BC0209–Fenômenos Eletromagnéticos

Segundo quadrimestre de 2016

Prof. José Kenichi Mizukoshi

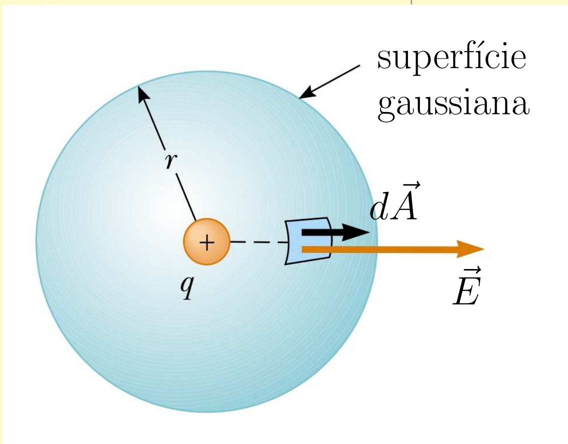
Aula 4 (versão 13/05/2015)

Aplicações da lei de Gauss. Condutores em equilíbrio eletrostático.

Aplicações da Lei de Gauss; Condutores em Equilíbrio Eletrostático

Aplicação da lei de Gauss: o campo elétrico de uma carga pontual

Ex. 1 Encontre o campo elétrico de uma carga pontual $q > 0$, à uma distância r.



Solução Conforme visto, as linhas de campo elétrico para uma carga $q > 0$ são radiais, apontadas para fora. Neste caso, escolhemos a superfície de uma esfera de raio r como sendo a superfície gaussiana. Observe que sobre esta superfície,

(i) $\vec{E}$ é sempre paralelo a $d\vec{A}$, ou seja

$$\vec{E} \cdot d\vec{A} = E\, dA$$

(ii)$E = |\vec{E}|$ é constante.

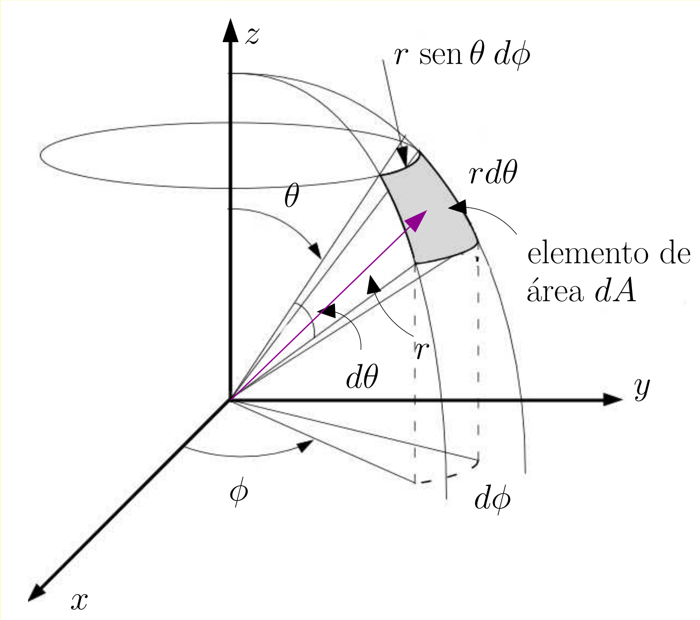
- Aplicando a lei de Gauss e fazendo uso destas propriedades, temos

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad \oint_S E\, dA = E \oint_S dA$$

Aplicação da lei de Gauss: o campo elétrico de uma carga pontual

- Em **coordenadas esféricas**, o elemento de área é dado por

$$dA = r^2 \,\text{sen}\,\theta \, d\theta d\phi$$



Logo,

$$\oint_S dA = r^2 \int_0^{\pi} \text{sen}\,\theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\phi = 4\pi r^2$$

Portanto,

$$E(4\pi r^2) = \frac{q}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}$$

que, conforme esperado, é o campo elétrico de uma carga pontual obtida pela lei de Coulomb. O vetor campo elétrico, que aponta na direção radial, é dado por

$$\boxed{\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\,\hat{r}}$$

Aplicação da lei de Gauss: distribuição de cargas com simetria esférica

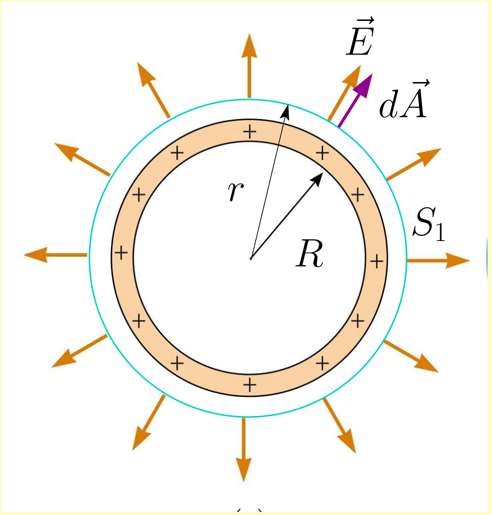
Ex. 2 Campo elétrico de uma casca esférica de raio R, uniformemente carregada com densidade de carga $\sigma > 0$.

Solução Devido à simetria esférica, o campo elétrico é radial e aponta para fora, pois $\sigma > 0$. Se escolhermos uma superfície gaussiana S como sendo uma superfície esférica de raio r, qualquer vetor elemento de área $d\vec{A}$ sobre S será paralelo a $\vec{E}$.

