Lei de Ohm

Medição de resistências com voltímetro e amperímetro.

Se não é necessária uma grande precisão na medição da resistência (> 0.5 %) então podemos medir uma resistência desconhecida utilizando voltímetro, amperímetro e a lei de ohm (caso seja necessária uma precisão maior na medida, então se recomenda utilizar um ponte de Wheatstone).

Para realizar a medida podemos montar os dois seguintes circuitos:

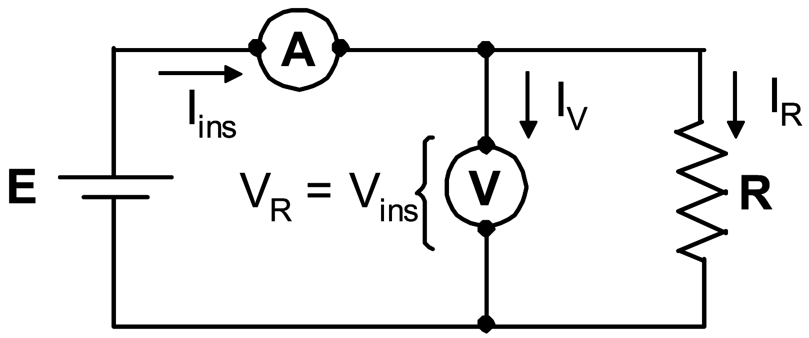

Figura 1: circuito de voltagem certa (circuito 1).

Nesse circuito o voltímetro está conectado em paralelo com a resistência. Assim, o voltímetro da a medida correta da tensão na resistência.
No circuito embaixo, o amperímetro está em série com o resistor, dando assim a medida correta da corrente na resistência.

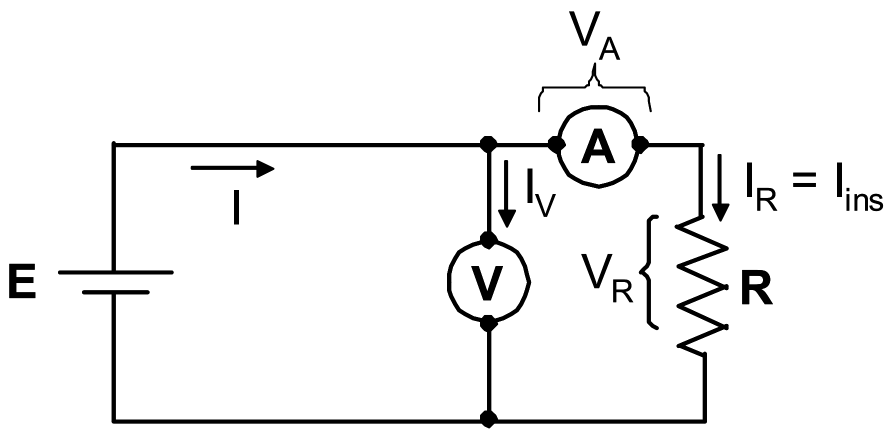

Figura 2: circuito da corrente certa (circuito 2).

Análise dos circuitos

Circuito 1

O valor de resistência obtido das medidas dos instrumentos está dado por:

$$R_{ins} = \frac{V_{ins}}{I_{ins}} = \frac{V_{ins}}{I_V + I_R} = \frac{V_{ins}}{\frac{V_{ins}}{R_V} + \frac{V_{ins}}{R}} = \frac{1}{\frac{1}{R_V} + \frac{1}{R}} = \frac{R\ R_V}{R + R_V} = R_{ins}\,, \tag{1}$$

onde R_V é a resistência interna do voltímetro. E erro relativo é:

$$e_1 = \frac{R_{ins} - R}{R} = \frac{R_{ins}}{R} - 1 = \frac{R_V}{R + R_V} - 1 = \frac{R_V - R - R_V}{R + R_V} = -\frac{R}{R + R_V}\,, \tag{2}$$

e finalmente:

$$e_1 = -\frac{1}{R + \frac{R_V}{R}}\,. \tag{3}$$

Devemos colocar a resistência incógnita R em função de R_{ins},

$$R = \frac{R_{ins}\ R_V}{R_V + R_{ins}}\,, \tag{4}$$

e substituindo em (2) fica:

$$e_1 = -\frac{R_{ins}}{R_V}\,. \tag{5}$$

O erro é negativo, então é por defeito, o R_{ins} é menor que o valor de R. Logicamente, o erro será menor quanto maior seja R_V.

Circuito 2.

