

Four decorative squares are located in the corners of the slide. Each corner has a dark brown square and a yellow square overlapping it. A thin, light-colored arc curves across the background.

BC0209—Fenômenos Eletromagnéticos

Segundo quadrimestre de 2016

Prof. José Kenichi Mizukoshi

Aula 16 (versão 19/07/2015)

A Lei de indução de Faraday. A Lei de Lenz. A fem de movimento.

Four decorative squares are located in the corners of the slide. Each corner has a dark brown square and a yellow square overlapping it. A thin, light-colored arc curves across the background.

A Lei de Indução de Faraday; a Lei de Lenz; fem de Movimento

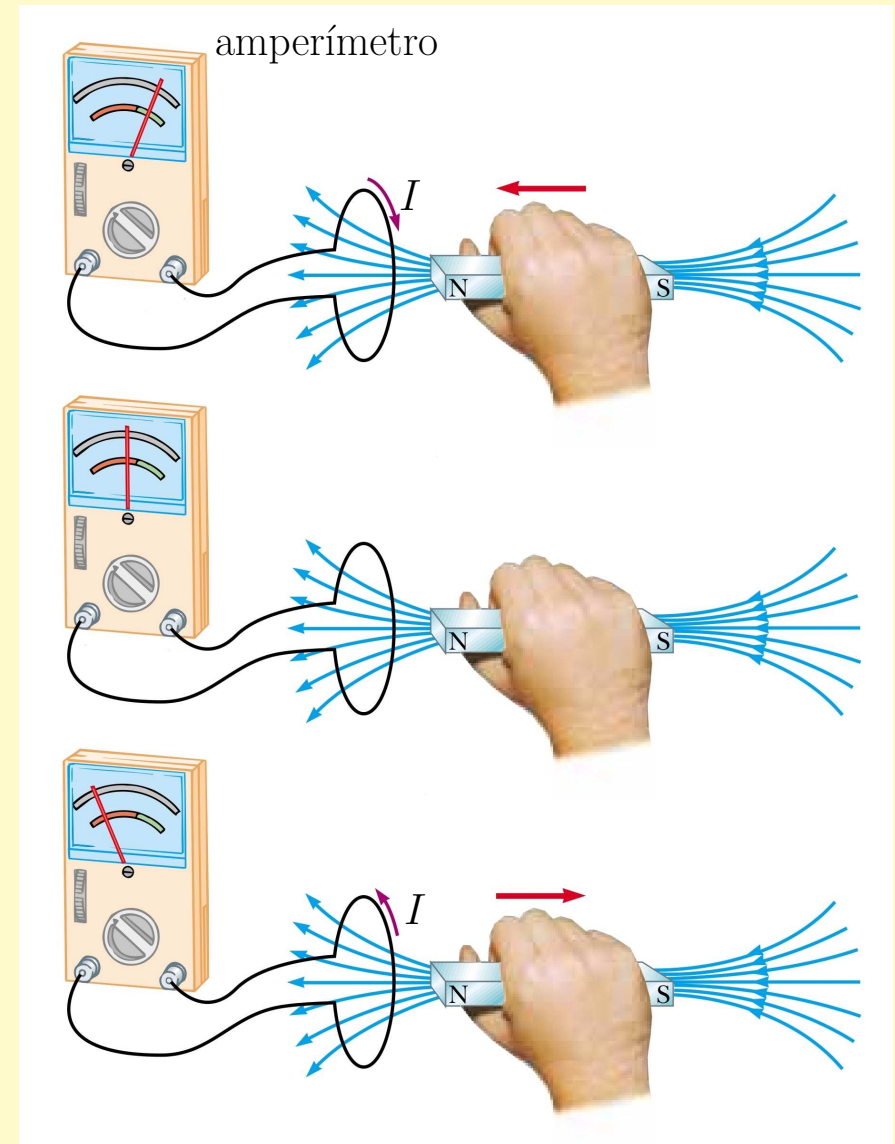
Lei da indução de Faraday

A Lei de Indução de Faraday; a Lei de Lenz; fem de Movimento Problemas Propostos

- Considere um circuito formado por uma espira de fio conectada a um amperímetro.

Conforme observados por M. Faraday em 1831 e por J. Henry, aproximadamente na mesma época, uma corrente elétrica é induzida no circuito quando há o movimento do ímã em relação à espira.

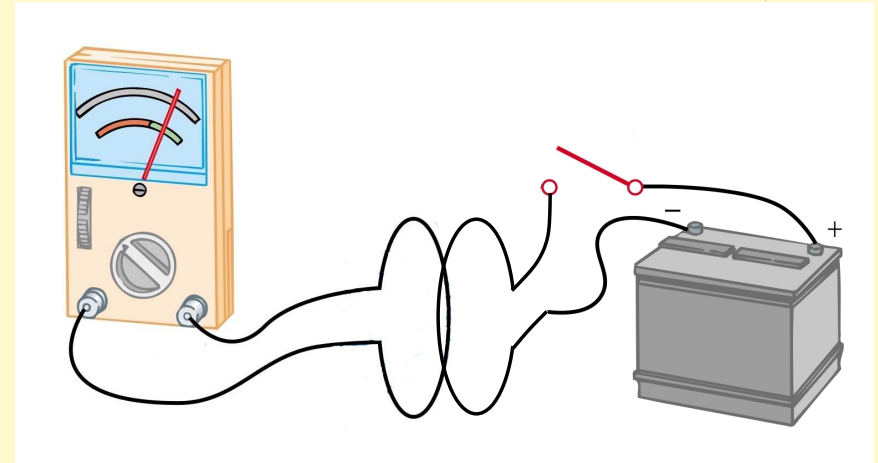
➡ uma corrente elétrica é induzida em um circuito quando o campo magnético variar com o tempo nesse circuito.




