Aula 1 (1/Fev)

Na aula hoje:

* Apresentação disciplina.
* Revisão Mecânica Clássica.

Capítulo 1: Tópicos de Mecânica Clássica

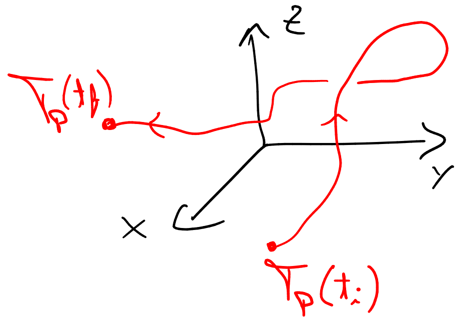
Referências:

* Cohen-Tannoudji, apêndice III.
* Goldstein, "Classical Mechanics".

1.1 Mecânica Newtoniana

A trajectória de um corpo clássico

$$T_p(t) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$t \longrightarrow \vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$$



Leis Newton

1. Inércia: $\vec{F} = \vec{0}$ mantém $\vec{v}(t)$
2. $\vec{F} = \dfrac{d\vec{p}}{dt} = m \dfrac{d\vec{v}}{dt} = m \dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2}$
3. Acção - reacção

Notação:

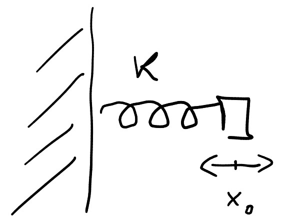
$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}$$

$$\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt} = \ddot{\vec{r}}$$

Dados condições iniciais, 2ª lei Newton determina a posição e velocidade do corpo em qualquer t futuro/passado.

$\rightarrow$ **Determinismo**

Exemplo: Oscilador Harmônico 1D

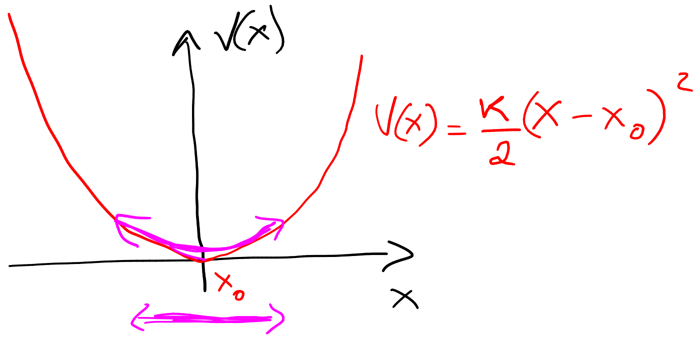


Corpo vibra da esquerda para a direita.

$$\vec{F} = -k\Delta\vec{r} \Rightarrow F = -k \underbrace{\Delta x}_{= x - x_0}$$

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} V(\vec{r}) \Rightarrow F = -\frac{\partial}{\partial x} V(x)$$

$$F = -\frac{\partial}{\partial x} V(x)$$
$$= -k(x - x_0) = -k\Delta x$$



Eq. movimento:

$$F = m\ddot{x} \Leftrightarrow -k(x - x_0) = m\ddot{x}$$

$$\Leftrightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m} x = 0 \qquad x = x(t)$$

$$\Leftrightarrow \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{k}{m} x = 0$$

