

# Teoria de Estabilidade de Lyapunov

Leonardo A. B. Tôrres

Março de 2019

**1** Teoria de Estabilidade de Lyapunov

**2** Princípio de Invariância de LaSalle

**3** Lema de Barbalat

# Pontos de Equilíbrio

Um ponto de equilíbrio  $x^{\text{eq}}$  é um estado no qual o campo vetorial é nulo, isto é, não há tendência de mudança do estado, ou seja,

$$\dot{x} = 0 \Rightarrow f(x^{\text{eq}}, t) = 0.$$

Portanto, se em

$$t = t_0, \quad x(t_0) = x^{\text{eq}},$$

então o estado do sistema permanece o mesmo, isto é:

$$x(t) = x^{\text{eq}}, \quad \forall t \geq t_0.$$

# Pontos de Equilíbrio

Sem perda de generalidade, nos desenvolvimentos a seguir podemos considerar  $x^{\text{eq}} = 0$ .

Para ver isso, suponha que  $x^{\text{eq}} \neq 0$ . Neste caso podemos usar uma translação de coordenadas  $z = x - x^{\text{eq}}$  e escrever:

$$\dot{x} = f(x, t),$$

$$\dot{z} = \dot{x} = f(z + x^{\text{eq}}, t) \equiv \hat{f}(z, t);$$

tal que  $z^{\text{eq}} = 0$  é um ponto de equilíbrio do novo sistema

$$\dot{z} = \hat{f}(z, t).$$

# Análise de Estabilidade de Pontos de Equilíbrio – Importância em Problemas de Controle I

Considere o seguinte sistema dinâmico em Malha Fechada ( $u \equiv u(x,t)$ ) em que se deseja a obtenção de um **novo Ponto de Equilíbrio estável**:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \hat{f}(x,u,t), \\ \dot{x} &= \hat{f}(x,u(x,t),t) = f(x,t).\end{aligned}$$

O novo P.E., sem perda de generalidade, pode ser considerado como sendo  $x^{\text{eq}} = 0$ , isto é,  $f(0,t) = 0$ .

Note que, neste contexto:

## Observação Importante

Estudar a estabilidade de Pontos de Equilíbrio de sistemas dinâmicos quaisquer é equivalente a se estudar a *Estabilidade do Sistema Controlado em Malha Fechada*!

# Análise de Estabilidade de Pontos de Equilíbrio – Importância em Problemas de Controle II

Em muitos trabalhos o vetor  $x$  é de fato o vetor *erro* ou diferença  $e(t)$  entre o comportamento do sistema e o comportamento desejado, tal que

$$\dot{e} = f(e, t),$$

e se busca provar que o Ponto de Equilíbrio  $e^{\text{eq}} = 0$  é pelo menos:

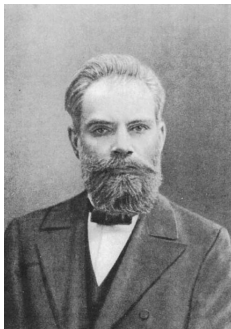
- *Estável*, no sentido de Lyapunov;
- ou, preferencialmente, *Globalmente Assintoticamente Estável* – GAS (*Globally Asymptotically Stable*), no sentido de Lyapunov.

Estes conceitos serão melhor explorados nos próximos slides.

## Estabilidade segundo Lyapunov

Em Teoria de Controle Não Linear é comum investigar-se inicialmente a estabilidade do sistema em torno de seus pontos de equilíbrio.

Há muitas diferentes definições de estabilidade, mas no presente caso estamos interessados nas definições **segundo Lyapunov**.

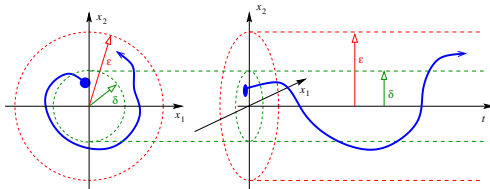


*Alexander Mikhailovich Lyapunov (1857–1917).*

Matemático Russo que publicou, em 1892, a principal Teoria de Estabilidade usada em Controle de Sistemas Dinâmicos Não Lineares.

# Estabilidade

- P.E. Estável: dado  $\epsilon > 0$  qualquer,  $\exists \delta(\epsilon, t_0) > 0$ , tal que  $\|x(t_0)\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| < \epsilon, \forall t \geq t_0$ .

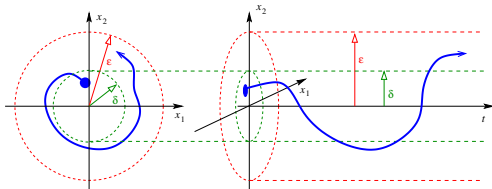


Note que necessariamente  $\delta \leq \epsilon$ .



# Estabilidade

- P.E. Estável: dado  $\epsilon > 0$  qualquer,  $\exists \delta(\epsilon, t_0) > 0$ , tal que  $\|x(t_0)\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| < \epsilon, \forall t \geq t_0$ .



Note que necessariamente  $\delta \leq \epsilon$ .

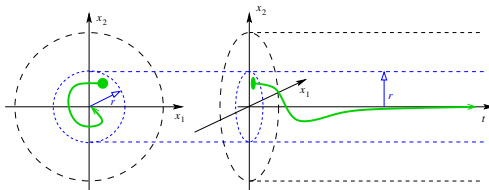
Em resumo: começando perto o suficiente de um ponto de equilíbrio estável, os estados do sistema permanecem, para sempre, tão próximos ao ponto de equilíbrio quanto quisermos.

# Estabilidade Assintótica

## ■ P.E. Assintoticamente Estável:

1 É um P.E. estável;

2  $\exists r(t_0) > 0$ , tal que  $\|x(t_0)\| < r \Rightarrow \|x(t)\| \rightarrow 0, t \rightarrow \infty$ .

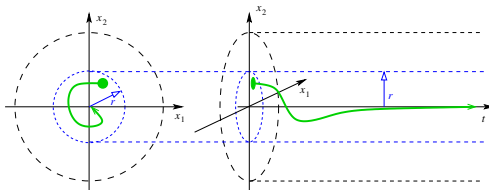


Note que não basta que o estado convirja para o P.E. A condição 1 impõe que a trajetória se mantenha no interior de uma bola de raio limitado  $\epsilon$  escolhido arbitrariamente, e portanto tão pequeno quanto se queira.

# Estabilidade Assintótica

## ■ P.E. Assintoticamente Estável:

- 1 É um P.E. estável;
- 2  $\exists r(t_0) > 0$ , tal que  $\|x(t_0)\| < r \Rightarrow \|x(t)\| \rightarrow 0, t \rightarrow \infty$ .



Note que não basta que o estado convirja para o P.E. A condição 1 impõe que a trajetória se mantenha no interior de uma bola de raio limitado  $\epsilon$  escolhido arbitrariamente, e portanto tão pequeno quanto se queira.

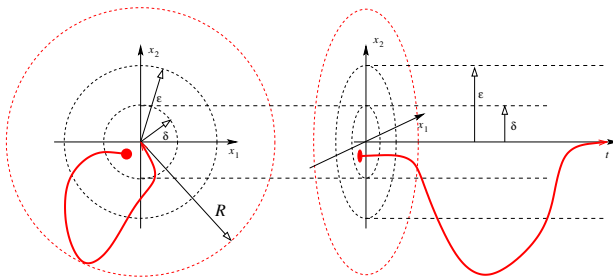
Em resumo: começando perto o suficiente de um ponto de equilíbrio assintoticamente estável, os estados do sistema ficarão próximos a ele, e convergirão para ele à medida que o tempo passa.

# Instabilidade

- P.E. Instável: é o ponto de equilíbrio que **não é estável**.

## Instabilidade: segundo Lyapunov

Por exemplo, suponha o caso de um sistema cujo estado sempre visita uma região de raio  $R$  antes de convergir para o P.E. Neste caso o P.E. não será estável no sentido de Lyapunov, contrariando nossas expectativas.



Isso mostra que a definição de estabilidade segundo Lyapunov não cobre todos os casos de interesse.

# Estabilidade Exponencial

- Estabilidade Exponencial: estabilidade assintótica em que se pode garantir uma taxa exponencial  $\lambda$  de aproximação do ponto de equilíbrio.
  - Existe  $\delta(t_0)$ , e constantes  $\alpha > 0$  e  $\lambda > 0$ , tais que

$$\|x(t_0)\| < \delta(t_0) \Rightarrow \|x(t)\| \leq \alpha \|x(t_0)\| e^{-\lambda(t-t_0)}$$

# Estabilidade Uniforme

- Estabilidade uniforme: caracteriza-se pela independência em relação ao instante inicial  $t_0$  considerado. Exemplos:
  - 1 P.E. Uniformemente Estável: é o P.E. estável em que o raio  $\delta \equiv \delta(\epsilon)$  não depende do instante inicial  $t_0$  considerado.
  - 2 P.E. Uniformemente Assintoticamente Estável: é o P.E. assintoticamente estável em que o raio  $\delta \equiv \delta(\epsilon)$  não depende do instante inicial  $t_0$  considerado.
  - 3 P.E. Uniformemente Exponencialmente Estável: é o P.E. exponencialmente estável em que o raio  $\delta$  não depende do instante inicial  $t_0$  considerado.

A noção de Estabilidade *Uniforme* é particularmente importante na análise de estabilidade de sistemas não autônomos. Para os sistemas autônomos, em que não há dependência explícita com o tempo, as propriedades de Estabilidade são automaticamente uniformes em relação ao instante inicial  $t_0$ .

# Estabilidade Assintótica Global – GAS

- Estabilidade Assintótica Global: válida não apenas para condições iniciais próximas ao equilíbrio, mas para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ . Isto é:
  - 1 Sistema Estável, e
  - 2 Verifica-se que

$$\|x(t)\| \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty, \quad \forall x(t_0) \in \mathbb{R}^n.$$

*GAS – Global Asymptotic Stability*



# Método Direto de Lyapunov I

Seja  $V(x)$  uma função continuamente diferenciável e definida positiva, chamada de **Função de Lyapunov Candidata**.

Ser uma função definida positiva significa que:

$$V(0) = 0; \text{ e } V(x) > 0, \forall x \neq 0.$$

E ser *continuamente diferenciável* significa que  $V(x)$  é contínua, e que suas derivadas parciais  $\partial V/\partial x_1, \partial V/\partial x_2, \dots, \partial V/\partial x_n$  existem e são contínuas.

