Métodos de Integração

Para apreciar o valor dos métodos de integração, vamos calcular algumas integrais elementares.

ex1. $\int_a^b e^{2x}\,dx = \int_a^b \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right)dx$ Pelo teorema fundamental do cálculo,

$$\int_a^b \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right)dx = \frac{1}{2}e^{2x}\Big|_a^b = \frac{1}{2}e^{2b} - \frac{1}{2}e^{2a}.$$

Também podemos escrever a primitiva de e^{2x}, a menos de uma constante:

$$\int e^{2x}\,dx = \frac{1}{2}e^{2x} + K$$

ex2. Encontre a primitiva de $\sin(ax)$

Como $\frac{d}{dx}\left(\frac{-1}{a}\cos ax\right) = \sin ax$, $\int \sin ax\,dx = -\frac{1}{a}\cos ax + K$

ex3. Encontre a primitiva de $\cos^2 x$

Usando $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos^2 x - (1-\cos^2 x) = 2\cos^2 x - 1$,

temos: $\cos^2 x = \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{2}$

Assim, $\int \cos^2 x\,dx = \int\left(\frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{2}\right)dx = \frac{1}{2}\int \cos 2x\,dx + \frac{1}{2}\int dx$

$$= \frac{1}{2}\left(+\frac{1}{2}\sin 2x\right) + \frac{1}{2}x + K$$

$$= \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{x}{2} + K$$

ex4. Calcule $\int \cos 5x \cos 2x\,dx$

Usando $\cos a \cos b = \frac{1}{2}\left(\cos(a+b) + \cos(a-b)\right)$, temos

$$\cos 5x \cos 2x = \frac{1}{2}\left(\cos 7x + \cos 3x\right)$$

Assim, $\int \cos 5x \cos 2x\,dx = \frac{1}{2}\int \cos 7x\,dx + \frac{1}{2}\int \cos 3x\,dx = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{7}\sin 7x\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\sin 3x\right) + K$

$$= \frac{1}{14}\sin 7x + \frac{1}{6}\sin 3x + K$$

ex5. Calcule $\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx)\sin(nx)\,dx$, $m,n \in \mathbb{Z}$

Usando $\sin(a)\sin b = \frac{1}{2}(\cos(a-b) - \cos(a+b))$, temos

$$\sin(mx)\sin(nx) = \frac{1}{2}(\cos(m-n)x - \cos(m+n)x)$$

Logo, se $m = n \neq 0$, $\int \sin(mx)\sin(mx)\,dx = \frac{1}{2}\int(1-\cos 2mx)\,dx$

$$= \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2m}\sin 2mx\right) + k$$

em $[-\pi,\pi]$, $\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 mx\,dx = \left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{4m}\sin 2mx\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{4m}\underbrace{\sin 2m\pi}_{0}$

$$-\frac{1}{2}(-\pi) - \frac{1}{4m}\underbrace{\sin 2m(-\pi)}_{0}$$

$$= \pi$$

Se $m \neq n$, $\int \sin(mx)\sin(nx)\,dx = \frac{1}{2}\int \cos(m-n)x\,dx - \frac{1}{2}\int \cos(m+n)x\,dx$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{(m-n)}\sin(m-n)x - \frac{1}{2}\frac{1}{(m+n)}\sin(m+n)x + k$$

Assim, $\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx)\sin(nx)\,dx = \frac{1}{2(m-n)}\underbrace{\sin(m-n)\pi}_{0} - \frac{1}{2(m+n)}\underbrace{\sin(m+n)\pi}_{0}$

$$-\frac{1}{2(m-n)}\underbrace{\sin-(m-n)\pi}_{0} - \frac{1}{2(m+n)}\underbrace{\sin-(m+n)\pi}_{0} = 0$$

Resumindo, $\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx)\sin(nx)\,dx = \begin{cases} \pi & \text{se } m = n \neq 0 \\ 0 & \text{se } m \neq n \end{cases}$

Ex 6: verifique que $\int x^2\cos x\,dx = x^2\sin x + 2x\cos x - 2\sin x + k$

Método #1: Integração por partes

Para f' e g' contínuas, $\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx$

Ou em termos de primitivas,

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx$$

Esta fórmula é decorrência da regra do produto $(fg)' = f'g + fg'$

Basta escrever $fg' = (fg)' - f'g$

Então $\int f(x)g'(x)\,dx = \int (f(x)g(x))'\,dx - \int f'(x)g(x)\,dx$

Denotando $\int (fg)'(x)\,dx = f(x)g(x)$, temos

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx$$

Ou $\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx$

Quando esse método é útil: se queremos integrar um produto de duas funções, uma função f cuja derivada f' é mais simples que f, e outra função que pode ser encarada como uma derivada g':

Ex 1: $\displaystyle\int \underset{\substack{\uparrow\\ f}}{x}\, \underset{\substack{\uparrow\\ g'}}{\cos x}\, dx = \underset{\substack{\uparrow\\ f}}{x}\, \underset{\substack{\uparrow\\ g}}{\sin x} - \int \underset{\substack{\uparrow\\ f'}}{1} \cdot \underset{\substack{\uparrow\\ g}}{\sin x}\, dx = x\sin x + \cos x + K.$

Podemos aplicar o método sucessivamente:

Ex 2: $\displaystyle\int \underset{\substack{\uparrow\\ f}}{x^2}\, \underset{\substack{\uparrow\\ g'}}{\cos x}\, dx = \underset{\substack{\uparrow\\ f}}{x^2}\, \underset{\substack{\uparrow\\ g}}{\sin x} - \int \underset{\substack{\uparrow\\ f'}}{2x} \cdot \underset{\substack{\uparrow\\ g}}{\sin x}\, dx = x^2\sin x - 2\int x\sin x\, dx$

Para a última integral, integramos por partes novamente:

$$\int \underset{\substack{\uparrow\\ f}}{x}\, \underset{\substack{\uparrow\\ g'}}{\sin x}\, dx = \underset{\substack{\uparrow\\ f}}{x}\, \underset{\substack{\uparrow\\ g}}{(-\cos x)} - \int \underset{\substack{\uparrow\\ f'}}{1} \cdot \underset{\substack{\uparrow\\ g}}{(-\cos x)}\, dx = -x\cos x + \sin x + K$$

Logo, $\displaystyle\int x^2\cos x\, dx = x^2\sin x + 2x\cos x - 2\sin x + K'$

Um truque bastante usado é considerar $g' = 1$:

Ex 3: $\displaystyle\int \log x\, dx = \int \underset{\substack{\uparrow\\ g'}}{1} \cdot \underset{\substack{\uparrow\\ f}}{\log x}\, dx = \underset{\substack{\uparrow\\ g}}{x}\, \underset{\substack{\uparrow\\ f}}{\log x} - \int \underset{\substack{\uparrow\\ f'}}{\frac{1}{x}} \cdot \underset{\substack{\uparrow\\ g}}{x}\, dx = x\log x - x + K$

Ex 4: $\displaystyle\int \arctan x\, dx = \int \underset{\substack{\uparrow\\ g'}}{1} \cdot \underset{\substack{\uparrow\\ f}}{\arctan x}\, dx = \underset{\substack{\uparrow\\ g}}{x}\, \underset{\substack{\uparrow\\ f}}{\arctan x} - \int \underset{\substack{\uparrow\\ f'}}{\frac{1}{1+x^2}} \cdot \underset{\substack{\uparrow\\ g}}{x}\, dx$

$\displaystyle = x\arctan x - \frac{1}{2}\ln|1+x^2| + K$

Outro truque bastante usado é integrar por partes para obter a mesma integral novamente:

Ex 5: $\displaystyle\int \underset{\substack{\uparrow\\ g'}}{\frac{1}{x}}\, \underset{\substack{\uparrow\\ f}}{\log x}\, dx = \log^2 x - \int \underset{\substack{\uparrow\\ f'}}{\frac{1}{x}}\, \underset{\substack{\uparrow\\ g}}{\log x}\, dx$

Assim $\displaystyle 2\int \frac{1}{x}\log x\, dx = \log^2 x \Rightarrow \int \frac{1}{x}\log x\, dx = \frac{1}{2}\log^2 x + k$

Ex 6: $\displaystyle\int \underset{\substack{\uparrow\\ f}}{e^x}\, \underset{\substack{\uparrow\\ g'}}{\sin x}\, dx = \underset{\substack{\uparrow\\ f}}{e^x}\, \underset{\substack{\uparrow\\ g}}{(-\cos x)} - \int \underset{\substack{\uparrow\\ f'}}{e^x}\, \underset{\substack{\uparrow\\ g}}{(-\cos x)}\, dx$

Na última integral repetimos o método:

$$\int \underset{\substack{\uparrow\\ f}}{e^x}\, \underset{\substack{\uparrow\\ g'}}{\cos x}\, dx = \underset{\substack{\uparrow\\ f}}{e^x}\, \underset{\substack{\uparrow\\ g}}{\sin x} - \int \underset{\substack{\uparrow\\ f'}}{e^x}\, \underset{\substack{\uparrow\\ g}}{\sin x}\, dx \quad .$$

Logo,

$$\int e^x \sin x\, dx = -e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin x\, dx \Rightarrow$$

$$\int e^x \sin x\, dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + k$$

Ex 7: Calcule usando o truque acima a integral $\int \sec^3 x\, dx$

dica: separe $\sec^3 x = \sec x \sec^2 x$ e use a identidade $\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$

Usando primitivas conhecidas, podemos integrar mais funções por partes:

Ex 8: $\displaystyle\int \log^2 x\, dx = \int \underset{\substack{\uparrow\\ f}}{\log x} \cdot \underset{\substack{\uparrow\\ g'}}{\log x}\, dx = \underset{\substack{\uparrow\\ f}}{\log x}\, \underset{\substack{\uparrow\\ g}}{(x\log x - x)} - \int \underset{\substack{\uparrow\\ f'}}{\frac{1}{x}}\, \underset{\substack{\uparrow\\ g}}{(x\log x - x)}\, dx$

$$= x\log^2 x - x\log x - \int (\log x - 1)\, dx = x\log^2 x - x\log x - (x\log x - x) + x + k$$

$$= x\log^2 x - 2x\log x + 2x + k$$

Mnemônico: chamando $u = f(x)$, $du = f'(x)dx$ e $v = g(x)$, $dv = g'(x)dx$

$$\int u\, dv = uv - \int v\, du$$

Método #2: Substituição

Sejam f e g' contínuas, então $\int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du = \int_a^b f(g(x))\,g'(x)\,dx$

Se $F(x)$ é primitiva de $f(x)$, $F'(x) = f(x)$, então

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du = F(g(b)) - F(g(a))$$

Por outro lado, $(F\circ g)'(x) = F'(g(x))\,g'(x) = f(g(x))\,g'(x)\,dx$

Assim, $\int_a^b (f\circ g)(x)\,g'(x) = \int_a^b (F\circ g)'(x)\,dx = (F\circ g)(b) - (F\circ g)(a)$

$$= F(g(b)) - F(g(a)) \;/\!/$$

Para usar essa fórmula, precisamos reconhecer que a função a ser integrada é da forma $(f\circ g)(x)\,g'(x)$

Por exemplo:

Ex 1: $$\int_a^b \underbrace{\sin^5 x}_{f(g(x))}\,\underbrace{\cos x}_{g'(x)}\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du = \int_{\sin a}^{\sin b} u^5\,du = \frac{1}{6}u^6\Big|_{\sin a}^{\sin b}$$

$f(g(x))$, $g'(x)$, $f(u) = u^5$, $g(x) = \sin x$

$$= \frac{1}{6}\sin^6 b - \frac{1}{6}\sin^6 a$$

Ex 2: $$\int_a^b \underbrace{x^3}_{4g'(x)}\,\underbrace{\cos x^4}_{f(g(x))}\,dx = \frac{1}{4}\int_a^b (4x^3)\cos x^4\,dx = \frac{1}{4}\int_{a^4}^{b^4} \cos u\,du = \frac{1}{4}\left(\sin b^4 - \sin a^4\right)$$

$4g'(x)$, $f(g(x))$, $f(u) = \cos u$, $g(x) = x^4$

Ex 3: $$\int_a^b \tan x\,dx = \int_a^b \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = -\int_a^b \underbrace{(-\sin x)}_{g'(x)}\cdot\underbrace{\frac{1}{\cos x}}_{f(g(x))}\,dx = -\int_{\cos a}^{\cos b} \frac{1}{u}\,du$$

