Aula 4: O Potencial Elétrico

Curso de Física Geral III

F-328

1º semestre, 2014

Potencial elétrico

Como podemos relacionar a noção de força elétrica com os conceitos de energia e trabalho?

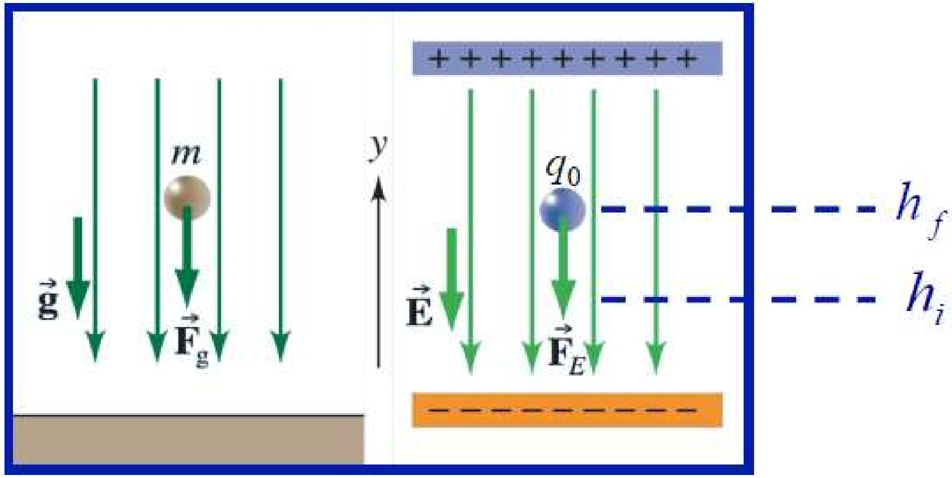
➡ Definindo a **energia potencial elétrica**

(Força elétrica conservativa)

Energia potencial elétrica (U)

Analogia gravitacional

$$U_f - U_i = -W = -\int_i^f m\vec{g}.d\vec{l} = mgh,$$



onde U é a energia potencial associada ao campo da força gravitacional mg.

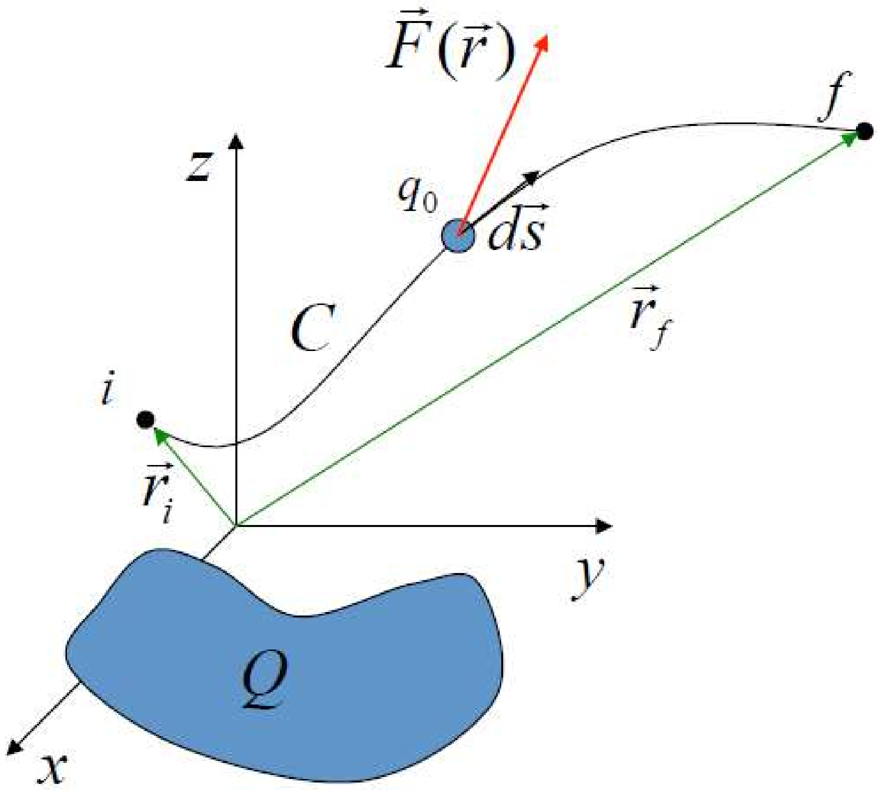
Note que $h = h_f - h_i$

No caso eletrostático, como $\vec{F} = q_0\vec{E}$

$$U_f - U_i = -W = -\int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} q_0\vec{E}(\vec{r})\cdot d\vec{l} = q_0 Eh$$

No caso de *forças conservativas (como o nosso)*, o resultado desta integral não depende do caminho de integração, mas apenas dos pontos inicial e final.

Energia potencial elétrica (U)



Se a força é devida a uma distribuição *finita* de cargas, convém tomar $|\vec{r}_i| \to \infty$ como a configuração de referência tal que

$$U_i = 0$$

Com isto, podemos definir a *função energia potencial* $U(\vec{r})$:

$$U(\vec{r}) = -\int_{\infty}^{\vec{r}} q_0 \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

Ou seja, $U(\vec{r})$ é o *negativo* do trabalho realizado pela *força do campo elétrico* sobre a partícula com carga q_0 para trazê-la desde o infinito até $\vec{r}$. (Unidade SI: J = Nm)

Potencial elétrico (V)

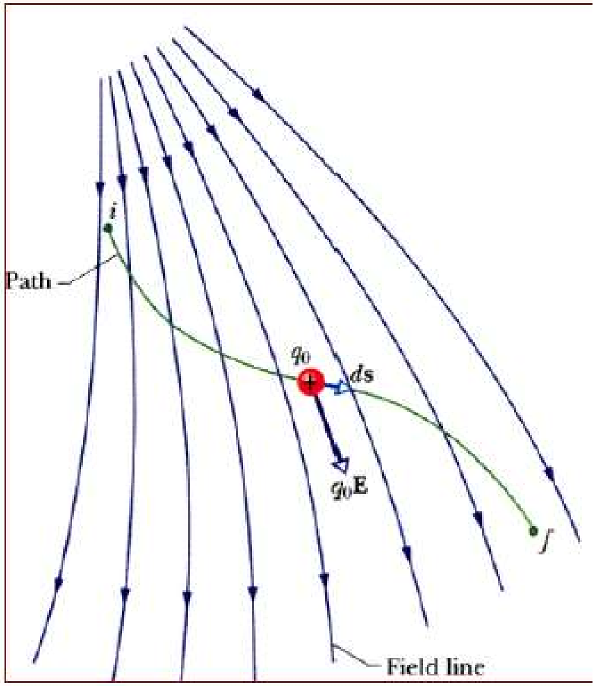
É a energia potencial por unidade de carga:

$$\Delta V \equiv \frac{\Delta U}{q_0} \quad \Longrightarrow \quad V \equiv \frac{U}{q_0}$$

Note que o potencial elétrico só depende do campo elétrico da distribuição de cargas e não depende de q_0.