# Método Direto de Lyapunov II

## Theorem (Método Direto de Lyapunov para Sistemas Autônomos)

*Seja  $x = 0$  um ponto de equilíbrio – P.E. de  $\dot{x} = f(x)$ , em que  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ , e  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  um domínio contendo  $x = 0$ . Seja  $V : D \rightarrow \mathbb{R}$  uma função continuamente diferenciável tal que*

$$\begin{aligned} V(0) &= 0; V(x) > 0, \forall x \in D - \{0\}; \\ \dot{V} &\leq 0, \forall x \in D. \end{aligned}$$

*Então o P.E. é estável. Além disso, se*

$$\dot{V} < 0, \quad \forall x \in D - \{0\},$$

*então o P.E. é assintoticamente estável.*

## Método Direto de Lyapunov III

O seguinte quadro apresenta de forma simplificada o método direto de Lyapunov, notando que  $\dot{V} \equiv \dot{V}(x) = \frac{\partial V}{\partial x} \frac{dx}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x} f(x)$ :

Se  $\frac{dV}{dt} \leq 0, \forall x \neq 0, \Rightarrow$  o P.E. é *Estável*;

Se  $\frac{dV}{dt} < 0, \forall x \neq 0, \Rightarrow$  o P.E. é *Assintoticamente Estável*.

Se uma das condições acima se verificar, diz-se que  $V(x)$  é uma *Função de Lyapunov*.

## Método Direto de Lyapunov IV

- Se uma das condições anteriores for verificada apenas em um conjunto aberto  $\Omega$  do Espaço de Estados  $X$ , tal que  $\Omega$  contém o P.E., isto é,

$$\begin{aligned} V(0) = 0, V(x) > 0, \quad \forall x \in \Omega \subset X, x^{\text{eq}} = 0 \in \Omega, \\ \dot{V}(x) \leq 0, \text{ ou } \dot{V}(x) < 0, \quad \forall x \in \Omega, \end{aligned}$$

então o resultado é *Local*.

- Se, além disso,  $\Omega \equiv \mathbb{R}^n$  e a Função de Lyapunov é radialmente ilimitada, isto é,

$$\|x\| \rightarrow \infty \Rightarrow V(x) = +\infty,$$

então o resultado é *Global*.

# Método Direto – Interpretações

## Interpretação Física:

- 1 Se considerarmos  $V(x(t))$  uma função usada para se medir a **Energia** do sistema, no sentido de que ela é sempre positiva, e apresenta seu mínimo apenas quando o sistema está em equilíbrio ( $x = x^{\text{eq}}$ ),
- 2 e se essa **Energia** sempre **decrece** ao longo do tempo, isto é,  
 $\frac{dV}{dt} < 0$ ,
- 3 então podemos concluir que o sistema irá entrar em equilíbrio:

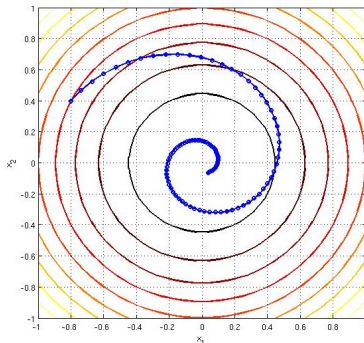
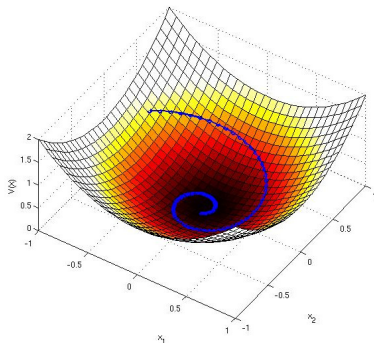
$$x(t) \rightarrow x^{\text{eq}},$$

que corresponde à condição de **mínima energia**.

# Método Direto – Interpretações

## Interpretação Física:

A energia decai ao longo do tempo, levando o sistema para o ponto de equilíbrio.



# Método Direto – Interpretações

## Interpretação Geométrica:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x} \frac{dx}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x} f(x) = \langle \nabla V(x), f(x) \rangle;$$

sendo  $\nabla V = \partial V / \partial x$  o gradiente da Função de Lyapunov, e  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  o operador produto escalar de dois vetores. Ou seja, para  $x = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]^\top$  e  $f(x) = [f_1(x) \ f_2(x) \ \dots \ f_n(x)]^\top$  vetores coluna, tem-se:

$$\langle \nabla V(x), f(x) \rangle = \left[ \frac{\partial V}{\partial x_1} \ \frac{\partial V}{\partial x_2} \ \dots \ \frac{\partial V}{\partial x_n} \right] \cdot \begin{bmatrix} f_1(x); \\ f_2(x); \\ \vdots \\ f_n(x) \end{bmatrix}.$$

# Método Direto – Interpretações

## Interpretação Geométrica:

Neste caso, supondo superfícies de nível definidas por  $V(x) = c$ , sendo  $c > 0$  uma constante real positiva, e lembrando que o gradiente  $\nabla V(x)$  é perpendicular à superfície de nível em questão no ponto  $x$ , vê-se que os vetores “velocidade”  $f(x)$  correspondentes devem apontar para dentro da superfície, uma vez que:

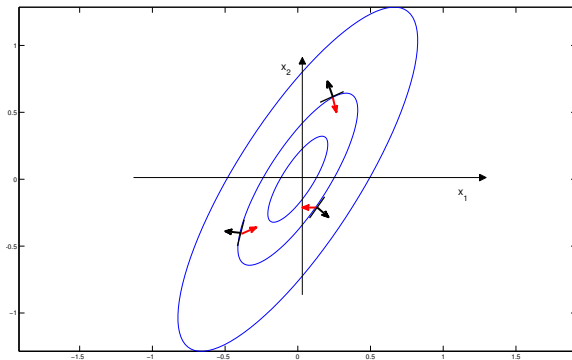
$$\frac{dV}{dt} = \langle \nabla V(x), f(x) \rangle = \|\nabla V(x)\| \|f(x)\| \cos(\theta);$$

$$\langle \nabla V(x), f(x) \rangle \leq 0 \Rightarrow \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2};$$



# Método Direto – Interpretações

## Interpretação Geométrica:



Em preto os vetores gradiente  $\nabla V(x)$  perpendiculares às superfícies de nível, e em vermelho os vetores “velocidade”  $f(x)$ .

# Método Direto – Interpretações

**Vide animação: [animated-Lyapunov.gif](#)**

# Método Direto – Observações

Importantes observações sobre o Método Direto de Lyapunov:

- 1 Se a Função de Lyapunov Candidata mostra-se não ser uma Função de Lyapunov, isto é,

$$\frac{dV}{dt} = \langle \nabla V(x), f(x) \rangle > 0$$

para algum  $x \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ , nada podemos concluir sobre a estabilidade do Ponto de Equilíbrio.

- 2 Não há um procedimento formal geral por meio do qual se possa obter sempre uma Função de Lyapunov para o problema.
- 3 As Funções de Lyapunov não são únicas. Por exemplo, se  $V(x)$  é uma Função de Lyapunov, então  $W(x) = \rho[V(x)]^\alpha$ , com  $\rho > 0$  e  $\alpha > 0$ , também é uma F. de Lyapunov para o sistema.

# Exemplos de Aplicação

- Mostre que o sistema massa-mola não linear é *estável no sentido de Lyapunov*:

$$m\ddot{x} = -b\dot{x} - k_0x - k_1x^3,$$

usando  $m = 1$ ;  $b = 1$ ;  $k_0 = 1$  e  $k_1 = 1$ .

1 Tentativa 1:  $V(x, \dot{x}) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}(\dot{x})^2$ ;

2 Tentativa 2:  $V(x, \dot{x}) = \underbrace{\frac{1}{2}m(\dot{x})^2}_{E_{\text{cinética}}} + \underbrace{\int_0^x (k_0x + k_1x^3)dx}_{E_{\text{potencial elástica}}}$ ;

# Exemplos de Aplicação

- Projete uma lei de controle para estabilizar o P.E.  $x = \dot{x} = 0$ , quando  $u = 0$ , do sistema:

$$\ddot{x} + (\dot{x})^3 - x^2 = u.$$

1 Tentativa 1:  $V(x) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2$ ;

2 Tentativa 2:  $V(x) = \frac{3}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 + x_1x_2$ , isto é,

$$V(x_1, x_2) = \frac{1}{2} [x_1 \ x_2]^\top \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x^\top P x,$$

em que  $P = P^\top = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$  é uma matriz simétrica definida positiva, ou seja,

$$x^\top P x > 0, \forall x \neq 0.$$

# Exemplos de Aplicação

- Projete uma lei de controle para estabilizar o P.E.  $x = \dot{x} = 0$ , quando  $u = 0$ , do sistema:

$$\ddot{x} + (\dot{x})^3 - x^2 = u.$$

1 Tentativa 1:  $V(x) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2$ ;

2 Tentativa 2:  $V(x) = \frac{3}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 + x_1x_2$ , isto é,

$$V(x_1, x_2) = \frac{1}{2} [x_1 \ x_2]^\top \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x^\top P x,$$

em que  $P = P^\top = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$  é uma matriz simétrica definida positiva, ou seja,

$$x^\top P x > 0, \forall x \neq 0.$$

Resp.:  $u = -x^2 + (\dot{x})^3 - x - 2\dot{x}$ .

# Método Direto de Lyapunov – Sistemas Lineares Invariantes no Tempo (SLIT)

Para sistemas dinâmicos que são Lineares e Invariantes no Tempo, é possível obter resultados mais fortes:

## Teorema de Lyapunov para SLITs

Um SLIT autônomo

$$\dot{x} = Ax,$$

é assintoticamente/exponencialmente estável se, e somente se, dada uma matriz  $Q = Q^\top$  definida positiva, a seguinte equação de Lyapunov

$$A^\top P + PA = -Q, \quad (1)$$

tem como solução uma matriz  $P = P^\top$  também definida positiva.