A tensão medida pelo voltímetro é:

$$V_{ins} = V_A + V_R = I_{ins} R_A + I_{ins} R = I_{ins}(R_A + R)\,, \tag{6}$$

Onde R_A é a resistência interna do amperímetro. Logo:

$$R_{ins} = \frac{V_{ins}}{I_{ins}} = R_A + R\,, \tag{7}$$

então,

$$R = R_{ins} - R_A . \tag{8}$$

O erro neste caso fica,

$$e_2 = \frac{R_{ins} - R}{R} = \frac{R_{ins} - R_{ins} + R_A}{R_{ins} - R_A} = \frac{R_A}{R_{ins} - R_A} . \tag{9}$$

Interessa calcular o valor de R_{ins} para o qual ambos os valores dos erros dão o mesmo valor. Então:

$$e_1 = e_2 \Leftrightarrow \frac{R_{ins}}{R_V} = \frac{R_A}{R_{ins} - R_A} , \tag{10}$$

de onde fica uma equação quadrática em R_{ins}, que tem as soluções:

$$R_{ins\ sol} = \frac{R_A}{2} \pm \sqrt{R_A \left[\frac{R_A}{4} + R_V \right]} . \tag{11}$$

Considerando o caso no qual $\frac{R_A}{4} << R_V$ e $\frac{R_A}{2} << \sqrt{R_A R_V}$, então fica:

$$R_{ins\ sol} = \sqrt{R_A R_V} . \tag{12}$$

Graficamente fica:

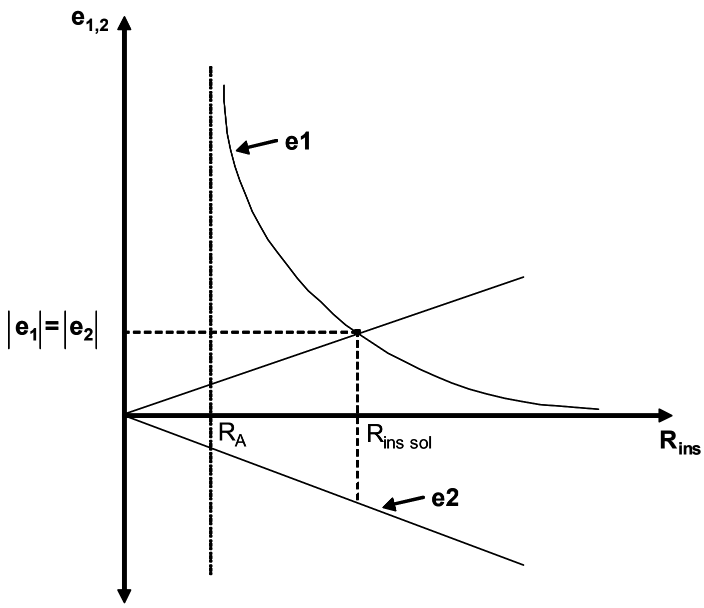

Figura 3: erros nos valores de resistência medidas a partir dos circuitos 1 e 2.

Realização do experimento.

Montar o circuito 1. Utilizar diferentes valores de resistências, por exemplo: 10 Ω, 10 kΩ e 1 MΩ.

Medir 15 valores de tensão e corrente, modificando o valor de tensão da fonte de alimentação E. No caso do resistor de 10 Ω, colocar a escala certa de corrente no multímetro para não danificar o instrumento.

Fazer um gráfico de V em função de I. Obter o valor de R por ajuste linear, utilizando o método gráfico e o método de mínimos quadrados.

Logo montar o circuito 2 e repetir o procedimento.

Resistência interna dos instrumentos.

Os instrumentos de medida não devem afeitar o circuito no qual estamos medindo. Isso equivale a dizer que a impedância de um voltímetro deve ser infinita, a de um amperímetro zero. Também implica que a impedância de saída de uma fonte deverá ser zero. Para verificar na prática esses conceitos iremos verificar as impedâncias de um voltímetro, de um amperímetro e de uma fonte de tensão de corrente contínua.
No nosso caso, iremos utilizar um multímetro que é um aparelho capaz de medir tensões, correntes e resistências simplesmente mudando a posição de uma chave seletora.
A resistência interna é dada, no multímetro, de diferente forma para o caso das escalas de tensão (função voltímetro) e de corrente (função amperímetro). No caso das escalas de tensão a impedância de entrada é especificada diretamente, e vale ~10 MΩ.
Para o caso das correntes é dado um valor da queda de tensão para cada escala de corrente. Essa especificação aparece nos manuais da seguinte forma:

Queda de tensão na faixa até 600.0 μA: < 4mV/μA.