- Campo elétrico fora da casca esférica, onde $r > R$.
  Pela lei de Gauss,

$$\oint_{S_1} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

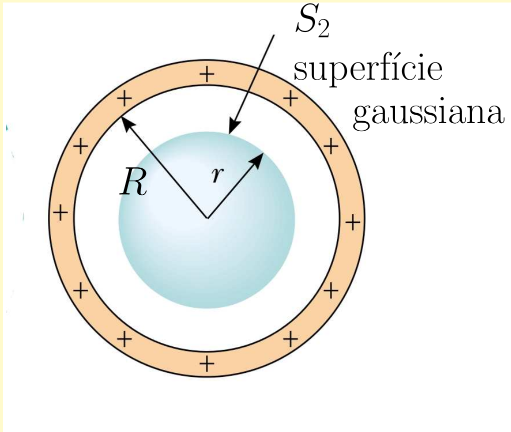
onde $q = \oint_{S_1} \sigma \, dA = \sigma 4\pi R^2$ é a carga total dentro da superfície gaussiana S_1.



Como $\vec{E}\cdot d\vec{A} = EdA$ e $\underline{E \text{ é constante}}$ sobre a superfície gaussiana,

$$\oint_{S_1} \vec{E}\cdot d\vec{A} = E\oint_{S_1} dA = E4\pi r^2, \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{r}} \quad (r > R)$$

- Campo elétrico dentro da casca esférica, onde $r < R$. Devido à simetria, escolhemos a superfície esférica S_2, de raio r, como sendo a superfície gaussiana. Pela lei de Gauss,



$$\oint_{S_2} \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{q'}{\varepsilon_0}$$

Procedendo de forma análoga ao caso anterior,

$$E(4\pi r^2) = \frac{q'}{\varepsilon_0}$$

Aplicação da lei de Gauss: distribuição de cargas com simetria esférica

Temos que $q' = 0$, pois não há carga resultante no interior da superfície gaussiana. Logo,

$$\boxed{E = 0} \quad (r < R)$$

- Os resultados acima podem ser obtidos através da integração direta, utilizando-se a lei de Coulomb.

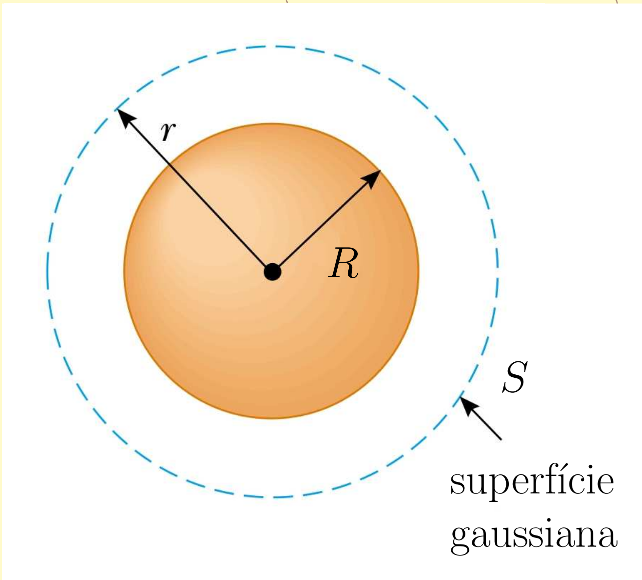
Ex. 3 Campo elétrico de uma esfera maciça de raio R, carregada com densidade de carga $\rho(r)$.

Solução Como a densidade só depende de r, que é a distância entre o centro da esfera e um ponto qualquer situado dentro dela, a distribuição de cargas possui uma simetria esférica. Por consequência, o campo elétrico em toda a região do espaço deve também possuir simetria esférica (logo, é radial). Assim, a superfície gaussiana deve ser a de uma esfera de raio r, concêntrica à esfera carregada.

- Campo elétrico fora da esfera, onde $r > R$. Pela lei de Gauss,

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

onde $q = \oint_{\mathcal{V}} \rho \, d\mathcal{V}$ é a carga total contida no volume $\mathcal{V}$ da esfera maciça de raio R.

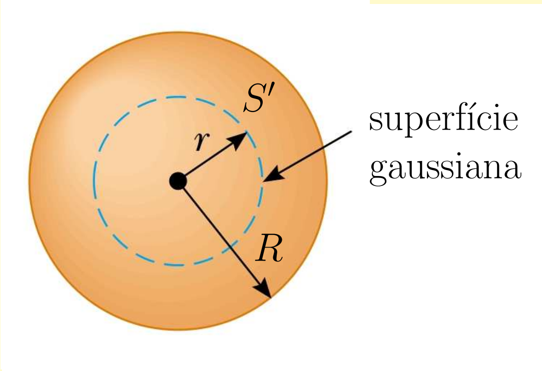


Aplicação da lei de Gauss: distribuição de cargas com simetria esférica

Utilizando-se o mesmo procedimento do cálculo do campo elétrico fora de uma casca esférica uniformemente carregada,

$$E(4\pi r^2) = \frac{q}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\,\hat{r}} \quad (r > R)$$

- Campo elétrico dentro da esfera, onde $r < R$.
  Pela lei de Gauss,



$$\oint_{S'} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q'}{\varepsilon_0}$$

onde $q' = \oint_{\mathcal{V}'} \rho \, d\mathcal{V}$ é a carga total contida dentro do volume $\mathcal{V}'$, delimitado pela superfície gaussiana S'. De forma análoga ao caso $r > R$, obtemos

$$\boxed{\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q'}{r^2}\,\hat{r}} \quad (r < R)$$