**Atenção:** a matriz simétrica definida positiva  $Q$  é dada, e a matriz  $P$  é calculada para satisfazer (1).

# Aplicação do Método Direto para SLITs I

**Utilização do Teorema de Lyapunov para SLITs:** Para um sistema

$$\dot{x} = Ax,$$

tomando como função de Lyapunov candidata  $V(x) = x^\top Px$ , com uma matriz  $P$  definida positiva *que satisfaz a equação (1)*, temos que

$$\begin{aligned}\frac{dV}{dt} &= \dot{x}^\top Px + x^\top P\dot{x}, \\ &= x^\top A^\top Px + x^\top PAx, \\ &= x^\top [A^\top P + PA] x, \\ &= -x^\top Qx < 0, \quad \forall x \neq 0.\end{aligned}$$



## Aplicação do Método Direto para SLITs II

Como  $V(x) = x^\top Px$  é radialmente ilimitada, o sistema é Globalmente Assintoticamente Estável – GAS. Além disso, uma vez que

$$\left. \begin{array}{l} x^\top Px \leq \lambda_{\max}(P) x^\top x, \\ x^\top Qx \geq \lambda_{\min}(Q) x^\top x, \end{array} \right\} \Rightarrow x^\top Qx \geq \frac{\lambda_{\min}(Q)}{\lambda_{\max}(P)} [x^\top Px],$$

podemos escrever, para  $V(x) = x^\top Px$ , que

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= -x^\top Qx, \\ \dot{V} &\leq -\beta V, \\ \Rightarrow V(t) &\leq e^{-\beta(t-t_0)} V(t_0), \end{aligned}$$

com  $\beta = \frac{\lambda_{\min}(Q)}{\lambda_{\max}(P)}$ . E fica clara a estabilidade exponencial global do P.E.

# Aplicação para SLITs: Máxima Taxa de Convergência I

A melhor estimativa da taxa de convergência exponencial  $\beta$  pode ser obtida escolhendo-se:

$$Q = I.$$

Para ver isso [2], considere os casos em que

$$\begin{aligned} A^\top P_0 + P_0 A &= -I, \\ A^\top P_1 + P_1 A &= -Q_1, \end{aligned} \tag{2}$$

com  $Q_1$  definida positiva e tal que  $\lambda_{\min}(Q_1) = 1$ , o que é sempre possível fazer escolhendo-se  $Q_1 = \frac{1}{\lambda_{\min}(Q)} Q$ , para  $Q > 0$ . Além disso, neste caso  $P_1 = \frac{1}{\lambda_{\min}(Q)} P$ , com  $P$  a solução única de  $A^\top P + P A = -Q$ .

## Aplicação para SLITs: Máxima Taxa de Convergência II

A partir das equações (2), subtraindo a primeira da segunda vemos que

$$A^\top (P_1 - P_0) + (P_1 - P_0)A = -(Q_1 - I),$$

e, neste caso, como  $-(Q_1 - I) = (I - Q_1) \leq 0$ , pois

$$x^\top Ix - x^\top Q_1 x \leq x^\top x - \lambda_{\min}(Q_1)x^\top x = 0,$$

então a solução da equação de Lyapunov acima,  $(P_1 - P_0) \geq 0$ , e  $\lambda_{\max}(P_1) \geq \lambda_{\max}(P_0)$ , e portanto,

$$\beta_0 = \frac{\lambda_{\min}(I)}{\lambda_{\max}(P_0)} = \frac{1}{\lambda_{\max}(P_0)} \geq \beta_1 = \frac{\lambda_{\min}(Q_1)}{\lambda_{\max}(P_1)} = \frac{1}{\lambda_{\max}(P_1)}.$$

# Método Indireto de Lyapunov: Linearização Jacobiana I

Em torno do P.E., isto é, para  $\|x - x^{\text{eq}}\| \approx 0$ , e considerando que  $f(\cdot) : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$  é uma função analítica, as equações diferenciais podem ser aproximadas localmente pelo truncamento da Série de Taylor, tal que:

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= f(x), \\
 &= \underbrace{f(x^{\text{eq}})}_{\text{Por definição igual a zero}} + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=x^{\text{eq}}} (x - x^{\text{eq}}) + \underbrace{\mathcal{O}(\|x - x^{\text{eq}}\|^2)}_{\text{Termos de ordem superior}}, \\
 &\approx \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=0} x, \\
 &\approx Ax,
 \end{aligned}$$

uma vez que  $f(x^{\text{eq}}) = f(0) = 0$ , sendo  $A = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=0}$  a matriz Jacobiana do sistema avaliada em  $x = x^{\text{eq}} = 0$ .

# Método Indireto de Lyapunov: Linearização Jacobiana II

## ■ Exemplo.

$$\text{Pêndulo simples: } \begin{cases} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -g/l \sin(x_1) - bx_2. \end{cases}$$

Um possível ponto de equilíbrio é  $x^{\text{eq}} = [0 \ 0]^T$ . Em torno desse ponto de equilíbrio, i.e. para  $x_1 \approx 0$  e  $x_2 \approx 0$ , definindo  $\delta x_1 = x_1 - x_1^{\text{eq}}$  e  $\delta x_2 = x_2 - x_2^{\text{eq}}$ , temos que

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &\approx x_2^{\text{eq}} + [0]\delta x_1 + [1]\delta x_2, \\ \dot{x}_2 &\approx [-g/l \sin(x_1^{\text{eq}}) - bx_2^{\text{eq}}] + [-g/l \cos(x_1^{\text{eq}})]\delta x_1 + [-b]\delta x_2. \end{cases}$$

E a matriz Jacobiana correspondente será:

$$A = \left[ \begin{array}{cc} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{array} \right]_{x=x^{\text{eq}}} = \left[ \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ -g/l \cos(x_1^{\text{eq}}) & -b \end{array} \right],$$

$$A = \left[ \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ -g/l & -b \end{array} \right].$$

# Método Indireto de Lyapunov: Linearização Jacobiana III

A partir do conhecimento de  $A$  tem-se que:

- Se algum autovalor de  $A$  tiver parte real positiva  $\Rightarrow$  P.E. instável.
- Se todos os autovalores de  $A$  tiverem parte real negativa  $\Rightarrow$  P.E. localmente assintoticamente estável.

Obs.:

- 1 Note que o resultado de estabilidade é apenas local.
- 2 Se houver algum autovalor com parte real nula, e mesmo que todos os outros tenham parte real negativa, nada podemos afirmar.

# Conjuntos Positivamente Invariantes

Um conjunto de pontos  $\Omega$  no Espaço de Estados é dito ser positivamente invariante sse

$$\forall x(t_0) \in \Omega \Rightarrow x(t) \in \Omega, \forall t \geq t_0.$$

Ou seja, se começar em  $\Omega$ , lá permanecerá indefinidamente a medida que o tempo cresce.

Alguns exemplos: um conjunto formado por um único Ponto de Equilíbrio; a bacia de atração de um Ponto de Equilíbrio assintoticamente estável; um ciclo limite; uma trajetória do sistema; o Espaço de Estados.

A partir desse conceito, podemos desenvolver uma “relaxação” interessante para o Teorema de Estabilidade Lyapunov para sistemas autônomos, no caso em que  $\frac{dV}{dt} \leq 0$  (ao invés de  $\frac{dV}{dt} < 0$ ), conhecido como Teorema de LaSalle.

# O Teorema de Krasovskii-LaSalle

## Teorema de Krasovskii-LaSalle

Seja  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  uma função continuamente diferenciável, tal que  $\dot{V} \leq 0$  em torno do ponto  $x = x^{\text{eq}} = 0$ .

Seja  $\Omega$  um conjunto compacto (fechado e limitado) positivamente invariante que contém o P.E.  $x^{\text{eq}} = 0$ .

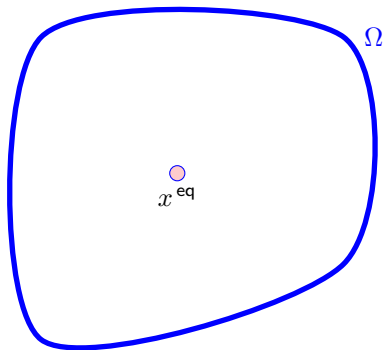
Seja  $\Omega_Z \subseteq \Omega$  formado pelo conjunto de pontos em que  $\dot{V}(x)$  se anula, isto é,  $\Omega_Z = \{x \in \Omega; \dot{V}(x) = 0\}$ .

Seja  $\Omega_I \subseteq \Omega_Z$  o maior conjunto positivamente invariante contido em  $\Omega_Z$ , isto é,  $\Omega_I$  é a união de todos os conjuntos invariantes contidos em  $\Omega_Z$ .

Então, para todas as condições iniciais em  $\Omega$ , a trajetória do sistema se aproximará assintoticamente de  $\Omega_I$  à medida que  $t \rightarrow \infty$ .

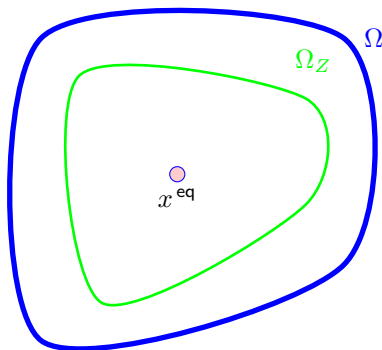


# O Teorema de Krasovskii-LaSalle



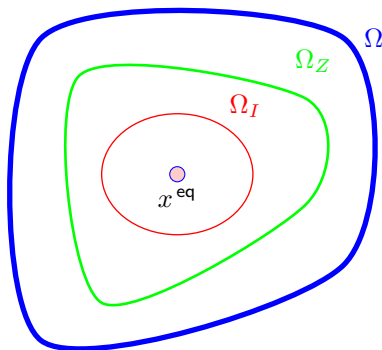
Seja  $\Omega$  um conjunto compacto (fechado e limitado) positivamente invariante que contém o P.E.  $x^{eq} = 0$ .

# O Teorema de Krasovskii-LaSalle



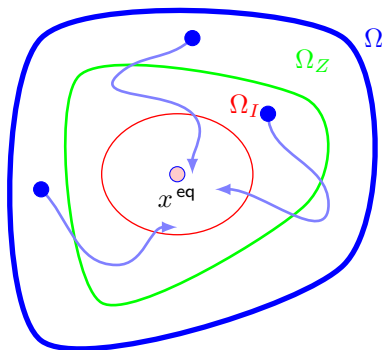
Seja  $\Omega_Z \subseteq \Omega$  formado pelo conjunto de pontos em que  $\dot{V}(x)$  se anula.

# O Teorema de Krasovskii-LaSalle



Seja  $\Omega_I \subseteq \Omega_Z$  o maior conjunto positivamente invariante contido em  $\Omega_Z$ .

