BC0209–Fenômenos Eletromagnéticos

Segundo quadrimestre de 2016

Prof. José Kenichi Mizukoshi

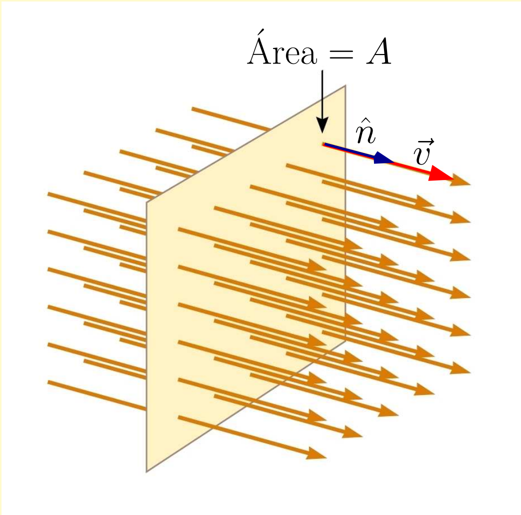
Aula 3 (versão 13/05/2015)

O Fluxo elétrico e a lei de Gauss.

O Fluxo Elétrico e a Lei de Gauss

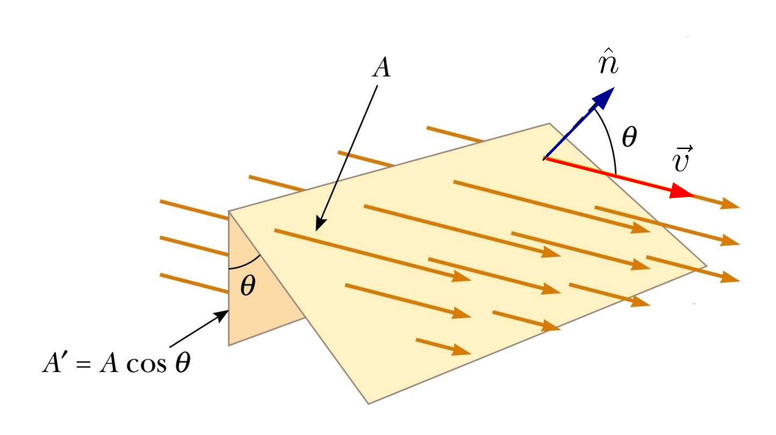
Fluxo de um campo vetorial

- Antes de enunciar a **lei de Gauss** do eletromagnetismo, vamos discutir primeiro o **fluxo de um campo vetorial**. Em particular, vamos considerar o fluxo de um campo de velocidades de escoamento de um fluido (por ser mais intuitivo), que tomamos como sendo constante, através de superfícies planas.
- O **vetor área** é definido como $\vec{A} = A\,\hat{n}$, onde $\hat{n}$ é o vetor unitário normal (perpendicular) à superfície de área A. Por convenção, o sentido de $\hat{n}$ é aquele saindo de A (há ambiguidade para a superfície aberta).
- Se colocarmos uma tela retangular de área A em um fluido com velocidade de escoamento $\vec{v}$, perpendicular a $\vec{v}$, o **fluxo** através de A será dado por



$$\Phi = \vec{v} \cdot \vec{A} = \vec{v} \cdot \hat{n} A \quad \Rightarrow \quad \Phi = vA$$

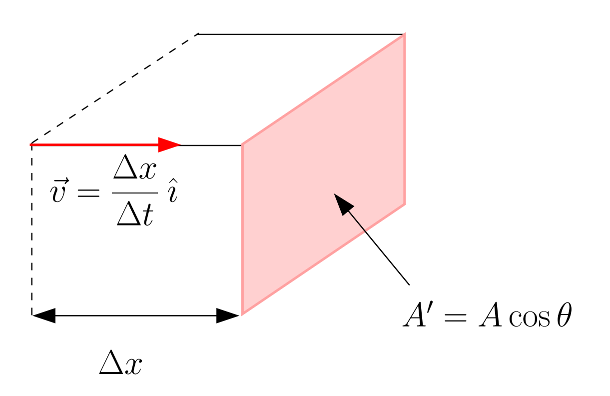
- Caso a tela faça um ângulo θ com a direção perpendicular a $\vec{v}$, ou seja, $\hat{n}$ faz um ângulo θ com $\vec{v}$, temos que o fluxo é



$$\Phi = \vec{v}\cdot\vec{A} = \vec{v}\cdot\hat{n}A$$
$$= v(A\cos\theta) = vA'$$

onde A' é a projeção da área da tela no plano perpendicular a $\vec{v}$.

