rotação:

$$(T_2 - T_1)r = I\alpha = \frac{1}{2}Mr^2\alpha \quad (3)$$

Condição de rolar sem deslizar:

$$a = \alpha r \quad (4)$$

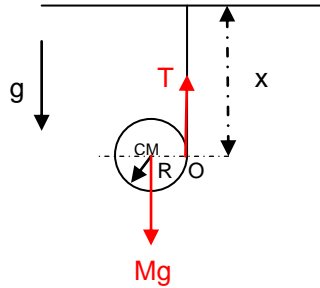
Substituindo (1), (2) e (4) em (3) temos

$$a = \frac{(m_2 - m_1)g}{m_1 + m_2 + \frac{M}{2}}$$

Logo, os corpos se movem num movimento uniformemente acelerado e a polia executa uma rotação uniformemente acelerada

$$\alpha = \frac{a}{r}$$

O Ioiô



Translação do CM:

$$Mg - T = MA \quad (1)$$

Rotação no CM:

$$TR = I_{CM}\alpha \quad (2)$$

Rolar sem escorregar:

$$V = \omega R \rightarrow A = \alpha R \quad (3)$$

Eliminando α de (3) substituindo em (2), teremos 2 equações para T e A. Donde

$$T = \frac{Mg}{1 + \frac{MR^2}{I_{CM}}}; \quad A = \frac{R^2}{I_{CM}} T$$

Definindo o raio de giração k : $I = Mk^2$, e, para o CM, $I_{CM} = Mk_{CM}^2$

$$T = \frac{Mg}{1 + \frac{R^2}{k_{CM}^2}}; \quad A = \frac{g}{1 + \frac{k_{CM}^2}{R^2}} < g$$

Resultados que mostram que o CM faz um movimento uniformemente acelerado (com aceleração menor que g) assim como a rotação é uniformemente acelerada.

A energia cinética no Lab é dada por

$$E_c = \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2 + \frac{1}{2} MV^2$$

Substituindo (3), temos (usando o teorema dos eixos paralelos)

$$E_c = \frac{1}{2} \omega^2 (I_{CM} + MR^2) = \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{Mk^2 V^2}{2R^2}$$

onde I é o momento de inércia em relação ao ponto O. Este ponto é o *eixo instantâneo de rotação*. Dessa forma, no Lab, tudo se passa como se só houvesse movimento de rotação em torno de um eixo instantâneo, rotação que não se “concretiza”, pois o corpo tenta girar em torno de um ponto que se altera no tempo.

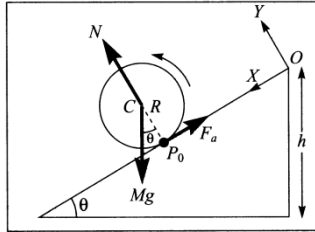
Poderíamos ter obtido a solução do problema usando conservação de energia. Soltando o ioiô do repouso a partir de uma altura x_0 e colocando referencial zero em $x = 0$, teremos

$$-Mgx_0 = -Mgx + \frac{Mk^2 V^2}{2R^2} \rightarrow V^2 = 2g \frac{R^2}{k^2} (x - x_0) \dots \text{"Torricelli"}$$

Plano Inclinado

Suponha um corpo circular rolando sem escorregar por um plano inclinado de um ângulo θ . Se um anel, um cilindro e uma esfera têm mesma massa M e raio R , qual deles chegará primeiro ao final do plano?

Na figura abaixo temos o diagrama de forças



Translação do CM:

No referencial XY da figura temos as componentes

$$X \rightarrow Mg \sin(\theta) - F_a = MA \quad (1a)$$

$$Y \rightarrow N - Mg \cos(\theta) = 0 \quad (1b)$$

Rotação no CM:

$$F_a R = I_{CM} \alpha = M k^2 \alpha \quad (2)$$

onde k é o raio de giração

Rolar sem escorregar:

$$V = R\omega \rightarrow A = R\alpha \quad (3)$$

Substituindo (3) em (2) temos $F_a = \frac{k^2}{R^2} A$ que substituído em (1a) fornece

$$A = \frac{g \sin(\theta)}{1 + \frac{k^2}{R^2}}$$

$$\frac{1}{1 + \frac{k^2}{R^2}} = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{para o anel} \\ \frac{2}{3} & \text{para o cilindro} \\ \frac{5}{7} & \text{para a esfera} \end{cases}$$

Logo, a esfera chegará em primeiro ao final do plano!