# O Teorema de Krasovskii-LaSalle



Para todas as condições iniciais em  $\Omega$ , a trajetória do sistema se aproximará assintoticamente de  $\Omega_I$ .

# O Teorema de Krasovskii-LaSalle – Observações

## Observações:

- $x^{\text{eq}} \in \Omega_Z$ , e  $x^{\text{eq}} \in \Omega_I$ .
- Não se exige que  $V(x)$  seja definida positiva!
- Se  $V(x)$  é definida positiva; isto é,  $V(x) > 0, \forall x \neq 0$ ; e usando a hipótese  $\dot{V} \leq 0$ , então pode-se usar o conjunto  $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n; V(x) \leq c\}$ , para alguma constante real positiva  $c$ , como conjunto compacto positivamente invariante.

## Corolário do Teorema de Krasovskii-LaSalle

Para  $V(x)$  definida positiva, tal que  $\dot{V} \leq 0$ , se o maior conjunto invariante contido em  $\Omega_Z$  for  $\Omega_I = \{x^{\text{eq}}\}$ , isto é, um *singleton* (um único elemento), então o P.E. é assintoticamente estável.

## Exemplo: Massa-mola não linear I

No slide 26 vimos que para o sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -\frac{b}{m}x_2 - \frac{k_0}{m}x_1 - \frac{k_1}{m}x_1^3,\end{aligned}$$

usando a Função de Lyapunov Candidata

$$V(x_1, x_2) = \underbrace{\frac{1}{2}mx_2^2}_{E_{\text{cinética}}} + \underbrace{\int_0^{x_1} (k_0x + k_1x^3)dx}_{E_{\text{potencial elástica}}}$$

obtivemos

$$\dot{V}(x_1, x_2) = -bx_2^2 \quad \Rightarrow \quad \dot{V} \leq 0.$$

## Exemplo: Massa-mola não linear II

- 1** Como  $V(x) = \frac{1}{2}mx_2^2 + \frac{k_0}{2}x_1^2 + \frac{k_1}{4}x_1^4$  é definida positiva, podemos definir um conjunto positivamente invariante

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2; V(x) < c\},$$

para alguma constante arbitrária  $c > 0$ , pois  
 $\dot{V} \leq 0 \Rightarrow V(t) \leq V(t_0), \forall t \geq t_0$ .

## Exemplo: Massa-mola não linear III

- 2 Contido em  $\Omega$  temos

$$\Omega_Z = \{x \in \Omega; \dot{V}(x) = 0\} \equiv \{x \in \Omega; x_2 = 0\}.$$

- 3 Por outro lado, contido em  $\Omega_Z$ , o maior conjunto invariante é

$$\Omega_I = \{x \in \Omega_Z; x_2(t) = 0, \forall t \geq t_0\} \equiv \{x \in \Omega_Z; x_1 = 0, x_2 = 0\}.$$

Para ver isso, considere um ponto em  $\Omega_Z$  tal que  $(x_1(t_0); x_2(t_0)) = (\alpha; 0)$ , com  $\alpha \neq 0$ . De acordo com a dinâmica do sistema, isso conduziria a  $\dot{x}_1(t_0) = 0$ , e  $\dot{x}_2(t_0) \neq 0$  – o que levaria o estado  $x_2(t)$  a abandonar o conjunto  $\Omega_Z$  para  $t > t_0$ .



## Exemplo: Massa-mola não linear IV

- 4 Aplicando o Teorema de Krasovskii-Lasalle, concluímos, portanto, que o sistema irá para o conjunto  $\Omega_I$  formado pelo único ponto  $(x_1; x_2) = (0; 0)$  que é o P.E.

Com isso, ao invés de provarmos que o P.E. é globalmente estável, provamos algo mais forte: que ele é globalmente assintoticamente estável – GAS.

## Exemplo em Robótica

### 1 Cancelamento dinâmico ou Torque Computado:

Considere a dinâmica de um robô descrita por:

$$M(q)\ddot{q} + C(q,\dot{q})\dot{q} + \underbrace{g(q) + b(q,\dot{q})}_{N(q,\dot{q})} = u,$$

e o problema de rastreamento de uma trajetória desejada  $q_d(t)$ , tal que

$$e(t) = q(t) - q_d,$$

sendo que a lei de controle utilizada é dada por

$$\begin{aligned} u &= M(q)\ddot{a} + C(q,\dot{q})\dot{q} + N(q,\dot{q}), \\ \ddot{a} &= \ddot{q}_d - K_D(\dot{q} - \dot{q}_d) - K_P(q - q_d). \end{aligned}$$

Seja

$$V(e,\dot{e}) = \frac{1}{2}e^\top K_P e + \frac{1}{2}\dot{e}^\top \dot{e}.$$

# Continuidade Uniforme e o Lema de Barbalat I

- É possível desenvolver ainda outras extensões para o Método Direto de Lyapunov.
- A partir do conceito de **Continuidade Uniforme** de funções candidatas de Lyapunov, podemos obter uma “alternativa” para o Teorema de Estabilidade de Lyapunov para sistemas *não-autônomos*, conhecida como Lema de Barbalat. Para essa classe de sistemas não é possível usar diretamente o Princípio de Invariância de LaSalle.

# Continuidade Uniforme e o Lema de Barbalat II

Para uma função continuamente diferenciável  $V(t)$ :



$$\lim_{t \rightarrow \infty} V(t) = L \not\Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{V}(t) = 0,$$

em que  $|L| < \infty$ . Por exemplo,  $V(t) = e^{-t} \sin(e^{2t})$ , que tem derivada ilimitada  $\dot{V}(t) = -e^{-t} \sin(e^{2t}) + 2e^t \cos(e^{2t})$ .



$$\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{V}(t) = 0 \not\Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} V(t) = L,$$

em que  $|L| < \infty$  é uma constante. Por exemplo,  $V(t) = \sin(\log(t))$ , que não converge apesar de sua derivada tender a zero quando  $t \rightarrow \infty$ :  $\dot{V}(t) = \cos(\log(t)) \frac{1}{t}$ .

## Continuidade Uniforme e o Lema de Barbalat III

Por outro lado, para funções diferenciáveis  $V(t)$  que apresentem a propriedade especial de terem suas derivadas **uniformemente contínuas**, a primeira implicação no slide anterior é verdadeira, isto é:



$$\lim_{t \rightarrow \infty} V(t) = L \quad \Rightarrow \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{V}(t) = 0,$$

se  $\dot{V}(t)$  é uniformemente contínua.

## Continuidade Uniforme e o Lema de Barbalat IV

Nos desenvolvimentos a seguir é importante notar que, para funções continuamente diferenciáveis  $V(t)$  *que tenham um limite inferior*, que:



$$(V(t) \geq V_{\min} > -\infty) \text{ e } (\dot{V}(t) \leq 0, \forall t \geq 0) \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} V(t) = L,$$

em que  $|L| < \infty$  é uma constante.

Isto é, o fato de ter um limite inferior e de sua derivada ser semi-definida (ou definida) negativa implica que a função converge para um valor constante, quando  $t \rightarrow \infty$ . Mas é perfeitamente possível que  $L \neq V_{\min}$ .

# Funções Contínuas

## Definition (Funções Contínuas)

Uma função  $f(t)$ ,  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é *contínua* se, dado  $t_0 \in \mathbb{R}$  qualquer, e  $\varepsilon > 0$  qualquer (tão pequeno quanto se queira), podemos sempre encontrar um  $\delta(t_0, \varepsilon) > 0$  (pequeno o suficiente), tal que

$$|t - t_0| < \delta(t_0, \varepsilon) \Rightarrow |f(t) - f(t_0)| < \varepsilon.$$

Compare esta definição com a seguinte.

# Funções Uniformemente Contínuas I

## Definition (Funções Uniformemente Contínuas)

Uma função  $f(t)$ ,  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é *uniformemente contínua* se, dado  $t_0 \in \mathbb{R}$  qualquer, e  $\varepsilon > 0$  qualquer (tão pequeno quanto se queira), podemos sempre encontrar um  $\delta(\varepsilon) > 0$  que não depende de  $t_0$  (mas que pode depender de  $\varepsilon$ ), tal que

$$|t - t_0| < \delta \Rightarrow |f(t) - f(t_0)| < \varepsilon.$$

Ou seja,

*Continuidade uniforme*  $\Rightarrow$  *Continuidade*.

*Continuidade uniforme*  $\nLeftarrow$  *Continuidade*.



# Funções Uniformemente Contínuas

**Vide animação:  
Continuity-and-uniform-continuity-2.gif**

Clique aqui para ver no site da Wikipedia.org o verbete *Uniform Continuity*.

# Funções Uniformemente Contínuas: cond. suficientes I

Há uma maneira mais fácil de se verificar se uma dada função *diferenciável*  $f(t)$  é uniformemente contínua, usando a seguinte condição suficiente:

$$\left| \frac{df}{dt} \right| < m < \infty \Rightarrow \textit{Continuidade Uniforme}.$$

Isto é, se a derivada da função é limitada, então a função é uniformemente contínua.

# Funções Uniformemente Contínuas: cond. suficientes II

## Definition (Função Lipschitz Contínua)

Uma função  $f(t) : X \rightarrow \mathbb{R}$ , com  $X \subseteq \mathbb{R}$ , é *Lipschitz Contínua* em  $X$ , se existe uma constante  $0 \leq K < \infty$  (constante de Lipschitz), tal que

$$|f(t_1) - f(t_2)| \leq K|t_1 - t_2|, \quad \forall t_1, t_2 \in X.$$

Ex.: a função *saturação*, que é contínua, linear por partes, e limitada, mas não diferenciável.

Para o caso de funções *não diferenciáveis* podemos usar a seguinte condição suficiente muito similar à condição mostrada no slide anterior:

*Continuidade Lipschitz  $\Rightarrow$  Continuidade Uniforme.*

# Lema de Barbalat

## Lema de Barbalat – Versão (1)

Seja uma função  $V(t)$ ,

$$V : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R},$$

tal que o limite

$$\lim_{t \rightarrow \infty} V(t) = L,$$

existe e é finito ( $|L| < \infty$ ).

Se a derivada temporal  $\dot{V}(t)$  é *uniformemente contínua*, então:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{V}(t) = 0.$$

Note que *não se exige que a função  $V(t)$  seja definida positiva*.