$g'(x)$, $f(g(x))$, $f(u) = 1/u$, $g(x) = \cos x$

$$= -\log|\cos b| + \log|\cos a|$$

Mnemônico: Faça a substituição $u = g(x)$, $du = g'(x)\,dx$, $a \to g(a)$, $b \to g(b)$:

$$\int_a^b f(g(x))\,g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du$$

Ex 4: $$\int_a^b \frac{1}{x\log x}\,dx = \int_a^b \underbrace{\frac{1}{\log x}}_{1/g(x)}\cdot\underbrace{\frac{1}{x}\,dx}_{g'(x)dx} = \int_{\log a}^{\log b} \frac{1}{u}\,du = \log u\Big|_{\log a}^{\log b} = \log(\log b) - \log(\log a)$$

O método pode ser usado para obter primitivas gerais: a partir do último exemplo,

$$\int_a^b \frac{1}{x\log x}\,dx = \log(\log b) - \log(\log a)$$ é evidente que

$$\int \frac{1}{x\log x}\,dx = \log(\log x) + K$$

Assim, para obter primitivas por substituição fazemos:

(1) $u = g(x)$, $du = g'(x)dx$

(2) encontrar a primitiva $F(u)$

(3) substituir $g(x)$ por u

Ex 5: $\displaystyle\int \frac{x}{1+x^2}\,dx \quad \begin{bmatrix} u = 1+x^2 \\ du = 2x\,dx \end{bmatrix} = \int \frac{1}{u}\frac{du}{2} = \frac{1}{2}\ln u + K = \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + K$

Ex 6: $\displaystyle\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx \quad \begin{bmatrix} u = \sqrt{x} \\ du = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx \end{bmatrix} = \int \sin u\,(2du) = -2\cos u + K = -2\cos\sqrt{x} + K$

Ex 7: $\displaystyle\int \sec^2 x \tan^5 x\,dx \quad \begin{bmatrix} u = \tan x \\ du = \sec^2 x\,dx \end{bmatrix} = \int u^5 du = \frac{1}{6}u^6 + K = \frac{1}{6}\tan^6 x + K$

Ex 8: $\displaystyle\int \cos x\, e^{\sin x}\,dx \quad \begin{bmatrix} u = \sin x \\ du = \cos x\,dx \end{bmatrix} = \int e^u du = e^u + K = e^{\sin x} + K$

Ex 9: $\displaystyle\int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}\,dx = \int \frac{e^x}{\sqrt{1-(e^x)^2}}\,dx \quad \begin{bmatrix} u = e^x \\ du = e^x dx \end{bmatrix} = \int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\,du = \arcsin u = \arcsin e^x + K$

#3: Substituição por mudança de variáveis

Na integral $\int f(g(x))\,dx$ façamos a substituição:

$$u = g(x), \quad x = g^{-1}(u), \quad dx = (g^{-1})'(u)\,du,$$ em que

assumimos que a g é inversível. Então:

$$\int f(g(x))\,dx = \int f(u)\,(g^{-1})'(u)\,du$$

Repare que isso é equivalente a fazer a substituição usual $u = g(x)$, $du = g'(x)dx$:

$$\int f(g(x))\,dx = \int f(g(x))\frac{1}{g'(x)}g'(x)\,dx = \int f(u)\frac{1}{g'(g^{-1}(u))}\,du,$$ pois

$$(g^{-1})'(u) = \frac{1}{g'(g^{-1}(u))}.$$

Ex 1: $\displaystyle\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x+1}}\,dx \left[\begin{array}{l} u=\sqrt{e^x+1} \Leftrightarrow u^2 = e^x+1 \Leftrightarrow x=\log(u^2-1) \\ dx = \frac{2u}{u^2-1}\,du \end{array}\right]$

$$= \int \frac{(u^2-1)^2}{u}\cdot\frac{2u}{u^2-1}\,du = \int 2(u^2-1)\,du = 2\left(\frac{u^3}{3}-u\right) = \frac{2}{3}(e^x+1)^{3/2} - 2\sqrt{e^x+1}$$

Ex 2: $\displaystyle\int \sqrt{1-x^2}\,dx \left[\begin{array}{l} x=\sin u \Leftrightarrow u=\arcsin x \quad (-\pi/2 < u < \pi/2) \\ dx = \cos u\,du \end{array}\right]$

$$= \int \sqrt{1-\sin^2 u}\,\cos u\,du = \int \sqrt{\cos^2 u}\,\cos u\,du \left[\begin{array}{l} \cos u \geq 0 \\ \text{em } [-\pi/2, \pi/2] \end{array}\right]$$

$$= \int \cos^2 u\,du = \int\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2u\right)du = \frac{u}{2}+\frac{1}{4}\sin 2u$$

$$= \frac{1}{2}\arcsin x + \frac{1}{4}\sin(2\arcsin x) + K$$

$$= \frac{1}{2}\arcsin x + \frac{1}{2}\sin(\arcsin x)\cos(\arcsin x) = \frac{1}{2}\arcsin x + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + K$$

Se a integral é definida, precisamos atentar para os limites de integração:

$$\int_a^b f(g(x))\,dx \left[\begin{array}{l} u=g(x) \Leftrightarrow x = g^{-1}(u),\ dx = (g^{-1})'(u)\,du \\ c = g(a),\ d = g(b) \end{array}\right]$$

$$= \int_c^d f(u)\,(g^{-1})'(u)\,du$$

No exemplo anterior, $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \int_{\arcsin 0}^{\arcsin 1} \sqrt{1-\sin^2 u}\,\cos u\,du = \int_0^{\pi/2} \cos^2 u\,du$

$$= \left(\frac{u}{2}+\frac{1}{4}\sin 2u\right)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}$$

Ou então calculamos a primitiva $F(x)$, e usamos o teorema fundamental:

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = F(x)\Big|_0^1 = \left(\frac{1}{2}\arcsin x + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{2}\arcsin 1 = \frac{\pi}{4}.$$

Ex 3: $\displaystyle\int \sqrt{1+x^2}\,dx \left[\begin{array}{l} x=\tan u \Leftrightarrow u=\arctan x \quad \text{para } u \in (-\pi/2, \pi/2) \\ dx = \sec^2 u\,du \end{array}\right]$

$$= \int \sqrt{1+\tan^2 u}\,\sec^2 u\,du = \int \sqrt{\sec^2 u}\,\sec^2 u\,du \left[\begin{array}{l} \sec u > 0 \\ \text{em } (-\pi/2, \pi/2) \end{array}\right] = \int \sec^3 u\,du.$$

Obs: outros exemplos envolvendo raízes podem ser reduzidos a um dos dois casos $\int\sqrt{1-x^2}\,dx$ ou $\int\sqrt{1+x^2}\,dx$:

$$\int\sqrt{a\mp bx^2}\,dx = \sqrt{a}\int\sqrt{1\mp\left(\frac{\sqrt{b}x}{\sqrt{a}}\right)^2}\,dx \quad \left[\begin{array}{l} u=\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}x \\ du=\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}dx \end{array}\right] = \frac{a}{\sqrt{b}}\int\sqrt{1\mp u^2}\,du$$

Nota: integral indefinida e composição de funções.