Ansatz,

$$x(t) = A.\cos(\alpha.t+\beta)$$

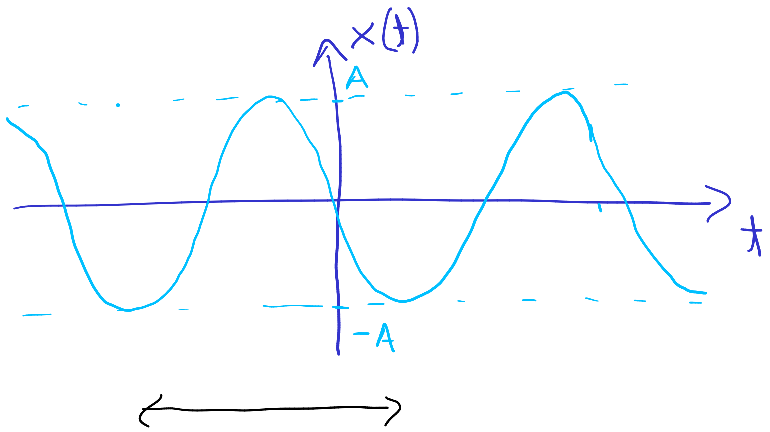
$$\Rightarrow -\alpha^2 \cancel{A}.\cancel{\cos(\alpha t+\beta)} + \frac{k}{m}\cancel{A}.\cancel{\cos(\alpha t+\beta)} = 0$$

$$\Leftrightarrow -\alpha^2 + \frac{k}{m} = 0 \Leftrightarrow \alpha = \pm\sqrt{\frac{k}{m}} \equiv \omega$$

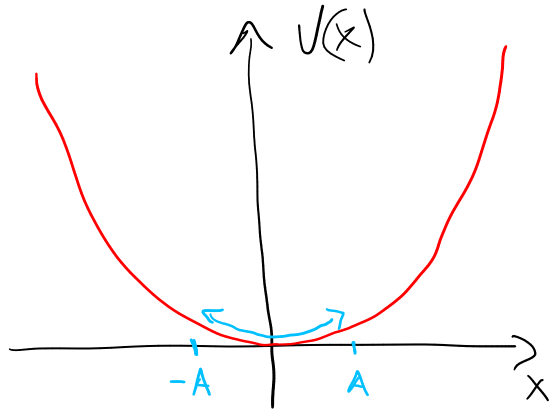
frequência

$$x(t) = A.\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}.t + \beta\right)$$

amplitude   fase inicial



$2\pi/\sqrt{k/m}$



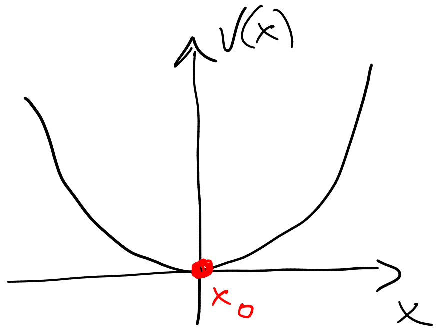
<u>Nota</u>: A, β determinados pelas condições iniciais.

1.2 Mecânica Lagrangeana

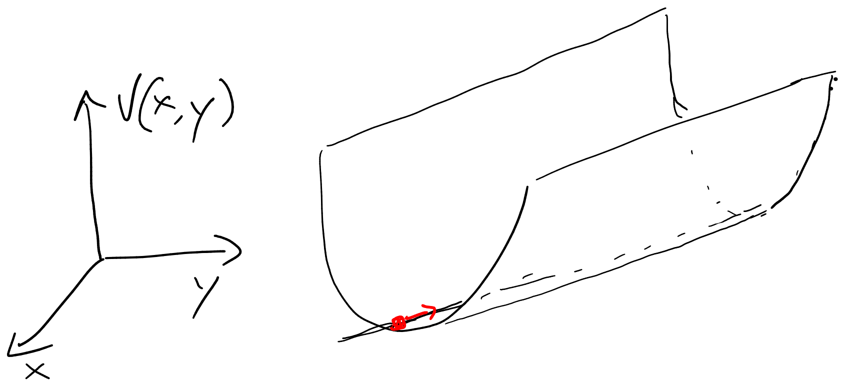
Para um dado potencial ($\Rightarrow$ força) podemos encontrar <u>algumas</u> trajectórias da partícula rapidamente.