# Lema de Barbalat

## Lema de Barbalat – Versão (2)

Seja uma função  $\phi(t)$ ,

$$\phi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R},$$

*uniformemente contínua* em  $[0, \infty)$ , e tal que o limite abaixo existe e é finito:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \phi(\tau) d\tau = L, \quad |L| < \infty.$$

Neste caso:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t) = 0.$$

Obs.: Nessa versão,  $\phi(t)$  faz o papel de  $\dot{V}(t)$  na versão anterior.

# Lema de Barbalat

## Lema de Barbalat – Versão (3)

Seja uma função  $V(t)$ ,

$$V : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R},$$

tal que as seguintes propriedades são verificadas:

$$-\infty < m \leq V(t), \quad \dot{V} \leq 0; \quad \forall t \geq 0, \quad (3)$$

isto é,  $V(t)$  é limitada inferiormente, e sua derivada  $\dot{V}(t)$  é semi-definida negativa. Se além disso  $\dot{V}(t)$  é *uniformemente contínua*, então:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{V}(t) = 0.$$

Obs.: Nessa versão, as condições (3) garantem a existência do limite:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} V(t) = L, \quad |L| < \infty.$$

# Um Corolário do Lema de Barbalat

## Corolário

Seja uma função *diferenciável*  $\Psi(s)$ ,

$$\Psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},$$

tal que  $\left| \frac{d\Psi}{ds} \right| < m_1 < \infty, \forall s$ , e  $\Psi(s) = 0 \Leftrightarrow s = 0$ ; sendo que  $s \equiv s(t)$ , isto é,  $s : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ , e  $s(t)$  é também uma função diferenciável tal que  $\left| \frac{ds}{dt} \right| < m_2 < \infty, \forall t \geq 0$ . Se

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \Psi(s(\tau)) d\tau = L, \quad |L| < \infty,$$

então:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} s(t) = 0.$$

# Exemplo de Aplicação I

Suponha um sistema estável de 1ª ordem:

$$\dot{x} = -a_p x + u, \quad (4)$$

para o qual se deseja projetar um sistema de controle que conduza a um comportamento dinâmico desejado, dado pelo seguinte modelo:

$$\dot{x}_m = -a_m x_m + r(t), \quad a_m > 0, \quad (5)$$

em que  $r(t)$  é um sinal de referência limitado. Uma maneira de se conseguir isso é usando a lei de controle:

$$u = r(t) + (a_p - a_m) x.$$



## Exemplo de Aplicação II

Mas suponha que não se conhece *a priori* o valor do parâmetro  $a_p$ . Neste caso, uma possível lei de controle seria uma aproximação da lei ideal:

$$u = r(t) + (\hat{a}_p - a_m) x, \quad (6)$$

em que  $\hat{a}_p$  é uma aproximação para  $a_p$ . O erro na estimação deste parâmetro pode ser escrito como

$$\tilde{a}_p = \hat{a}_p - a_p. \quad (7)$$

Usando (6) em (4), considerando (5), e definindo  $e = x - x_m$ , podemos escrever que:

$$\begin{aligned} \dot{e} &= -a_p x + r(t) + (\hat{a}_p - a_m) x - \{-a_m x_m + r(t)\}, \\ \dot{e} &= -a_m e + \tilde{a}_p x. \end{aligned} \quad (8)$$

Para garantir que o erro convirja para zero, podemos projetar uma *lei de adaptação adequada* para o parâmetro  $\hat{a}_p$ .

## Exemplo de Aplicação III

Uma forma de se fazer isso é considerar a seguinte função definida positiva, e inferiormente limitada:

$$V(e, \tilde{a}_p) = \frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{2}\tilde{a}_p^2, \quad V(e, \tilde{a}_p) \geq 0. \quad (9)$$

De (8), a derivada temporal dessa função é dada por:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= e \frac{de}{dt} + \tilde{a}_p \frac{d\tilde{a}_p}{dt}, \\ &= e [-a_m e + \tilde{a}_p x] + \tilde{a}_p \frac{d\hat{a}_p}{dt}, \\ &= -a_m e^2 + \tilde{a}_p e x + \tilde{a}_p \frac{d\hat{a}_p}{dt}, \end{aligned} \quad (10)$$

Na equação acima usou-se o fato de  $\frac{d\tilde{a}_p}{dt} = \frac{d}{dt} [\hat{a}_p - a_p]$ , com  $a_p$  uma constante desconhecida.

## Exemplo de Aplicação IV

A partir de (10), vê-se que se escolhermos

$$\frac{d\hat{a}_p}{dt} = -ex, \quad (11)$$

então

$$\dot{V} = -a_m e^2$$

será uma função semi-definida negativa. Isso garante que  $V(e, \tilde{a}_p)$  é uma função não-crescente, que por ser inferiormente limitada tem um limite quando  $t \rightarrow \infty$ .

## Exemplo de Aplicação V

Além disso,  $\dot{V}$  é uniformemente contínua pois

$$\begin{aligned}\ddot{V} &= -2a_m e \dot{e}, \\ &= -2a_m e [-a_m e + \tilde{a}_p x], \\ &= 2a_m^2 e^2 - 2a_m e \tilde{a}_p \underbrace{(e + x_m)}_x\end{aligned}$$

é uma função limitada, uma vez que:

- 1  $V(e, \tilde{a}_p) = \frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{2}\tilde{a}_p^2$  é sempre menor ou igual ao seu valor inicial, e isso necessariamente implica em  $e$  e  $\tilde{a}_p$  serem variáveis limitadas;
- 2  $a_m$  é por hipótese uma constante positiva;
- 3  $x_m$  é uma variável limitada, pois por hipótese assumiu-se que  $r(t)$  é uma função limitada, e a partir de (5) vê-se que  $x_m(t)$  é a saída de um sistema BIBO (*Bounded-Input Bounded-Output*) estável.

## Exemplo de Aplicação VI

Pelo Lema de Barbalat, conclui-se que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{V} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0.$$

Note que o sistema original é não-autônomo, por isso não é possível usar o Teorema de LaSalle, pois o conjunto  $\Omega_I$  não pode ser definido.

# Exemplo de Aplicação em Robótica I

Pode-se mostrar que as equações dinâmicas de um robô podem ser representadas como

$$\begin{aligned} M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + \underbrace{g(q) + b(q, \dot{q})}_{N(q, \dot{q})} &= u, \\ Y(q, \dot{q}, \ddot{q})\theta &= u, \end{aligned}$$

em que  $Y(q, \dot{q}, \ddot{q}) \in \mathbb{R}^{l \times l}$  é a matriz de regressores associada à equação canônica do Robô, e  $\theta \in \mathbb{R}^l$ . No caso em que os parâmetros são incertos, podemos escrever que

$$Y(q, \dot{q}, \ddot{q})\theta' \approx u,$$

em que  $\theta' \in \mathbb{R}^l$  é uma estimativa dos parâmetros de massa do robô.

## Exemplo de Aplicação em Robótica II

Nos slides seguintes usaremos a propriedade de linearidade nos parâmetros  $\theta$  das equações dinâmicas de um robô para a seguinte expressão correlata [2]:

$$M(q)\ddot{q}_r + C(q, \dot{q})\dot{q}_r + \underbrace{g(q) + b(q, \dot{q})}_{N(q, \dot{q})} = Y(q, \dot{q}, \dot{q}_r, \ddot{q}_r)\theta, \quad (12)$$

em que  $Y(q, \dot{q}, \dot{q}_r, \ddot{q}_r) \in \mathbb{R}^{l \times l}$  é a mesma matriz de regressores anterior, mas na qual algumas variáveis foram substituídas pelos vetores  $\dot{q}_r$  e  $\ddot{q}_r$ .

## Exemplo de Aplicação em Robótica III

Definindo o erro de estimação como:

$$\tilde{\theta} = \theta' - \theta \quad \Rightarrow \quad \dot{\tilde{\theta}} = \dot{\theta}',$$

onde a última expressão decorre da hipótese de que  $\theta$  seja constante, considere a seguinte Função de Lyapunov candidata:

$$V(s, q, \tilde{\theta}) = \frac{1}{2} s^\top M(q) s + \frac{1}{2} \tilde{\theta}^\top \Gamma^{-1} \tilde{\theta},$$

em que  $\Gamma = \Gamma^\top > 0$ , e

$$s = \dot{e} - \Lambda e, \tag{13}$$

com  $e = q - q_d$ , e  $\Lambda$  uma matriz Hurwitz. Note que

$$s = \dot{q} - \dot{q}_r, \quad \text{para} \quad \dot{q}_r = \dot{q}_d + \Lambda e.$$



## Exemplo de Aplicação em Robótica IV

Neste caso, a derivada da Função de Lyapunov candidata será

$$\begin{aligned}
 \dot{V} &= s^\top M \dot{s} + \frac{1}{2} s^\top \dot{M} s + \tilde{\theta}^\top \Gamma^{-1} \dot{\tilde{\theta}}, \\
 &= s^\top M (\ddot{q} - \ddot{q}_r) + \frac{1}{2} s^\top \dot{M} s + \tilde{\theta}^\top \Gamma^{-1} \dot{\tilde{\theta}}, \\
 &= s^\top (u - N(q, \dot{q}) - C(q, \dot{q}) \dot{q} - M \ddot{q}_r) + \frac{1}{2} s^\top \dot{M} s + \tilde{\theta}^\top \Gamma^{-1} \dot{\tilde{\theta}}', \\
 &= s^\top (u - N(q, \dot{q}) - C(q, \dot{q}) [s + \dot{q}_r] - M \ddot{q}_r) + \frac{1}{2} s^\top \dot{M} s + \tilde{\theta}^\top \Gamma^{-1} \dot{\tilde{\theta}}',
 \end{aligned}$$

Lembrando que  $\dot{M} - 2C$  é uma matriz anti-simétrica, tem-se que  $s^\top \left( \frac{1}{2} \dot{M} - C \right) s = 0$ , e portanto:

$$\dot{V} = s^\top (u - N(q, \dot{q}) - C(q, \dot{q}) \dot{q}_r - M(q) \ddot{q}_r) + \tilde{\theta}^\top \Gamma^{-1} \dot{\tilde{\theta}}'.$$

## Exemplo de Aplicação em Robótica V

Usando a propriedade de linearidade (12), podemos escrever que:

$$\dot{V} = s^\top (u - Y(q, \dot{q}, \dot{q}_r, \ddot{q}_r)\theta) + \tilde{\theta}^\top \Gamma^{-1} \dot{\theta}'.$$

Fazendo

$$u = Y(q, \dot{q}, \dot{q}_r, \ddot{q}_r)\theta' - K_D s,$$

tem-se que

$$\dot{V} = s^\top Y (\theta' - \theta) + \tilde{\theta}^\top \Gamma^{-1} \dot{\theta}' - s^\top K_D s.$$

Escolhendo a lei de adaptação dos parâmetros estimados como

$$\dot{\theta}' = -\Gamma Y^\top s,$$

## Exemplo de Aplicação em Robótica VI

obtém-se, substituindo-se na expressão para a derivada da Função de Lyapunov candidata (lembrando que  $\Gamma = \Gamma^\top$ ):

$$\dot{V} = -s^\top K_D s \quad \Rightarrow \quad \dot{V} \leq 0.$$

A partir desse resultado, considerando que a Função de Lyapunov proposta é inferiormente limitada, podemos concluir que:

- 1 As variáveis  $s$ ,  $q$  e  $\tilde{\theta}$  são limitadas.
- 2 Como  $\tilde{\theta} = \theta' - \theta$  é limitada e os parâmetros desconhecidos  $\theta$  são constantes, os parâmetros estimados via adaptação  $\theta'$  são também limitados.
- 3 Note também que, a partir de (13), se  $s$  é limitada, a variável  $e$  pode ser vista como a “saída” de um SLIT que é exponencialmente estável ( $\Lambda$  é Hurwitz), e consequentemente é também um sistema BIBO estável. Portanto,  $e$  é limitada, bem como  $\dot{e}$ .