Definimos a integral indefinida da $f(x)$ como sendo a função

$A(x) = \int_a^x f(t)dt$, para algum $a\in\mathbb{R}$.

Seja $g(x)$ contínua com $Im\,g \subset D_A$. Então pela regra da cadeia

$$(A\circ g)'(x) = A'(g(x))\cdot g'(x)$$

Escrevemos $A(g(x)) = \int_a^{g(x)} f(t)dt$ e

$$(A\circ g)'(x) = f(g(x))\,g'(x), \text{ pois } A'(x) = f(x).$$

Exemplo: calcule $\frac{d}{dx}\int_0^{x^2}\cos t\,dt$.

Nesse caso, $f(x)=\cos x$ e $g(x)=x^2$. Como $\int_0^{x^2}\cos t\,dt = \sin t\Big|_0^{x^2} = \sin x^2$.

Assim, $\frac{d}{dx}\int_0^{x^2}\cos t\,dt = \frac{d}{dx}\sin x^2 = 2x\cos x^2$

Por outro lado, $\int_0^{x^2}\cos t\,dt = A(g(x))$, com $g(x)=x^2$ e $A(x) = \int_0^x\cos t\,dt$.

Então $\frac{d}{dx}\int_0^{x^2}\cos t\,dt = f(g(x))\,g'(x) = \cos x^2 \cdot 2x$

Exemplo: calcule $\frac{d}{dx}\int_1^{\ln x} e^{-t^2}dt$

Aqui só podemos usar a regra da cadeia, já que a primitiva de e^{-x^2} não se expressa em termos de funções elementares.

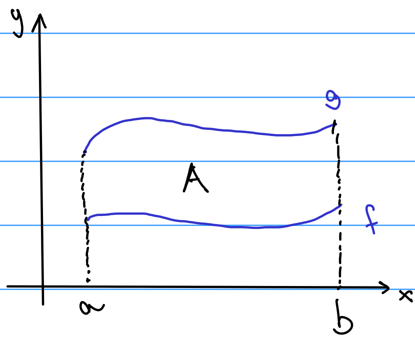
Temos $g(x)=\ln x$, $f(x)=e^{-x^2}$. Então

$$\frac{d}{dx}\int_1^{\ln x} e^{-t^2}dt = f(g(x))\,g'(x) = e^{-(\ln x)^2}\cdot\frac{1}{x}$$

Aplicações: cálculo de área

Podemos usar a noção de integral para obter a área entre o gráfico de duas funções.

Primeiro considere f e g tais que $0 \leq f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in [a,b]$

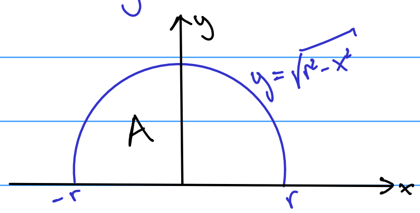


Então a área A compreendida entre os gráficos das funções f e g é

$$A = \int_a^b g - \int_a^b f = \int_a^b (g-f)$$

Ex: Calcule a área do semi-círculo de raio r.

Nesse caso queremos a área compreendida entre os gráficos de $y = \sqrt{r^2-x^2}$ e $y=0$:



$$A = \int_{-r}^{r} \left(\sqrt{r^2-x^2} - 0\right) dx = \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2-x^2}\, dx$$

$$= \int_{-r}^{r} r\sqrt{1-(x/r)^2}\, dx \quad \begin{bmatrix} u = x/r \\ du = 1/r\, dx \end{bmatrix} = r^2 \int_{-1}^{+1} \sqrt{1-u^2}\, du$$

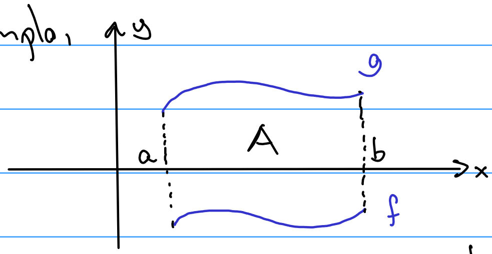
Já calculamos $\int \sqrt{1-u^2}\, du = \frac{1}{2}\arcsin x + \frac{1}{2} x \sqrt{1-x^2} + K$

Então $\int_{-1}^{+1} \sqrt{1-u^2}\, du = \frac{1}{2}\arcsin 1 - \frac{1}{2}\arcsin(-1) = \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}$

Logo, $A = \frac{\pi r^2}{2}$.

Agora suponha que $f(x) \leq g(x)$, mas que f e g não são positivas.

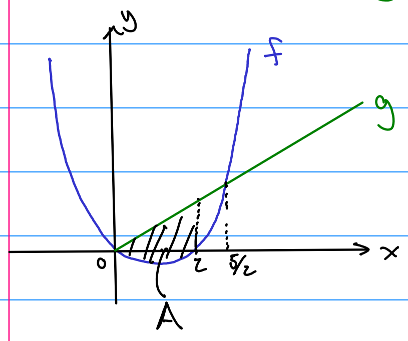
Por exemplo,



Nesse caso, existe uma constante c tal que $0 \leq f(x)+c \leq g(x)+c$ que desloca a figura acima do eixo x, mas não altera a área A. Então,

$$A = \int_a^b (g(x)+c)\,dx - \int_a^b (f(x)+c)\,dx = \int_a^b (g(x)-f(x))\,dx$$

Ex: Calcule a área compreendida pelos gráficos das funções $f(x) = x(x-2)$ e $g(x) = x/2$ em $[0,2]$



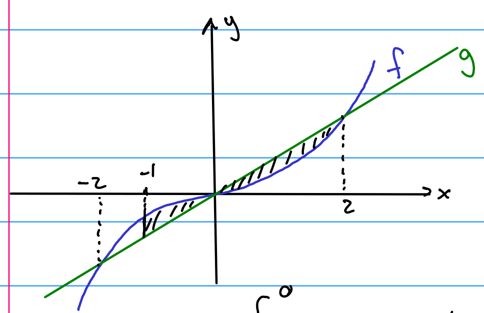
$g(x) \geq f(x)$ em $[0,2]$

$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x(x-2) = x/2 \underset{x\neq 0}{\Rightarrow} x-2 = 1/2 \Leftrightarrow x = 5/2$

$$A = \int_0^2 (g(x) - f(x))\,dx = \int_0^2 \left(\frac{x}{2} - x^2 + 2x\right)dx = \int_0^2 \left(-x^2 + \frac{5}{2}x\right)dx$$

$$= \left(-\frac{x^3}{3} + \frac{5}{4}x^2\right)\Big|_0^2 = -\frac{8}{3} + \frac{20}{4} = \frac{-32+60}{12} = \frac{28}{12} = \frac{7}{3}$$

Ex: Calcule a área A da região S entre os gráficos de $f(x) = x$ e $g(x) = x^3/4$ no intervalo $[-1,2]$.