Ou seja, se temos uma medida de 1 μA, a queda no amperímetro será de ~4 mV. Para exemplificar um caso extremo vejamos o seguinte circuito:

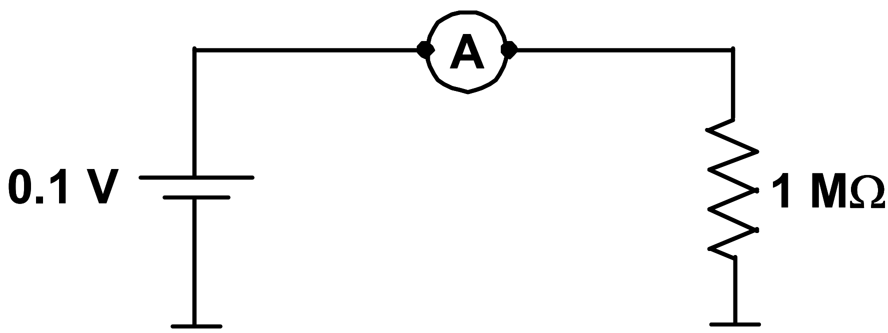

Figura 4: exemplo de queda de tensão em um amperímetro.

No caso, a resistência é de 1 MΩ. Com uma fonte de 0.1 V, a valor da corrente deveria ser, segundo a lei de Ohm, 100 nA. Se a queda de tensão especificada no manual do multímetro para a escala adequada para a nossa medida fosse 50 mV/μA, a corrente medida seria de:

$$I_{medida} = (100\ mV - 5\ mV)/\ 1M\Omega = 95\ nA.$$

O que implica um erro de 5 % na nossa medida de corrente.
Também é possível medir os valores dessas resistências internas. Os circuitos em cada caso são diferentes e estão descritos a seguir.

Medida resistência interna de um voltímetro.

Montar o seguinte circuito:

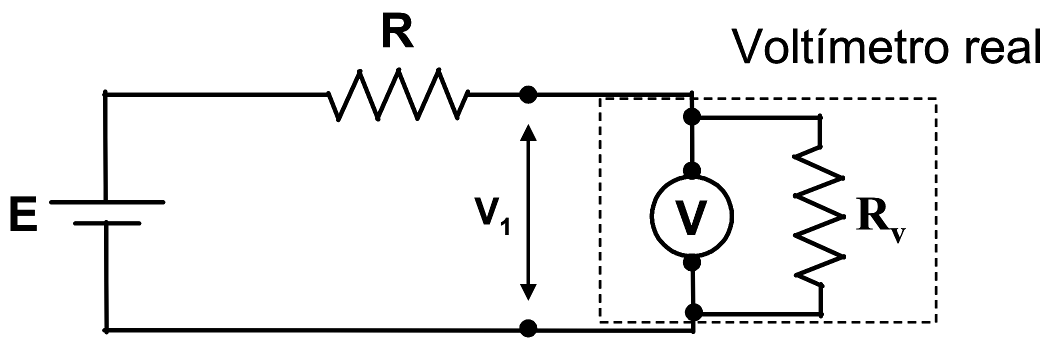

Figura 5: circuito para medida de resistência interna de um voltímetro.

R_V é a resistência interna do voltímetro e é o que devemos obter experimentalmente (a resistência interna da fonte de tensão é considerada desprezível). Do circuito temos que:

$$V_1 = E - IR \Rightarrow E - V_1 = IR\,. \tag{13}$$

Por sua vez a corrente é dada por

$$I = \frac{V_1}{R_V} \Rightarrow E - V_1 = \frac{V_1}{R_V} R\,, \tag{14}$$

de onde

$$R_V = \frac{V_1}{E - V_1} R\,. \tag{15}$$

O valor de E pode ser medido em circuito aberto (por exemplo, com um outro multímetro com alta resistência de entrada). Logo conectamos o resistor R e o voltímetro do qual queremos saber a resistência interna. Dessa forma obtemos o valor V_1. Com esses dados e o valor do resistor R, medido também com o multímetro na função ohmetro, obtemos o valor de R_V a parir da equação 15.
Valor do resistor R: ~ 1 MΩ.

Medida resistência interna de um amperímetro.