Unidade SI: joule/coulomb = J/C = volt (V)

Unidade de energia conveniente para cargas elementares: 1eV = *elétron-volt*= 1,6 x 10^{-19} J



Potencial em função do campo:

$$\Delta V = V_f - V_i = -\int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{l}$$

Se escolhermos o infinito como referência:

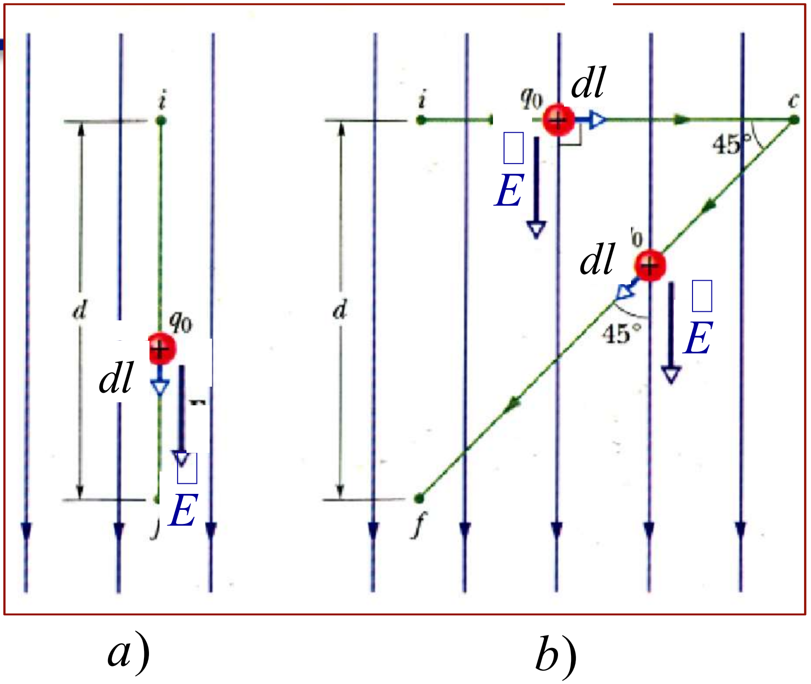
$$V(\vec{r}) = -\int_{\infty}^{\vec{r}} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{l}$$

Potencial elétrico

V de um campo uniforme

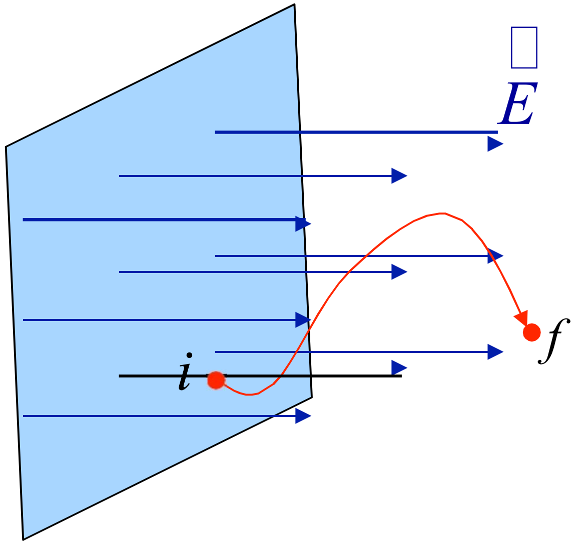
$$V_f - V_i = -\int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{l}$$

$$\left.\begin{array}{l} a)\quad V_f - V_i = -Ed \\ b)\quad V_f - V_i = -Ed \end{array}\right\} \quad (V_i > V_f)$$



Vemos que o resultado não depende do caminho da integração.

Portanto, para se calcular V, pode-se sempre escolher o caminho mais simples.

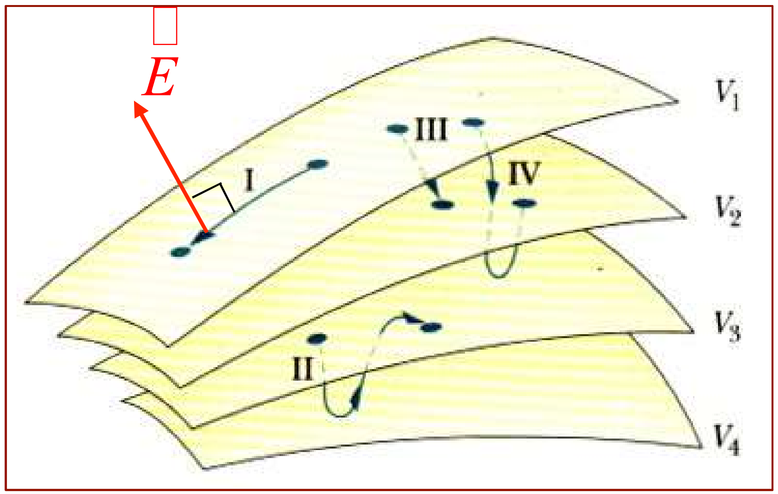


O campo elétrico aponta sempre no sentido de potenciais decrescentes.

