Universidade Federal do ABC – UFABC

ESTA020-17: Modelagem e Controle
Segunda Prova - Turma DA - 15/04/2021
Professor Dr. Alfredo Del Sole Lordelo **Boa prova!**

Nome: n^o**:**

Antes de iniciar a prova, leia as instruções com atenção: Responda a prova de forma clara, detalhada e legível, identificando as respostas de acordo com os respectivos números e itens das questões. Numere todas as páginas das folhas de respostas e escreva o seu nome completo e o RA em todas elas. As páginas das folhas de respostas deverão ser escaneadas ou fotografadas, com atenção quanto à legibilidade e ao enquadramento. Salve todas as páginas das folhas de respostas em um único arquivo (PDF ou JPEG). Se não for possível salvar todas as páginas das folhas de respostas em um único arquivo, salve cada página das folhas de respostas, em arquivos separados (PDF ou JPEG), em uma pasta que deverá ser compactada. O nome do arquivo ou da pasta compactada deverá ter o formato “NomeCompletoRA”. Antes de fazer o upload no SIGAA, verifique se os arquivos estão abrindo corretamente. A prova é individual e estará disponível para download e upload dos arquivos ou da pasta compactada através do SIGAA, das 08h00 de 15/04/2021 às 08h00 de 18/04/2021, como “Tarefa” da “Segunda Prova (P2)”.

***

1- (2,0 pontos) Linearize a função $f(x) = sen(x)$ em $x_e = 0$ através da expansão em série de *Taylor* dada por

$$f(x) = f(x_e) + \frac{df(x)}{dx}\Big|_{x=x_e}(x - x_e) + \ldots + \frac{1}{n!}\frac{d^n f(x)}{dx^n}\Big|_{x=x_e}(x - x_e)^n$$

2- (2,0 pontos) Através do primeiro método de *Lyapunov* (método da linearização), analise a estabilidade do seguinte sistema dinâmico no ponto de equilíbrio $(x_1(t), x_2(t)) = (0, 0)$.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -x_1(t) - x_2(t) + 3x_1^2(t)x_2(t) + 2x_2^3(t) \end{aligned}$$

3- (3,0 pontos) Considere o sistema mecânico massa-mola-amortecedor apresentado na Figura 1, linear e invariante no tempo, no qual m é a massa, k é a cosntante elástica da mola e b é o coeficiente de amortecimento do amortecedor. Os parâmetros m, b e k são estritamente positivos. A força elástica da mola é conservativa, pois pode ser obtida derivando-se a energia potencial elástica nela acumulada. A força externa $u(t)$ aplicada na massa m é não conservativa. A força de atrito no amortecedor também é não conservativa e dada por $-b\dot{w}(t)$. A saída do sistema é o deslocamento $w(t)$ da massa m, medido a partir da posição de equilíbrio.

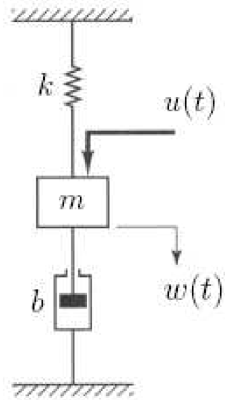

Figura 1: Sistema mecânico massa-mola-amortecedor.

As energias cinética e potencial elástica são dadas, respectivamente, por

$$T = \frac{1}{2}m\dot{w}^2(t) \quad \text{e} \quad V = \frac{1}{2}kw^2(t)$$

de maneira que o lagrangiano é dado por $L = T - V$. Deduza a equação diferencial linear de segunda ordem não homogênea que modela este sistema, através da equação de *Euler-Lagrange*

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{w}(t)}\right) - \frac{\partial L}{\partial w(t)} = H(t)$$

para a coordenada generalizada $w(t)$, na qual $H(t)$ é a soma das forças não conservativas que atuam no sistema.

4- (3,0 pontos) Considere um pêndulo simples composto de uma haste rígida de massa desprezível e comprimento l acoplada a uma massa m em sua extremidade. Este pêndulo está sujeito à aceleração da gravidade g e a um atrito cujo coeficiente é b. Os parâmetros l, m, g e b são estritamente positivos. O modelo matemático deste sistema dinâmico é dado pela equação

$$-mglsen\theta(t) - bl\dot{\theta}(t) = ml^2\ddot{\theta}(t) \Rightarrow \ddot{\theta}(t) = -\frac{g}{l}sen\theta(t) - \frac{b}{ml}\dot{\theta}(t)$$

na qual $\theta(t)$ é a posição ângular e $\dot{\theta}(t)$ é a velocidade ângular do pêndulo.

A energia total deste sistema dinâmico é dada pela soma da energia cinética e da energia potencial gravitacional, ou seja

$$E_T(t) = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2(t) + mgl - mglcos\theta(t)$$

que é definida positiva para quaisquer valores de $\theta(t)$ e $\dot{\theta}(t)$.

Através do segundo método de *Lyapunov* (Teorema da estabilidade de *Lyapunov*) e usando a função energia total $E_T(t)$ como candidata à função de *Lyapunov*, analise a estabilidade deste sistema dinâmico no ponto de equilíbrio $(\theta(t), \dot{\theta}(t)) = (0, 0)$.