Montar o circuito mostrado na Fig. 6. O resistor R esta simplesmente para limitar a corrente no circuito evitando danificar o multímetro utilizado como amperímetro. O valor da resistência interna do voltímetro neste caso é considerado infinito. O valor de R_A e obtido diretamente como:

$$R_A = \frac{V}{I}. \qquad (16)$$

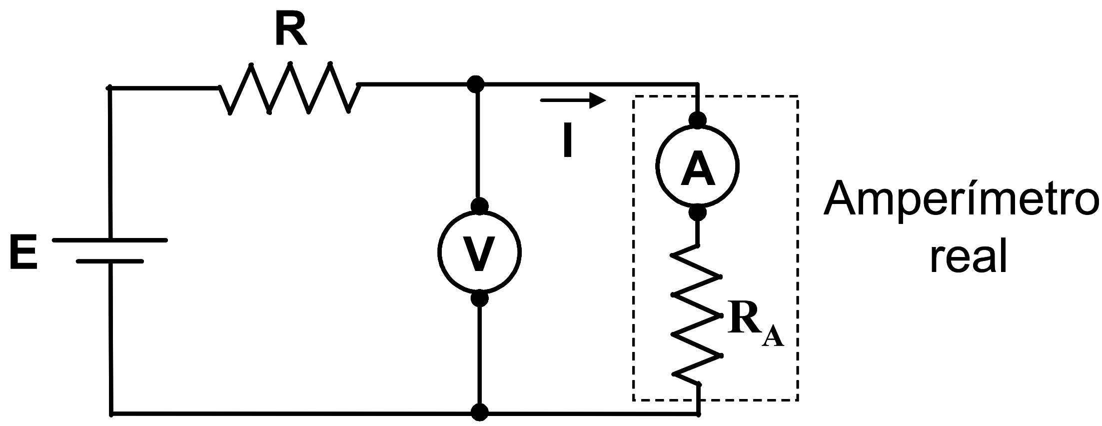

Figura 6: circuito para medida de resistência interna de um amperímetro.

O valor R pode ser ~100 Ω

Medida resistência interna de uma fonte de tensão.

Montar o seguinte circuito:

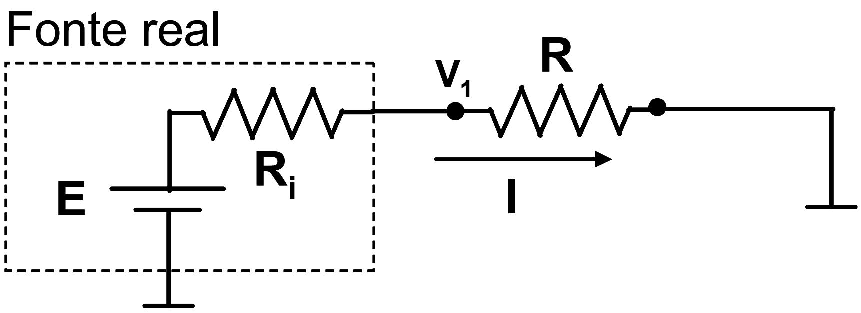

Figura 7: circuito para medida de resistência interna de uma fonte de tensão.

Para obter R_i, tem que medir-se a tensão V_1 a circuito aberto, ou seja, com um voltímetro de alta resistência interna (por exemplo, um multímetro digital). Chamamos essa medida de tensão de V_0. Logo, conectando a resistência R, tem que se medir novamente a tensão V_1. Chamamos essa medida de tensão de V_1. O valor de R_{in} calcula-se como

$$R_i = \frac{V_0 - V_1}{I}, \tag{17}$$

sendo

$$I = \frac{V_1}{R}. \tag{18}$$

Substituindo em (17) fica

$$R_i = \frac{(V_0 - V_1)}{V_1} R \tag{19}$$

O valor R pode ser ~100 Ω

NOTA: a determinação dos erros experimentais nas medidas de tensão e corrente está explicitada no apêndice desta apostila.

Leis de Kirchhoff

A) Lei das correntes (divisor de corrente)

Montar e seguinte circuito:

