BC0209–Fenômenos Eletromagnéticos

Segundo quadrimestre de 2016

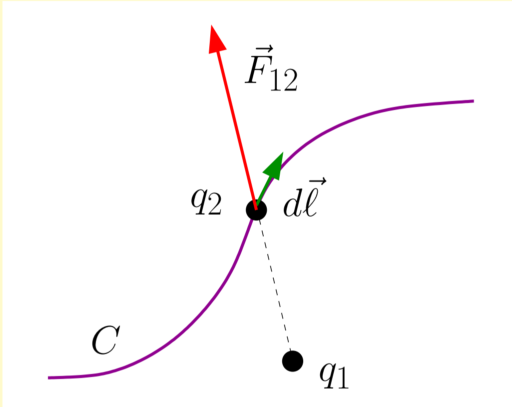
Prof. José Kenichi Mizukoshi

Aula 5 (versão 14/05/2015)

Potencial elétrico. Energia potencial elétrica.

Potencial Elétrico e Energia Potencial Elétrica

- Considere um sistema formado por duas cargas pontuais, q_1 e q_2, conforme mostra a Fig. ao lado. O **trabalho** realizado pela força elétrica $\vec{F}_{12}$, que atua na carga q_2, quando esta se move de um ponto a até um ponto b, ao longo de um caminho C qualquer é dado por



$$W_{a\to b} = \int_C \vec{F}_{12}\cdot d\vec{\ell}$$

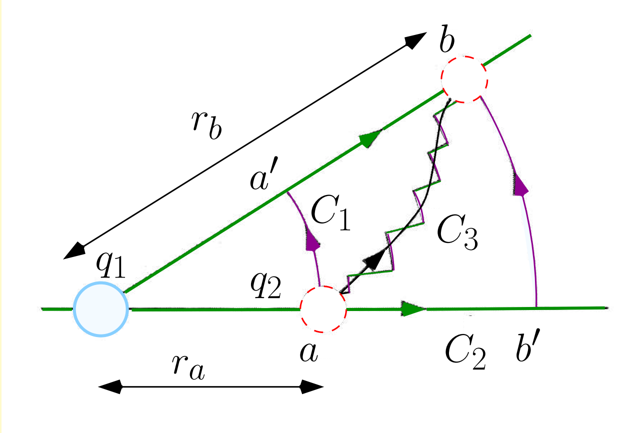
onde $d\vec{\ell}$ é o deslocamento infinitesimal da carga q_2.

- Em coordenadas polares, tomando a posição da carga q_1 como a origem do referencial, temos que a força $\vec{F}_{12}$ é dada por

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}\,\hat{r}$$

onde identificamos $\hat{r}$ como sendo a direção radial.

- Vamos escolher um caminho de a até b composto de duas etapas: $a \to a'$, através de um trecho C_1 tangente à direção radial (direção $\hat{\theta}$) e $a' \to b$, que é radial (direção $\hat{r}$).



O trabalho de $a \to b$ é

$$W_{a\to b} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q_1 q_2 \left[\frac{1}{r_a^2} \int_{\theta_a}^{\theta_{a'}} \underbrace{\hat{r}\cdot(r_a d\vec{\theta})}_{=0,\ \text{pois } \hat{r} \perp d\vec{\theta}} + \int_{r_a}^{r_b} \frac{\overbrace{\hat{r}\cdot d\vec{r}}^{=dr}}{r^2} \right]$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q_1 q_2 \int_{r_a}^{r_b} \frac{dr}{r^2}$$

Portanto,

$$W_{a\to b} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q_1 q_2 \left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b} \right)$$

- O mesmo resultado é obtido se formos de a para b' através do trecho C_2 e de lá para o ponto b, através de um caminho na direção tangencial a $\vec{r}$.
- Qualquer caminho C pode ser dividido em trechos tangencial e paralelo à $\vec{F}_{12}$, dando o resultado acima. Logo, o trabalho da força elétrica não depende do caminho. Neste caso, é dito que a força é **conservativa**, e consequentemente podemos definir uma **função energia potencial**, $U(r)$, associada a ela. Por definição,

$$\Delta U = U_b - U_a \equiv -W_{a\to b} = -\int_a^b \vec{F}\cdot d\vec{\ell}$$
$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q_1 q_2 \left(\frac{1}{r_b} - \frac{1}{r_a}\right)$$

➢ Relembre que somente a variação da energia potencial possui significado físico, ou seja, a função $U(r)$ pode ser definida a menos de uma constante.