- Como o módulo da velocidade $\vec{v}$ pode ser dado por $\Delta x/\Delta t$, temos que



$$\Phi = vA' = \frac{\Delta x}{\Delta t}A' = \frac{\text{volume}}{\text{unidade de tempo}}$$

Logo, Φ é identificado como sendo a **vazão** do fluido, que é uma quantidade de volume $\Delta x A'$ que passa pela área A', num intervalo de tempo Δt.

- Fluxo através de uma superfície fechada

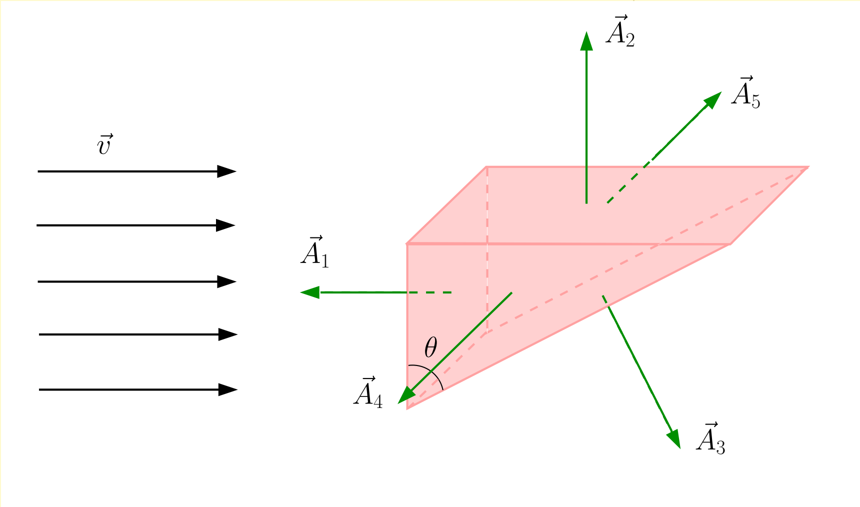
$$\Phi = \sum_{i=1}^{N} \vec{v} \cdot \vec{A}_i$$

onde a somatória se estende sobre todas as superfícies que compõem a superfície fechada.

- Ex.: considere a superfície fechada formada por 5 lados, cujos vetores áreas são denotados por $\vec{A}_i$, $i = 1, \ldots, 5$.

  Como $\vec{A}_2, \vec{A}_4$ e $\vec{A}_5$ são perpendiculares à $\vec{v}$, tem-se que $\vec{v} \cdot \vec{A}_k = 0$, para $k = 2, 4$ e 5. Logo, neste caso,

$$\Phi = \vec{v} \cdot \vec{A}_1 + \vec{v} \cdot \vec{A}_3$$



Mas,

$$\vec{v} \cdot \vec{A}_1 = vA_1 \cos \pi = -vA_1 \quad \text{(entrando no objeto)}$$
$$\vec{v} \cdot \vec{A}_3 = vA_3 \cos \theta = vA_1$$

A última igualdade é obtida observando-se que $A_3 \cos \theta = A_1$. Logo,

$$\Phi = 0$$

ou seja, a quantidade de fluido que entra por A_1 por unidade de tempo é igual a que sai por A_3.

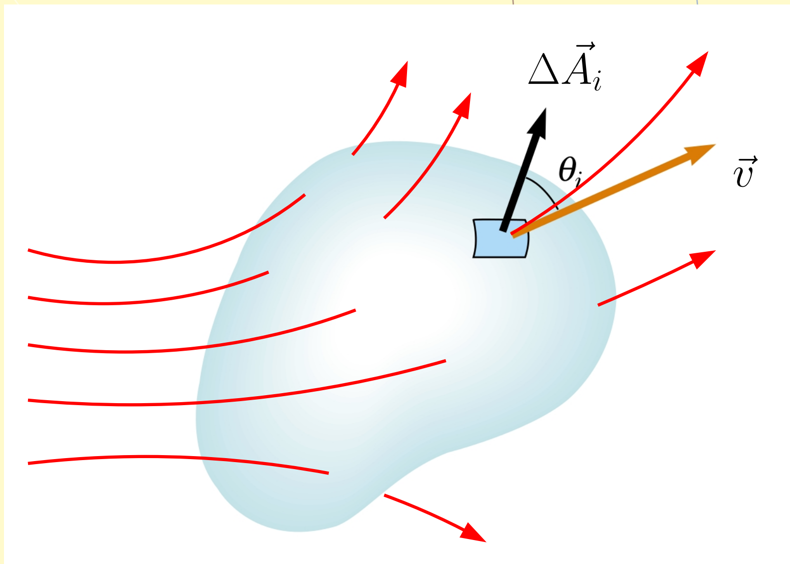
➠ De uma forma geral, $\Phi = 0$ em uma superfície fechada qualquer, desde que não haja **fonte** ou **sumidouro** no seu interior.