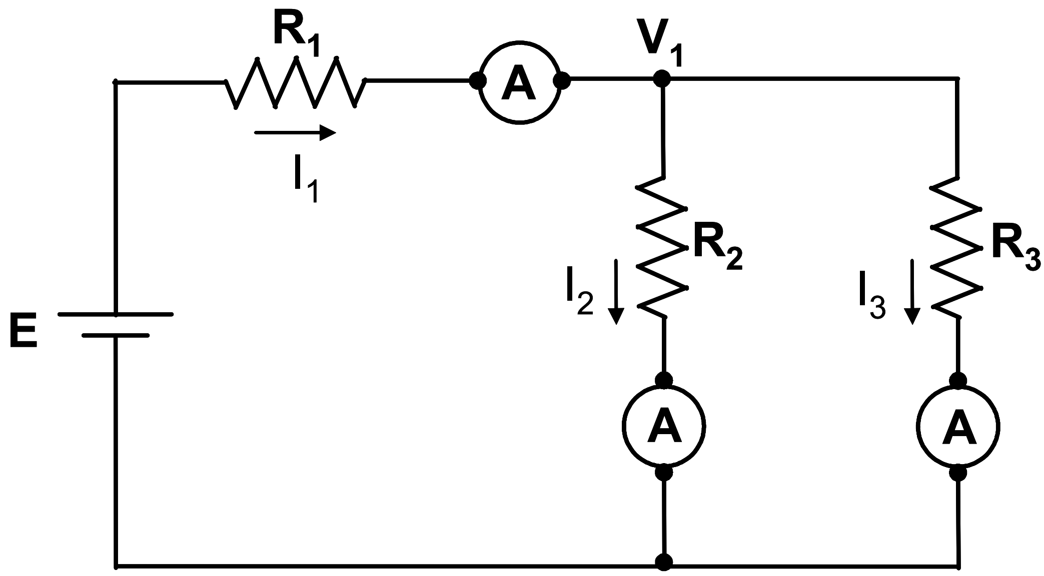

Figura 8: circuito para verificação da lei de Kirchhoff das correntes.

Arme uma tabela com os valores medidos de I_1, I_2 e I_3. Verifique se $I_1 = I_2 + I_3$. Repetir para três conjuntos de valores de I_1, I_2 e I_3. Valores recomendados de resistências e tensão: R_1 100 Ω, $R_2 = 270$ Ω, $R_3 = 150$ Ω, E = 10 – 20 V.
A configuração do circuito da Fig. 8 é chamada de divisor de corrente. Sabendo o valor da corrente I_1 e os valores de R_2 e R_3 é possível calcular os valores de I_2 e I_3. Partindo de

$$I_2 = \frac{V_1}{R_2} \qquad \text{e} \qquad I_3 = \frac{V_1}{R_3}, \tag{20}$$

é possível demonstrar que

$$I_2 = I_1 \frac{R_3}{R_2 + R_3} \qquad \text{e} \qquad I_3 = I_1 \frac{R_2}{R_2 + R_3}. \tag{21}$$

Com o valor medido de I_1 e os valores dos resistores, verificar as expressões (21).

B) Lei das tensões (divisor de tensão)

Montar o seguinte circuito:

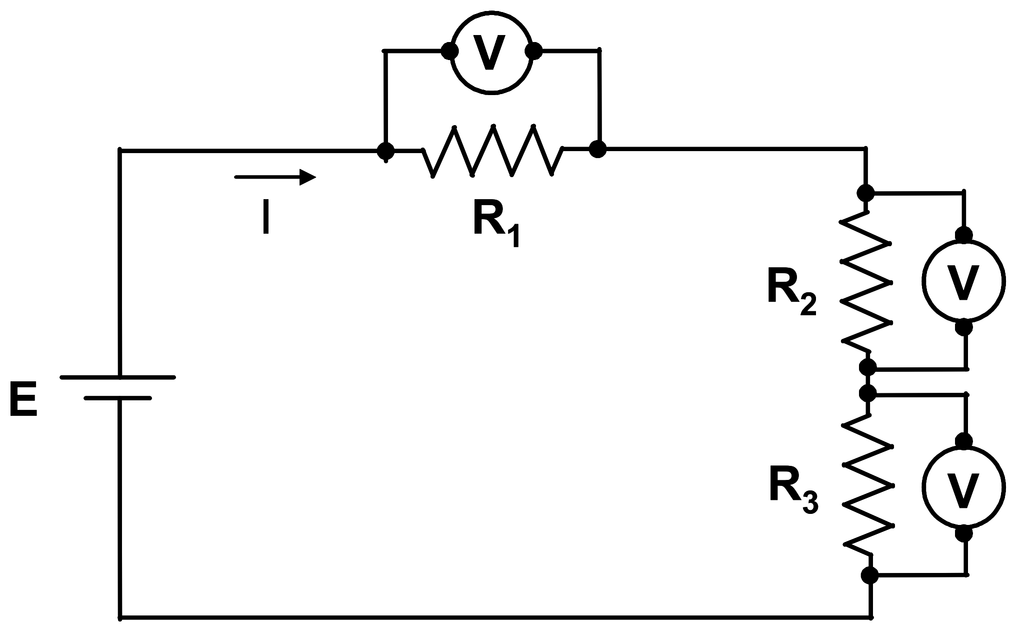

Figura 9: circuito para verificação da lei de Kirchhoff das tensões.

