Universidade Federal do ABC – UFABC
ESTA020-17: MODELAGEM E CONTROLE
Segunda lista de exercícios
Professor Dr. Alfredo Del Sole Lordelo

1- Linearize os seguintes sistemas na origem e, através do primeiro método de *Lyapunov*, faça uma analise de estabilidade.

a)

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2(t)\\ \dot{x}_2(t) &= -x_1(t) + x_2(t)(1 - 3x_1^2(t) - 2x_2^2(t))\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= -x_1(t) + x_2(t)\\ \dot{x}_2(t) &= (x_1(t) + x_2(t))senx_1(t) - 3x_2(t)\end{aligned}$$

2- Em um circuito resitor-capacitor RC, a energia necessária para transferir um incremento de carga elétrica dq de uma placa a outra do capacitor é

$$dW_C = v_C(t)dq = \frac{1}{C}q(t)dq$$

Assim, a energia necessária para carregar um capacitor inicialmente descarregado até um instante de tempo t é

$$W_C = \int_0^{q(t)} \frac{1}{C}q(t)dq = \frac{1}{2C}q^2(t)$$

Em um circuito resistor-indutor RL, a taxa na qual a energia é transferida ao indutor é

$$dW_L = Li(t)di$$

Assim, a energia armazenada no campo magnético do indutor inicialmente desenergizado até um instante de tempo t é

$$W_L = \int_0^{i(t)} Li(t)di = \frac{L}{2}i^2(t) = \frac{L}{2}\left(\frac{dq(t)}{dt}\right)^2$$

O modelo matemático da dinâmica de um circuito resistor-indutor-capacitor RLC energizado é dado por

$$v_R(t) + v_L(t) + v_C(t) = 0 \Rightarrow Ri(t) + \frac{1}{C}q(t) + L\frac{di(t)}{dt} = 0 \Rightarrow R\frac{dq(t)}{dt} + \frac{1}{C}q(t) + L\frac{d^2q(t)}{dt^2} = 0$$

Usando a função energia

$$E(t) = \frac{1}{2C}q^2(t) + \frac{L}{2}\left(\frac{dq(t)}{dt}\right)^2 - \int_0^t Ri^2(t)dt$$

como função de *Lyapunov*, mostre que a origem é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável.

3- Considere um sistema mecânico massa-mola-amortecedor apresentado na Figura 1, invariante no tempo e não linear, no qual m é a massa e b é o coeficiente de amortecimento do amortecedor. A força elástica da mola é dada pela função $F(w) = k(1+a^2w^2(t))w(t)$. Os parâmetros m, b e k são estritamente positivos. A entrada $u(t)$ é a força externa aplicada na massa m. A força de atrito no amortecedor é dada por $g(t) = -b\dot{w}(t)$. A saída do sistema é o deslocamento $w(t)$ da massa m, medido a partir da posição de equilíbrio.

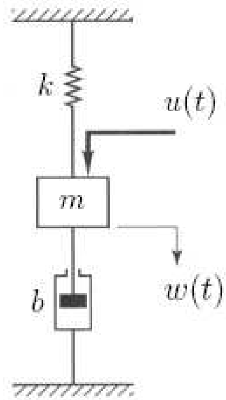

Figura 1: Sistema mecânico massa-mola-amortecedor.

As energias cinética e potencial elástica são dadas, respectivamente, por

$$T = \frac{1}{2}m\dot{w}^2(t) \quad \text{e} \quad V = \int_0^{w(t)} \left[k(1+a^2w^2(t))w(t)\right] dw$$

de maneira que o lagrangiano é dado por $L = T - V$. Deduza a equação diferencial linear de segunda ordem não homogênea que modela este sistema, através da equação de *Euler-Lagrange*

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{w}(t)}\right) - \frac{\partial L}{\partial w(t)} = H(t)$$

para a coordenada generalizada $w(t)$, na qual $H(t) = g(t) + u(t)$ são as forças não conservativas.