Observe que $A < g \sin(\theta)$ pois parte da energia cinética é utilizada para a rotação.

Como $F_a = Mg \sin(\theta) \frac{k^2}{k^2 + R^2} \leq \mu_e N = \mu_e Mg \cos(\theta)$, então

$$\tan(\theta) \leq \tan(\theta_c) = \mu_e \frac{k^2 + R^2}{k^2}$$

Onde θ_c é o maior ângulo de inclinação possível do plano para o qual é possível rolar sem deslizar.

Se o corpo é abandonado do repouso da altura h e percorre todo o plano, isto é, um comprimento l ($h = l \sin(\theta)$) então, chegará ao final do plano com velocidade V dada por

$$V^2 = 2Al = \frac{2gR^2 l \sin(\theta)}{k^2 + R^2} = 2gh \frac{R^2}{k^2 + R^2}$$

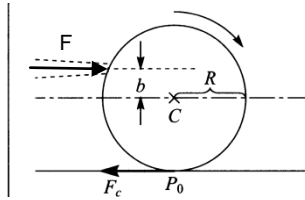
A energia cinética correspondente será $T = \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2 + \frac{1}{2} MV^2$, mas $I_{CM} = Mk^2$ e $\omega^2 = \frac{V^2}{R^2}$

$$T = \frac{1}{2} MV^2 \left(1 + \frac{k^2}{R^2} \right) = Mgh$$

que expressa a conservação de energia mecânica.

Bola de Bilhar

É um exemplo de *rolar com deslizamento*.



Condições Iniciais:

Suponha que o taco atinja a bola no plano mediano com parâmetro de choque b acima do CM. A força impulsiva atua por curto intervalo de tempo Δt e tira a bola do repouso, dando ao CM velocidade inicial V_0 (vamos adotar para a direita como o sentido positivo, isto é, $\vec{V}_0 = V_0 \hat{i}$)

$$\Delta P = F \Delta t = MV_0$$

Durante a atuação de F ela dará um torque que no CM vale

$$\Delta L' = \tau' \Delta t = Fb \Delta t = I_{CM} \omega_0 = MV_0 b$$

onde ω_0 é a velocidade angular inicial e vale $\omega_0 = \frac{5}{2} \frac{V_0 b}{R^2}$ pois, $I_{CM} = \frac{2}{5} MR^2$

Observe que o ponto P_0 de contacto com a mesa tem velocidade inicial

$$v_0 = V_0 - \omega_0 R = V_0 \left(1 - \frac{5b}{2R} \right) \quad (1)$$

$$\text{e } \vec{v}_0 = V_0 \left(1 - \frac{5b}{2R} \right) \hat{i}$$

O sinal negativo vem do fato que supusemos a tacada acima do CM, gerando uma rotação horária. Se a tacada fosse abaixo do CM seria gerada uma rotação anti-horária e o sinal em (1) seria positivo.

Muito importante, a equação (1) define um valor crítico para b , $b_c = \frac{2R}{5}$.

Se $b = b_c \rightarrow v_0 = 0$ e a bola rola sem escorregar

Se $b > b_c \rightarrow v_0 < 0$ a bola escorrega para a esquerda e a força de atrito cinético F_c será para a direita

Se $b < b_c \rightarrow v_0 > 0$ a bola escorrega para a direita e a força de atrito cinético F_c será para a esquerda (como na figura)

Após a tacada

Após a tacada, A força F zera e a força resultante sobre a bola vale:

$$\vec{F}_R = -F_c \hat{i} + (N - Mg) \hat{j} = MA \hat{i}$$

onde $F_c = \mu_c N$ é a força de atrito cinética (que atua enquanto houver deslizamento).