Arme uma tabela com os valores medidos de E, V_{R1}, V_{R2} e V_{R3}. Verifique se $E = V_{R1} + V_{R2} + V_{R3}$. Repetir para três conjuntos de valores de E, V_{R1}, V_{R2} e V_{R3}. Valores recomendados de resistências e tensão: R_1 100 Ω, R_2 = 270 Ω, R_3 = 150 Ω, E = 10 – 20 V. A configuração da Fig. 9 e chamada divisor de tensão. Sabendo que

$$I = \frac{E}{R_1 + R_2 + R_3}, \tag{22}$$

é possível demonstrar que

$$V_{Ri} = R_i \frac{E}{R_1 + R_2 + R_3}, \text{ (i = 1,2,3)} \tag{23}$$

Com o valor medido de E e os valores dos resistores, verificar as expressões (23).

Apêndice: erros

Os multímetros digitais contém dentro conversores analógicos digitais (conversores A/D). Assim, antes de explicitar como obter os erros instrumentais nas medidas de tensão, corrente e resistência, convêm ter uma noção da origem desses erros. Para isso, a seguir, uma breve descrição dos conversores A/D.

Fundamentos conversores analógicos digitais

Os transdutores são dispositivos que transformam variações de magnitude físicas em sinais elétricas. São exemplos de transdutores as termocuplas, os termistores, os cristais piezoelétricos, os *strain gauges* (que servem para medir forças), etc. Os sinais elétricos gerados pelos transdutores são continues. Os sistemas de aquisição de dados são digitais e transformam esses sinais contínuos em uma serie de níveis discretos. Cada um desses níveis discretos é nomeado com um código binário. Na Fig. 10 tem um exemplo para o que seria um conversos A/D de só 3 bits. O número de níveis possível com 3 bits é 8. e os níveis estão representados por códigos binários entre 000 e 111. Assim, se temos um sinal analógico que pode variar entre 0 e 10 V, cada um dos níveis discreto estará separado dos outro por 1.25 V.

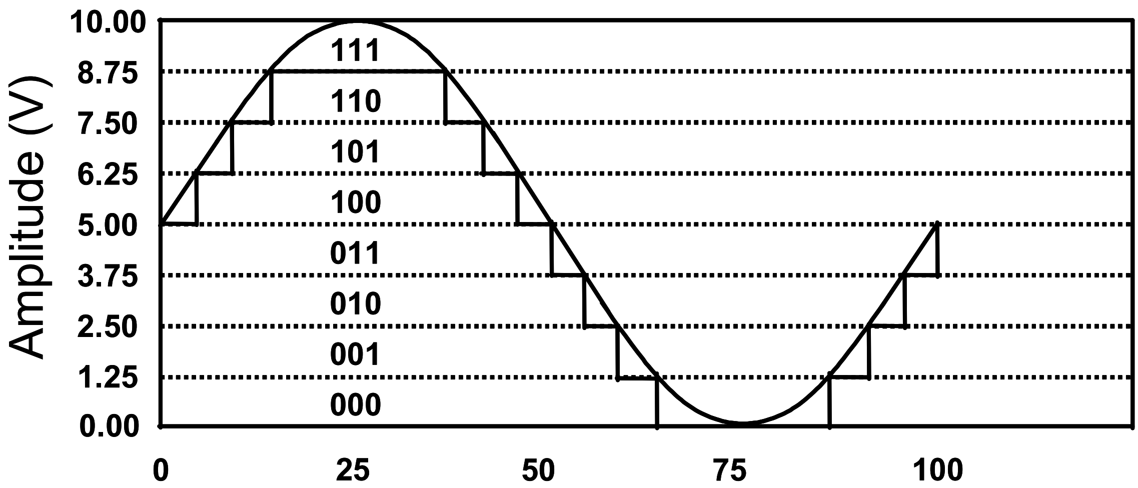

Figura A1: digitalização de um sinal analógico para o caso de uma resolução de três bits. .

O número de bits que um conversor A/D utiliza para representar o sinal analógico é a resolução. Quanto maior é a resolução, maior será o número de níveis discretos em que a faixa de valores de tensão poderá ser dividida, e em conseqüência, será possível detectar um valor de voltagem menor. No exemplo mostrado, e claro que a representação digital não é uma boa representação do sinal analógico. Porém, incrementando a resolução a 16 bits, o número de códigos binários aumenta de 8 para 65536 e então teremos uma representação digital muito mais precisa do sinal analógico.