- **Escolha de um ponto de referência**. Em geral, toma-se $U_a = 0$ para $r_a \to \infty$ (quando q_2 encontra-se no infinito). Neste caso, tomando b como um ponto qualquer, tal que $r_b = r$ é a distância entre as cargas q_1 e q_2, define-se a função energia potencial para o sistema com essas cargas como sendo

$$U(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r}$$

Energia potencial de um sistema de cargas

- Considere um sistema com cargas q_1, q_2 e q_3, inicialmente localizadas no infinito. Temos que $U = 0$ para esta configuração. Para montar o sistema com as três cargas localizadas a distâncias finitas, temos os seguintes passos:
  - Passo 1: trazer a carga q_1 do infinito até a posição $\vec{r}_1$. Não há gasto de energia, portanto
  $$U_1 = 0$$
  - Passo 2: trazer a carga q_2 do infinito até a posição $\vec{r}_2$. A energia necessária para montar o sistema é dada por
  $$U_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r_{12}}$$
  onde $r_{12} = |\vec{r}_2 - \vec{r}_1|$ é a distância entre as cargas.

- Passo 3: trazer a carga q_3 do infinito até a posição $\vec{r}_3$. A energia necessária é dada por

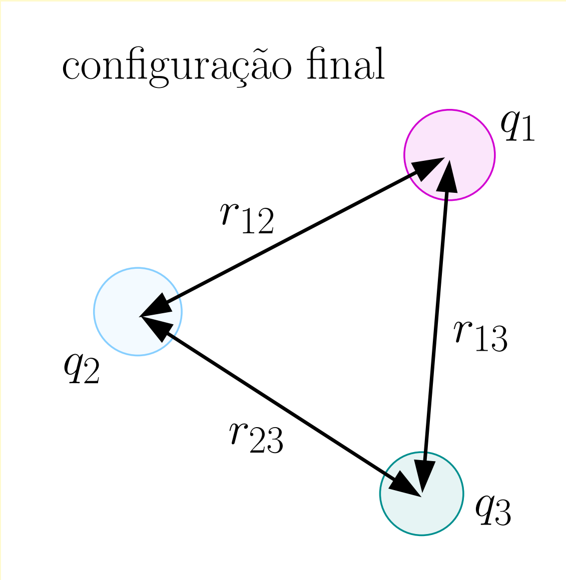
$$U_3 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q_3 \left(\frac{q_1}{r_{13}} + \frac{q_2}{r_{23}} \right)$$

onde $r_{i3} = |\vec{r}_3 - \vec{r}_i|, i = 1, 2$

- A **energia potencial do sistema** é dada pela soma de todas as energias necessárias para montar o sistema:

$$U = U_1 + U_2 + U_3$$

$$\Rightarrow \quad U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{q_1 q_2}{r_{12}} + \frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{r_{23}} \right)$$



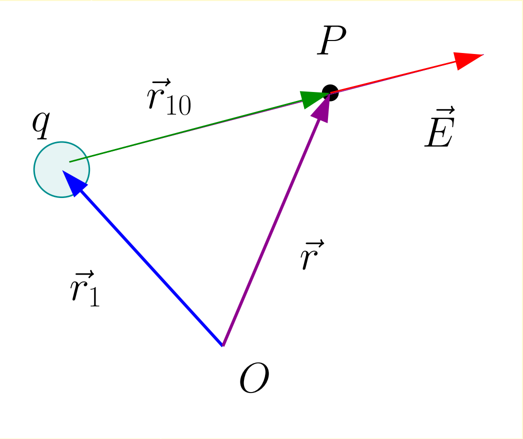
Energia potencial de um sistema de cargas

- Para um sistema com N cargas pontuais,

$$U = \sum_{\substack{j=1 \\ i<j}}^{N} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_i q_j}{r_{ij}}$$

onde $r_{ij} = |\vec{r}_j - \vec{r}_i|$ é a distância entre a i-ésima carga e a j-ésima carga. A restrição $i < j$ é para não contar em dobro as energias entre a i-ésima carga e a j-ésima carga.