Superfícies equipotenciais

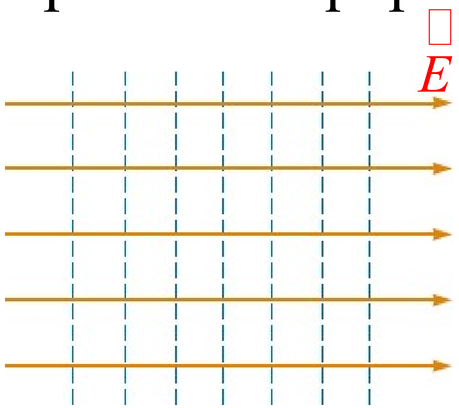
Superfícies equipotenciais

São superfícies em que todos os pontos têm o mesmo potencial.

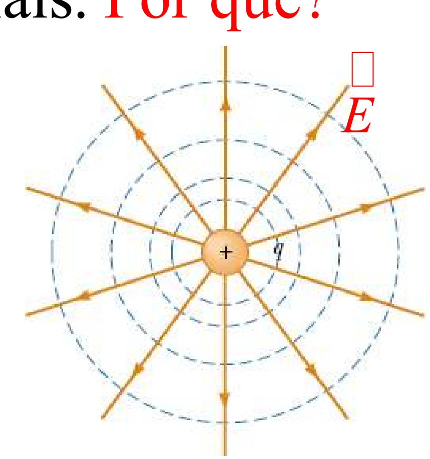


W_{I} ,W_{II} ,W_{III} e W_{IV} $=?$

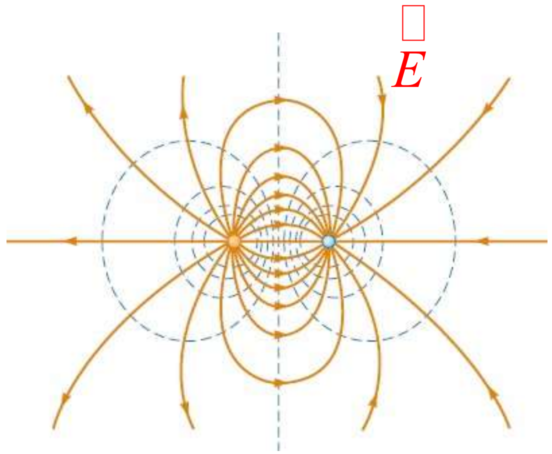
As linhas de $\vec{E}$ são perpendiculares às superfícies equipotenciais. Por quê?



Campo uniforme



Carga positiva



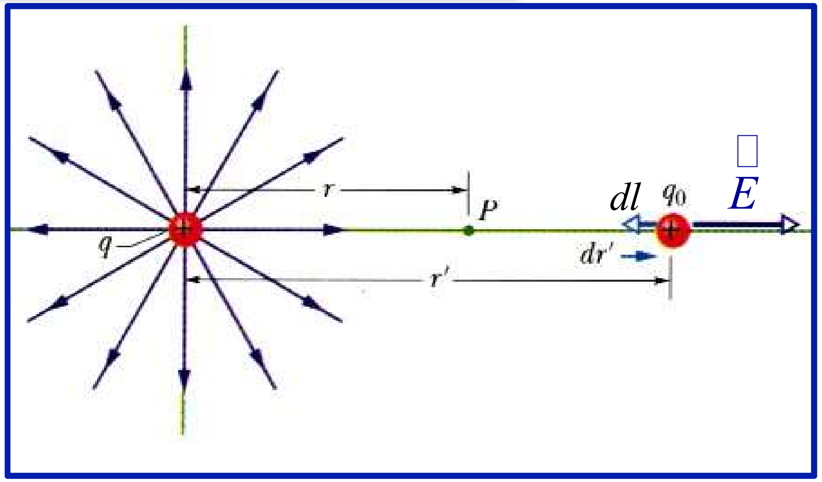
Dipolo elétrico

Um deslocamento ao longo de uma equipotencial não requer trabalho $\left(\vec{E}\cdot d\vec{l}=0\right)$

V de uma carga puntiforme

$$V_f - V_i = -\int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{l}$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r}$$



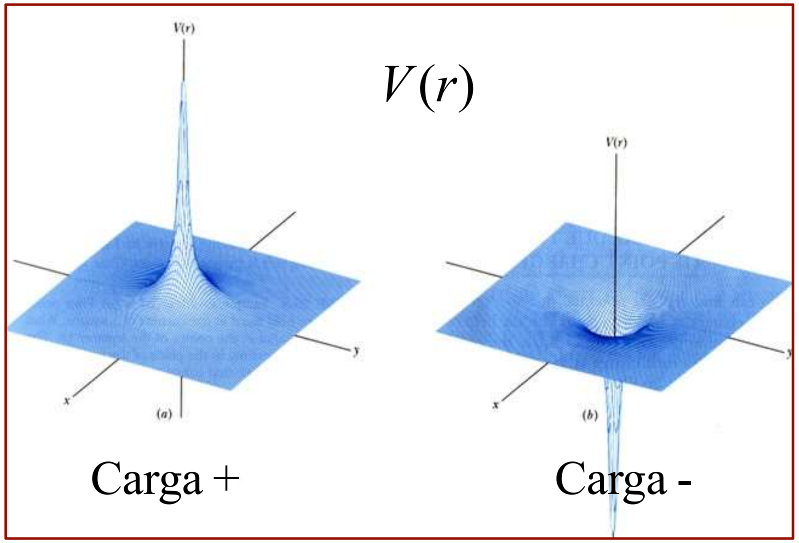
Escolhendo $V_i = 0$ para $r \to \infty$:

$$V(\vec{r}) = -\int_{\infty}^{r} \vec{E}(r) \cdot d\vec{l} = \int_{r}^{\infty} E(r') dr' =$$

$$= \int_{r}^{\infty} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2} dr$$