Um outro parâmetro importante que caracteriza os conversores A/D é a faixa de voltagens que o conversor admite na entrada. Exemplos disso são conversores com uma faixa que pode ir de 0 V até 10 V ou de -10 V até + 10V. Definida a faixa de utilização do conversor, é possível definir a resolução eletricamente. Por exemplo, se o conversor tem faixa de voltagens de 0-10 V e é de 12 bits, então podemos definir a resolução R como:

$$R = \frac{V_{\max} - V_{\min}}{(2^N - 1)\ níveis} = \frac{10\,V - 0\,V}{(4096-1)\ níveis} = \frac{10\,V}{4095\ níveis} =$$

$$= 0.00244\ V / nível = 2.44\ mV / nível\,, \tag{A1}$$

onde N é o número de bits. Como o número de bits nos conversores A/D comercias e alto o suficiente como para que o número 2^N resulte grande, podemos também considerar a resolução R diretamente dividindo por 2^N em lugar de $(2^N – 1)$. A resolução também se pode expressar em porcentagem. No nosso exemplo anterior, a resolução porcentual seria:

$$R_{\%} = 100 \times \frac{0.00244\ V}{10\,V} = 0.0244\ \%\,. \tag{A2}$$

Como para muitas aplicações os sinais analógicos apresentam valores de tensão muitos baixos (< mV), esses sinais precisam serem amplificados para incrementar a resolução e reduzir o nível de ruído. O ganho do amplificador pode ser selecionado entre valores típicos de 1, 2, 5, 10, 20, 50, ou 100. Assim, para um conversor A/D de 12 bits, com faixa de tensões entre 0 V e 10 V e ganho máximo de 100, a largura de um código binário será:

$$\frac{10\,V}{100 \times 2^{12}} = 24.41 \mu V \tag{A3}$$

Então, a resolução teórica de um bit é 24.41 μV.

A velocidade de amostragem é também um parâmetro importante a ter em conta nos conversores A/D. Utilizando uma velocidade de amostragem maior é possível adquirir mais pontos em um tempo determinado, e teremos em consequência uma melhor representação do sinal original. Na Fig. 11(a)-(b) podemos ver exemplificado os casos de uma velocidade de amostragem adequada e uma insuficiente. Claro que se o sinal em questão varia mais rápido que o tempo de amostragem, os erros introduzidos na representação do sinal original serão enormes.

O teorema de Nyquist estabelece como freqüência mínima teórica de amostragem duas vezes a freqüência do sinal a ser digitalizada. Com essa frequência mínima de amostragem é possível, em teoria, recuperar o sinal original.