Aplicação da lei de Gauss: distribuição de cargas com simetria esférica

Se $\rho(r)$ for conhecida, podemos obter as cargas q e q'. Vamos assumir neste exemplo que a distribuição seja uniforme, ou seja,

$$\rho(r) = \rho_0 = \text{ constante } \quad (r \leq R)$$

- A carga total contida na esfera de raio R é dada por

$$q = \oint_{\mathcal{V}} \rho(r)\, d\mathcal{V} = \rho_0 \oint_{\mathcal{V}} d\mathcal{V}$$

onde a última integral dá o volume da esfera de raio R. Em coordenadas esféricas, o elemento de volume é dado por (o elemento de área dA está na pág. 4)

$$d\mathcal{V} = dr\, dA = r^2 \,\text{sen}\,\theta\, dr d\theta d\phi$$

$$\Rightarrow \quad \oint_{\mathcal{V}_R} d\mathcal{V} = \int_0^R r^2\, dr \underbrace{\int_0^\pi \text{sen}\,\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} d\phi}_{=4\pi} = \frac{4}{3}\pi R^3$$

Aplicação da lei de Gauss: distribuição de cargas com simetria esférica

Portanto,

$$q = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_0$$

- A carga q', contida na esfera de raio $r < R$, é dada por

$$q' = \oint_{\mathcal{V}'} \rho(r)\, d\mathcal{V} = \rho_0 \oint_{\mathcal{V}'} d\mathcal{V} = \rho_0 \frac{4}{3}\pi r^3$$

onde a integral em $\mathcal{V}'$ dá o volume da esfera de raio r.

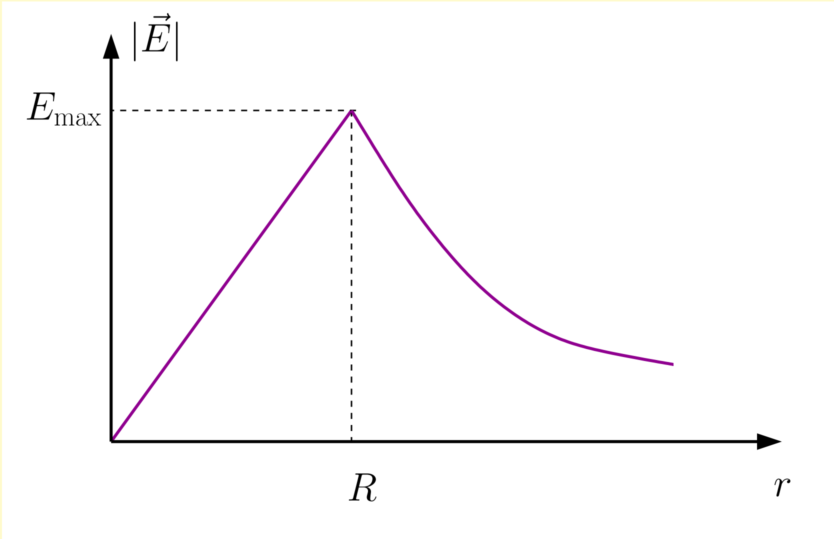
Dividindo q por q' encontradas acima, obtemos

$$\frac{q}{q'} = \frac{R^3}{r^3} \;\Rightarrow\; q' = q\frac{r^3}{R^3} \quad (r \leq R)$$

Aplicação da lei de Gauss: distribuição de cargas com simetria esférica

- Temos portanto que para o caso $\rho(r)$ constante, o campo elétrico em todo o espaço é dado por

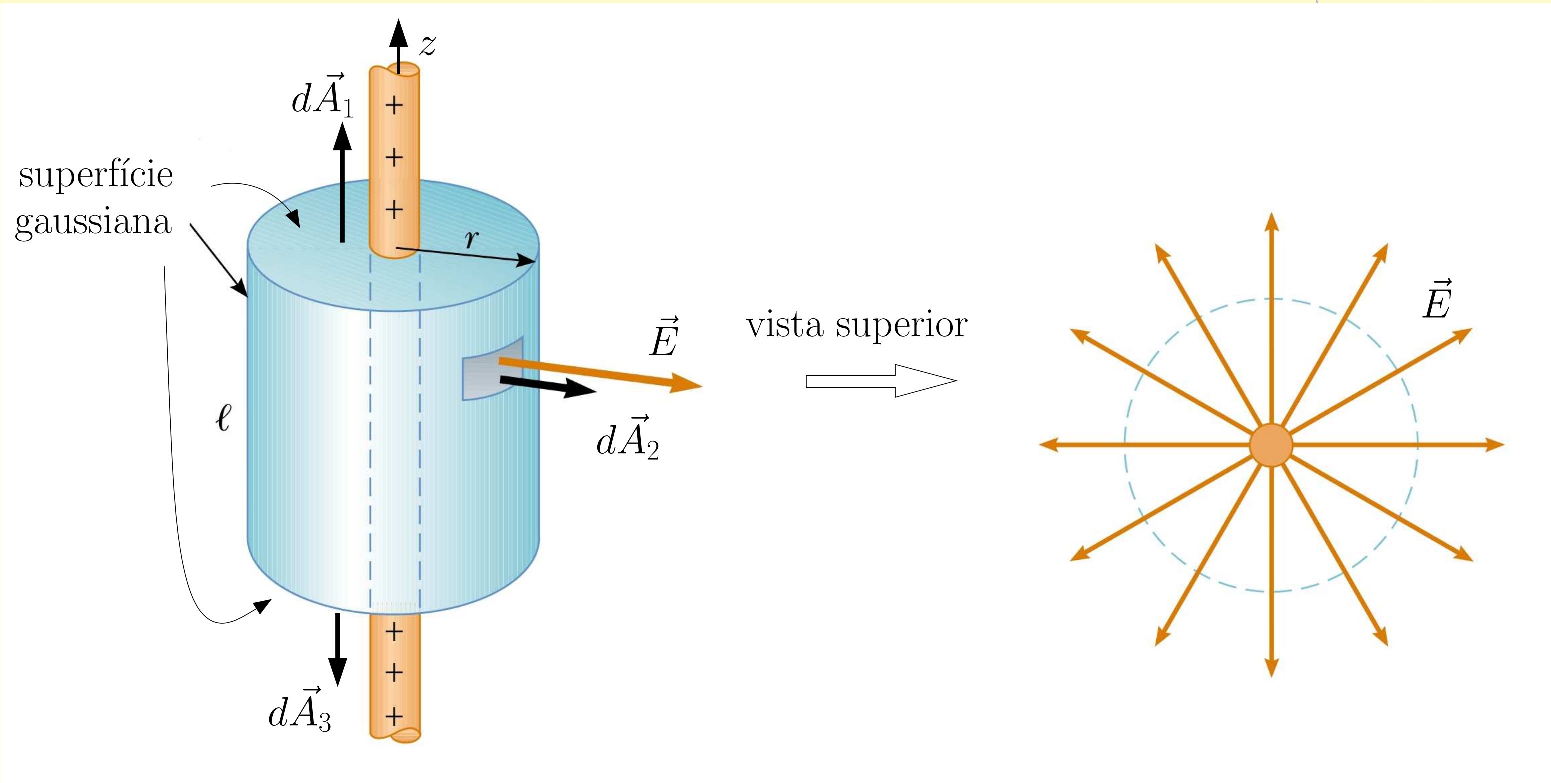
$$\vec{E} = \begin{cases} \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \dfrac{qr}{R^3}\,\hat{r} & (r < R) \\ \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \dfrac{q}{r^2}\,\hat{r} & (r \geq R) \end{cases}$$