- Considere uma carga q na posição $\vec{r}_1$. O campo elétrico gerado por essa carga na posição P é dado por



$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r_{10}^2}\,\hat{r_{10}}\ ; \quad \hat{r}_{10} = \frac{\vec{r}-\vec{r}_1}{|\vec{r}-\vec{r}_1|}$$

- Uma carga de prova q_0 no ponto P sente uma força (conservativa) dada por

$$\vec{F} = q_0\vec{E}$$

- O trabalho da força $\vec{F}$ para deslocar a carga de prova de um ponto P_a para P_b é dado por

$$W_{P_a \to P_b} = \int_C \vec{F}\cdot d\vec{\ell} = -\Delta U$$

$$\Rightarrow \quad q_0 \int_C \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = -\Delta U = -[U(r_b) - U(r_a)]$$

Segue que

$$\int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{\Delta U}{q_0} \equiv -\Delta V = -[V(r_b) - V(r_a)]$$

- $V(r)$ é conhecido como **potencial elétrico**, que é a energia potencial por unidade de carga elétrica. Ele depende do campo $\vec{E}$, mas não da carga de prova q_0.

  Unidades no SI: $[\mathrm{V}] = \dfrac{\mathrm{J}}{\mathrm{C}} \equiv \mathrm{V} \; = \;$ volt

- O potencial elétrico (ou a diferença de potencial) de uma carga q é dado por

$$V(r_b) - V(r_a) = -\int_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{r_a}^{r_b} \frac{1}{r^2} \underbrace{\hat{r} \cdot d\vec{\ell}}_{=\hat{r}\cdot d\vec{r} = dr}$$

$$\Rightarrow \quad V(r_b) - V(r_a) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q \left(\frac{1}{r_b} - \frac{1}{r_a} \right)$$

Potencial elétrico

- Similarmente à função energia potencial, a função potencial elétrico $V(r)$ é definida a menos de uma constante. A escolha do nível zero é arbitrária, porém é comum se tomar $V(r) = 0$ para $r \to \infty$. Logo,

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}$$

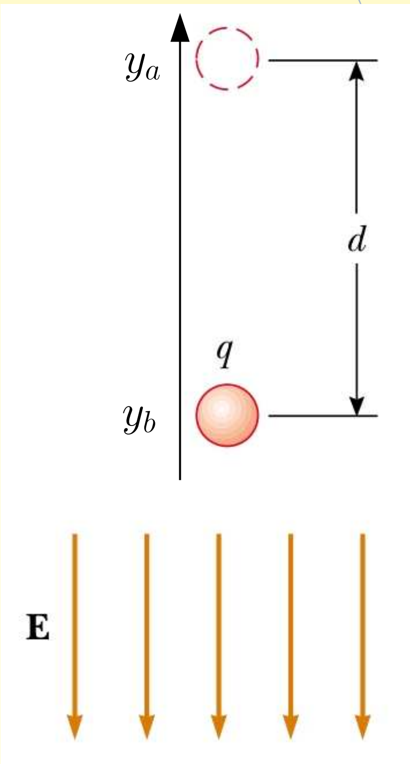
Diferenças de potencial em um campo elétrico uniforme

- Considere uma região do espaço onde existe um campo elétrico uniforme na direção y. A diferença de potencial entre os pontos a e b é dada por

$$\Delta V = V(b) - V(a) = -\int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$$

Neste caso, $\vec{E} = -E\,\hat{\jmath}$ e $d\vec{\ell} = dy\,\hat{\jmath}$, portanto

$$\Delta V = V(y_b) - V(y_a) = +\int_{y_a}^{y_b} E dy = E\underbrace{(y_b - y_a)}_{=-d} = -Ed$$



- Como a diferença de potencial ΔV é negativa, tem-se que $V(y_b) < V(y_a)$. Em geral, as linhas do campo elétrico sempre apontam no sentido da diminuição do potencial elétrico.