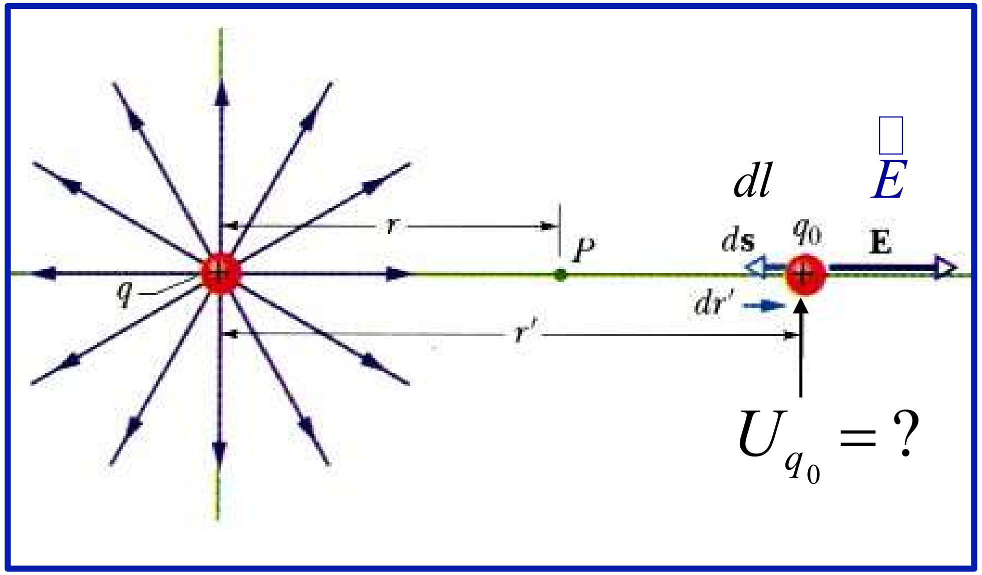
Ou:

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$



U de uma carga puntiforme

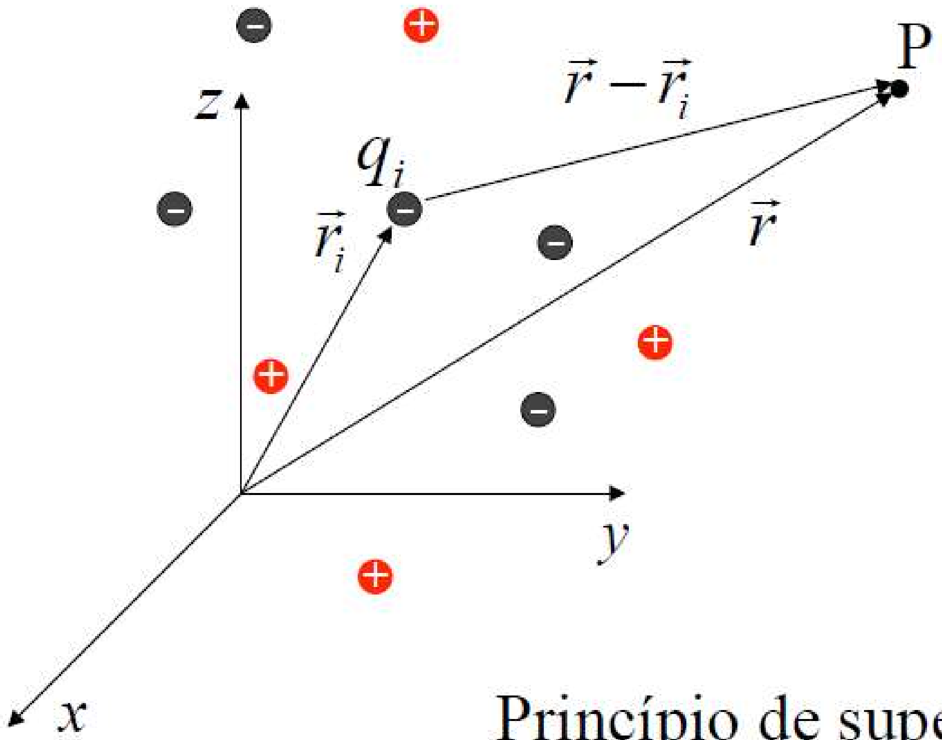
Energia potencial de uma carga q_0 ao redor de q



$$U = q_0 V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_0 q}{r}$$

Equivalente ao *trabalho* executado por um *agente externo* para trazer as duas cargas do infinito até uma distância *r*.

V de um sistema de cargas puntiformes



Potencial no ponto P devido a cada carga q_i :

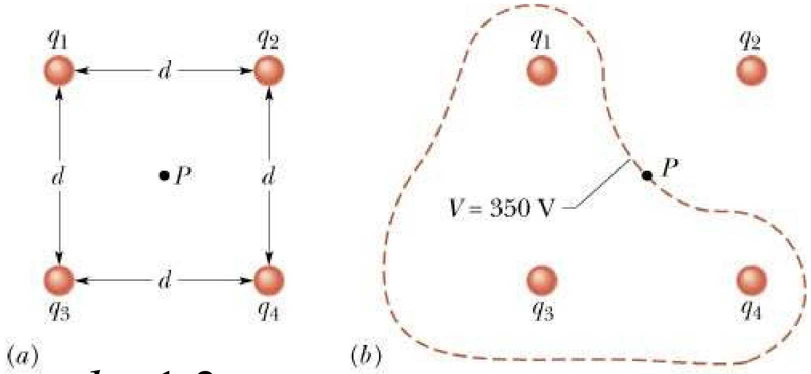
$$V_i(\vec{r}) = \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 |\vec{r}-\vec{r}_i|}$$

Princípio de superposição:

$$\Rightarrow V(\vec{r}) = \sum_i V_i(\vec{r}) = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 |\vec{r}-\vec{r}_i|}$$ (soma escalar!)