Aplicação da lei de Gauss: distribuição de cargas com simetria cilíndrica

Ex. 4 O campo elétrico de um fio infinito uniformemente carregado com densidade de carga linear $\lambda > 0$.

Solução Por simetria, as linhas de campo elétrico são radiais, perpendiculares ao fio. Desta forma, escolhemos como superfície gaussiana a superfície de um cilindro de raio r e altura ℓ, concêntrico ao fio.



Aplicação da lei de Gauss: distribuição de cargas com simetria cilíndrica

- Pela lei de Gauss,

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

onde

$$q = \lambda \ell$$

é a carga total contida dentro da superfície gaussiana.

- Para a superfície gaussiana escolhida,

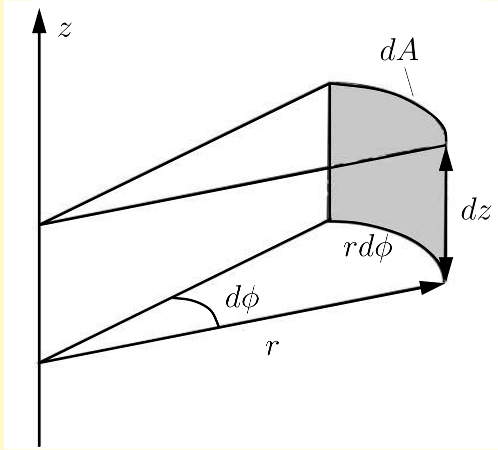
$$\underbrace{\int_{A_1} \vec{E} \cdot d\vec{A}_1}_{=0,\ \text{pois}\ \vec{E} \perp d\vec{A}_1} + \underbrace{\int_{A_2} \vec{E} \cdot d\vec{A}_2}_{\vec{E} \parallel d\vec{A}_2} + \underbrace{\int_{A_3} \vec{E} \cdot d\vec{A}_3}_{=0,\ \text{pois}\ \vec{E} \perp d\vec{A}_3} = \frac{\lambda \ell}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow \int_{A_2} E \, dA_2 = E \int_{A_2} dA_2 = \frac{\lambda \ell}{\varepsilon_0}$$

Aplicação da lei de Gauss: distribuição de cargas com simetria cilíndrica

- Em **coordenadas cilíndricas**, o elemento de área é dado por

$$dA = r d\phi dz$$



Segue que

$$\int_{A_2} dA_2 = r \int_{-\ell/2}^{\ell/2} dz \int_0^{2\pi} d\phi = 2\pi r \ell \quad \text{(área do cilindro)}$$

Logo,

$$E(2\pi r \ell) = \frac{\lambda \ell}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{E} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0} \frac{\lambda}{r} \hat{r}}$$

➠ Este resultado pode ser obtido utilizando-se a lei de Coulomb (veja Aula 2, p. 31).

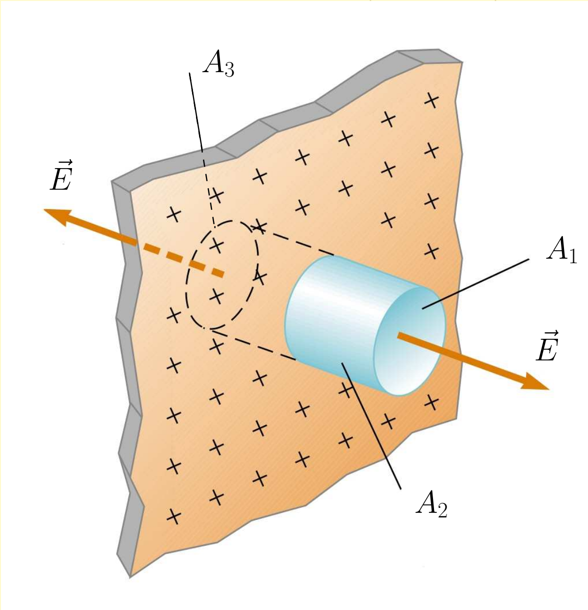
Ex. 5 O campo elétrico de uma placa muito grande, carregada uniformemente com densidade superficial de carga $\sigma > 0$.