Diferenças de potencial em um campo elétrico uniforme

- Suponha que uma carga de prova q_0 se desloque do ponto y_a para y_b. A variação da sua energia potencial será

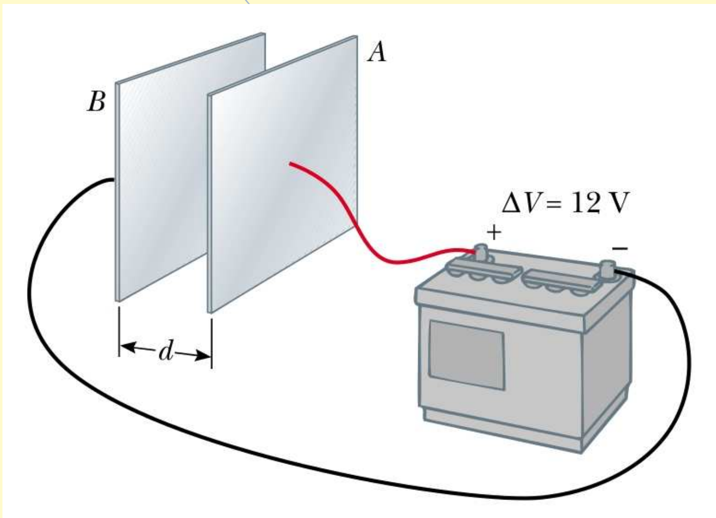
$$\Delta U = q_0 \Delta V = -q_0 E d$$

  - Se $q_0 > 0$ a variação da energia será negativa, enquanto que se $q_0 < 0$, ela terá variação positiva.

- Para o caso $q_0 > 0$, podemos fazer uma analogia com o campo gravitacional, onde se substitui $\vec{E}$ por $\vec{g}$ e q_0 por m. Quando um corpo de massa m cai de uma altura d, a sua energia potencial gravitacional sofre uma mudança de $-mgd$.
- Assim como no caso do campo gravitacional, a diferença de potencial elétrico ou a variação da energia potencial elétrica só depende dos valores da diferença entre y_a e y_b, que são pontos na direção do campo elétrico.

Diferenças de potencial em um campo elétrico uniforme – exemplo

Ex. 1 Uma bateria de 12 V é conectada entre duas placas paralelas, conforme mostra a figura ao lado. A distância entre as placas é de 0,30 cm e se pressupõe que o campo elétrico seja uniforme. (a) Qual a intensidade do campo elétrico entre as placas? (b) Se um elétron for liberado do repouso na placa B, qual a sua energia cinética assim que chega na placa A?



Solução

- Como na região entre as placas o campo elétrico é uniforme, tem-se que $|\Delta V| = Ed$, onde d é a distância entre as placas. Logo, a intensidade do campo elétrico é

$$E = \frac{|\Delta V|}{d} = \frac{12\ \text{V}}{0{,}30 \times 10^{-2}\ \text{m}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{E = 4{,}0 \times 10^{3}\ \text{V/m}}$$

Diferenças de potencial em um campo elétrico uniforme – exemplo

- A variação na energia potencial do sistema elétron/campo é

$$\Delta U = U_A - U_B = (-e)(V_A - V_B) = (-1{,}60 \times 10^{-19}\ \text{C})(12\ \text{V})$$

Portanto, $\Delta U = -1{,}92 \times 10^{-18}$ J

- Como a **energia total do sistema** se conserva, $\Delta U + \Delta K = 0$, temos que

$$\Delta K = K_A - \underbrace{K_B}_{=0} = -\Delta U \quad \Rightarrow \quad \boxed{K_A = 1{,}92 \times 10^{-18}\ \text{J}}$$