## Exemplo de Aplicação em Robótica VII

- 4 A partir desse resultado, e supondo que  $q_d(t)$  é limitada, com derivadas limitadas  $\dot{q}_d(t)$  e  $\ddot{q}_d(t)$ , conclui-se que  $q$  e  $\dot{q}$  são limitados, além de  $\dot{q}_r(t)$  e  $\ddot{q}_r(t)$  serem também limitadas.
- 5 Consequentemente, a partir da expressão para  $u$ , conclui-se que este também é um vetor de sinais limitados.
- 6 Finalmente, com  $u$ ,  $q$  e  $\dot{q}$  limitados, a partir da Equação Canônica do Robô concluímos que  $\ddot{q}$  é limitada.

## Exemplo de Aplicação em Robótica VIII

Da análise anterior, e usando a expressão para  $\dot{s}$ , vê-se que a derivada segunda da Função de Lyapunov

$$\ddot{V} = -2s^\top K_D \dot{s}$$

é limitada. Portanto,  $\dot{V}(t)$  é uniformemente contínua e, aplicando o lema de Barbalat:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{V}(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad s \rightarrow 0.$$

Consequentemente,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0,$$

pois, como dito anteriormente, a variável  $e$  pode ser vista como a “saída” de um SLIT estável definido por (13).

# Apêndice

# Matrizes Definidas e Semi-definidas I

- 1 Matriz Definida Positiva:** Uma matriz  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$  é *definida positiva* se, e somente se, a função escalar  $V(x) = x^\top Px$  é definida positiva, isto é

$$x^\top Px > 0, \forall x \neq 0.$$

- 2 Matriz Semidefinida Positiva:** Uma matriz  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$  é *semidefinida positiva* se, e somente se, a função escalar

$$x^\top Px \geq 0, \forall x \neq 0.$$

## Matrizes Definidas e Semi-definidas II

- 3 Matriz Definida Negativa:** Uma matriz  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$  é *definida negativa* se, e somente se, a função escalar

$$x^\top Q x < 0, \forall x \neq 0.$$

- 4 Matriz Semidefinida Negativa:** Uma matriz  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$  é *semidefinida negativa* se, e somente se, a função escalar

$$x^\top Q x \leq 0, \forall x \neq 0.$$



# Matrizes Definidas e Semi-definidas III

Observações importantes sobre funções quadráticas do tipo

$$\phi(x) = x^\top P x.$$

- 1** Não há perda de generalidade ao se considerar apenas matrizes simétricas  $P = P^\top$  na expressão de  $\phi(x)$ . Para ver isso, note que qualquer matriz  $P$  pode ser decomposta como

$$\begin{aligned} P &= \underbrace{\frac{1}{2}(P + P^\top)}_{S: \text{Parte Simétrica}} + \underbrace{\frac{1}{2}(P - P^\top)}_{A: \text{Parte Anti-simétrica}}, \\ &= S + A. \quad S = S^\top, \quad A = -A^\top. \end{aligned}$$

## Matrizes Definidas e Semi-definidas IV

Mas a parte anti-simétrica não contribui para  $\phi(x)$ , pois, lembrando que  $x^\top Ax$  é uma função escalar, temos que

$$\begin{aligned} x^\top Ax &= [x^\top Ax]^\top = x^\top A^\top x, \\ &= -x^\top Ax \quad \Rightarrow \quad x^\top Ax = 0, \forall x \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} \phi(x) &= x^\top Px, \\ &= x^\top (S + A) x = x^\top Sx + \cancel{x^\top Ax}^0, \\ &= x^\top Sx, \end{aligned}$$

e somente a componente simétrica  $S = \frac{1}{2} (P + P^\top)$  contribui para se determinar o valor de  $\phi(x) = x^\top Px$ .

## Matrizes Definidas e Semi-definidas V

- 2 É possível mostrar que toda matriz  $P = P^\top$  simétrica definida positiva pode ser escrita como o produto (Teorema da Decomposição Espectral):

$$P = U^\top \Lambda U,$$

em que  $\Lambda = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ , sendo  $\lambda_i \in \mathbb{R}^+$ , para  $i = 1, 2, \dots, n$ , autovalores de  $P$ , que são números reais positivos; e  $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$  uma matriz real *ortogonal*, isto é,

$$U^\top U = I_n, \quad UU^\top = I_n,$$

sendo  $I_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$  a matriz identidade. Isto significa que as colunas de  $U$  podem ser vistas como vetores de norma unitária que são ortogonais entre si, isto é,  $U = [u_1 \ u_2 \ \cdots \ u_n]$ , com  $u_i^\top u_j = 0$ , se  $i \neq j$ , e  $u_i^\top u_i = 1$ .

# Matrizes Definidas e Semi-definidas VI

- 3** A partir do item anterior, e sem perda de generalidade considerando  $P = P^\top$ , podemos escrever que

$$\begin{aligned}\phi(x) &= x^\top P x = x^\top (U^\top \Lambda U) x = (x^\top U^\top) \Lambda (U x), \\ &= z^\top \Lambda z, \\ &= \lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 + \dots + \lambda_n z_n^2,\end{aligned}$$

em que  $z = Ux$  é uma transformação de coordenadas que preserva a norma dos vetores:  $\|x\|^2 = \|z\|^2 = x^\top U^\top U x$ . Considerando  $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$ , temos que

$$\begin{aligned}\phi(x) &= x^\top P x, \\ &= \lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 + \dots + \lambda_n z_n^2 \leq \lambda_n z_1^2 + \lambda_n z_2^2 + \dots + \lambda_n z_n^2, \\ &\leq \lambda_n z^\top z, \\ &\leq \lambda_n x^\top x. \quad \Rightarrow \quad x^\top P x \leq \lambda_n x^\top x.\end{aligned}$$

## Matrizes Definidas e Semi-definidas VII

De forma semelhante, também se consegue mostrar que  $x^\top Px \geq \lambda_1 x^\top x$ , e portanto,

$$\lambda_1 x^\top x \leq x^\top Px \leq \lambda_n x^\top x,$$

em que  $\lambda_1 = \lambda_{\min}(P)$  é o menor autovalor de  $P$ , e  $\lambda_n = \lambda_{\max}(P)$  é o maior autovalor de  $P$ :

$$\lambda_{\min}(P)\|x\|^2 \leq x^\top Px \leq \lambda_{\max}(P)\|x\|^2.$$

# Teorema de Lyapunov para Sistemas Autônomos I

## Theorem (Método Direto de Lyapunov para Sistemas Autônomos)

*Seja  $x = 0$  um ponto de equilíbrio – P.E. de  $\dot{x} = f(x)$ , em que  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ , e  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  um domínio contendo  $x = 0$ . Seja  $V : D \rightarrow \mathbb{R}$  uma função continuamente diferenciável tal que*

$$V(0) = 0; V(x) > 0, \forall x \in D - \{0\};$$

$$\dot{V} \leq 0, \forall x \in D.$$

*Então o P.E. é estável. Além disso, se*

$$\dot{V} < 0, \quad \forall x \in D - \{0\},$$

*então o P.E. é assintoticamente estável.*

# Teorema de Lyapunov para Sistemas Autônomos II

## ■ Prova da Parte sobre Estabilidade:

Dado  $\epsilon > 0$ , escolha  $0 < r \leq \epsilon$  tal que a bola fechada

$$\bar{\mathcal{B}}_r = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x\| \leq r\}$$

esteja contida em  $D$ , onde as hipóteses do teorema são verdadeiras. Seja  $\alpha = \min_{\|x\|=r} V(x)$ . Então existe  $\alpha$ , e  $\alpha > 0$ , pois trata-se do mínimo de uma função contínua em um domínio compacto (Teo. dos Extremos ou Teo. de Weierstrass). Escolha  $0 < \beta < \alpha$ , e defina o conjunto

$$\Omega_\beta = \{x \in \bar{\mathcal{B}}_r; V(x) \leq \beta\}.$$

Note que  $\Omega_\beta$  está no interior de  $\bar{\mathcal{B}}_r$ , isto é, nenhum ponto  $x \in \Omega_\beta$  pode ser um ponto na fronteira de  $\bar{\mathcal{B}}_r$ . Se isso ocorresse, então  $\|x\| = r$  e simultaneamente  $V(x) \leq \beta < \alpha$ , violando o fato de  $\alpha = \min_{\|x\|=r} V(x)$ .

