UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC

DB1BCN0407 Funções de várias variáveis - PROVA 1 - Turma A1 - 27/03/2018

Prof. André Pierro de Camargo

1. (1.5) Prove um dê um contra-exemplo:
   (a) (0.5) Se $\gamma_1, \gamma_2 : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ são duas curvas tais que $||\gamma_1(t) - \gamma_2(t)|| = k > 0 \; \forall \; t \in [a,b]$, então $L(\gamma_1) = L(\gamma_2)$ (γ_1 e γ_2 possuem o mesmo comprimento).
   (b) (0.5) Se uma curva $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ está contida numa reta, então $\gamma'(t)$ é um vetor constante.
   (c) (0.5) Se a derivada $\gamma'(t)$ de uma curva $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ é um vetor constante, então γ está contida numa reta.
2. (1.5) Calcule o comprimento da curva $y = \frac{1}{3}(x^2+2)^{3/2}, 0 \leq x \leq 1$.
3. (1.5) Considere a função $f(x,y) = \begin{cases} 1+y+x, & y \leq 0, x \leq 0 \\ 1+y-x, & y \leq 0, x > 0 \\ 1-y-x, & y > 0, x \geq 0 \\ 1-y+x, & y > 0, x < 0 \end{cases}$, definida para todos os pares de números reais (x,y).
   (a) (1.0) Desenhe a curva de nível $f(x,y) = -1$.
   (b) (0.5) Determine o conjunto de todos os valores de k tais que a curva de nível $f(x,y) = k$ não é um conjunto vazio.
4. (1.0) Determine todos os possíveis valores de a e b para que a função $f(x,y,z) = \frac{x^2+ay^2}{bx^2+y^2}$ tenha um limite quando $(x,y) \to (0,0)$.
5. (1.0) Uma função $f : \Omega \to \mathbb{R}$ definida em um subconjunto Ω do $\mathbb{R}^n$ é dita Lipschitziana se existe uma constante positiva L tal que $|f(u) - f(v)| \leq L||u-v|| \; \forall \; u,v \in \Omega$.

(a) (0.5) Mostre que uma função Lipschitziana é contínua em todos os pontos do seu domínio.

(b) (0.5) Mostre que, se $f : \Omega \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são Lipschitzianas, então a função composta $g \circ f$ é Lipschitziana.

6. (2.0) Considere a função $f(x, y) = \cos(\sqrt{x^2 + y^2})$ definida para todos os pares de números reais (x, y).

   (a) (0.5) Calcule as derivadas parciais de f em um ponto genérico $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$.

   (b) (0.5) Calcule as derivadas parciais de f na origem.

   (c) (1.0) f é diferenciável na origem?

7. (1.5) Seja $f : \Omega \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável definida em alguma subconjunto Ω de $\mathbb{R}^2$. Seja $(x_0, y_0) \in \Omega$. O conjunto das direções de descida de f é o conjunto $\mathcal{D}(f, x_0, y_0)$ formado por todas as direções $\vec{v} = (v_1, v_2)$ que formam um ângulo maior do que $\pi/2$ com o vetor gradiente $\nabla f(x_0, y_0)$, ou seja $\mathcal{D}(f, x_0, y_0) = \left\{(v_1, v_2) : v_1 \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + v_2 \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) < 0\right\}$.

   (a) (0.5) Mostre que, se $\nabla f(x_0, y_0) \neq \vec{0}$, então o conjunto $\mathcal{D}(f, x_0, y_0)$ não é vazio.

   (b) (1.0) É possível mostrar que, se $\vec{v}$ é uma direção de descida de f, então, para $t > 0$ suficientemente pequeno, vale $f((x_0, y_0) + t\,\vec{v}) < f((x_0, y_0))$, ou seja, é possível diminuir o valor de $f((x_0, y_0))$ andando *um pouquinho* na direção de $\vec{v}$.

   Com base nesse fato, encontre o ponto (x^*, y^*) que minimiza a função $f(x, y) = x^2 + y^2$ definida no conjunto $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 16 \text{ e } x + y \geq 1\}$.

8. (1.0) Considere a função $f(x, y) = x^2 + \pi xy + y^2$ definida para todos os pares de números reais (x, y). Determine (x_0, y_0) tal que o plano tangente ao gráfico de f no ponto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ é paralelo ao plano $z = -3x + 5y + 7$.