Lei da indução de Faraday

A Lei de Indução de Faraday; a Lei de Lenz; fem de Movimento Problemas Propostos

- Considere agora um outro aparato, com o ímã sendo substituído por uma espira conectada a uma bateria. Mantendo-se as duas espiras em repouso, o ponteiro do amperímetro deflete momentaneamente quando a chave é fechada ou aberta.



-  Uma corrente elétrica é induzida no **circuito secundário** (aquele com o amperímetro conectado) quando há variação de corrente elétrica no circuito primário.
- Em ambos os experimentos, uma fem é induzida em um circuito quando o fluxo magnético através da superfície limitada pelo circuito varia com o tempo.

Lei da indução de Faraday

A Lei de Indução de Faraday; a Lei de Lenz; fem de Movimento Problemas Propostos

- Os resultados anteriores podem ser explicados pela **lei da indução de Faraday**, a qual afirma que

“A intensidade da fem induzida em um circuito é igual à taxa com que o fluxo magnético que o atravessa varia com o tempo”.

Matematicamente,

$$|\mathcal{E}| = \left| \frac{d\Phi_B}{dt} \right| = \left| \frac{d}{dt} \int \vec{B} \cdot d\vec{A} \right|$$

Lei de Lenz

A Lei de Indução de Faraday; a Lei de Lenz; fem de Movimento Problemas Propostos

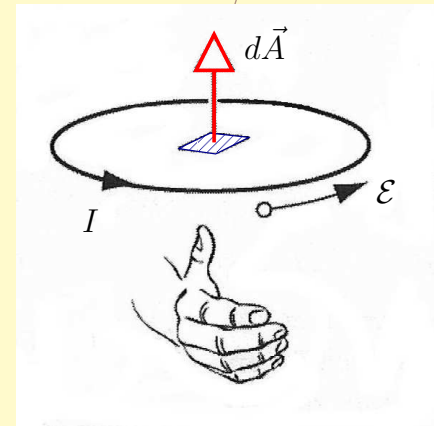
- O sentido (sinal) da fem induzida é determinado pela **lei de Lenz**, cujo enunciado é:

“A polaridade da fem induzida em uma espira é tal que ela produz uma corrente cujo campo magnético gerado por ela se opõe à variação do fluxo magnético através da espira, na tentativa de manter o fluxo original.”

- Levando-se em conta a lei de Lenz, a lei de Faraday é dada por

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt} \int \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

- De acordo com a nossa notação, o sentido de $d\vec{A}$ é determinado através da “regra da mão direita”.



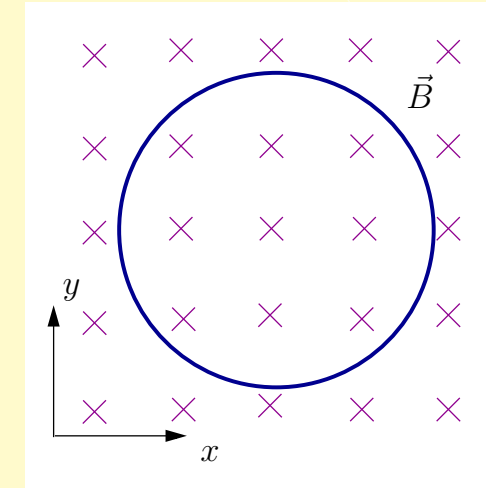
Lei da indução de Faraday: exemplo

A Lei de Indução de Faraday; a Lei de Lenz; fem de Movimento Problemas Propostos

Ex. 1 Considere uma espira de raio $r = 0,32$ m e resistência $R = 2,5 \, \Omega$, paralela ao plano xy , localizada numa região com campo magnético $\vec{B} = B_z \hat{k}$, tal que

$$B_z(t) = -4,0 - 5,6t + 2,2t^2$$

onde t é dado em segundos e B_z em tesla.



Determine a intensidade e o sentido da corrente na espira em $t = 1$ s e $t = 2$ s.

Solução

- Adotando $d\vec{A} = -dA_z \hat{k}$, com $dA_z > 0$ (ou seja, aponta para dentro da página) e sabendo-se que a área da espira é constante, pela lei de Faraday

$$\mathcal{E} = -\frac{d}{dt} \int \underbrace{\vec{B} \cdot d\vec{A}}_{= -B_z dA_z} = \frac{dB_z}{dt} \underbrace{\int dA_z}_{= \pi r^2} \Rightarrow \mathcal{E} = \pi r^2 \frac{dB_z}{dt}$$

Lei da indução de Faraday: exemplo

A Lei de Indução de Faraday; a Lei de Lenz; fem de Movimento Problemas Propostos

- Como $\frac{dB_z}{dt} = -5,6 + 4,4t$, temos que

$$\mathcal{E} = \pi r^2(-5,6 + 4,4t)$$

- Para $t = 1$ s, obtemos $\mathcal{E} = -0,39$ V ($\mathcal{E} < 0$, pois $\frac{dB_z}{dt} < 0$).
- ◆ De acordo com a nossa escolha de $d\vec{A}$ (para dentro da página), pela regra da mão direita o sentido da fem (e portanto da corrente) seria no sentido horário. Como $\mathcal{E} < 0$, conclui-se que a corrente é no sentido anti-horário. O seu valor absoluto é dado por

$$I = \frac{|\mathcal{E}|}{R} = \frac{0,39 \text{ V}}{2,5 \Omega} \Rightarrow \boxed{I = 0,16 \text{ A}}$$

Lei da indução de Faraday: exemplo

A Lei de Indução de Faraday; a Lei de Lenz; fem de Movimento Problemas Propostos

- Podemos conferir o sentido da corrente através da lei de Lenz. A variação do fluxo magnético com o tempo é dada por

$$\frac{d\Phi_B}{dt} = -\pi r^2 \frac{dB_z}{dt}$$

Para $t = 1$ s ela é positiva, ou seja, há um aumento do fluxo para dentro da página. No intuito de conter esse aumento, surge na espira uma corrente induzida, a qual produzirá um campo magnético no sentido para fora da página. Pela regra da mão direita, essa corrente precisa estar no sentido anti-horário.