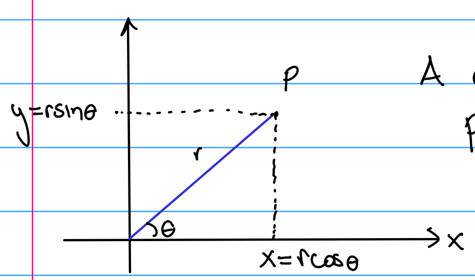
$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x = x^3/4 \overset{x\neq 0}{\Rightarrow} x = \pm 2$

Em $[-1,0]$, temos $f \geq g$, e em $[0,2]$, $g \geq f$. Assim,

$$A = \int_{-1}^0 (f(x) - g(x))\,dx + \int_0^2 (g(x) - f(x))\,dx = \int_{-1}^0 (x - x^3/4)\,dx + \int_0^2 \left(\frac{x^3}{4} - x\right)dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{16}\right]_{-1}^0 + \left[\frac{x^4}{16} - \frac{x^2}{2}\right]_0^2 = -\frac{(-1)^2}{2} + \frac{(-1)^4}{16} + \frac{2^4}{16} - 2 = \frac{23}{16}$$

Coordenadas polares



A relação entre as coordenadas cartesianas (x,y) de P e suas coordenadas polares (r,θ) está dada na figura:

$x(r,\theta) = r\cos\theta$ $\quad r > 0$

$y(r,\theta) = r\sin\theta$ $\quad 0 < \theta < 2\pi$

A relação inversa é dada por

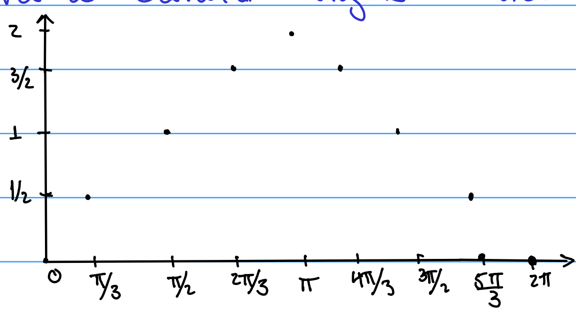
$r(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ $\quad (x,y) \neq (0,0)$

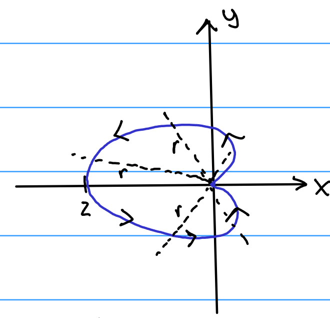
$\theta(x,y) = \arctan \frac{y}{x}$ $\quad y \neq 0$

Gráfico em coordenadas polares: para $f \geq 0$, os pontos (r, θ) que satisfazem $r = f(\theta)$ formam o gráfico da f em coordenadas polares. Por exemplo, a circunferência descrita pela equação $x^2 + y^2 = 9$ tem equação polar $(r\cos\theta)^2 + (r\sin\theta)^2 = r^2 = 9$ ou $r = 3$.

Ex: desenhe o lugar geométrico dos pontos $r = 1 - \cos\theta$

Vamos calcular alguns valores de (r, θ):

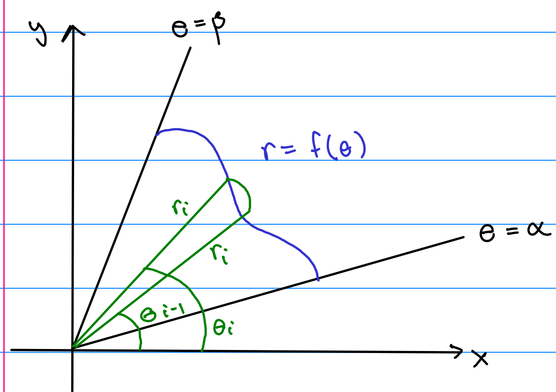




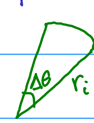
Vemos que medida que θ aumenta, r aumenta até atingir um máximo em $\theta = \pi$, então volta a decrescer até a origem.

Área em coordenadas polares

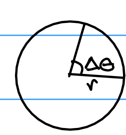
Considere uma região S delimitada por $\alpha < \theta < \beta$ e pela equação polar $r = f(\theta)$.



Façamos uma partição $P = \{\alpha = \theta_0, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n = \beta\}$ de $[\alpha, \beta]$, e calculemos a soma inferior e a soma superior das áreas dos setores circulares



A área de cada setor circular é $\frac{1}{2} r_i^2 \Delta\theta_i$, pois



pela regra de três, a área do setor de abertura $\Delta\theta$ é

πr^2 ...... $2\pi r$

A ..... $\Delta\theta \cdot r$ $\Rightarrow A = \frac{1}{2} r^2 \Delta\theta$

Assim, a área da região S está compreendida entre as duas somas:

$$\underline{S}_n(P, f) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} \underline{r}_i^2 \Delta\theta_i \leq \text{área} S \leq \overline{S}_n(P, f) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} \overline{r}_i^2 \Delta\theta_i$$

Assim, no limite $n \to \infty$ devemos ter área $= \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2 \, d\theta$ por $r = f(\theta)$ integrável.

Exemplo: calcule a área da região delimitada pela circunferência $r = 3$.