## Teorema de Lyapunov para Sistemas Autônomos III

Além disso,  $\Omega_\beta$  é um conjunto *positivamente invariante*; i.e. se  $x(t_0) \in \Omega_\beta$ , então  $x(t) \in \Omega_\beta, \forall t \geq t_0$ ; pois

$$\dot{V} \leq 0 \quad \Rightarrow \quad V(t) \leq V(t_0) \leq \beta, \quad \forall t \geq t_0.$$



## Teorema de Lyapunov para Sistemas Autônomos IV

Agora só é preciso encontrar uma bola de raio  $\delta$ , contida na bola de raio  $r < \epsilon$ , de possíveis condições iniciais a partir das quais as trajetórias não podem abandonar a bola de raio  $\epsilon$ . Para tanto, podemos usar a continuidade de  $V(x)$  em torno de  $x = 0$ , e o fato de  $V$  ser definida positiva, para afirmar que existe  $\delta > 0$  tal que

$$\begin{aligned}\|x - 0\| < \delta &\Rightarrow |V(x) - 0| < \beta \\ &\Updownarrow \\ \|x\| < \delta &\Rightarrow V(x) < \beta,\end{aligned}$$

e, neste caso,

$$\mathcal{B}_\delta \subset \Omega_\beta \subset \bar{\mathcal{B}}_r \subset \mathcal{B}_\epsilon.$$

# Teorema de Lyapunov para Sistemas Autônomos V

Além disso, considerando o fato de  $\Omega_\beta$  ser positivamente invariante, tem-se que

$$\begin{aligned}x(t_0) \in \mathcal{B}_\delta &\Rightarrow x(t_0) \in \Omega_\beta; \\x(t_0) \in \Omega_\beta &\Rightarrow x(t) \in \Omega_\beta, \forall t \geq t_0; \\x(t) \in \Omega_\beta, \forall t \geq t_0 &\Rightarrow x(t) \in \mathcal{B}_\epsilon, \forall t \geq t_0.\end{aligned}$$

Portanto, prova-se a estabilidade do P.E.:

$$\|x(t_0)\| < \delta \quad \Rightarrow \quad \|x(t)\| < \epsilon, \quad \forall t \geq t_0.$$

# Teorema de Lyapunov para Sistemas Autônomos VI

## ■ Prova da Parte sobre Estabilidade Assintótica:

Neste caso, é preciso mostrar que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t)\| = 0,$$

quando  $\dot{V} < 0$ ,  $\forall x \in D - \{0\}$ .

Isso é equivalente a dizer que, dado  $a > 0$  tão pequeno quanto se queira, pode-se encontrar um intervalo de tempo finito  $T_a \geq 0$ , tal que

$$\|x(t)\| < a, \quad \forall t \geq t_0 + T_a. \quad (14)$$

# Teorema de Lyapunov para Sistemas Autônomos VII

Entretanto, usando os mesmos argumentos anteriores, sabe-se que sempre haverá um  $\beta_a > 0$ , para  $0 < b < a$ , com

$$\beta_a < \min_{\|x\|=b} V(x),$$

tal que  $\Omega_{\beta_a} \subset \bar{\mathcal{B}}_b \subset \mathcal{B}_a$ , sendo que

$$\Omega_{\beta_a} = \{x \in \bar{\mathcal{B}}_b; V(x) \leq \beta_a\}$$

é um conjunto positivamente invariante. Deste modo, pode-se concluir (14), se for possível mostrar que, dado  $a > 0$  tão pequeno quanto se queira, obtém-se um  $\beta_a > 0$  como mostrado acima, e um intervalo de tempo finito  $T_a \geq 0$ , tal que

$$V(x(t)) \leq \beta_a \Rightarrow \|x(t)\| < a, \quad \forall t \geq t_0 + T_a. \quad (15)$$

# Teorema de Lyapunov para Sistemas Autônomos VIII

O Tempo  $T_a$  que satisfaz (15) pode ser computado considerando os seguintes casos

- $x(t_0) \in \Omega_{\beta_a} \Rightarrow T_a = 0$ .
- $x(t_0) \notin \Omega_{\beta_a} \Rightarrow V(x(t_0)) = V_0 > \beta_a$ . Neste caso, considere o conjunto fechado e limitado (portanto, compacto)

$$R_0 = \{x \in \bar{\mathcal{B}}_r; \beta_a \leq V(x) \leq V_0\},$$

e considere que, usando novamente o Teorema dos Extremos, existe

$$\gamma = \max_{x \in R_0} \dot{V}(x),$$

que é um valor negativo por hipótese, i.e.  $\gamma < 0$ , pois  $\dot{V}(x) < 0$ ,  $\forall x \in D - \{0\}$ .

## Teorema de Lyapunov para Sistemas Autônomos IX

Mas com isso conclui-se que, para  $x(t_0) \in R_0$ ,

$$V(x(t)) = V(x(t_0)) + \int_{t_0}^t \dot{V}(x(\tau)) d\tau,$$

$$V(x(t)) \leq V_0 + \int_{t_0}^t \gamma d\tau,$$

$$V(x(t)) \leq V_0 + \gamma(t - t_0)$$

e, portanto, lembrando que  $\gamma < 0$  e  $V_0 > \beta_a$ , tem-se que

$$t \geq t_0 + \frac{V_0 - \beta_a}{-\gamma} \Rightarrow V(x(t)) \leq \beta_a.$$

Isto significa que se pode escolher  $T_a = \frac{V_0 - \beta_a}{-\gamma} < \infty$  para se satisfazer (15).

# GAS: Necessidade de $V(x)$ ser Radialmente Ilimitada I

- Como visto anteriormente, a Estabilidade Assintótica *Global* depende de se ter uma Função de Lyapunov **radialmente ilimitada**, isto é,  $V(x) \rightarrow \infty$ , quando  $\|x\| \rightarrow \infty$  segundo *qualquer caminho*, isto é, dado  $c > 0$  qualquer, tão grande quanto se queira, sempre existe  $r > 0$  tal que  $V(x) > c, \forall \|x\| \geq r$ .

## GAS: Necessidade de $V(x)$ ser Radialmente Ilimitada II

- Note que isto pode ser expresso logicamente de duas maneiras equivalentes:

$$\forall c > 0, \exists r, 0 < r < \infty : \|x\| > r \Rightarrow V(x) > c,$$

$$\forall c > 0, \exists r, 0 < r < \infty : V(x) \leq c \Rightarrow \|x\| \leq r,$$

sendo que a última expressão é equivalente a dizer que o conjunto

$$\Omega_c = \{x \in \mathbb{R}^n; V(x) \leq c\},$$

para qualquer  $c > 0$ , é limitado, pois está contido em uma bola de raio finito. Como pontos  $x$  da fronteira; i.e. tais que  $\{V(x) = c\}$ ; pertencem a  $\Omega_c$ , esse conjunto é fechado. Portanto,  $\Omega_c$  é compacto (fechado e limitado).



## GAS: Necessidade de $V(x)$ ser Radialmente Ilimitada III

- A partir da constatação de que os conjuntos  $\Omega_c$  são compactos, pode-se mostrar que as trajetórias irão atravessar a fronteira de qualquer conjunto deste tipo, enquanto caminham em direção ao ponto de equilíbrio, uma vez que  $V(t)$  é estritamente decrescente ( $\dot{V}(t) < 0$ ). Isto é, a trajetória do sistema irá atravessar  $\Omega_{c_1} \supset \Omega_{c_2} \supset \Omega_{c_3} \supset \cdots$ , em que  $c_1 > c_2 > c_3 > \cdots$ .

## GAS: Necessidade de $V(x)$ ser Radialmente Ilimitada IV

- O exemplo a seguir mostra que, se essa condição for eliminada, há casos em que  $V(x)$  é definida positiva, continuamente diferenciável, com  $\dot{V}(x) < 0, \forall x \neq 0$ , e ainda assim GAS não se verifica.

## GAS: Necessidade de $V(x)$ ser Radialmente Ilimitada V

Considere o sistema [1, Exercício 4.8, pág. 182]:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \frac{-6x_1}{\phi^2} + 2x_2, \\ \dot{x}_2 = \frac{-2(x_1 + x_2)}{\phi^2}, \end{cases}$$

em que  $\phi \equiv \phi(x_1) = 1 + x_1^2$ . Note que  $\phi > 0, \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ . Seja a Função Candidata de Lyapunov, definida positiva e continuamente diferenciável, dada por

$$V(x) = \frac{x_1^2}{\phi} + x_2^2 = \frac{x_1^2}{1 + x_1^2} + x_2^2.$$

Veja que  $V(x)$  não é radialmente ilimitada, pois para  $x_2 = c$ , em que  $c$  é um valor constante arbitrário,  $\lim_{x_1 \rightarrow \infty} V(x) = 1 + c^2 < \infty$ .

# GAS: Necessidade de $V(x)$ ser Radialmente Ilimitada VI

**1 Fato 1:**  $\dot{V}(x) < 0, \forall x \neq 0$ ; e  $\dot{V}(x)$  é contínua.

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2} \dot{x}_2,$$

$$\dot{V} = \left[ \frac{2x_1}{\phi} + \frac{-2x_1^3}{\phi^2} \right] \left[ \frac{-6x_1}{\phi^2} + 2x_2 \right] + x_2 \left[ \frac{-4(x_1 + x_2)}{\phi^2} \right],$$

$$\phi^4 \dot{V} = -12x_1^2\phi + 4x_1x_2\phi^3 + 12x_1^4 - 4x_1^3x_2\phi^2 - 4(x_1 + x_2)\phi^2,$$

$$\phi^4 \dot{V} = -12x_1^2(1 + x_1^2) + 12x_1^4 + 4x_1x_2\phi^2(\phi - x_1^2) - 4x_1x_2\phi^2 - 4x_2^2\phi^2,$$

$$\phi^4 \dot{V} = -12x_1^2 + 4x_1x_2\phi^2(\phi - x_1^2 - 1) - 4x_2^2\phi^2,$$

$$\dot{V} = -12\frac{x_1^2}{\phi^4} - 4\frac{x_2^2}{\phi^2} < 0, \quad \forall x \neq 0.$$

## GAS: Necessidade de $V(x)$ ser Radialmente Ilimitada VII

- 2 Fato 2:** o sistema não é GAS, pois existe pelo menos uma fronteira que não pode ser atravessada pelas trajetórias do sistema. Considere condições iniciais que satisfazem

$$x_1(0) > \sqrt{2}, \quad x_2(0) > \frac{2}{x_1(0) - \sqrt{2}}.$$

## GAS: Necessidade de $V(x)$ ser Radialmente Ilimitada VIII

Vetores tangentes à fronteira  $x_2 = \frac{2}{x_1 - \sqrt{2}}$ , com  $x_1 > \sqrt{2}$ , são dados por

$$\vec{v}_t = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{dx_2}{dx_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{-2}{(x_1 - \sqrt{2})^2} \end{bmatrix},$$

de modo que vetores ortogonais à fronteira, e que apontam para o primeiro quadrante do plano, podem ser obtidos como

$$\vec{v}_p = \begin{bmatrix} \frac{2}{(x_1 - \sqrt{2})^2} \\ 1 \end{bmatrix},$$

pois  $\vec{v}_t^\top \vec{v}_p = 0$ .