Solução Pela simetria da distribuição de cargas, o campo elétrico próximo à placa deve ser perpendicular a ela e uniforme.

- Para a superfície gaussiana, podemos escolher um pequeno cilindro, cujo eixo é perpendicular ao plano, com as áreas das extremidades sendo $A_1 = A_3 = A$.
  Pela lei de Gauss,

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

  onde $q = \sigma A$ é a carga total dentro da superfície gaussiana.



Aplicação da lei de Gauss: placa infinita

Temos que

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{A} = \underbrace{\int_{A_1} \vec{E}\cdot d\vec{A}_1}_{=EA} + \underbrace{\int_{A_2} \vec{E}\cdot d\vec{A}_2}_{=0,\ \text{pois } \vec{E}\perp d\vec{A}_2} + \underbrace{\int_{A_3} \vec{E}\cdot d\vec{A}_3}_{=EA} = \frac{\sigma A}{\varepsilon_0}$$

Logo,

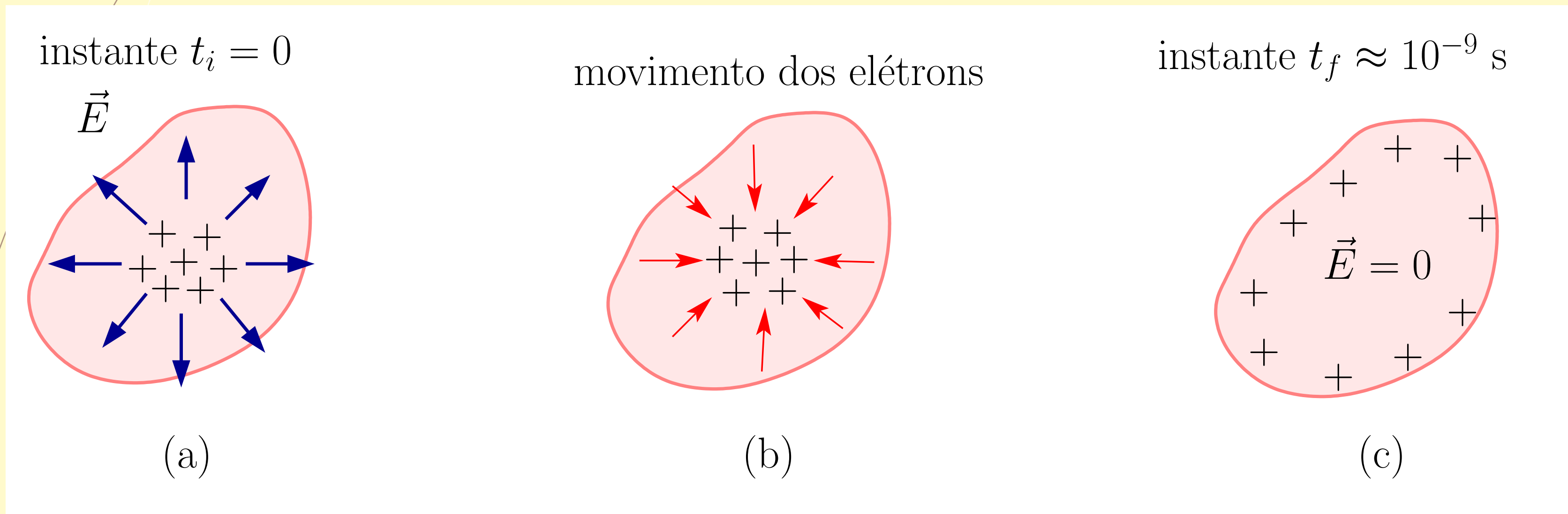
$$\boxed{\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\,\hat{n}}$$

onde $\hat{n}$ é perpendicular à placa, apontando para fora dela.

➠ Este resultado foi obtido para um ponto próximo a um disco uniformemente carregado (Aula 2, p. 36), sobre um eixo que passa pelo seu centro.

Condutores em equilíbrio eletrostático

- **Condutores em equilíbrio eletrostático**. Na Fig. (a) abaixo, cargas elétricas (que assumimos serem positivas) são depositadas no interior de um condutor no instante $t_i = 0$.



A seguinte sequência ocorre no condutor:

(i) o excesso de carga positiva gera um campo elétrico no interior do condutor isolado;

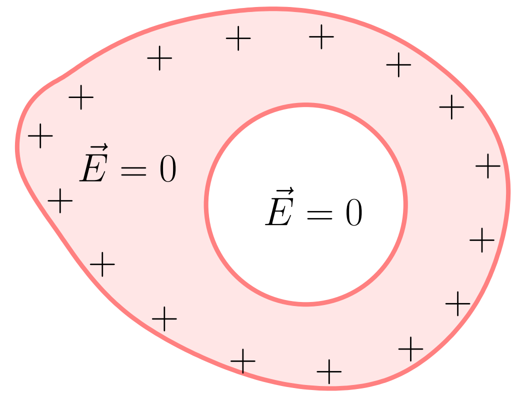
(ii) Os elétrons, praticamente livres dentro do material, sentem este campo e se deslocam para o excesso de cargas positivas, no intuito de neutralizá-las;

(iii) O equilíbrio eletrostático é alcançado em $t_f \approx 10^{-9}$ s, quando o excesso de cargas se rearranja tal que o campo elétrico no interior do condutor se anule. Nesta configuração, as cargas positivas vão estar distribuídas sobre a superfície do condutor.