↳ trajectórias constantes correspondendo a extremos de V

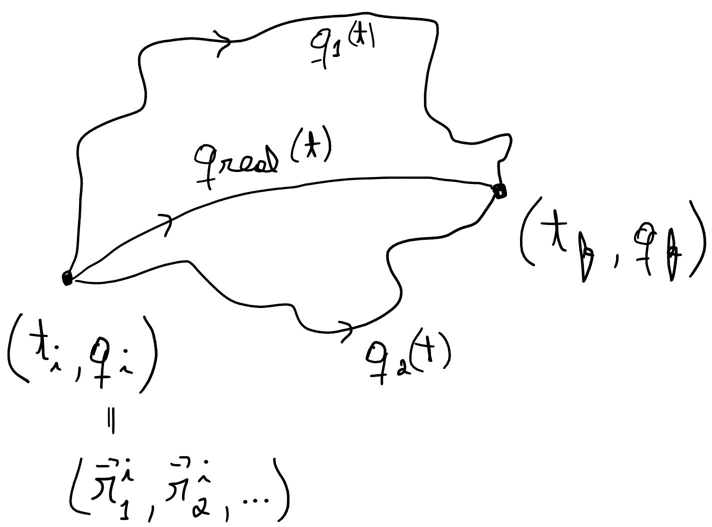
$$\Rightarrow -\vec{\nabla} V = 0 = \vec{F}$$



$$\frac{dV}{dx} = 0 \Rightarrow x = x_0$$



Haverá alguma quantidade escalar que quando extremizada nos dará **todas** as trajectórias reais?



Funcional:

↳ máquina que recebe funções e devolve números

$$S[\dots]_{t_i}^{t_f} : \mathcal{F} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$q(t) \longrightarrow S[q(t)]_{t_i}^{t_f}$$

1.2.1) Princípio da "Acção Mínima" Hamilton

Num sist. físico com $\mathcal{L}(q, \dot{q}, t)$, as trajectórias reais, $q_{real}(t)$, extremizam o funcional acção

$$\hookrightarrow S[q(t)]_{t_i}^{t_f} = \int_{t_i}^{t_f} dt \, \mathcal{L}(q, \dot{q}, t)$$

onde o lagrangeano é dado pela diferença da E_{cin} e E_{pot},

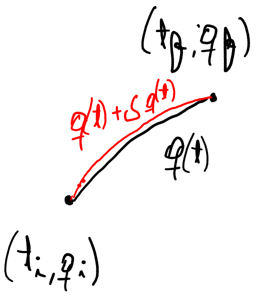
$$\mathcal{L}(q, \dot{q}, t) = T(\dot{q}) - V(q, t)$$

1.2.2) Eqs de Euler-Lagrange

Princípio acção mínima $\Rightarrow$ eqs do movimento equivalentes às de Newton.

Requerendo que variação de S face a variação da trajectória seja zero, isto é, $\delta S = 0$,

$$\Rightarrow \delta S = S\left[q(t) + \delta q(t)\right]_{t_i}^{t_f} - S\left[q(t)\right]_{t_i}^{t_f}$$



$$= \int_{t_i}^{t_f} dt\, \mathcal{L}(q+\delta q, \dot{q}+\delta\dot{q}, t) - \int_{t_i}^{t_f} dt\, \mathcal{L}(q, \dot{q}, t)$$

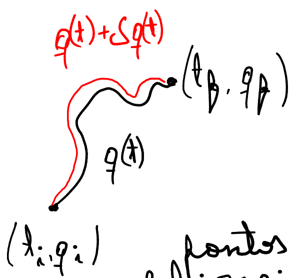
$$= \int_{t_i}^{t_f} dt \left[\cancel{\mathcal{L}(q, \dot{q}, t)} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q}\delta q + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}\delta \dot{q}\right] - \cancel{\int dt\, \mathcal{L}}$$

$$= \int_{t_i}^{t_f} dt \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q}\delta q + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}\delta \dot{q}\right]$$

notando que $\delta \dot{q} = \delta\left[\frac{dq}{dt}\right] = \frac{d}{dt}\left[\delta q\right]$ então