## GAS: Necessidade de $V(x)$ ser Radialmente Ilimitada IX

O produto escalar destes vetores ortogonais à fronteira, definidos sobre ela, com o campo vetorial do sistema dinâmico sobre a fronteira é dado por:

$$\begin{aligned}\vec{v}_p^\top \dot{x} &= \left[ \frac{2}{(x_1 - \sqrt{2})^2} \left( \frac{-6x_1}{\phi^2} + 2x_2 \right) + \frac{-2(x_1 + x_2)}{\phi^2} \right]_{x_2 = \frac{2}{x_1 - \sqrt{2}}}, \\ &= \frac{-12x_1}{(x_1 - \sqrt{2})^2 \phi^2} + \frac{8}{(x_1 - \sqrt{2})^3} + \frac{-2x_1}{\phi^2} + \frac{-4}{(x_1 - \sqrt{2}) \phi^2},\end{aligned}$$

de modo que, para  $E_0 = \alpha(x_1) (\vec{v}_p^\top \dot{x})$ , com

$$\alpha(x_1) = \left[ (x_1 - \sqrt{2})^3 \phi^2 \right] > 0, \quad \forall x_1 > \sqrt{2},$$

tem-se que:

$$E_0 = 8\phi^2 - 12x_1(x_1 - \sqrt{2}) - 2x_1(x_1 - \sqrt{2})^3 - 4(x_1 - \sqrt{2})^2.$$

## GAS: Necessidade de $V(x)$ ser Radialmente Ilimitada X

Observando que se está considerando  $x_1 > \sqrt{2}$ , ao substituirmos  $(x_1 - \sqrt{2})$  por  $x_1$  na expressão  $E_0$  acima pode-se concluir que

$$E_0 > E_1 = 8\phi^2 - 12x_1^2 - 2x_1^4 - 4x_1^2,$$

$$E_1 = 8(1 + 2x_1^2 + x_1^4) - 16x_1^2 - 2x_1^4,$$

$$E_1 = 8 + 12x_1^2 + 6x_1^4 > 0, \quad \forall x_1 \in \mathbb{R}.$$

Portanto, para todo ponto sobre a fronteira  $x_2 = \frac{2}{x_1 - \sqrt{2}}$ , com  $x_1 > \sqrt{2}$ ,

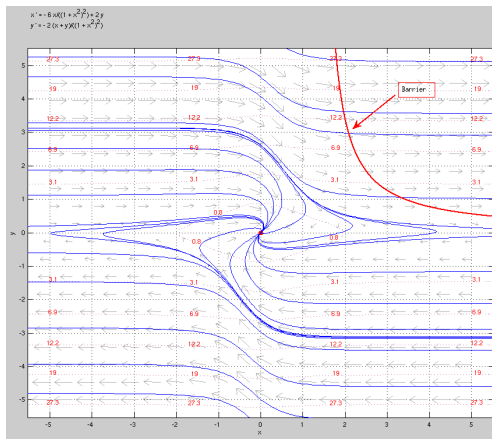
$$\vec{v}_p^\top \dot{x} = \frac{1}{\alpha(x_1)} E_0 > \frac{1}{\alpha(x_1)} E_1 > 0,$$

e isto significa que o campo vetorial do sistema tem sempre uma componente na direção que aponta para fora da fronteira, pois o produto escalar é positivo.



# GAS: Necessidade de $V(x)$ ser Radialmente Ilimitada XI

Desta maneira, a fronteira  $x_2 = \frac{2}{x_1 - \sqrt{2}}$  é de fato uma *barreira* para as trajetórias do sistema, conforme ilustrado abaixo:



Condições iniciais à direita da barreira conduzem a trajetórias com  $x_1 \rightarrow \infty$  e  $x_2 \rightarrow c$ , de modo que  $V(x)$  sempre descrece, mas não vai para zero, enquanto que, ao mesmo tempo,  $\dot{V}(x) \rightarrow 0$ . Não se tem, portanto, um sistema GAS.

## T. de Lyapunov para SLITs: Prova da Necessidade I

Vamos provar que, dado um SLIT autônomo **assintoticamente estável**

$$\dot{x} = Ax, \quad (16)$$

com  $x \in \mathbb{R}^n$ , associada a uma matriz simétrica definida positiva arbitrária  $Q = Q^\top > 0$ , existe uma matriz simétrica definida positiva  $P = P^\top > 0$  que satisfaz a equação de Lyapunov:

$$A^\top P + PA = -Q. \quad (17)$$

## T. de Lyapunov para SLITs: Prova da Necessidade II

Considere a seguinte possível solução para a matriz  $P$ :

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T e^{tA^\top} Q e^{At} dt. \quad (18)$$

Como o sistema (16) é estável, o limite acima existe, pois  $e^{At} \rightarrow 0$ . Além disso, a matrix  $P$  assim definida é simétrica, pois é obtida integrando-se elementos de uma matriz simétrica dada por

$$\left( e^{tA^\top} Q e^{At} \right)^\top = e^{tA^\top} Q^\top e^{At} = e^{tA^\top} Q e^{At}.$$

## T. de Lyapunov para SLITs: Prova da Necessidade III

A matriz  $P$  é também definida positiva, pois

$$\begin{aligned}x_0^\top P x_0 &= x_0^\top \left( \int_0^\infty e^{tA^\top} Q e^{At} dt \right) x_0, \\&= \int_0^\infty \left( x_0^\top e^{tA^\top} \right) Q \left( e^{At} x_0 \right) dt, \\&= \int_0^\infty x^\top(t) Q x(t) dt, \\&\geq \lambda_{\min}(Q) \int_0^\infty \|x(t)\|^2 dt > 0, \quad \forall x_0 \neq 0, \\ \therefore \quad x_0^\top P x_0 &> 0, \quad \forall x_0 \neq 0,\end{aligned}$$

em que  $x(t) = e^{At} x_0$  é a trajetória do sistema partindo de  $x(0) = x_0$ .

## T. de Lyapunov para SLITs: Prova da Necessidade IV

Vamos mostrar que a matriz  $P$  em (18) é uma solução para a equação (17):

$$\begin{aligned}
 A^\top P + PA &= A^\top \left( \int_0^\infty e^{tA^\top} Q e^{At} dt \right) + \left( \int_0^\infty e^{tA^\top} Q e^{At} dt \right) A, \\
 &= \int_0^\infty \left( A^\top e^{tA^\top} \right) Q e^{At} + e^{tA^\top} Q (e^{At} A) dt, \\
 &= \int_0^\infty \left( \frac{d}{dt} (e^{tA^\top}) Q e^{At} + e^{tA^\top} Q \frac{d}{dt} (e^{At}) \right) dt, \\
 &= \int_0^\infty \frac{d}{dt} (e^{tA^\top} Q e^{At}) dt, \\
 &= \left[ e^{tA^\top} Q e^{At} \right]_0^\infty = 0 - Q = -Q.
 \end{aligned}$$

## T. de Lyapunov para SLITs: Prova da Necessidade V

Finalmente, vamos mostrar que a matriz  $P$  em (18) é, de fato, a *única* solução. Para isso, considere a existência de duas soluções  $P_1$  e  $P_2$  para a equação (17), para uma matriz dada  $Q = Q^\top > 0$ :

$$A^\top P_1 + P_1 A = -Q,$$

$$A^\top P_2 + P_2 A = -Q,$$

$$\Rightarrow A^\top (P_1 - P_2) + (P_1 - P_2) A = 0.$$

Logo, a função quadrática  $W(x) = x^\top(t)(P_1 - P_2)x(t)$  é tal que:

$$\frac{dW}{dt} = x^\top(t) [A^\top (P_1 - P_2) + (P_1 - P_2) A] x(t) = 0$$

$$\Leftrightarrow W(x(t)) = \text{constante}, \forall t \geq 0.$$

Como  $x(t) \neq \text{constante}$ , isso só é possível sse  $W(x) \equiv 0 \Leftrightarrow P_1 = P_2$ .

# Definições Equivalentes para Estabilidade Uniforme I

## Lemma

*Para um sistema dinâmico  $\dot{x} = f(t, x)$ , com  $x(t_0) = x_0$ , em que  $x = 0$  é um ponto de equilíbrio – P.E. uniformemente estável, são equivalentes as afirmações:*

- **(A)** *Dado  $\epsilon > 0$ , existe  $\delta \equiv \delta(\epsilon)$ , independente do instante inicial  $t_0$ , tal que*

$$\|x(t_0)\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| < \epsilon, \quad \forall t \geq t_0.$$

- **(B)** *Existe  $c > 0$  e uma função  $\alpha(\cdot) \in \mathcal{K}$ , tal que*

$$\|x(t_0)\| < c \Rightarrow \|x(t)\| < \alpha(\|x(t_0)\|), \quad \forall t \geq t_0.$$

# Definições Equivalentes para Estabilidade Uniforme II

■ **Prova:**  $A \Rightarrow B$

■ **Prova:**  $B \Rightarrow A$

Uma vez que  $\|x(t)\| \leq \alpha(\|x(t_0)\|)$ ,  $\forall \|x(t_0)\| < c$ , e  $\forall t \geq t_0$ , então, dado  $\epsilon > 0$  qualquer, escolha

$$\delta = \min\{c, \alpha^{-1}(\epsilon)\},$$

de modo que

$$\|x(t_0)\| \leq \delta \Rightarrow \alpha(\|x(t_0)\|) \leq \alpha(\delta) \leq \epsilon.$$

E, assim,  $\forall t \geq t_0$ ,

$$\|x(t)\| \leq \alpha(\|x(t_0)\|) \Rightarrow \|x(t)\| \leq \epsilon.$$



# Referências Bibliográficas I



Hassan K. Khalil.

*Nonlinear Systems.*

Prentice Hall, third edition, 2002.



Jean-Jacques Slotine and Weiping Li.

*Applied Nonlinear Control.*

Prentice Hall, 1990.



M. Vidyasagar.

*Nonlinear Systems Analysis.*

Prentice-Hall International, Inc., second edition, 1993.