Sistema de cargas puntiformes (V)

Exemplos



$d = 1{,}3\,\mathrm{m}$

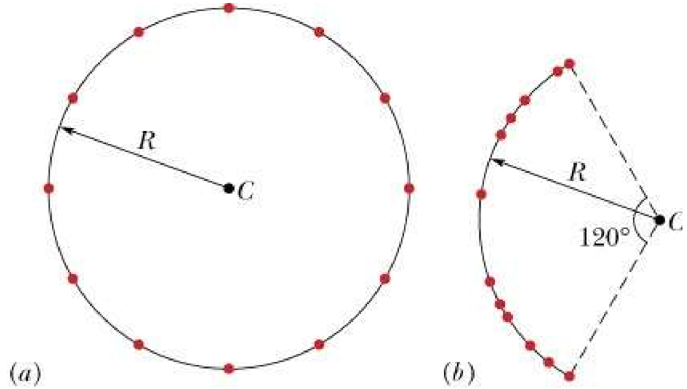
$q_1 = 12\,\mathrm{nC}$

$q_2 = -24\,\mathrm{nC}$

$q_3 = 31\,\mathrm{nC}$

$q_4 = 17\,\mathrm{nC}$

$V_P = ?$



$q = -12 \times e$

$$V_C = \frac{-12e}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

$E_C = 0$

U de um sistema de cargas puntiformes

U é o *trabalho executado* por um *agente externo* para trazer todas as cargas do infinito até a configuração desejada. Dada a energia potencial elétrica entre cada par de cargas

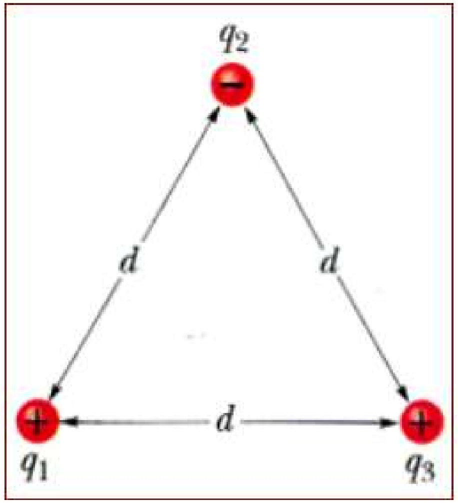
$$U_{ij} = \frac{q_i q_j}{4\pi\varepsilon_0 \,|\vec{r}_i - \vec{r}_j\,|},$$ temos que:

$$U = \frac{1}{2}\sum_{\substack{i,j \\ i\neq j}} \frac{q_i q_j}{4\pi\varepsilon_0\, r_{ij}}$$

Fator $\frac{1}{2}$: Contar só uma vez cada par de carga, isto é: $U_{ij} = U_{ji}$

Se $U > 0$: cargas livres (trabalho para uni-las);

Se $U < 0$: cargas ligadas (trabalho para separá-las)



$q_1 = q$

$q_2 = -4q$

$q_3 = 2q$

$$W = \frac{-10q^2}{4\pi\varepsilon_0 d}$$

Sistema de cargas puntiformes (U)

Dado que energia potencial elétrica entre cada par de cargas U_{ij} é dada por:

$$U_{ij} = \frac{q_i q_j}{4\pi\varepsilon_0 |\vec{r}_i - \vec{r}_j|},$$

temos que a energia do sistema de cargas é:

$$U = \frac{1}{2}\sum_{\substack{i,j \\ i\neq j}} \frac{q_i q_j}{4\pi\varepsilon_0 r_{ij}} = \frac{1}{2}\sum_i q_i \left[\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{j\neq i}\frac{q_j}{r_{ij}}\right] = \frac{1}{2}\sum_i q_i V(\vec{r}_i),$$

onde $V(\vec{r}_i)$ é *o potencial na posição da carga i.*

A generalização para uma distribuição contínua de cargas com densidade $\rho(r')$ é:

$$U = \frac{1}{2}\int \rho(r')V(r')dv'$$

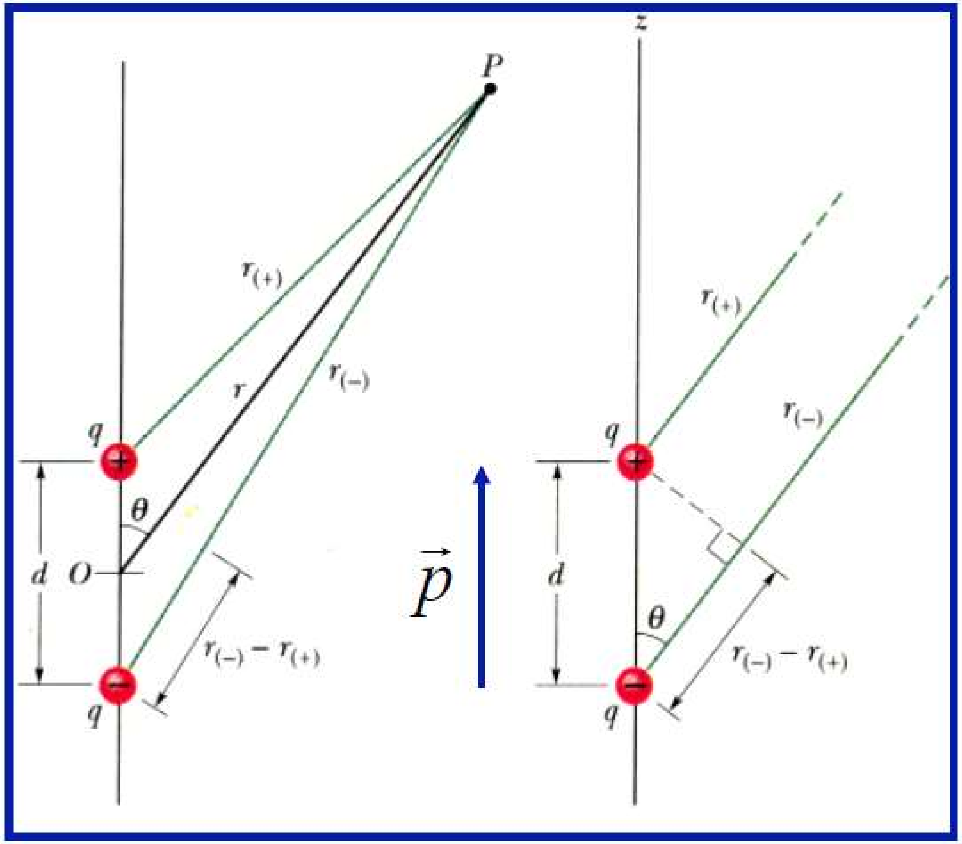
Dipolo elétrico ($r >> d$)

$$V(\vec{r}) = \sum_i V_i(\vec{r})$$

$$= \sum_i \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}_i|}$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_{(+)}} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_{(-)}}$$