- Para $t = 2$ s, obtemos $\mathcal{E} = 1,03$ V. Segue que

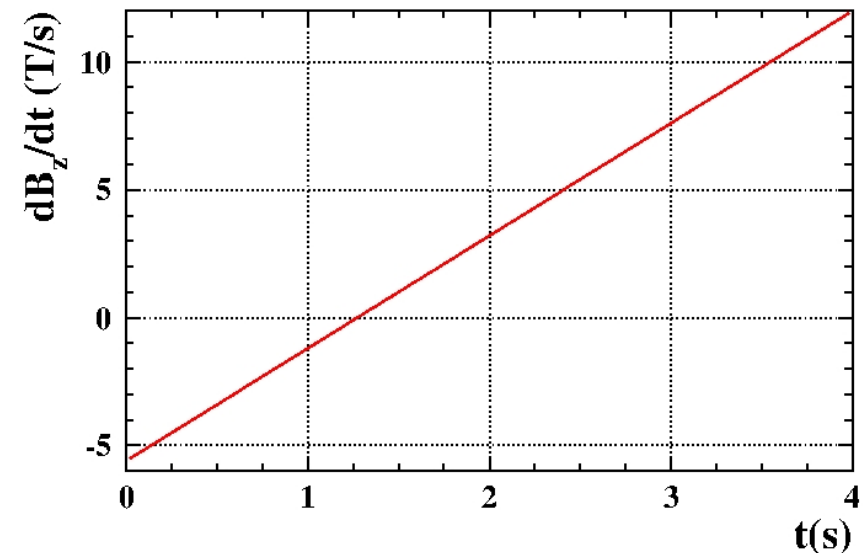
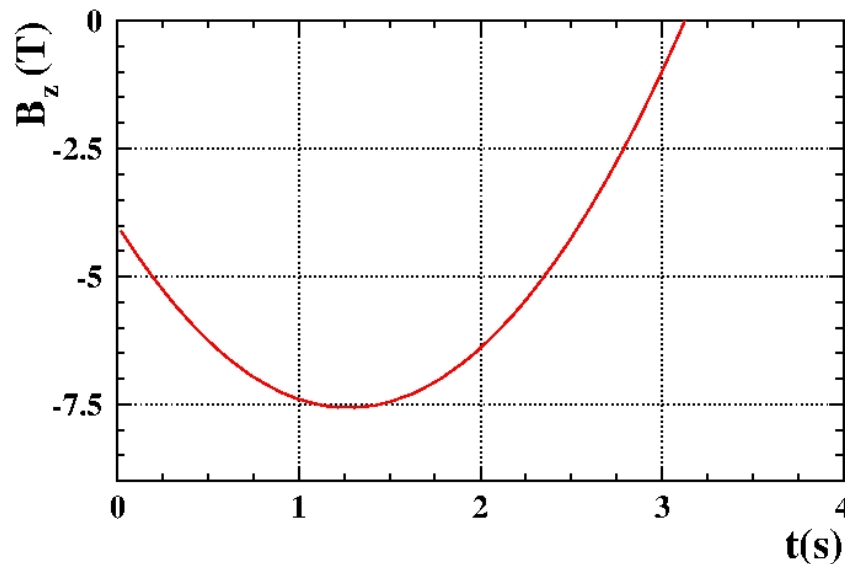
$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{1,03 \text{ V}}{2,5 \Omega} \Rightarrow \boxed{I = 0,41 \text{ A}}$$

Como $\mathcal{E} > 0$, conclui-se que a corrente está no sentido horário.

Lei da indução de Faraday: exemplo

A Lei de Indução de Faraday; a Lei de Lenz; fem de Movimento Problemas Propostos

- O sentido da corrente induzida é determinado pelo sentido da mudança do campo (a qual muda o fluxo magnético). Observa-se que para $0 \leq t \lesssim 3$ s, \vec{B} aponta sempre para dentro da página, no entanto nesse intervalo de tempo o sentido (sinal) de $\frac{d\vec{B}}{dt}$ muda.



A fem de movimento

A Lei de Indução de Faraday; a Lei de Lenz; fem de Movimento Problemas Propostos

- Considere um condutor reto de comprimento ℓ , deslocando-se com velocidade constante em uma região com campo magnético uniforme.