Como $N = Mg$, teremos para a translação a desaceleração

$$A = -\mu_c g \quad (2)$$

Integrando (2) no tempo, com a condição inicial: $V(t = 0) = V_0$ temos

$$V(t) = V_0 - \mu_c g t \quad (3)$$

Para a rotação, com $b < b_c$, o torque virá agora da força de atrito cinético

$$F_c R = I_{CM} \alpha = \frac{2}{5} M R^2 \alpha$$

Note que a força de atrito, produz torque que roda a bola de bilhar no sentido horário, com uma *aceleração angular*

$$\alpha = \frac{5}{2} \frac{g \mu_c}{R} \quad (4)$$

Integrando (4) com a condição inicial $\omega(t = 0) = \omega_0$, teremos

$$\omega(t) = \omega_0 + \frac{5}{2} \frac{g \mu_c}{R} t \quad (5)$$

A velocidade linear correspondente será $v_r(t) = \omega(t)R$ e no ponto P_0 dirigida para a esquerda (negativa). A velocidade $v(t)$ do ponto P_0 será

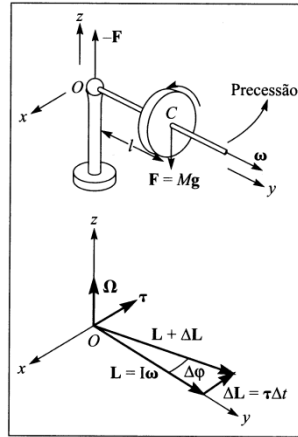
$$v(t) = V(t) - v_r(t) = V_0 - \omega_0 R - \frac{7}{2} \mu_c g t = v_0 - \frac{7}{2} \mu_c g t$$

No instante $t = T$ a bola de bilhar terá velocidade nula em relação a P_0 . Então para $t \geq T$ passa a rolar sem deslizar, conservando energia mecânica.

$$T = \frac{2}{7} \frac{V_0}{\mu_c g} \left(1 - \frac{5}{2} \frac{b}{R} \right)$$

O Giroscópio

Um giroscópio é basicamente um volante de massa M e que gira rapidamente em torno do seu centro (com momento de inércia I) ao qual está preso uma barra de massa desprezível e comprimento l . Se apoiarmos a outra extremidade da barra teremos uma configuração como mostrada na figura abaixo (já fixado o sistema de coordenadas cartesianas x, y, z)



O vetor velocidade angular se escreve:

$$\vec{\omega} = \omega \hat{j}$$

Como o volante é simétrico, teremos o vetor momento angular tem mesma direção da velocidade angular:

$$\vec{L} = I\vec{\omega} = I\omega \hat{j} \quad (1)$$

As forças que atuam no sistema estão mostradas na figura e são a força peso $\vec{F} = -Mg\hat{k}$ e força de reação oposta que está sobre o ponto O (origem do sistema de coordenadas).

O torque da força peso em relação ao ponto O, vale

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = (l \hat{j}) \times (-Mg \hat{k}) = -Mgl \hat{i} \quad (2)$$

Vemos que $\vec{\tau}$ é perpendicular a \vec{L} . Como $\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$ então $\vec{L} \cdot \vec{\tau} = 0 = \vec{L} \cdot \frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d(L^2)}{dt}$ o que significa que o módulo do vetor momento angular é constante, não se altera.

Por outro lado, num tempo infinitesimal Δt

$$\Delta \vec{L} = \vec{\tau} \Delta t = -Mgl \Delta t \hat{i}$$

também será perpendicular a \vec{L} (veja figura). Para um tempo infinitesimal Δt , o módulo ΔL será igual a um comprimento de arco numa circunferência de “raio” L . Ou seja,

$$\Delta L = L \Delta \varphi = \tau \Delta t$$

Definimos, então, a *velocidade de precessão* Ω

$$\Omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{\tau}{L} = \frac{Mgl}{I\omega}$$

vetorialmente

$$\vec{\Omega} = \frac{Mgl}{I\omega} \hat{k} \quad (3)$$

de (1), (2) e (3) temos

$$\vec{\tau} = \vec{\Omega} \times \vec{L}$$

Com o giroscópio em movimento de precessão, teremos 2 vetores momentos angulares: o primeiro, \vec{L} (devido à rotação do volante), que gira no plano x-y, pela ação do torque, mantendo seu módulo constante; o segundo, que tem direção e sentido de \hat{k} , cujo valor é $L_z = Ml^2\Omega$ e se mantém constante no movimento.

Na figura do giroscópio acima, só foram representadas as forças verticais..., obviamente, para manter o movimento circular de precessão tem que existir uma força centrípeta que a base de apoio O faz sobre o volante.