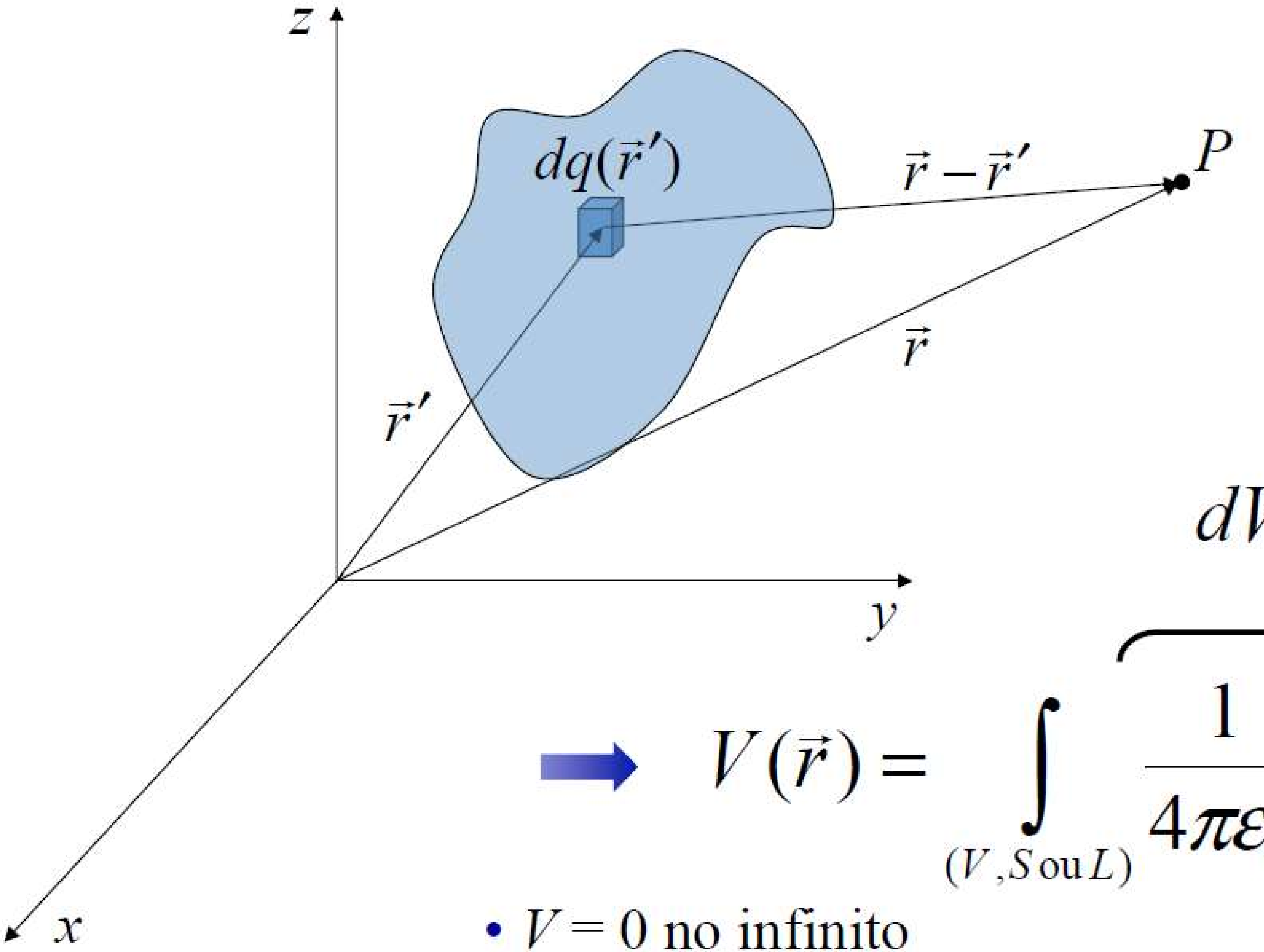
$$r >> d \Rightarrow \begin{cases} r_{(-)} - r_{(+)} \approx d\cos\theta \\ r_{(-)} r_{(+)} \approx r^2 \end{cases}$$



$$\Rightarrow V(\vec{r}) = \frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

Momento de dipolo elétrico ($|\vec{p}| = qd$)

Distribuição contínua finita de cargas



$$V(\vec{r}) = \int_{(V,S\,\mathrm{ou}\,L)} \overbrace{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}}^{dV(\vec{r},\vec{r}\,')}$$

- $V = 0$ no infinito
- Válido somente para distribuição finita de cargas

Distribuições contínuas de carga

Potencial de uma linha finita de carga $(dq = \lambda\, dx)$

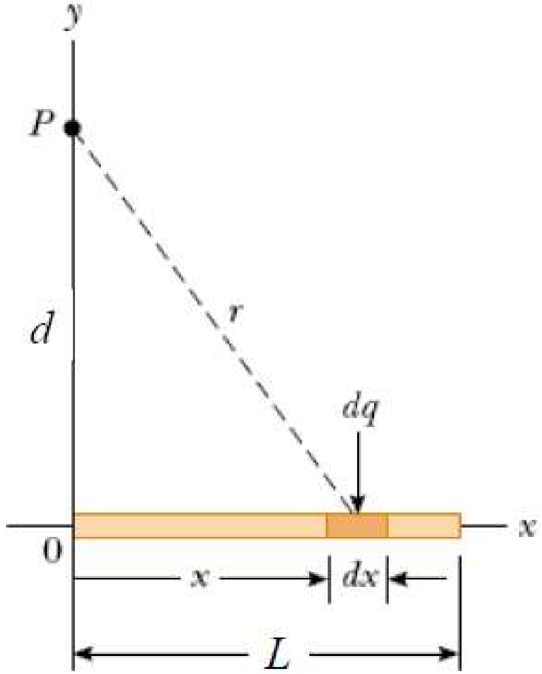
$$V(\vec{r}) = \int_{(V,S\,\mathrm{ou}\,L)} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{dq}{r}$$

$\Downarrow$

$$V = \int_0^L \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\lambda dx}{\sqrt{x^2 + d^2}}$$

$\Downarrow$

$$V = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \ln\left[\frac{L + \sqrt{L^2 + d^2}}{d}\right]$$

