Introdução às Equações Diferenciais Ordinárias - P1 (2015)

Prof. Vladislav Kupriyanov - CMCC/UFABC

1. (2,5 pt) Resolve a equação diferencial
$$(1-2x^2-2y)\frac{dy}{dx}=4x^3+4xy.$$
Gabarito: Esta equação é uma equação exata. A solução é
$$y-2x^2y-y^2-x^4=c\,.$$

2. (2,5 pt) Resolve a equação diferencial
$$dy=\left(2y+x(e^{3x}-e^{2x})\right)dx,\ \ y(0)=2.$$
Gabarito: Esta equação é uma equação linear com solução
$$y(x)=(x-1)e^{3x}+\left(3-\frac{x^2}{2}\right)e^{2x}\,.$$

3. (2,5 pt) Resolve a equação diferencial
$$\frac{dy}{dx}=\frac{y-x}{y+x}\,.$$
Gabarito: A equação é homogênea, com solução:
$$\ln\left(x^2+y^2\right)+2\arctan(y/x)=c\,.$$

4. (2,5 pt) Um termômetro é removido de uma sala e colocado na rua, onde a temperatura é de 5 graus Celsius. Em um minuto o termômetro marcava 20 graus Celsius, em dois minutos a temperatura marcada pelo termômetro foi de 10 graus. Qual é a temperatura da sala? Encontre a temperatura marcada pelo termômetro como a função de tempo, $T(t)$.

   Gabarito: A equação de resfriamente de Newton é
$$\frac{dT}{dt}=k(T-T_m),$$
onde T_m é a temperatura do meio ambiente, no caso 5 graus. A sua solução é
$$T(t)=T_m+ce^{kt}.$$
Da condição, $T(1)=20$, encontramos $ce^k=15$. A condição, $T(2)=10$, implica que $ce^{k2}=c(e^k)^2=5$. Estas duas equações resultam em $c=45$ e $e^k=1/3$. Assim,
$$T(t)=5+45\times\left(\frac{1}{3}\right)^t.$$
Em particular, a temperatura da sala é $T(0)=50$.