Temos área $= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} 9 \, d\theta = \frac{9}{2}\theta \Big|_0^{2\pi} = 9\pi$

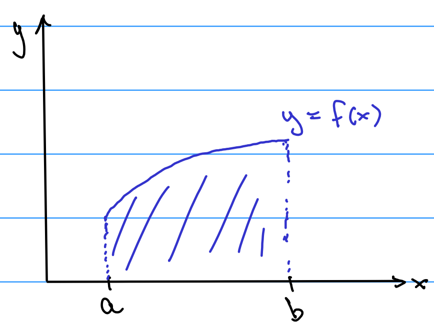
Exemplo: calcule a área da região delimitada pelo cardióide $r = 1 - \cos\theta$.

$$\text{área} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (1-\cos\theta)^2 \, d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (1 - 2\cos\theta + \cos^2\theta)\,d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\theta\Big|_0^{2\pi} - \sin\theta\Big|_0^{2\pi} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\cos 2\theta\right)\Big|_0^{2\pi} = \pi + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}$$

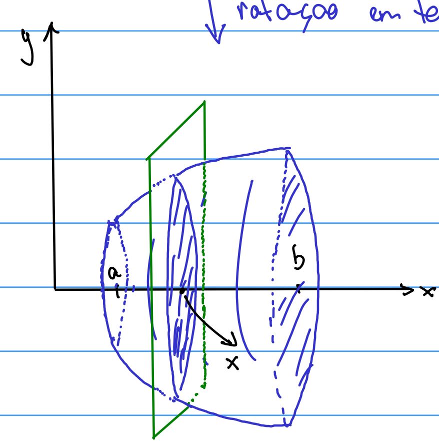
Cálculo de volume de sólidos de revolução

Considere a região do plano delimitada pela pelo gráfico de $f(x)$ em $[a,b]$ e pelas retas $x = a$ e $x = b$:

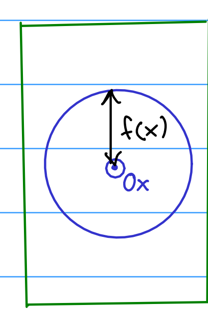


Se girarmos essa região em torno do eixo x, obtemos um sólido cuja seção transversal em x tem área: $\pi f^2(x)$

↓ rotação em torno de Ox



seção transversal →

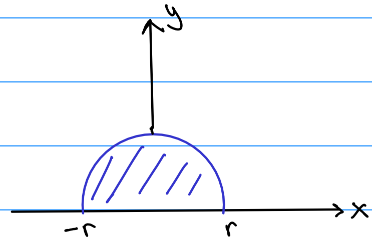


Vamos considerar o sólido de revolução composto de muitas fatias finas de espessura dx e área $A(x) = \pi f^2(x)$. Ao "somarmos" sobre todas as fatias em $[a,b]$, obtemos o volume

$$V = \int_a^b A(x)\,dx = \pi\int_a^b f^2(x)\,dx$$

Ex. Calcule o volume do sólido obtido pela rotação em torno do eixo x do conjunto de todos os (x,y) tais que $x^2+y^2 \leq r^2$, $y \geq 0$.

Consideremos a figura abaixo:

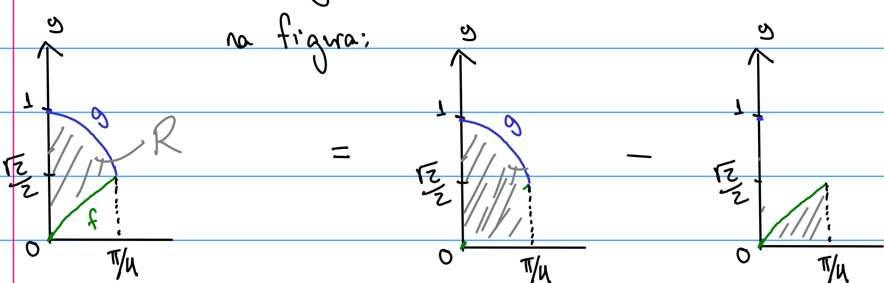


A figura é delimitada pelo gráfico da função $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$, $x \in [-r, r]$.
Então o volume do sólido de revolução obtido é:

$$V = \pi\int_{-r}^{r} f^2(x)\,dx = \pi\int_{-r}^{r} (r^2 - x^2)\,dx = \pi\left(r^2x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-r}^{r} = \pi\left(2r^3 - 2\frac{r^3}{3}\right) = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Ex 2: Calcule a área do sólido de revolução obtido pela rotação da figura compreendida entre os gráficos $f(x) = \sin x$ e $g(x) = \cos x$ em $[0, \pi/4]$.

Nesse caso a região é R na figura:



Podemos calcular o volume do sólido de rotação subtraindo os volumes dos sólidos gerados individualmente por g e f:

$$V = \pi\int_0^{\pi/4} (g^2(x) - f^2(x))\,dx = \pi\int_0^{\pi/4} \cos^2 x\,dx - \pi\int_0^{\pi/4} \sin^2 x\,dx$$

$$= \pi\int_0^{\pi/4}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x\right)dx - \pi\int_0^{\pi/4}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x\right)dx = \pi\int_0^{\pi/4}\cos 2x\,dx = \frac{\pi}{2}\sin 2x\Big|_0^{\pi/4}$$

$$= \frac{\pi}{2} \;//.$$

Trabalho de uma força I

Considere o movimento unidimensional de uma partícula de massa m sujeita a uma força de intensidade K na direção de seu movimento. Então o trabalho τ da força no deslocamento da partícula de a a b é:

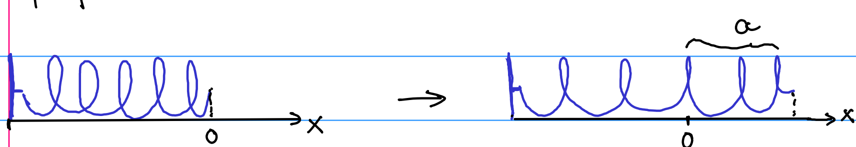
$$\tau = K\Delta x = K(b-a)$$

Agora suponha que a força é variável, $f = f(x)$. Tomemos uma partição do intervalo $[a,b]$ $P = \{a = x_0, x_1, \dots, x_n = b\}$ e consideremos que a força é constante em cada subintervalo $[x_i, x_{i+1}]$. Assim, para $\bar{x}_i \in [x_i, x_{i-1}]$ o trabalho infinitesimal da força f é $f(\bar{x}_i)\Delta x_i$. Nessa soma de Riemann, o trabalho total é $\tau_n = \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\Delta x_i$. No limite $n \to \infty$, o trabalho de f será dado pela expressão $\tau = \int_a^b f(x)\,dx$. Se a força f age contra o movimento $(f<0)$, então naturalmente $\tau < 0$. Para uma força constante, $f(x) = K$, recuperamos o resultado anterior:

$$\tau = \int_a^b K\,dx = K(b-a)$$

Ex 1: trabalho necessário para esticar uma mola

A lei de Hooke estabelece que a força necessária para esticar uma mola de sua posição de equilíbrio $x=0$ até uma distância x é proporcional a x, $f(x) = Kx$, $K>0$:

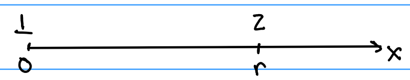


O trabalho necessário para esticar a mola de uma distância a é

$$\tau = \int_0^a Kx\,dx = \frac{Kx^2}{2}\Big|_0^a = \frac{1}{2}Ka^2$$

Ex 2: a atração mútua entre duas massas

Considere duas partículas massivas que se atraem mutuamente.
De acordo com a lei de gravitação universal de Newton, a força de atração é inversamente proporcional ao quadrado da distância entre as massas.
Vamos calcular o trabalho da força de atração quando a segunda partícula se move ao longo da reta que a une à primeira.
Considere que a primeira partícula está em repouso na origem, e a segunda está a uma distância r da origem:



A força de atração é dada pela expressão $f(r) = -\mu \frac{1}{r^2}$, $\mu > 0$.

O trabalho dessa força quando a partícula 2 se move da posição r para $r_1 < r$ é positivo e vale:

$$\tau_{r\to r_1} = -\mu \int_r^{r_1} \frac{ds}{s^2} = \mu\, s^{-1}\Big|_r^{r_1} = \mu\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r}\right) > 0$$

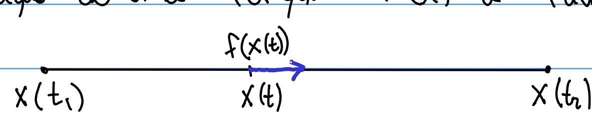
Se uma força contrária age para afastar a partícula 2 da posição r até a posição $r_1 > r$, o trabalho da força de atração continua sendo dado por $\tau_{r\to r_1}$, mas agora $\tau_{r\to r_1} < 0$.
O trabalho τ da força contrária tem o mesmo módulo, mas sinal diferente,

$$\tau = \mu\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1}\right) > 0$$

À medida que a partícula 2 se afasta mais e mais, $\frac{1}{r_1} \xrightarrow{r_1\to\infty} 0$, então o trabalho de separar as duas partículas completamente é $\phi(r) = \frac{\mu}{r}$, a função potencial.

Ex3.

Considere uma partícula material de massa m em uma trajetória $x(t)$ unidimensional, que começa em $x_1 = x(t_1)$ e termina em $x_2 = x(t_2)$, sob ação de uma força $f(x)$ a favor de seu movimento.



O trabalho dessa força é $\tau = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx$. Fazendo a substituição $\begin{bmatrix} x = x(t) \\ dx = \frac{dx}{dt}\,dt \end{bmatrix}$ obtemos:

$$\tau = \int_{t_1}^{t_2} f(x(t))\,\frac{dx}{dt}\,dt$$

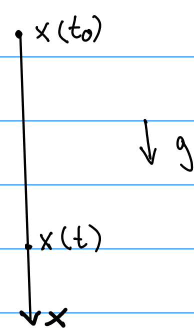
A segunda lei de Newton dá $f(x(t)) = m\,\frac{dv(t)}{dt}$, onde $v(t) = \frac{dx(t)}{dt}$.
Substituindo na expressão do trabalho, temos

$$\tau = \int_{t_1}^{t_2} m\,\frac{dv(t)}{dt}\cdot v(t)\,dt$$

Notando que $\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(v^2(t)\right) = v(t)\,\frac{dv}{dt}(t)$, ficamos com $\tau = \frac{m}{2}\int_{t_1}^{t_2}\frac{d}{dt}\left(v^2(t)\right)dt$

Pelo teorema fundamental do cálculo, $\tau = \frac{m}{2}\left(v^2(t_2) - v^2(t_1)\right) = \Delta E_c$.
Assim, o trabalho da força f quando a partícula se move de x_1 a x_2 é igual à variação de energia cinética da partícula entre esses pontos.

Exemplo: partícula em queda livre



Considere uma partícula em queda livre.
A equação de movimento para essa partícula é $\ddot{x} = g$
(obs.: a notação $\dot{x}(t) \equiv x'(t)$ é bastante usada em física).
Dessa equação segue que $\dot{x}(t) = g(t-t_0)+v_0$, em que v_0 é uma constante de integração:

$$\int_{t_0}^{t}\ddot{x}(u)\,du = \dot{x}(t) - \dot{x}(t_0) = \int_{t_0}^{t} g\,du = gt - gt_0$$

Assim, $\dot{x}(t) = g(t-t_0) + \dot{x}(t_0)$, isto é, $v_0 = \dot{x}(t_0)$ é a velocidade inicial.
Para simplificar, façamos $t_0 = 0$:

$$\dot{x}(t) = gt + v_0$$

Realizando mais uma integração:

$$\int_{t_0}^{t}\dot{x}(u)\,du = x(t) - x(t_0) = \int_{t_0}^{t}(gu+v_0)\,du = \frac{1}{2}gt^2 + v_0 t$$, isto é,

$x(t) = \frac{1}{2} g t^2 + v_0 t + x_0$, onde $x_0 = x(t_0)$ é a posição inicial.

Agora vamos supor que a partícula sofre a ação da resistência do ar, com força $f(\dot{x}) = -r\dot{x}$, ie, proporcional à velocidade e oposta ao movimento, $r>0$.