O único vetor torque $\vec{\tau}$ é gerado pela força peso e está no plano x-y. Dizemos que \vec{L} corre atrás de $\vec{\tau}$

Neste movimento estável de precessão temos *conservação de energia mecânica* (desprezando o atrito na base de apoio) que é a soma da *energia cinética de rotação do volante*, da *energia cinética de rotação devido à precessão* e da energia gravitacional. Esta situação corresponde a uma inicialização do giroscópio na qual fornecemos velocidade angular ω ao volante e, simultaneamente, damos velocidade de precessão Ω ao giroscópio.

Se a inicialização for apenas com velocidade angular ω do volante e $\Omega(t=0) = 0$, então o corpo inicialmente cairá e o momento angular L do volante terá uma componente z (negativa), essa variação de L na direção de z gera um torque na direção de z. Como nenhuma força presente produz torque na direção z tem que aparecer um torque oposto (restaurador como num pêndulo de torção) para compensar. Esse tipo de reação produz o movimento de *nutação*. Outra maneira de entender a nutação é por conservação de energia. Na inicialização com $\Omega = 0$, a energia cinética de rotação de precessão é inicialmente nula: para aumentar Ω o corpo cai diminuindo a energia gravitacional.

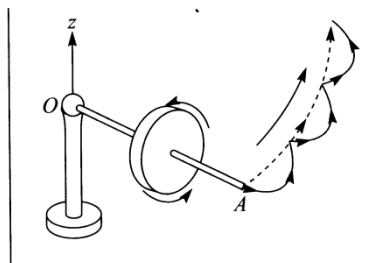
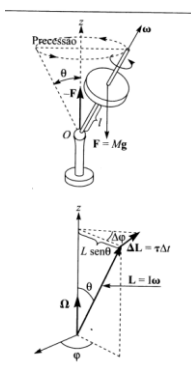


Figura 12.40 Nutação.

Se o volante forma um ângulo θ com a vertical, como na figura abaixo,



o vetor velocidade angular de precessão $\vec{\Omega}$, não sendo mais agora perpendicular a \vec{L} , tem componente ao longo e perpendicular ao volante. O momento angular na direção do volante já não é mais exclusivamente oriundo da rotação do volante. A análise fica bem mais complexa e requer a determinação dos eixos principais (diagonalização do tensor inercial). Na condição em que o volante gira muito rapidamente, mesmo que $\theta \neq \frac{\pi}{2}$, a equação de velocidade de precessão $\Omega = \frac{Mgl}{I\omega}$ se constitui numa *boa aproximação*. Esta fórmula define a assim chamada *precessão regular*.

Na figura abaixo vemos um motociclista que quer virar à direita e inclina o corpo para a direita. O momento angular das rodas é muito grande. O torque da força peso da moto em relação ao ponto O (de contacto com o chão) produz um torque para frente. O momento angular está para a direita então a velocidade angular de precessão Ω , $\vec{\tau} = \vec{\Omega} \times \vec{L}$, é perpendicular à figura e está apontando para dentro da figura dando uma rotação horária.

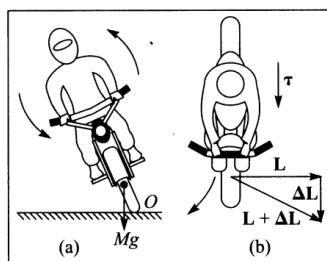


Figura 12.39 Motociclista virando à direita.

Uma suspensão Cardan é um sistema que permite rotações livres em torno dos 3 eixos ortogonais x, y e z (veja secção 12.7 a do Moysés para detalhes). Um volante girando preso à suspensão Cardan fica imune a quaisquer torques externos – o seu momento angular não muda, portanto, nem de direção nem de sentido. Vemos abaixo um giroscópio numa suspensão Cardan que colocado a girar no Equador na posição A, com direção e sentido Oeste-Leste, depois de 6 horas está na posição B, mas manteve o vetor momento angular $\vec{L} = I\vec{\omega}$. Este experimento bastaria para provar a rotação do nosso planeta, sem sair de sua superfície (como o pêndulo de Foucault).

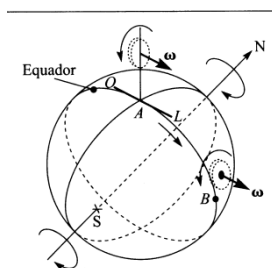


Figura 12.37 Giroscópio no equador.