$$\delta S = \int_{t_i}^{t_f} dt \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q}\delta q + \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}}_{u}\underbrace{\frac{d}{dt}(\delta q)}_{v'}\right]$$

$$\int u v'\, dt = [uv]_{t_i}^{t_f} - \int_{t_i}^{t_f} u' v$$



$$= \cancel{\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}\delta q\right]_{t_i}^{t_f}} + \int_{t_i}^{t_f} dt \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q}\delta q - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}\right)\delta q\right]$$

pontos iniciais e finais não variam $\to 0$

$$= \int_{t_i}^{t_f} dt \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}\right) \right] \delta q$$

Como queremos $\delta S = 0$

$$\boxed{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}\right) = 0}$$

$\hookrightarrow$ eqs de Euler-Lagrange

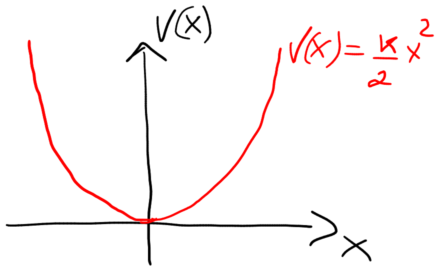
$q = (x_1, x_2, x_3, \dots) \rightarrow$ N partículas

$\dot{q} = (\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots)$

$$\Longrightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} = 0$$

, sistema de N equações

Exemplo: Oscilador Harmônico 1D



$$\mathcal{L}(x, \dot{x}, t) = \frac{m}{2}\dot{x}^2 - \frac{k}{2}x^2$$

que usando Euler-Lagrange

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow -kx - \frac{d}{dt}(m\dot{x}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

$\longrightarrow$ Mesma eq. movimento que foi obtida com Newton.

□

1.2.3) Teorema de Noether

Qual o efeito de simetrias do $\mathcal{L}(q,\dot{q},t)$?

T. Noether: Se o $\mathcal{L}(q,\dot{q},t)$ é invariante pela acção da transformação

$$\vec{q}(t) \longrightarrow \vec{q}(t)+\delta\vec{q}(t)$$

ou seja, se possui simetria na direcção $\delta\vec{q}$, então existe quantidade conservada no movimento associada a esta simetria.

Demonstração: Se $\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial y}=0$ então de E-L

$\mathcal{L}(x,\ z,\dot{x},\dot{y},\dot{z},t)$

$$0-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{y}}\right)=0$$

$$\Longrightarrow \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{y}}=\text{constante no tempo}$$

$\square$

1.3 Mecânica Hamiltoniana

As eqçs Newton e eqçs Lagrange são de 2ª ordem que são mais difíceis de resolver.

Existirá sistema de (2N) eqçs dif. de 1ª ordem que resultem em eqçs movimento equivalentes?

No formalismo Lagrange as variáveis independentes são $(q, \dot{q}, t)$,

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}, t)$$

As eqçs movimento serão 2ª ordem em t devido ao termo $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}\right)$. Se usarmos o momento canônico conjugado, $p \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}$, expressando o problema em termos de novo conjunto variáveis indep. (q, p, t) iremos obter eqçs dif. de 1ª ordem.

1.3.1) Equações de Hamilton

Variáveis independentes são agora (q, p, t) teremos que exprimir

$$\dot{q} = \dot{q}(q, p, t)$$

e então o lagrangeano ficará

$$\mathcal{L}(q,\dot{q},t) \longrightarrow \mathcal{L}(q,\dot{q}(q,p,t),t) = \tilde{\mathcal{L}}(q,p,t)$$

As eqçs E-L ficam

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} - \frac{d}{dt}\left(\underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}}_{= p}\right) = 0 \implies \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} - \frac{dp}{dt} = 0$$

$$\iff \dot{p} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q}$$

que têm que ser expressos em termos de (q,p,t) como $\tilde{\mathcal{L}}$.