Fluxo de um campo vetorial

- Para uma **superfície fechada qualquer**, com um campo qualquer de velocidades, o fluxo é dado por

$$\Phi = \lim_{\Delta \vec{A}_i \to 0} \sum_{i=1}^{N} \vec{v} \cdot \Delta \vec{A}_i$$

$$\Rightarrow \quad \Phi = \oint_S \vec{v} \cdot d\vec{A}$$



O símbolo $\oint_S$ acima representa uma integral de superfície fechada S. Para o caso geral, $\vec{v}$ não é necessariamente constante ao longo dessa superfície.

O fluxo de um campo elétrico e a lei de Gauss

- O conceito de **fluxo de campo elétrico** é análogo ao de campo de velocidades, com as seguintes correspondências:

linhas de campo de velocidades	$\Leftrightarrow$	linhas de campo elétrico
$\vec{v}$	$\Leftrightarrow$	$\vec{E}$
fontes/sumidouros de fluidos	$\Leftrightarrow$	cargas elétricas positivas/negativas

- Desta forma, o fluxo do campo elétrico através de uma superfície fechada S é definido como

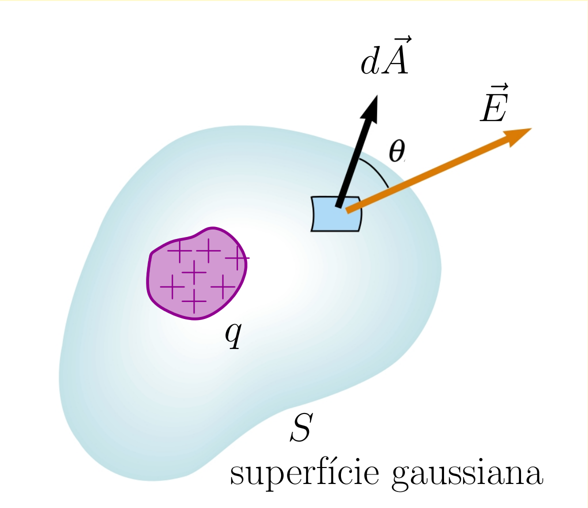
$$\Phi_E = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

O fluxo de um campo elétrico e a lei de Gauss

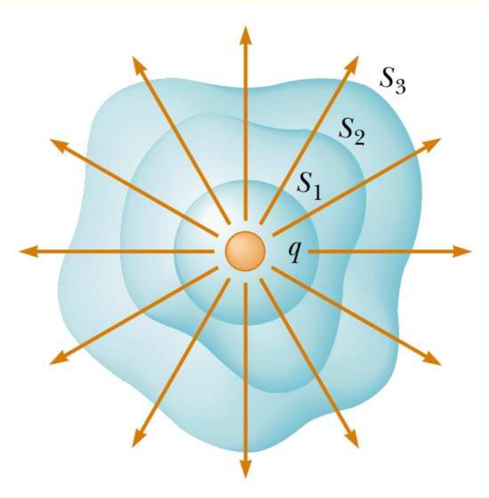
- A **lei de Gauss** estabelece que

$$\varepsilon_0 \Phi_E = q \qquad \Rightarrow \quad \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

A carga q (não necessariamente carga pontual) é a carga total envolvida pela superfície fechada S, conhecida como **superfície gaussiana**.



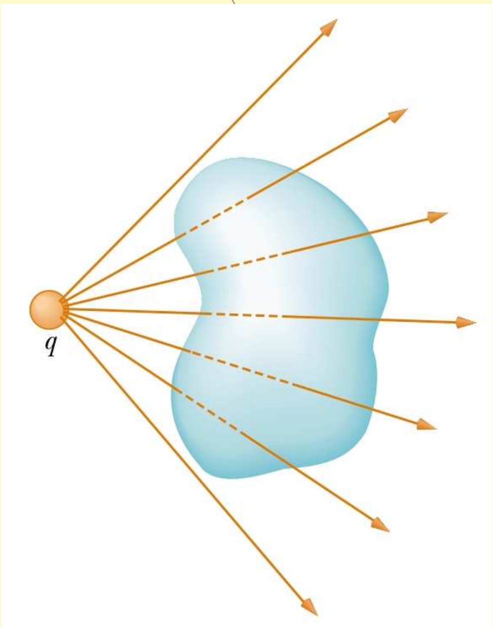
- Qualquer superfície fechada que envolva a carga q irá produzir o mesmo fluxo elétrico Φ_E. Na figura ao lado, a integral fechada sobre as superfícies S_1, S_2 ou S_3 irá produzir o mesmo resultado, q/ε_0.