A imutabilidade de direção do giroscópio montado numa suspensão Cardan é de enorme utilidade moderna desde a estabilização de navios contra as ondas do mar até o posicionamento de satélites.

Finalmente, uma precessão muito importante para nós que habitamos este planeta, é a chamada *Precessão do Equinócio*, que significa que o eixo de rotação da Terra norte – sul aponta ao longo dos milênios para diferentes estrelas. A Terra pode ser vista como esfera achatada no polos, um esferóide oblato. Sob a ação da Lua e, em menor intensidade, do Sol, este formato da Terra cria um torque (que na figura é perpendicular e aponta para fora). Como a rotação da Terra em torno do seu próprio eixo, gera um momento angular, a existência deste torque produz a Precessão do Equinócio (ok, nome ruim, pois o efeito maior ocorre nos solstícios).

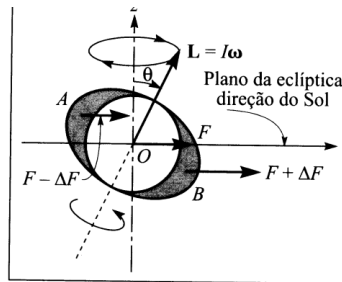


Figura 12.43 Origem da precessão.

Modelos simples aproximam um nosso planeta por um haltere e estimam o *período de precessão* do nosso planeta em 26.000 anos !!

Estática de Corpo Rígido

Para translação do CM: $\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}^e$ (1)

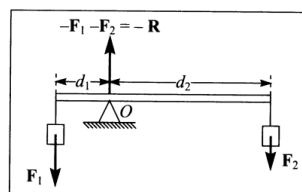
Para a rotação em torno do CM: $\frac{d\vec{L}'}{dt} = \vec{\tau}'^e$ (2)

Então a *condição necessária e suficiente para o equilíbrio estático de um corpo rígido* é

$$\vec{F}^e = 0 \quad e \quad \vec{\tau}'^e = 0$$

Para se determinar o CM de um corpo rígido basta pendurá-lo por dois pontos quaisquer diferentes...as linhas verticais se cruzarão obrigatoriamente no CM, já que, em equilíbrio, a força da gravidade alinha o CM na vertical (para zerar o torque).

Na figura abaixo vemos a alavanca submetida às forças dadas F_1 e F_2 . Com as equações (1) e (2) teremos



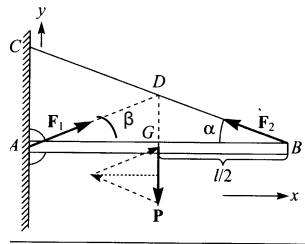
$$F_1 + F_2 = R$$

$$F_1 d_1 = F_2 d_2$$

$$d_1 + d_2 = L$$

Portanto, dadas as forças F_1 e F_2 e o comprimento da barra L , podemos calcular a reação R no apoio e a distância d_1 e d_2 para o equilíbrio

Na figura abaixo temos um mastro AB sustentado por um cabo BC. Conhecemos o peso P do mastro, o seu comprimento l e o ângulo α .



As condições de equilíbrio são

$$F_1 \cos(\beta) = F_2 \cos(\alpha)$$

$$F_1 \sin(\beta) + F_2 \sin(\alpha) = P$$

$$F_2 l \sin(\alpha) = P \frac{l}{2}$$

3 equações e 3 incógnitas F_1 , F_2 e β . Da equação do torque obtemos imediatamente o valor de F_2 : $F_2 \sin(\alpha) = P/2$, logo $F_1 \sin(\beta) = P/2$ e $\tan(\beta) = \frac{P}{2F_2 \cos(\alpha)} = \tan(\alpha) \rightarrow \beta = \alpha$

$$\beta = \alpha$$

$$F_1 = F_2 = \frac{P}{2 \sin(\alpha)}$$

Para corpos macroscópicos, a força normal muda seu ponto de aplicação para manter o equilíbrio.

Exemplo: um caixote quadrado de aresta L , massa M , está em repouso na carroceria de um caminhão. Há atrito com a superfície horizontal. Quando o caminhão acelera, onde está a normal para que o caixote não gire?