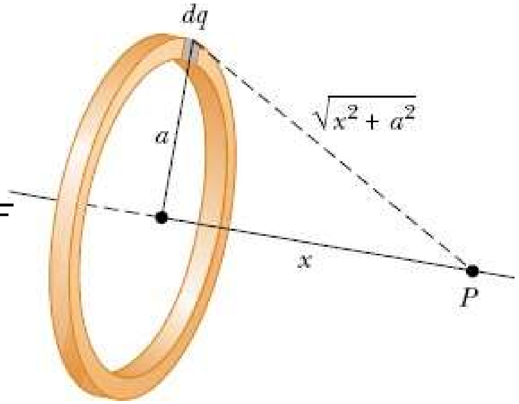


Distribuições contínuas de carga

Potencial de um anel e de um disco carregados

a) anel (raio a e carga q)

$$dV(P)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{\sqrt{a^2+x^2}} \Longrightarrow V(x)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{\sqrt{a^2+x^2}}$$

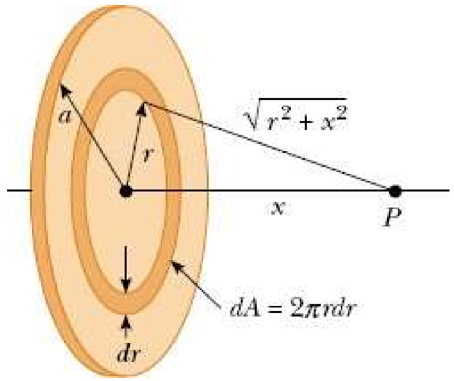


b) disco (raio a e densidade σ)

$$dV(P)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{\sqrt{r^2+x^2}} \quad ; \quad dq=\sigma 2\pi r dr$$

$$V(x)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^a \frac{\sigma 2\pi r dr}{\sqrt{r^2+x^2}}$$

$$V(x)=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{x^2+a^2}-|x|\right)$$



Campo E a partir do potencial V

Trabalho sobre q_0 ao se deslocar entre duas equipotenciais:

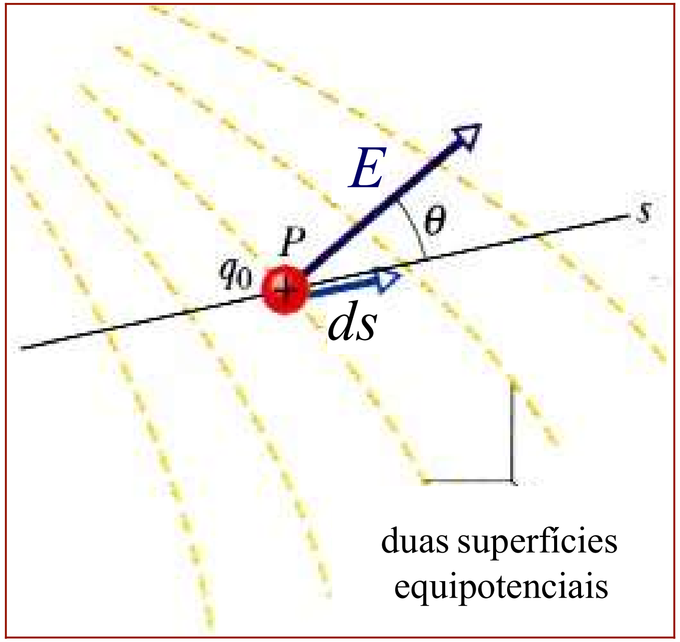
$$dW = -q_0\, dV = q_0\, E.ds = q_0\, E\cos\theta\, ds$$

$$E\cos\theta = -\frac{dV}{ds}$$

Como $E\cos\theta$ é a componente de E na direção de ds :

$$E_s = -\frac{\partial V}{\partial s} = -\nabla V \cdot \hat{s}$$

Isto é, *a componente de E em qualquer direção é o negativo da taxa de variação do potencial com a distância naquela direção* (derivada direcional) .



Generalizando: $E = -\nabla V$

Dedução alternativa

$$V_f - V_i = -\int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{E}(\vec{r}).d\vec{l} \Longrightarrow dV = -\vec{E}.d\vec{l} \qquad (1)$$

Sejam, em coordenadas cartesianas:

$$\begin{cases} \vec{E} = E_x\hat{i} + E_y\hat{j} + E_z\hat{k} \\ V = V(x, y, z) \end{cases}$$

Então: $$\begin{cases} \vec{E}.d\vec{l} = E_x dx + E_y dy + E_z dz \\ dV = \dfrac{\partial V}{\partial x}dx + \dfrac{\partial V}{\partial y}dy + \dfrac{\partial V}{\partial z}dz \end{cases}$$

Por (1):

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x};\ E_y = -\frac{\partial V}{\partial y};\ E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

Como $$\vec{\nabla}V = \frac{\partial V}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial V}{\partial z}\hat{k} \Longrightarrow \vec{E} = -\vec{\nabla}V$$

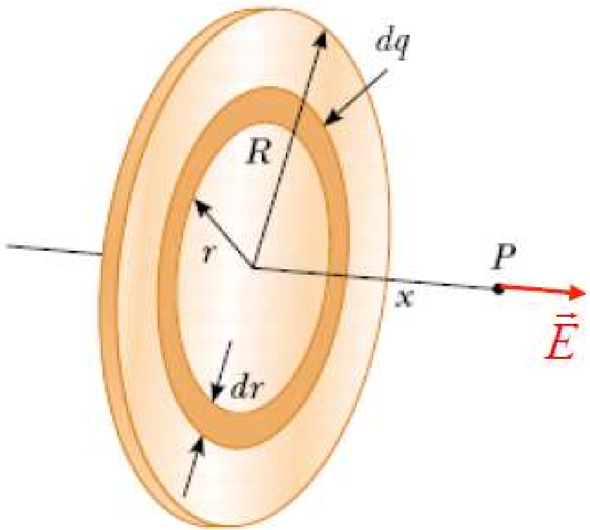
O campo E a partir de V

Campo de um disco uniformemente carregado

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V$$

Vimos:

$$V(x) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{x^2+a^2} - |x|\right)$$



Neste caso, $V = V(x)$ somente. Então:

$$E_x = -\frac{dV}{dx}$$

Derivando V, obtemos:

$$\vec{E}(x) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\frac{x}{|x|} - \frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}\right)\hat{x}$$ (resultado já conhecido!)