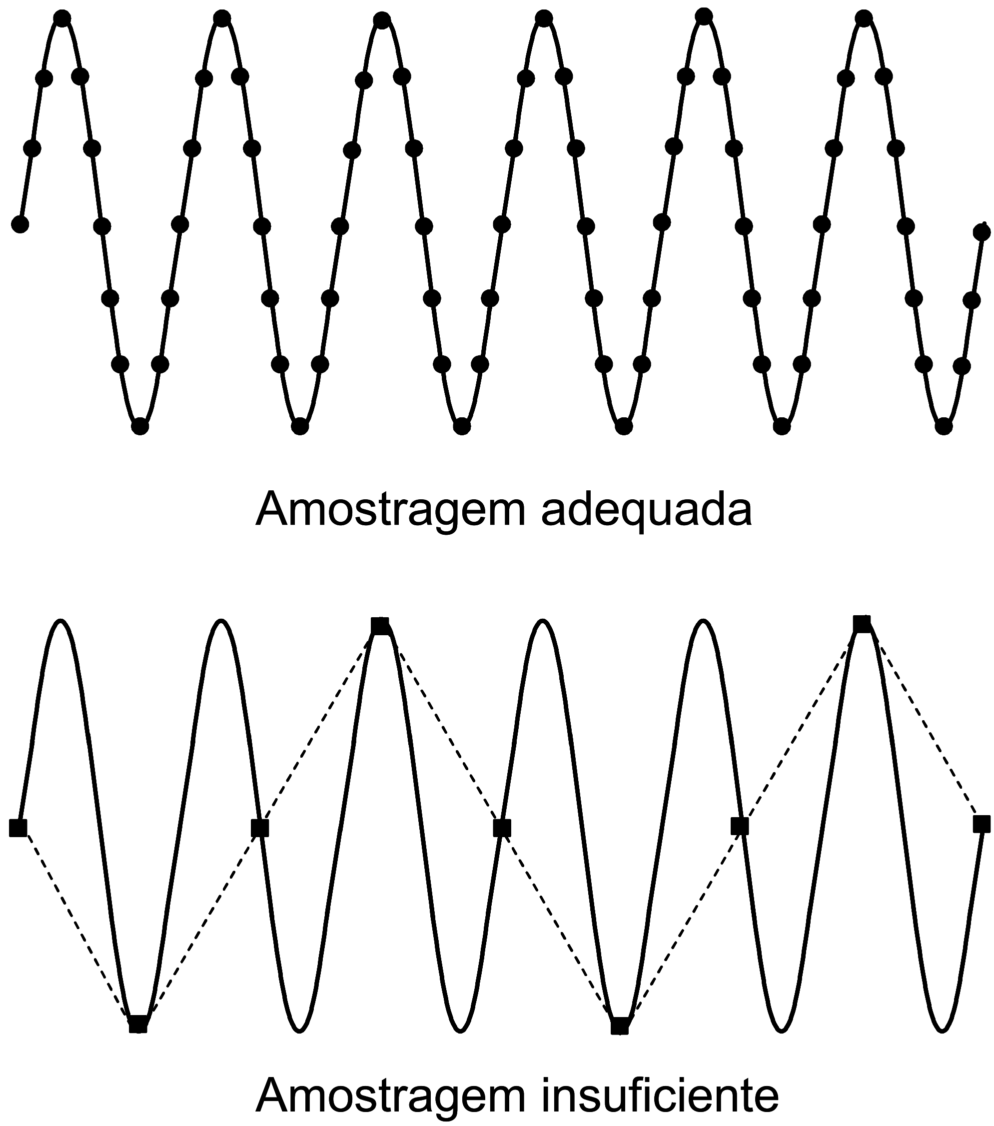

Figura A2: exemplos de velocidade de amostragem (a): suficiente, (b) insuficiente.

Para maiores dados sobre conversores A/D, as seguintes referências:

1. P. Horowitz and W. Hill, The art of electronics, Cambridge University Press, 1989.
2. National Instruments: http://zone.ni.com/devzone/cda/tut/p/id/3216.
3. J. Park and S. Mackay, Data acquisition for instrumentation and control systems, Elsevier, 2003

Erros de medida nos multímetros digitais

A origem da resolução e dos erros nas medidas feitas com instrumentos digitais vem do conversor A/D que possuem dentro. No caso de nosso interesse, ou seja, nos multímetros digitais, a resolução é dada em função do número de dígitos que é possível observar na tela do aparelho. Um exemplo típico é um multímetro com resolução de $3_{1/2}$

dígitos (três e meio dígitos). Nesse caso o multímetro apresenta na tela três dígitos que podem tomar valores entre 0 e 9, e um quarto dígito, que é o mais significativo, que só pode tomar os valores 0 ou 1 (no caso do 0, geralmente o dígito não aparece na tela). O multímetro pode mostrar na tela números até 1.999. Nesse caso se diz que o aparelho tem 1999 contas de resolução (ou 2000 contas de resolução). Um multímetro com $4_{1/2}$ dígitos, pode ter 19999 (ou 20000) contas de resolução. Um multímetro de $3_{3/4}$ (três dígitos e três quartos) pode ter 3200, 4000, ou 6000 contas de resolução. Seria uma extensão dos multímetros de 31/2 dígitos.
Os erros instrumentais associados aos valores medidos com um multímetro digital dependem da escala utilizada, e vêm especificados no manual do instrumento. Por exemplo, nos multímetros digitais da marca Minipa modelos ET-2095/ET-2510 (como os utilizados nos laboratórios da UFABC) o erro na escala de tensão contínua está dado por

$$\pm (0.5\ \% + 2D),$$

e isso significa:

± (0.5 % do valor da leitura + duas vezes o dígito menos significativo da escala).

Se tivermos então uma medida de 2.335 V (na escala até 6.000 V), o erro associado será:

0.5 % de 2.335 V = 0.011675 V,

duas vezes o dígito menos significativo da escala = 2 $_x$ 0.001 V = 0.002 V.

Então temos 0.011675 V + 0.002 V = 0.013675 V

Arredondando temos que a medida com seu erro é:

$$(2.34 \pm 0.01)\ \text{V}$$

O mesmo razoamento se aplica a qualquer outra escala.