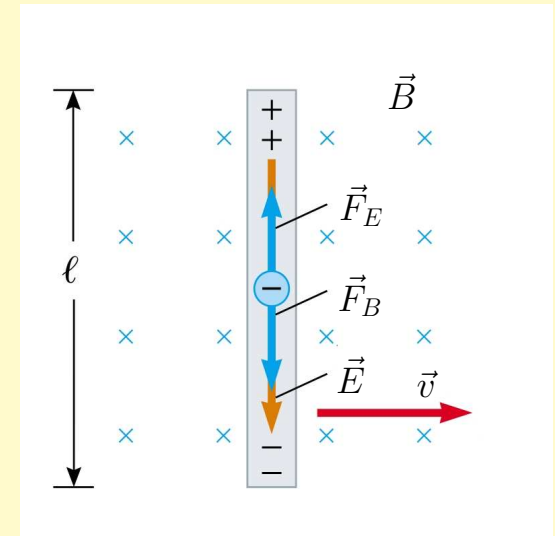
Os elétrons praticamente livres do condutor sofrem uma força magnética

$$\vec{F}_B = (-e)\vec{v} \times \vec{B}$$

na direção vertical, no sentido para baixo.

- Devido à ação de \vec{F}_B , elétrons migram para a extremidade inferior da barra, o que resulta no acúmulo de cargas negativas nessa região e o acúmulo de cargas positivas na extremidade oposta. Como consequência, surgirá um campo elétrico \vec{E} dentro do condutor, fazendo com que os elétrons sintam a força elétrica para cima, dada por

$$\vec{F}_E = (-e)\vec{E}$$



A fem de movimento

A Lei de Indução de Faraday; a Lei de Lenz; fem de Movimento Problemas Propostos

- Na situação de equilíbrio, tem-se que

$$\vec{F}_E + \vec{F}_B = 0 \quad \Rightarrow \quad eE - evB = 0 \quad \Rightarrow \quad E = vB$$

Como o campo elétrico é uniforme,

$$\Delta V = - \int \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = E\ell \quad \Rightarrow \quad \Delta V = B\ell v$$

► Uma diferença de potencial é mantida entre as extremidades da barra enquanto o condutor está se deslocando através do campo magnético.

A fem de movimento: exemplos

A Lei de Indução de Faraday; a Lei de Lenz; fem de Movimento Problemas Propostos

Ex. 2 Considere uma barra condutora de comprimento ℓ girando com uma velocidade angular constante ω em um campo magnético uniforme \vec{B} , perpendicular à barra. Obtenha a diferença de potencial entre as extremidades da barra.

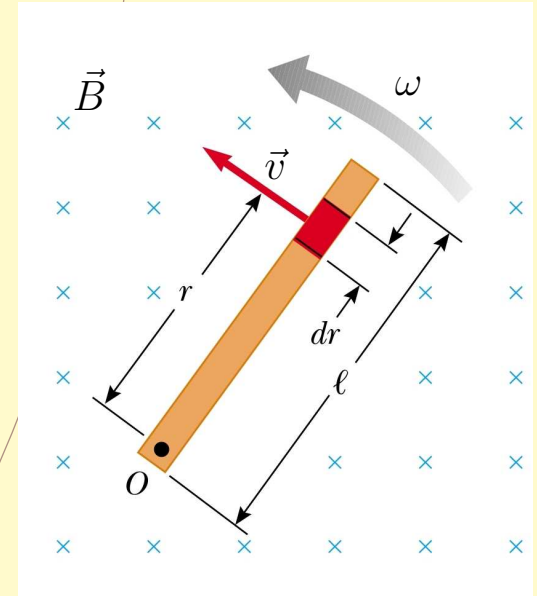
Solução

- Para um segmento de barra de comprimento dr e velocidade v perpendicular ao campo magnético, tem-se que (veja resultado da pág. anterior)

$$dV = Bvdr$$

Como $v = \omega r$, a diferença de potencial entre as extremidades da barra é

$$\Delta V = \int dV = \int B\omega r dr = B\omega \underbrace{\int_0^\ell r dr}_{= \ell^2/2} \Rightarrow \boxed{\Delta V = \frac{B\omega\ell^2}{2}}$$



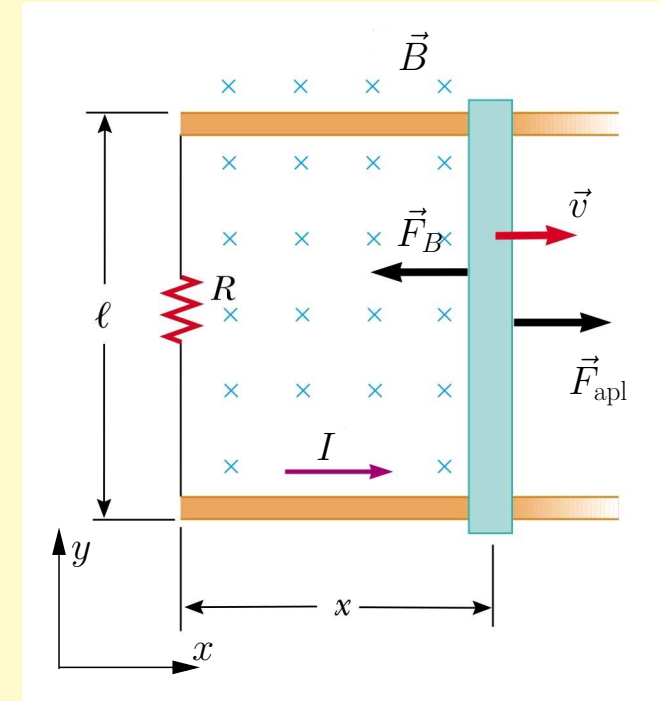
A fem de movimento: exemplos

A Lei de Indução de Faraday; a Lei de Lenz; fem de Movimento Problemas Propostos

Ex. 3 Considere a situação em que a barra condutora faz parte de um circuito fechado.

A barra pode deslizar sem atrito sobre dois trilhos condutores paralelos e fixos, cujas extremidades à esquerda estão conectadas por um fio condutor com uma resistência R .