- Embora tenhamos assumido que as cargas fossem positivas, o excesso de cargas negativas (elétrons) nos condutores também migra para a sua superfície, de modo que $E = 0$ dentro do condutor em equilíbrio eletrostático.
- De acordo com a lei de Gauss, tem-se que no interior do condutor, em equilíbrio eletrostático,

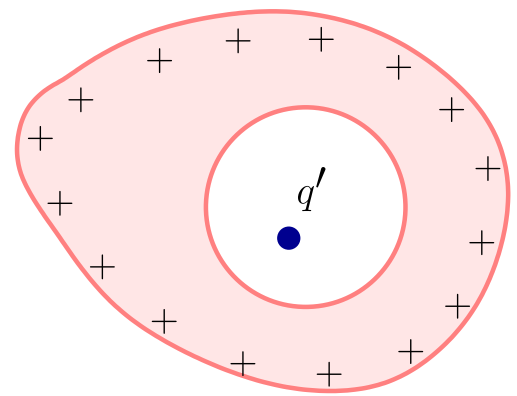
$$\oint_S \underbrace{\vec{E}}_{=0} \cdot d\vec{A} = \frac{q}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad q = 0 \quad \text{(dentro do condutor)}$$

- Considere um condutor com uma cavidade, carregado com uma carga $q > 0$. Conforme visto, para um condutor isolado em equilíbrio eletrostático, a carga se distribui pela superfície externa, como mostra a figura ao lado.



carga q distribuída
na superfície externa

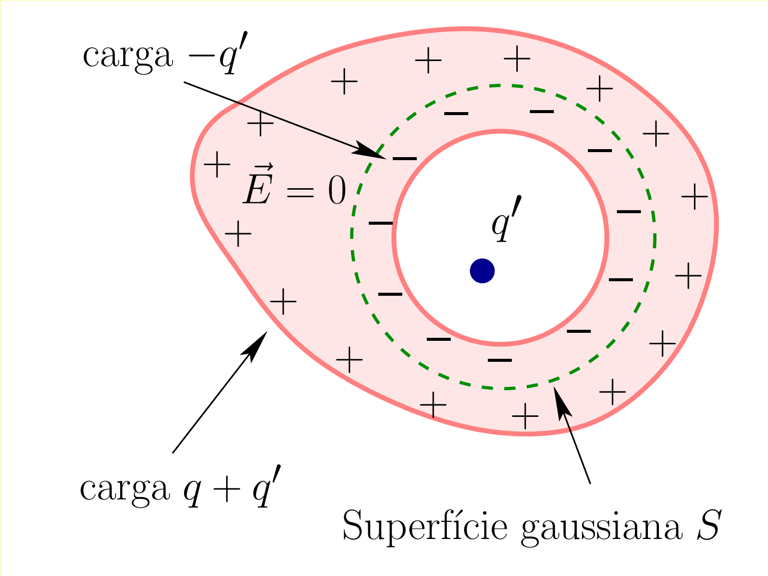
- Se uma carga $q' > 0$ for colocada no interior da cavidade de um condutor com carga q, o que ocorre com a distribuição de cargas no condutor?



carga q distribuída
na superfície externa

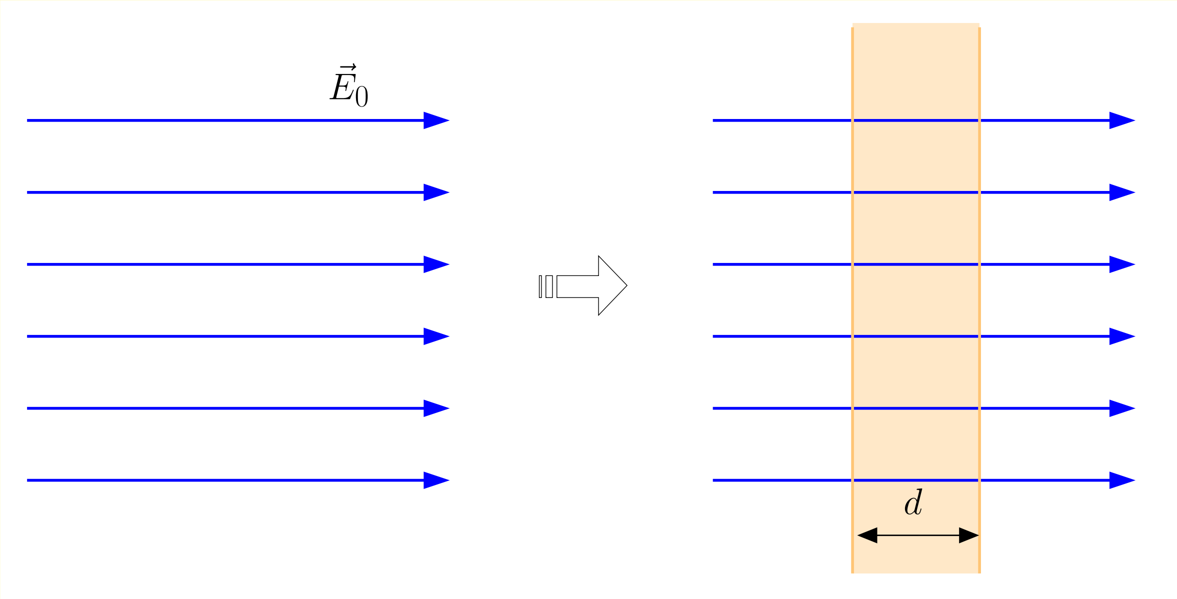
Condutores em equilíbrio eletrostático

- A presença da carga $q' > 0$ gera um campo elétrico no interior do condutor, fazendo com que os elétrons se desloquem, até que se tenha $\vec{E} = 0$ nessa região. Isto é possível quando a carga total dentro de uma superfície gaussiana S qualquer dentro do condutor, englobando a cavidade, é nula.