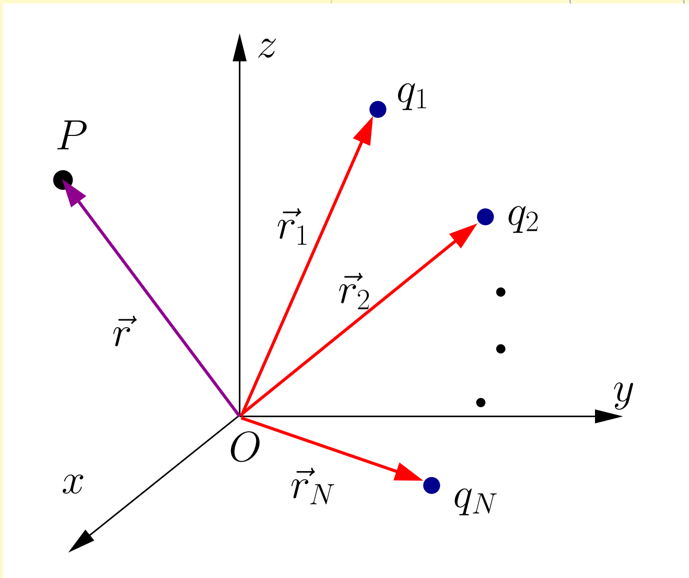
Observação: se a diferença de potencial for de 1 V, temos que

$$\Delta K = -\Delta U = (e)(1\ \text{V}) = 1{,}60 \times 10^{-19}\ \text{J}$$

Essa quantidade de energia define a unidade de **elétron-Volt** (eV):

$$1\ \text{eV} = (e)(1\ \text{V}) = 1{,}60 \times 10^{-19}\ \text{J}$$

- Conforme visto na aula 2, pág. 4, o campo elétrico num ponto P devido a um sistema com N cargas pontuais é dado por



$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \ldots + \vec{E}_N$$

onde $\vec{E}_i = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \dfrac{q_i}{r_{i0}^2}\, \hat{r}_{i0}$ e $\hat{r}_{i0} = \dfrac{\vec{r} - \vec{r}_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}$.

- Se todas as cargas da distribuição estiverem à uma distância finita do ponto P, podemos tomar o nível zero $(V = 0)$ quando $r_i \to \infty$. Com esta escolha, o potencial no ponto P é dado por

$$V(\vec{r}) = -\int_{\infty}^{P} \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$$

- Temos que

$$V(\vec{r}) = -\int_{\infty}^{P} \sum_{i=1}^{N} \vec{E}_i \cdot d\vec{\ell} = -\left[\int_{\infty}^{P} \vec{E}_1 \cdot d\vec{\ell} + \int_{\infty}^{P} \vec{E}_2 \cdot d\vec{\ell} + \ldots + \int_{\infty}^{P} \vec{E}_N \cdot d\vec{\ell}\right]$$

Logo

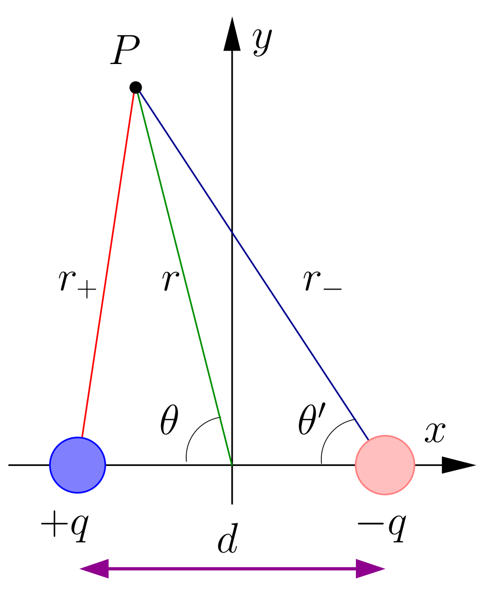
$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r_{10}} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2}{r_{20}} + \ldots + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_N}{r_{N0}}$$

$$\therefore \quad V(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{N}\frac{q_i}{r_{i0}}$$

onde r_{i0} é a distância da i-ésima carga até o ponto P.