Supondo-se que a barra se desloque com velocidade \vec{v} , sob ação de uma força aplicada \vec{F}_{apl} para à direita, obtenha a corrente induzida no circuito.



Solução

- Conforme visto, surgirá uma diferença de potencial ao longo de um condutor se deslocando em uma região com um campo magnético. Contudo, desta vez ocorre a indução de uma corrente elétrica, pois há um circuito fechado.

A fem de movimento: exemplos

A Lei de Indução de Faraday; a Lei de Lenz; fem de Movimento Problemas Propostos

- Tomando $d\vec{A}$ no sentido de \vec{B} , a fem induzida é dada por

$$\mathcal{E} = -\frac{d}{dt} \int \vec{B} \cdot d\vec{A} = -\frac{d}{dt}(B\ell x) = -B\ell \frac{dx}{dt}$$

Como $\frac{dx}{dt} = v$, temos que

$$\mathcal{E} = -B\ell v$$

- Sabendo-se que a resistência do circuito é R , a corrente induzida será

$$I = \frac{|\mathcal{E}|}{R} \Rightarrow \boxed{I = \frac{B\ell v}{R}}$$

- ◆ Como $\mathcal{E} < 0$ e o sentido de $d\vec{A}$ foi escolhido para dentro da página, segue que a corrente induzida será no sentido anti-horário.

A fem de movimento: exemplos

A Lei de Indução de Faraday; a Lei de Lenz; fem de Movimento Problemas Propostos

Obtenha as potências fornecida pela força aplicada e a dissipada no resistor.

Solução

- Como há corrente na presença de um campo magnético, os lados da espira experimentam forças magnéticas. Em particular, na barra móvel atua uma força magnética

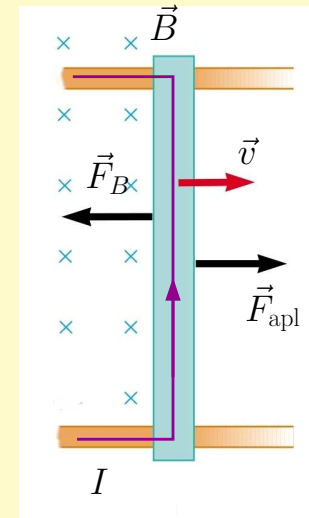
$$\vec{F}_B = -I\ell B \hat{i}$$

Se a barra estiver se movendo com velocidade constante \vec{v} , temos que

$$\vec{F}_B + \vec{F}_{\text{apl}} = 0 \quad \Rightarrow \quad I\ell B = F_{\text{apl}}$$

- Revisão: **potência instantânea** de uma partícula sob ação de uma força \vec{F} , com velocidade \vec{v} :

$$\mathcal{P} = \frac{dW}{dt} = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{P} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$



A fem de movimento: exemplos

A Lei de Indução de Faraday; a Lei de Lenz; fem de Movimento Problemas Propostos

- A potência instantânea fornecida pela força aplicada é dada por

$$\mathcal{P}_{\text{apl}} = F_{\text{apl}}v = I\ell Bv$$

Utilizando a corrente encontrada na p. 15, obtemos

$$\mathcal{P}_{\text{apl}} = \left(\frac{B\ell v}{R} \right) B\ell v \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathcal{P}_{\text{apl}} = \frac{B^2 \ell^2 v^2}{R}}$$

- Por outro lado, a potência dissipada no resistor é dada por

$$\mathcal{P}_R = RI^2 = R \left(\frac{B\ell v}{R} \right)^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathcal{P}_R = \frac{B^2 \ell^2 v^2}{R}}$$

ou seja, é igual a potência fornecida pela força aplicada.

A fem de movimento: exemplos

A Lei de Indução de Faraday; a Lei de Lenz; fem de Movimento Problemas Propostos

- A potência fornecida pela força aplicada pode ser escrita como

$$\mathcal{P}_{\text{apl}} = IB\ell v = I|\mathcal{E}|$$

que é a potência fornecida pela fem induzida.

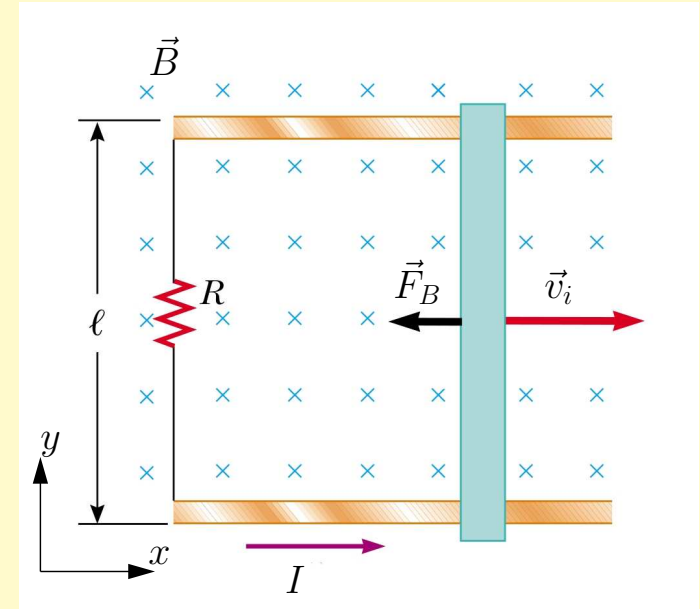
- Como a potência é energia transferida por unidade de tempo, interpretamos os resultados acima da seguinte forma: a energia fornecida para puxar a barra através de uma força \vec{F}_{apl} (possivelmente uma energia mecânica), é transformada em energia eletromagnética (energia fornecida pela fem induzida ao circuito) e posteriormente transformada em energia térmica através do efeito Joule no resistor.
- Resumindo, toda a energia externa transferida ao circuito é dissipada, portanto a barra se moverá com velocidade constante.