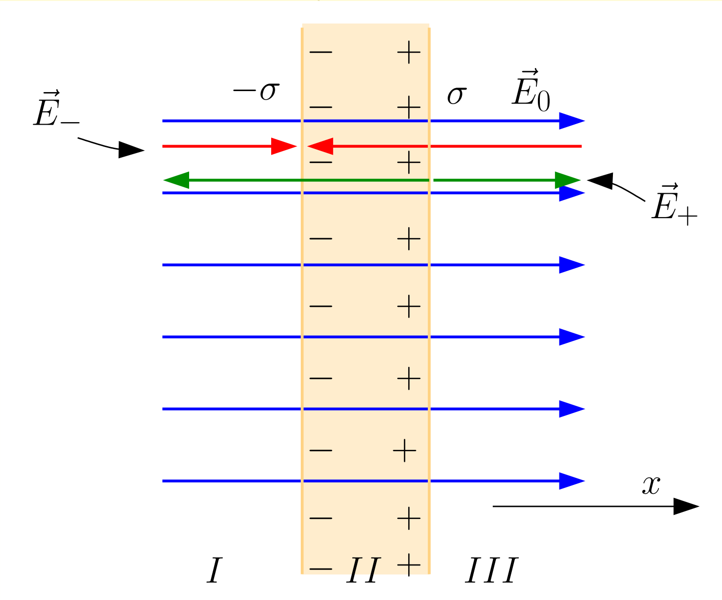
- No equilíbrio eletrostático, a presença da carga q' na cavidade faz com que a superfície interna do condutor tenha uma carga $-q'$ e a superfície externa uma carga $q + q'$.

Ex. 6 Considere uma placa condutora muito grande, de espessura d e descarregada. Se a placa for imersa numa região com campo elétrico externo $\vec{E}_0$ constante, tal que fique transversal ao campo, determine o campo elétrico resultante em todo o espaço.



Solução O campo elétrico inicialmente presente no condutor faz com que os elétrons se movam para à esquerda, tal que na situação de equilíbrio eletrostático, a superfície da placa à esquerda adquira uma densidade de carga $-\sigma$ e a da direita com uma densidade σ, e o campo no interior do condutor se anule.

Aplicação: placa condutora em um campo elétrico externo



- Os acúmulos de carga nas placas geram os campos $\vec{E}_-$ e $\vec{E}_+$, cujos módulos são dados por

$$|\vec{E}_-| = |\vec{E}_+| = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

O campo elétrico resultante em cada região é dada pela soma de todos os campos:

- Região I:

$$\vec{E}_I^{\text{res}} = \underbrace{-E_+\,\hat{\imath} + E_-\,\hat{\imath}}_{=0} + E_0\,\hat{\imath} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{E}_I^{\text{res}} = \vec{E}_0}$$

- Região II:

$$\vec{E}_{II}^{\text{res}} = -E_+\,\hat{\imath} - E_-\,\hat{\imath} + E_0\,\hat{\imath}$$

Aplicação: placa condutora em um campo elétrico externo

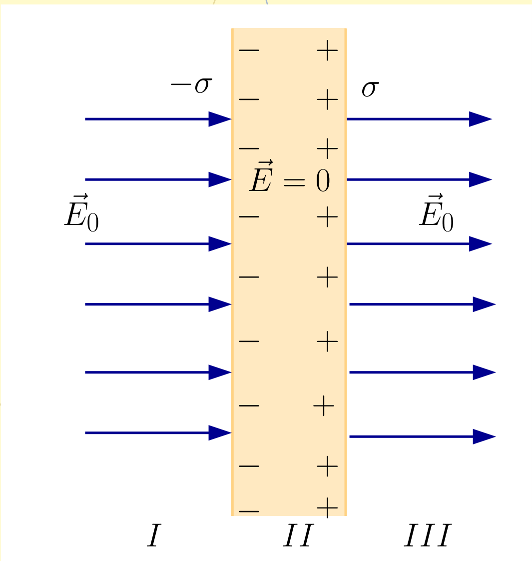
Como o campo elétrico resultante nesta região é nula no equilíbrio eletrostático, temos que

$$E_+ + E_- = E_0 \;\Rightarrow\; 2\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = E_0 \;\Rightarrow\; \sigma = \varepsilon_0 E_0$$

- Região III:

$$\vec{E}^{\text{res}}_{III} = \underbrace{E_+\,\hat{\imath} - E_-\,\hat{\imath}}_{=0} + E_0\,\hat{\imath} \;\Rightarrow\; \boxed{\vec{E}^{\text{res}}_{III} = \vec{E}_0}$$

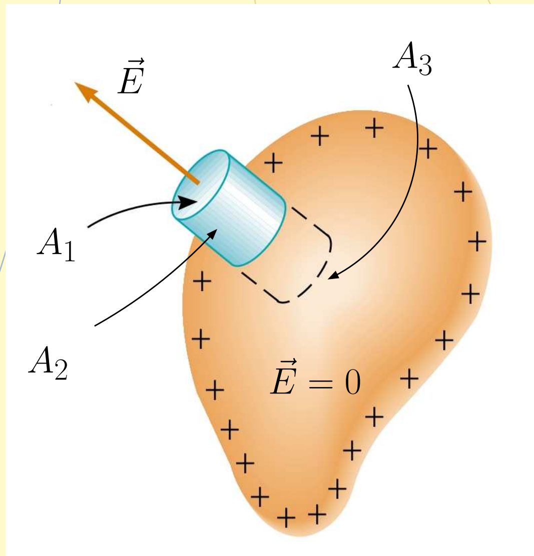
- A figura ao lado mostra o campo elétrico resultante em toda a região do espaço.