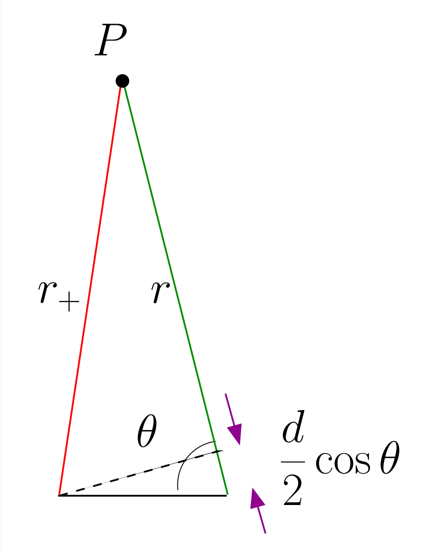
Potencial de um sistema de cargas pontuais – exemplo

Ex. 2 Obtenha o potencial de um dipolo elétrico num ponto distante. Considere que o dipolo elétrico seja formado pelas cargas $+q$ e $-q$, separadas de uma distância d, localizadas sobre o eixo z.



Solução O potencial elétrico do dipolo num ponto P é dado por

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q}{r_+} + \frac{(-q)}{r_-}\right]$$



- Para $r \gg d$, onde $\theta' \approx \theta$, temos que

$$r \approx r_+ + \frac{d}{2}\cos\theta \quad \Rightarrow \quad r_+ \approx r\left(1 - \frac{d}{2r}\cos\theta\right)$$

Aplicação: potencial de um dipolo elétrico num ponto distante

Analogamente, temos que

$$r_- \approx r + \frac{d}{2}\cos\theta \quad \Rightarrow \quad r_- \approx r\left(1 + \frac{d}{2r}\cos\theta\right)$$

Fazendo $\epsilon \equiv \dfrac{d}{2r}\cos\theta$, temos

$$V \approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}\left(\frac{1}{1-\epsilon} - \frac{1}{1+\epsilon}\right)$$

- Para $x \ll 1$, a função $f(x) \equiv \dfrac{1}{1 \pm x}$ pode ser expandida em uma **série de Taylor** em torno de $x_0 = 0$:

$$f(x) = f(0) + \frac{df(0)}{dx}x + \cdots$$

Aplicação: potencial de um dipolo elétrico num ponto distante

Temos que

$$\begin{cases} f(0) = 1 \\ \dfrac{df}{dx} = \dfrac{\mp 1}{(1 \pm x)^2} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{df(0)}{dx} = \mp 1 \end{cases} \Rightarrow \quad f(x) = 1 \mp x + \mathcal{O}(x^2)$$