O fluxo de um campo elétrico e a lei de Gauss

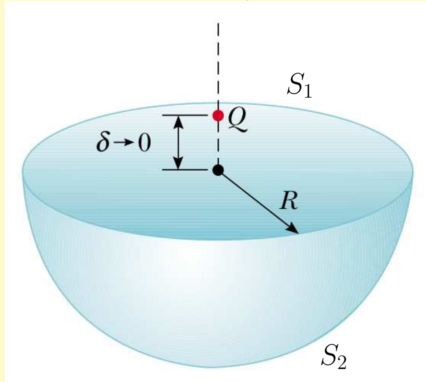
- Por outro lado, para a superfície da figura ao lado, $\Phi_E = 0$, pois q não é englobada por ela. Em outras palavras, o número de linhas de $\vec{E}$ que atravessa para dentro é o mesmo que atravessa para fora.

  Observe que $\Phi_E = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = 0$, mas isto não implica necessariamente que $\vec{E}$ seja zero na região, conforme pode-se ver pela figura.



O fluxo de um campo elétrico – exemplo

Ex. 1 Uma carga pontual Q está situada imediatamente acima do centro da face plana de um hemisfério de raio R, como mostrado na figura ao lado. Qual é o fluxo elétrico (a) através da superfície curva e (b) através da face plana?



Solução O fluxo elétrico através de uma superfície fechada S que engloba Q é definido como sendo

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = Q/\varepsilon_0$$

Neste caso, como $\delta \to 0$, vamos tomar S como sendo uma superfície esférica de raio R, formada por S_2 e S_2', onde S_2' é a superfície do hemisfério norte, não mostrada na figura.

- Como a carga se encontra praticamente no centro da esfera, o fluxo por S_2 é aproximadamente igual ao fluxo por S_2'. Logo, o item (a) dá

$$\boxed{\Phi_{E,S_2} = Q/2\varepsilon_0}$$

- $S_1 + S_2$ formam uma superfície fechada. Como Q não está contida nela, $\Phi_{E,S_1+S_2} = 0$. Logo, o item (b) fica

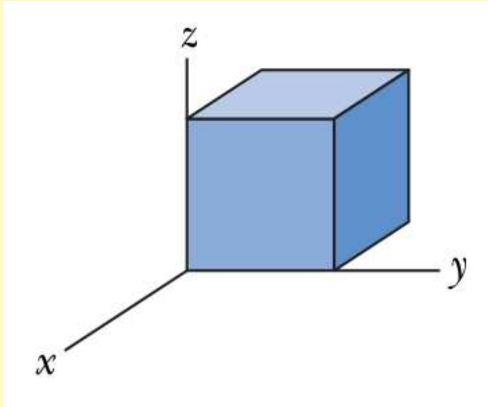
$$\Phi_{E,S_1} = -\Phi_{E,S_2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Phi_{E,S_1} = -Q/2\varepsilon_0}$$

Problemas Propostos

P1 Uma superfície gaussiana na forma de um cilindro de raio R está imersa em um campo elétrico uniforme $\vec{E} = E\,\hat{\imath}$ horizontal, com $E > 0$, paralelo ao eixo do cilindro. Qual é o fluxo do campo elétrico através (a) das tampas e (b) superfície lateral do cilindro?

Resp. (a) $-E\pi R^2$ através da tampa à esquerda e $E\pi R^2$ através da tampa à direita; (b) 0.

P2 A Fig. ao lado mostra uma superfície gaussiana fechada na forma de um cubo de aresta 2,00 m. Ela está localizada em uma região onde existe um campo elétrico não-uniforme dado por $\vec{E} = [(3{,}00x + 4{,}00)\,\hat{\imath} + 6{,}00\,\hat{\jmath} + 7{,}00\,\hat{k}]$ N/C, onde x está em metros. Qual é a carga líquida contida no interior do cubo?



Resp. $q = \varepsilon_0 \Phi = 2{,}13 \times 10^{-10}$ C.

Referências

- R. A. Serway, e J. W. Jewett Jr., *Princípios de Física, Vol. 3*, Cengage Learning;
- D. Halliday, R. Resnick e K. S. Krane, *Física, Vol. 3*, LTC;