Campo elétrico próximo à superfície externa de um condutor carregado

- Considere um condutor carregado e isolado, em equilíbrio eletrostático. Para uma forma qualquer do condutor, a densidade de carga σ não é necessariamente uniforme.

- O nosso objetivo é estabelecer uma relação entre σ e o campo elétrico $\vec{E}$ externo, próximo à superfície do condutor. Para tal finalidade, vamos considerar uma superfície gaussiana em forma de um pequeno cilindro, conforme mostra a figura ao lado.



- Temos que na situação de equilíbrio eletrostático, o campo elétrico imediatamente externo ao condutor é perpendicular à superfície do condutor. Caso contrário, a componente paralela $\vec{E}_{\parallel}$ poderia estabelecer correntes superficiais, uma situação de não-equilíbrio.

Campo elétrico próximo à superfície externa de um condutor carregado

- Pela lei de Gauss,

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{A} = \int_{A_1} \vec{E}\cdot d\vec{A}_1 + \underbrace{\int_{A_2} \vec{E}\cdot d\vec{A}_2}_{=0,\ \text{pois } \vec{E}\perp\vec{A}_2} + \underbrace{\int_{A_3} \vec{E}\cdot d\vec{A}_3}_{=0,\ \text{pois } \vec{E}=0} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

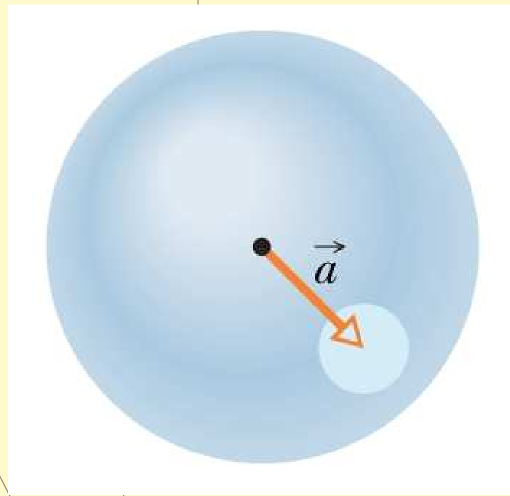
onde $q = \sigma A_1$ é a carga dentro da superfície gaussiana.
Como $\vec{E} \parallel d\vec{A}_1$ e $|\vec{E}|$ é constante, temos que

$$EA_1 = \frac{\sigma A_1}{\varepsilon_0} \quad\Rightarrow\quad E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

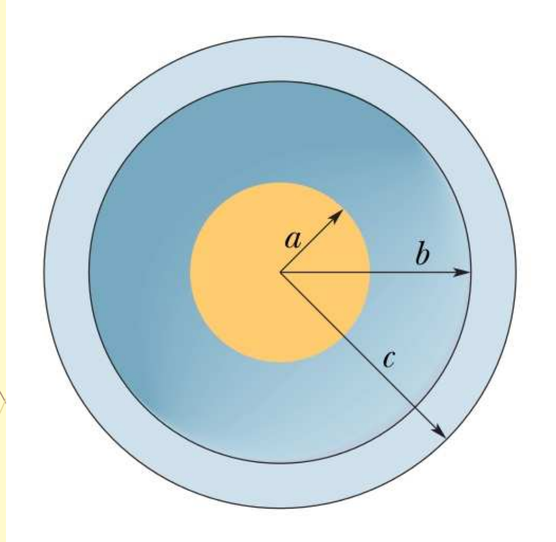
➠ Campo elétrico próximo a um condutor é o dobro do campo elétrico próximo à uma placa uniformemente carregada (ambos carregados com a mesma densidade de carga σ).

Problemas Propostos

P1 Uma esfera sólida não-condutora possui uma densidade volumétrica de carga ρ constante. Seja $\vec{r}$ o vetor do centro da esfera até um ponto geral P dentro da esfera. (a) Mostre que o campo elétrico em P é dado por $\vec{E} = \rho\vec{r}/3\varepsilon_0$ (Note que o resultado é independente do raio da esfera.) (b) Uma cavidade esférica é escavada da esfera, conforme mostra a Fig. ao lado. Usando conceitos de superposição, mostre que o campo elétrico em todos os pontos dentro da cavidade é uniforme e igual a $\vec{E} = \rho\vec{a}/3\varepsilon_0$, onde $\vec{a}$ é o vetor posição do centro da esfera até o centro da cavidade.



P2 Na Fig. ao lado, uma esfera sólida de raio a é concêntrica a uma casca esférica condutora de raio interno b e raio externo c. A esfera possui uma carga $q > 0$ uniformemente distribuída, enquanto que a casca possui carga líquida $-q$. (a) Qual é a carga líquida sobre a superfície interna e externa da casca? (b) Encontre a magnitude do campo elétrico em função da distância radial r.



Resp. (a) $-q$ na superfície interna e 0 na superfície externa; (b) $E = \dfrac{qr}{4\pi\varepsilon_0 a^3}$, para $r < a; E = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$, para $a < r < b; E = 0$, para $r > b$.

Referências

- R. A. Serway, e J. W. Jewett Jr., *Princípios de Física, Vol. 3*, Cengage Learning;
- D. Halliday, R. Resnick e K. S. Krane, *Física, Vol. 3*, LTC;