Logo, para $\epsilon \ll 1$, tem-se que

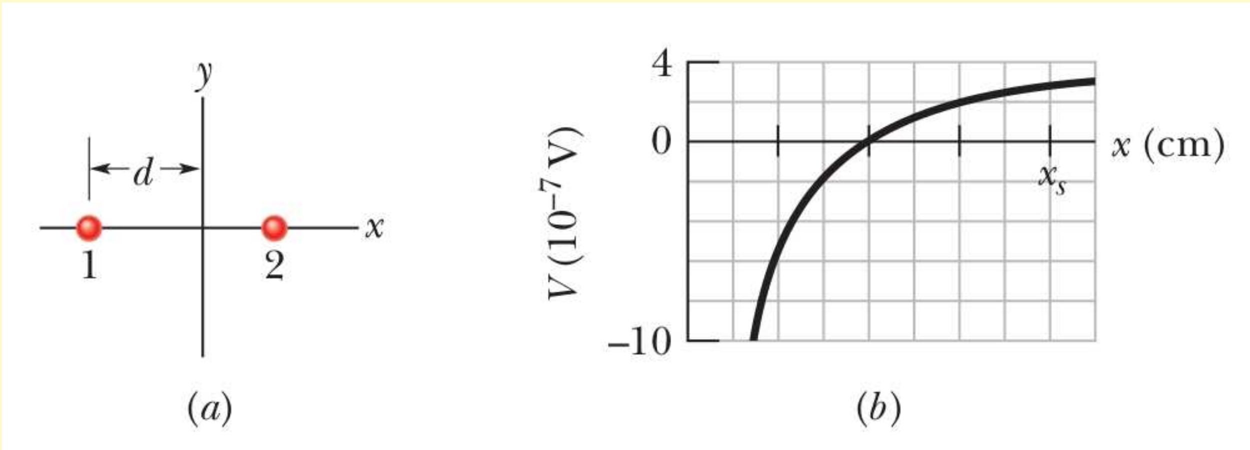
$$V \approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r} \Big[\overbrace{(1+\epsilon) - (1-\epsilon)}^{=2\epsilon} \Big] \quad \Rightarrow \quad \boxed{V \approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{qd}{r^2} \cos\theta}$$

Problemas Propostos

P1 Uma placa não-condutora infinita possui uma densidade superficial de carga $\sigma = 5{,}80$ pC/m^2. (a) Quanto trabalho é realizado pelo campo elétrico devido à placa se uma partícula de carga $q = 1{,}60 \times 10^{-19}$ C for deslocada da placa até um ponto P a uma distância $d = 3{,}56$ cm da placa? (b) Se o potencial elétrico V é definido como sendo zero sobre a placa, qual o valor de V em P?

Resp. (a) $W = q\sigma d/2\varepsilon_0 = 1{,}87 \times 10^{-21}$ J; (b) $V = -\sigma d/2\varepsilon_0 = -1{,}17 \times 10^{-2}$ V.

P2 Duas partículas carregadas estão mostradas na Fig. (a) abaixo. A partícula 1, com carga q_1, está fixa em um local a uma distância d da origem. A partícula 2, com carga q_2, pode-se mover ao longo do eixo x. A Fig. (b) dá o potencial elétrico líquido V na origem devido às duas partículas em função da coordenada x da partícula 2. A escala do eixo x é definida por $x_s = 16{,}0$ cm. O gráfico possui uma assíntota de $V = 5{,}76 \times 10^{-7}$ V quando $x \to \infty$. Encontre q_2 em termos de e, a carga fundamental.



Resp. $q_2 = -32e$.

Material Suplementar

Obtenção da força a partir da energia potencial

- Temos que

$$\Delta U = -\int \vec{F} \cdot d\vec{\ell} \;\Leftrightarrow\; dU = -\vec{F} \cdot d\vec{\ell}$$

- Em coordenadas cartesianas,

$$\begin{cases} \vec{F} = F_x \,\hat{\imath} + F_y \,\hat{\jmath} + F_z \,\hat{k} \\ d\vec{\ell} = dx \,\hat{\imath} + dy \,\hat{\jmath} + dz \,\hat{k} \end{cases} \Rightarrow \; \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

Por outro lado, como $U = U(x, y, z)$

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz$$

Portanto, $dU = -\vec{F} \cdot d\vec{\ell}$ implica que

$$\frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz = -(F_x dx + F_y dy + F_z dz)$$

Obtenção da força a partir da energia potencial

Segue que

$$\begin{cases} F_x = -\dfrac{\partial U}{\partial x} \\[2ex] F_y = -\dfrac{\partial U}{\partial y} \\[2ex] F_z = -\dfrac{\partial U}{\partial z} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \vec{F} = -\vec{\nabla} U = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\,\hat{\imath} + \frac{\partial U}{\partial y}\,\hat{\jmath} + \frac{\partial U}{\partial z}\,\hat{k} \right)$$

ou seja, a força é menos o **gradiente** da energia potencial U.

Obtenção da força a partir da energia potencial – exemplo

Ex. 3 Encontre a força resultante sobre a carga q_3 do Ex. 3 da Aula 1, pág. 16, a partir da energia potencial do sistema.