A fem de movimento: exemplos

A Lei de Indução de Faraday; a Lei de Lenz; fem de Movimento Problemas Propostos

Ex. 4 Considere novamente o sistema do exemplo anterior, onde uma barra de massa m e comprimento ℓ desloca-se sobre dois trilhos paralelos na presença de um campo magnético uniforme, apontando para dentro do plano da figura.

Sabendo-se que desta vez não exista uma força externa aplicada sobre a barra, encontre a sua velocidade em função do tempo, se ela for solta no instante $t_0 = 0$ com velocidade \vec{v}_i para à direita.



Solução

- Similarmente ao exemplo anterior, o aumento de fluxo do campo magnético irá induzir uma fem dada por

$$|\mathcal{E}| = \left| \frac{d}{dt} \int \vec{B} \cdot d\vec{A} \right| = B\ell v$$

A fem de movimento: exemplos

A Lei de Indução de Faraday; a Lei de Lenz; fem de Movimento Problemas Propostos

- A corrente induzida é dada por

$$I = \frac{|\mathcal{E}|}{R} = \frac{B\ell v}{R}$$

- ◆ De acordo com a lei de Lenz, a corrente elétrica está no sentido anti-horário.

- Força resultante sobre a barra:

$$\vec{F}_{\text{res}} = m\vec{a} = \vec{F}_B$$

onde a força magnética é dada por

$$\vec{F}_B = -I\ell B \hat{i} = -\frac{B^2\ell^2 v}{R} \hat{i}$$

Portanto, $\vec{a} = \frac{\vec{F}_B}{m} = -\frac{B^2\ell^2 v}{mR} \hat{i} = a_x \hat{i}$

A fem de movimento: exemplos

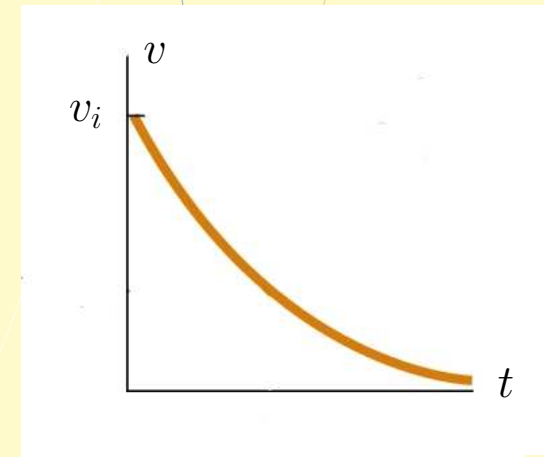
A Lei de Indução de Faraday; a Lei de Lenz; fem de Movimento Problemas Propostos

■ Como $a_x = \frac{dv}{dt}$, segue que

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{B^2 \ell^2 v}{mR} \Rightarrow \frac{dv}{v} = -\frac{B^2 \ell^2}{mR} dt \Rightarrow \underbrace{\int_{v_i}^v \frac{dv}{v}}_{= \ln v \Big|_{v_i}^v} = -\frac{B^2 \ell^2}{mR} \underbrace{\int_0^t dt}_{= t}$$

Logo,

$$\ln \frac{v}{v_i} = -\frac{B^2 \ell^2 t}{mR} \Rightarrow \boxed{v(t) = v_i e^{-\frac{B^2 \ell^2 t}{mR}}}$$

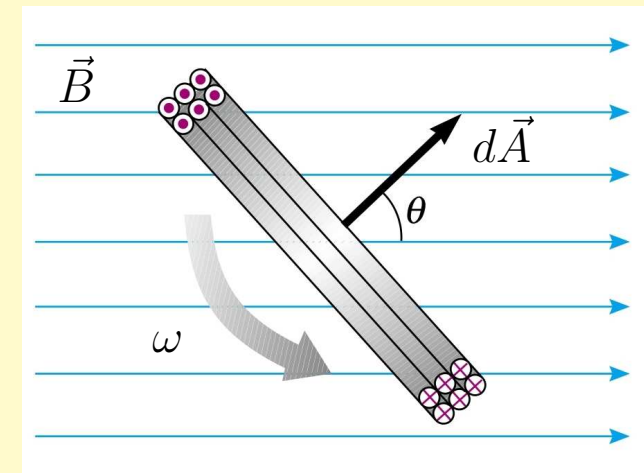
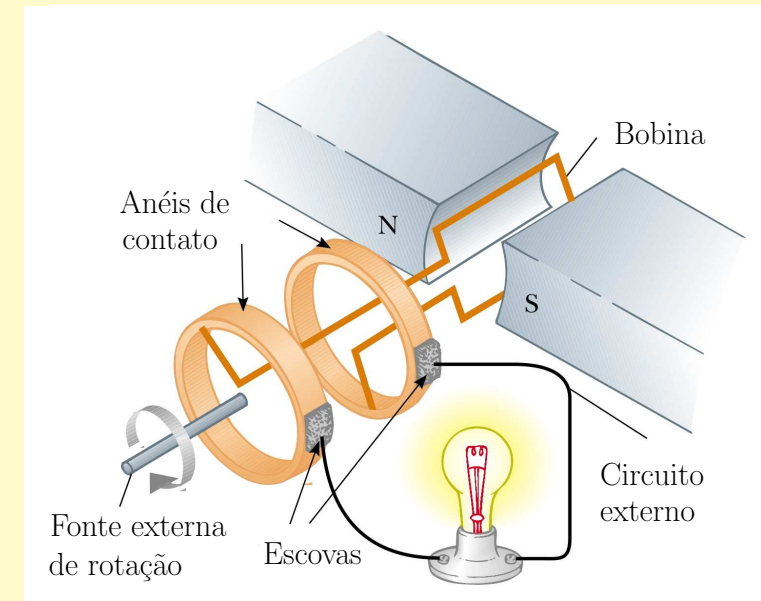