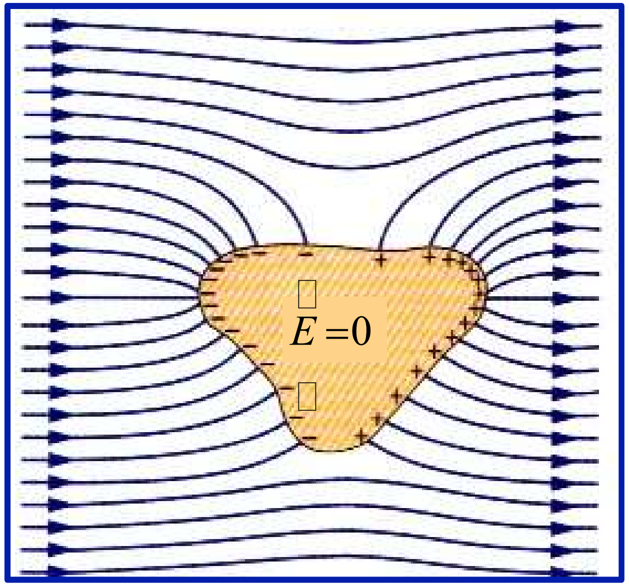
Potencial de um condutor isolado

Os pontos dentro e na superfície de um condutor qualquer estão ao mesmo potencial?

Sim, pois $\vec{E}=0$ dentro do condutor

Consequências para um condutor isolado, carregado ou não :

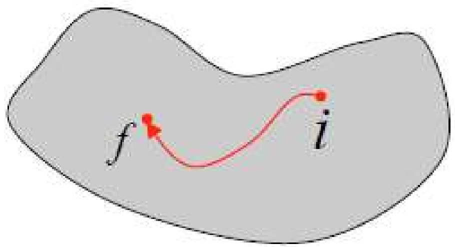
- O volume é equipotencial
- A superfície é uma equipotencial



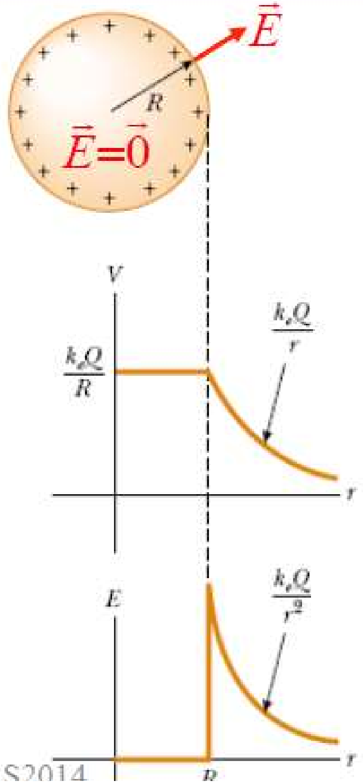
Um condutor carregado isolado

Sendo *i* e *f* dois pontos dentro de um condutor qualquer:

$$V_f - V_i = -\int_i^f \vec{E}(\vec{r})\cdot d\vec{r} = 0$$, pois $\vec{E}=\vec{0}$ dentro do condutor.



Condutor esférico (carga Q, raio R)



$$V_f - V_i = -\int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{E}(\vec{r})\cdot d\vec{r}$$

$$V(r) = \begin{cases} \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} & , r > R \text{ (fora)} \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R} & , r < R \text{ (dentro)} \end{cases}$$

Note que:

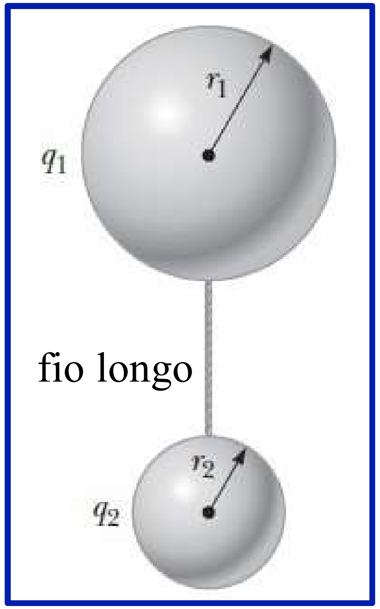
$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r}$$ (ou $\vec{E} = -\vec{\nabla} V$)

Distribuição das cargas em um condutor

Excluindo-se os condutores esféricos, a carga de um condutor não se distribui uniformemente sobre sua superfície, mas vai depender do raio de curvatura local.

Sejam duas esferas condutoras carregadas, ligadas por um fio condutor muito longo. Como estão ao mesmo potencial V:

$$V = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_1} = \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2} \quad \Rightarrow \quad \frac{q_1}{q_2} = \frac{R_1}{R_2} \quad (1)$$



Agora:

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{q_1/4\pi R_1^2}{q_2/4\pi R_2^2} = \frac{q_1}{q_2}\frac{R_2^2}{R_1^2} \overset{(1)}{=} \frac{R_1}{R_2}\frac{R_2^2}{R_1^2} = \frac{R_2}{R_1}$$

Então, *σ é inversamente proporcional* ao raio de curvatura local. Em pontos onde o condutor é mais "*pontiagudo*", a densidade de cargas (e, portanto, o campo elétrico) é maior. Este campo pode ser suficiente para ionizar o ar em volta da ponta, tornando-o condutor e permitindo uma descarga (descarga corona).

Resumo

- Potencial elétrico em um ponto:

$$\Rightarrow \quad V \equiv \frac{U}{q_0}$$

- Diferença de potencial entre dois pontos:

$$\Rightarrow \quad \Delta V = V_f - V_i = -\int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{l}$$

- As linhas de campo elétrico são perpendiculares às superfícies equipotenciais e no sentido dos potenciais decrescentes

- Cálculo do campo elétrico a partir do potencial:

$$\Rightarrow \quad \vec{E} = -\vec{\nabla} V$$

- Os pontos dentro e na superfície de um condutor em equilíbrio eletrostático estão no mesmo potencial.