Solução

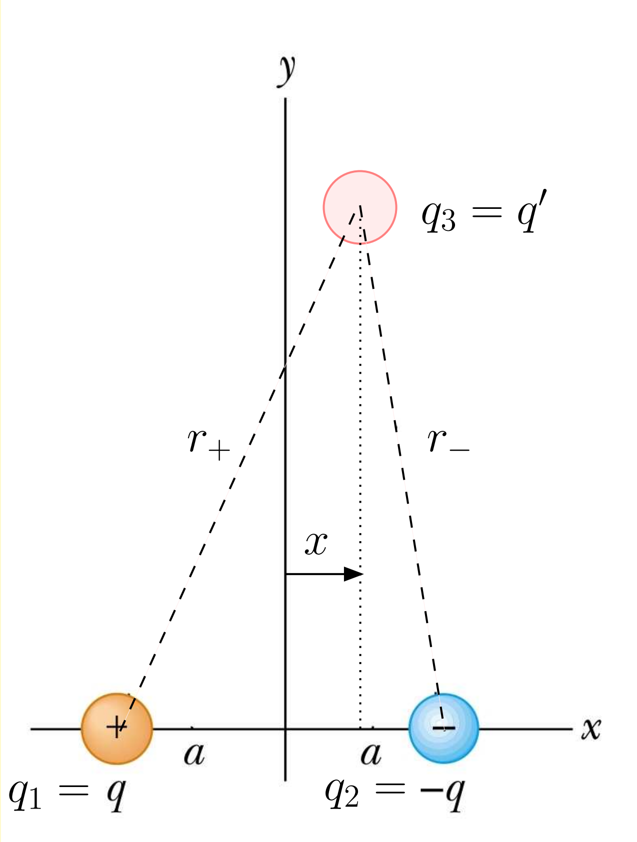
- Originalmente a carga q_3 se encontra em $x = 0$ e y qualquer. Contudo, para se calcular a força sobre ela, vamos deslocá-la ligeiramente para à direita, tal que a sua posição seja dada por (x, y).

  A energia potencial do sistema é (veja pág. 8)

$$U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1 q_2}{2a} + \frac{q_1 q_3}{r_+} + \frac{q_2 q_3}{r_-}\right)$$

  onde

$$r_+ = \sqrt{y^2 + (a+x)^2} \quad \text{e} \quad r_- = \sqrt{y^2 + (a-x)^2}$$



Obtenção da força a partir da energia potencial – exemplo

- Como $U = U(x, y)$, tem-se que

$$\vec{F}_3 = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\,\hat{\imath} + \frac{\partial U}{\partial y}\,\hat{\jmath}\right)$$

$$= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q_3 \left(\frac{\partial}{\partial x}\,\hat{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\,\hat{\jmath}\right)\left(\frac{q_1}{\sqrt{y^2 + (a+x)^2}} + \frac{q_2}{\sqrt{y^2 + (a-x)^2}}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \vec{F}_3 = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q_3 \left\{ q_1(-1/2)\frac{2(a+x)\,\hat{\imath} + 2y\,\hat{\jmath}}{[(a+x)^2 + y^2]^{3/2}} + q_2(-1/2)\frac{-2(a-x)\,\hat{\imath} + 2y\,\hat{\jmath}}{[(a-x)^2 + y^2]^{3/2}} \right\}$$

- Fazendo $q_1 = -q_2 = q$ e $q_3 = q'$, a força sobre q_3 em $x = 0$ será

$$\boxed{\vec{F}_3 = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{qq'a}{(a^2 + y^2)^{3/2}}\,\hat{\imath}}$$

que é o resultado obtido aplicando-se a lei de Coulomb diretamente.

Referências

- R. A. Serway, e J. W. Jewett Jr., *Princípios de Física, Vol. 3*, Cengage Learning;
- D. Halliday, R. Resnick e K. S. Krane, *Física, Vol. 3*, LTC;