Aplicação da lei de Faraday: gerador de corrente alternada

A Lei de Indução de Faraday; a Lei de Lenz; fem de Movimento Problemas Propostos

- A figura ao lado mostra uma representação pictórica de um **gerador de corrente alternada**.
- As fontes externas de rotação podem ser e.g. a queda d'água em uma usina hidrelétrica ou o vapor de água que gira as pás de uma turbina.
- Supondo-se que a bobina possui N espiras enroladas, todas com a mesma área A e se a velocidade angular $\frac{d\theta}{dt} = \omega$ for constante, a fem induzida na bobina será dada por

$$\mathcal{E} = -N \frac{d}{dt} \int \underbrace{\vec{B} \cdot d\vec{A}}_{= B \cos \theta dA} = -NB \frac{d}{dt} \cos \theta \int \overbrace{dA}^{= A}$$



Aplicação da lei de Faraday: gerador de corrente alternada

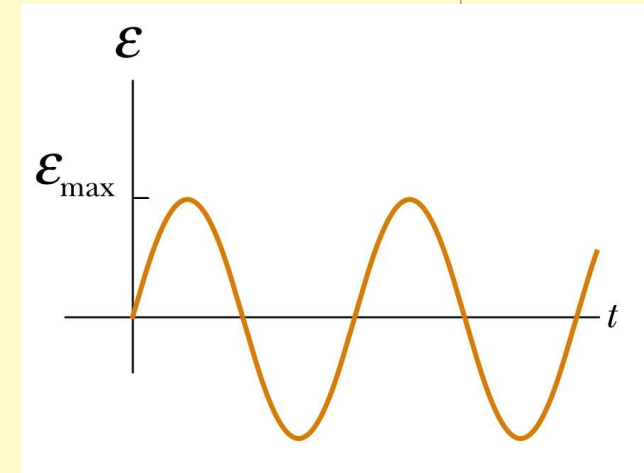
A Lei de Indução de Faraday; a Lei de Lenz; fem de Movimento Problemas Propostos

■ Como

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega = \text{constante} \Rightarrow \theta = \theta_0 + \omega t$$

Logo (tomando $\theta_0 = 0$),

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= -NBA(-\text{sen } \omega t) \frac{d}{dt}(\omega t) \\ \Rightarrow \mathcal{E} &= \underbrace{NBA\omega}_{=\mathcal{E}_{\text{max}}} \text{sen } \omega t \end{aligned}$$



O gráfico ao lado exibe o comportamento da fem induzida em função do tempo.

■ Se a resistência no circuito é R , a corrente induzida será

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} \Rightarrow I(t) = \frac{NBA\omega}{R} \text{sen } \omega t$$

Aplicação da lei de Faraday: gerador de corrente alternada

A Lei de Indução de Faraday; a Lei de Lenz; fem de Movimento Problemas Propostos

- No mundo todo, adota-se a corrente alternada como suprimento de energia
 - ◆ Um **transformador** pode mudar a tensão da corrente alternada. É o transporte de energia a altas tensões (ao invés de altas correntes) propicia uma menor perda por efeito Joule ($\mathcal{P} = RI^2$);
 - ◆ Ela foi criada por Nikola Tesla. Em 1888, Tesla profere uma palestra intitulada “A new system of alternating current motors and transformers”, no Instituto Americano de Engenharia Elétrica, que mudou o mundo!
- No Brasil, adota-se uma rede elétrica de frequência $f = \omega/2\pi = 60$ Hz e voltagem residencial **bifásica** (Eletropaulo), que fornece as tensões de 127 V e 220 V. Na Europa, a frequência padrão é 50 Hz.

Para uma consulta sobre fases e tensões mais comuns, veja o *link* abaixo:

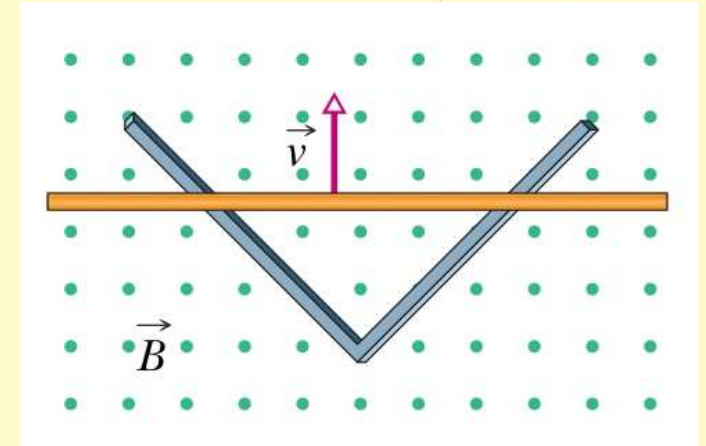
<http://www.controlledpwr.com/help-international-voltages.php>

Problemas Propostos

A lei de indução de Faraday

A Lei de Indução de Faraday; a Lei de Lenz; fem de Movimento Problemas Propostos

P1 Na Fig. ao lado, dois trilhos condutores retos formam um ângulo reto. Uma barra condutora em contato com os trilhos começa a deslizar sobre eles em $t = 0$, partindo-se do vértice, com velocidade constante v_0 . A região é preenchida por um campo magnético de intensidade B_0 , apontando para fora da página. Calcule (a) o fluxo através do triângulo formado pelos trilhos e a barra em função do tempo t e (b) a fem induzida no triângulo em função de t .