A equação de movimento é $m\ddot{x} = mg - r\dot{x}$

Façamos $\dot{x} = u(t)$. Então $m\dot{u} = mg - ru$. Como $t'(u) = \frac{1}{u'(t(u))}$, ou na notação de Leibnitz, $\frac{dt}{du} = \frac{1}{du/dt}$, temos

$$\frac{1}{m}\frac{dt}{du} = \frac{1}{mg-ru} \iff \frac{dt}{du} = \frac{m}{mg-ru} = \frac{1}{g-\frac{r}{m}u}$$

. Integrando, temos

$$\int_{u_0}^{u} \frac{dt}{dv} dv = t(u) - t(u_0) = \int_{u_0}^{u} \frac{1}{g-\frac{r}{m}v} dv = -\frac{m}{r}\log\left(g-\frac{r}{m}v\right)\Big|_{u_0}^{u}$$

$$= -\frac{m}{r}\log\left(g-\frac{r}{m}u\right) + \frac{m}{r}\log\left(g-\frac{r}{m}u_0\right)$$

Supondo que a velocidade inicial é nula: $v_0 = \dot{x}(t_0) = u_0 = 0$, temos:

$$t(u) = -\frac{m}{r}\log\left(1-\frac{r}{mg}u\right) + t_0$$

Resolvendo para u, temos: $\log\left(1-\frac{r}{mg}u\right) = -\frac{r}{m}(t-t_0)$

$$\iff 1-\frac{r}{mg}u = e^{-r/m(t-t_0)} \iff u = -\frac{mg}{r}\left(e^{-r/m(t-t_0)} - 1\right)$$

Nesse exemplo, a velocidade não cresce indefinidamente, mas atinge um valor máximo:

$$\lim_{t\to\infty} u(t) = \frac{mg}{r}$$

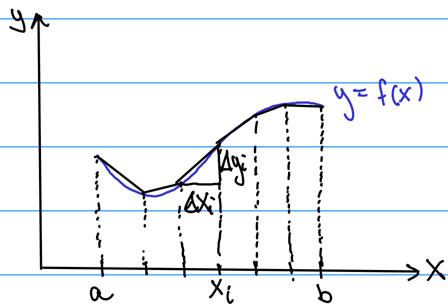
Lembrando que $\dot{x} = u(t)$, e fazendo mais uma integração,

$$\int_{t_0}^{t} \dot{x}(s)ds = x(t) - x_0 = -\frac{mg}{r}\int_{t_0}^{t}\left(e^{-r/m(s-t_0)} - 1\right)ds = +\frac{m^2g}{r^2}e^{-r/m(s-t_0)} + \frac{mgs}{r}\Big|_{t_0}^{t}$$

$$\therefore x(t) = \frac{m^2g}{r^2}\left(e^{-r/m(t-t_0)} - 1\right) + \frac{mg}{r}(t-t_0) + x_0$$

Aplicação de integral: comprimento de arco

Considere a função contínua $y = f(x)$ em $[a,b]$ e derivável em (a,b).
Seja $P = \{a = x_0, x_1, \dots, x_n = b\}$ uma partição de $[a,b]$ em n intervalos $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, \dots, n-1$:



Na curva $y = f(x)$ inscrevemos o polígono cujos vértices são os pontos $(x_i, f(x_i))$. O comprimento total desse polígono pode ser calculado a partir do teorema de Pitágoras:

$$\sum_{i=1}^{n-1} \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2} = \sum_{i=1}^{n-1} \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2}\, \Delta x_i ,$$

onde $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, $\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$, $y_i = f(x_i)$.

Isto é, $\dfrac{\Delta y_i}{\Delta x_i} = \dfrac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}$. Pelo teorema do valor médio para f em cada intervalo $[x_i, x_{i+1}]$, existe $\xi_i \in (x_i, x_{i+1})$ tal que

$f'(\xi_i) = \dfrac{\Delta y_i}{\Delta x_i}$. Para $f'(x)$ contínua, o limite em que $n \to \infty$ e o comprimento do maior subintervalo $\max \Delta x_i \to 0$, obtemos

$$\sum_{i=1}^{n-1} \sqrt{1 + (f'(x_i))^2}\, \Delta x_i \xrightarrow[n \to \infty]{\max \Delta x_i \to 0} \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(\xi_i)}\, dx$$

Assim, o comprimento de toda curva da pelo gráfico de uma função $f(x)$ de derivada contínua é dada pela fórmula

$$s(a,b) = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx$$

A integral indefinida $s(x) = \int_a^x \sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx$ é o comprimento de arco da curva $y = f(x)$ do ponto a ao ponto x. Logo,

$$s'(x) = \sqrt{1 + f'^2(x)} > 0 .$$

Exemplo: Calcule o comprimento da catenária $y = \cosh x$ de $\underline{a}$ a $\underline{b}$.

$$s(a,b) = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2(x)}\, dx = \int_a^b \sqrt{1 + \sinh^2 x}\, dx = \int_a^b \cosh x\, dx = \sinh b - \sinh a,$$

em que usamos $\cosh^2 x = 1 + \sinh^2 x$.

Exemplo: calcule o comprimento de arco da parábola $y = \frac{1}{2}x^2$ do ponto a ao ponto $b > a$.

$$s(a,b) = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx = \int_a^b \sqrt{1 + x^2}\, dx \begin{bmatrix} x = \sinh u \\ dx = \cosh u\, du \end{bmatrix} = \int_{\operatorname{arcsinh} a}^{\operatorname{arcsinh} b} \cosh^2 u\, du$$

Como $\cosh^2 x = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{e^{2x} + e^{-2x}}{2} + 1\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cosh 2x$, temos

$$s(a,b) = \frac{1}{2}u\Big|_{\operatorname{arcsinh} a}^{\operatorname{arcsinh} b} + \frac{1}{4}\sinh 2u\Big|_{\operatorname{arcsinh} a}^{\operatorname{arcsinh} b} = \frac{1}{2}(\operatorname{arcsinh} b - \operatorname{arcsinh} a)$$

$$+ \frac{1}{4}\left[\sinh(2\operatorname{arcsinh} b) - \sinh(2\operatorname{arcsinh} a)\right]$$

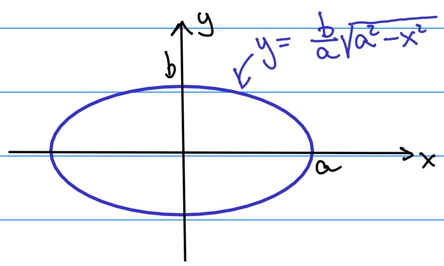
Como $\sinh 2x = \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2} = 2\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right) = 2\sinh x \cosh x$, temos:

$$s(a,b) = \frac{1}{2}(\operatorname{arcsinh} b - \operatorname{arcsinh} a) + \frac{1}{2}b\sqrt{1+b^2} - \frac{1}{2}a\sqrt{1+a^2},$$

onde usamos novamente $\cosh^2 x = 1 + \sinh^2 x$.

Exemplo: calcule o comprimento da curva definida pelos pontos

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{e} \quad y \geq 0.$$



Essa curva é a parte superior da elipse da figura.