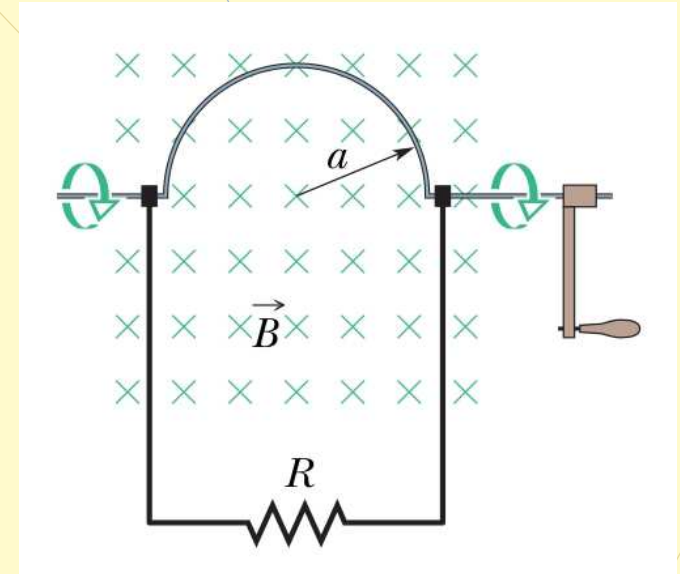
Resp. (a) $\Phi_B = B_0 v^2 t^2$; (b) $\mathcal{E} = 2B_0 v^2 t$.

A lei de indução de Faraday

A Lei de Indução de Faraday; a Lei de Lenz; fem de Movimento Problemas Propostos

P2 Na Fig. ao lado, um fio rígido encurvado em forma de semicírculo de raio $2,0\text{ cm}$ é rodado a uma velocidade angular constante de 40 rev/s em uma região com um campo magnético uniforme de 20 mT . Quais são a frequência e a amplitude da fem induzida na espira?

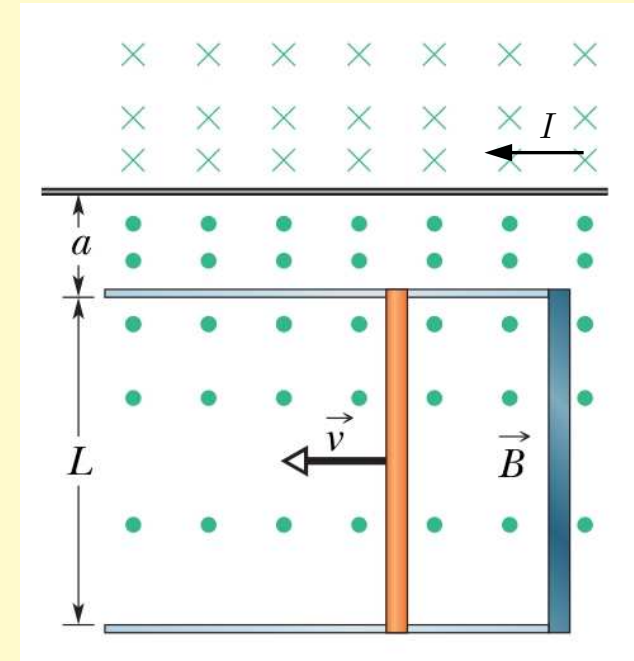
Resp. $f = 40\text{ Hz}$; $\mathcal{E}_m = 3,2 \times 10^{-3}\text{ V}$.



A lei de indução de Faraday

A Lei de Indução de Faraday; a Lei de Lenz; fem de Movimento Problemas Propostos

P3 A Fig. ao lado mostra uma haste de comprimento $L = 10,0$ cm que é forçada a se mover com uma velocidade constante $v = 5,00$ m/s ao longo de trilhos horizontais. A haste, os trilhos e a barra fixa à direita formam uma espira. A resistência da haste é $0,400 \Omega$ e o restante da espira possui resistência desprezível. Uma corrente $I = 100$ A, passando em um fio reto e longo a uma distância $a = 10,0$ mm da espira, estabelece um campo magnético não-uniforme na região da espira. (a) Encontre a fem e a corrente induzida na espira. (b) A que taxa a energia térmica é gerada na haste? (c) Qual deve ser a magnitude da força que se deve aplicar à haste para mantê-la com velocidade constante? (d) Qual a taxa com que esta força realiza trabalho sobre a haste?



Resp. (a) $\mathcal{E} = 2,40 \times 10^{-4}$ V, $I = 6,00 \times 10^{-4}$ A; (b) $\mathcal{P} = 1,44 \times 10^{-7}$ W; (c) $F_{\text{ext}} = 2,87 \times 10^{-8}$ N, para à esquerda; (d) $\mathcal{P} = Fv = 1,44 \times 10^{-7}$ W.

Referências

A Lei de Indução de Faraday; a Lei de Lenz; fem de Movimento Problemas Propostos

- R. A. Serway, e J. W. Jewett Jr., *Princípios de Física, Vol. 3*, Cengage Learning;
- D. Halliday, R. Resnick e K. S. Krane, *Física, Vol. 3*, LTC;