UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC

DB1BCN0407 Funções de várias variáveis - PROVA 1 - Turma B1 - 25/03/2018

Prof. André Pierro de Camargo

1. (1.0) O Teorema do valor médio para curvas planares afirma que, se $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ é uma curva contínua e diferenciável em $]0,1[$, então para algum $\xi \in]0,1[$, vale que

$$\gamma'(\xi) = \gamma(1) - \gamma(0).$$

Mostre (dê um contra-exemplo) que esse resultado é falso para curvas no espaço tridimensional.

2. (1.0) As curvas $\gamma(t) = (t, t, -2t)$ e $\mu(t) = (5-t, 1, 6+t)$ estão contidas na intersecção dos planos

$$\begin{cases} \pi_1 : & x + y + z = 0 \\ \pi_2 : & ax + by + cz = 0 \end{cases}$$

Determine a, b e c.

3. (1.5) Calcule o comprimento da curva $x = \frac{1}{3}\sqrt{y}(y-3), 0 \leq y \leq 9$.

4. (1.5) Seja $f(x,y) = (x^2+y^2)\log(x^2+y^2), (x,y) \neq (0,0)$. Determine, se existir, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

5. (1.5) Seja $f : [0,1]\times[0,1] \to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \alpha$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$ para todos os pontos $(x_0, y_0) \in]0,1[\times]0,1[$.

   (a) (0.5) Se $f(0,0) = 2/\pi$, quanto valem $f(0, 0.5)$ e $f(0.5, 0.5)$?

   (b) (1.0) Encontre uma expressão para $f(x,y)$.

6. (2.0) Considere a função $f(x,y) = \begin{cases} 1-y, & y \leq -x \\ 1+x, & y > -x \end{cases}$, definida para todos os pares de números reais (x,y).

   (a) (1.0) Verifique se existe o limite $\lim_{t\to 0} \frac{f(1+t,-1)-f(1,-1)}{t}$.

   (b) (1.0) A função f é diferenciável no ponto $(1,-1)$?

7. (1.5) Seja $f(x,y)$ uma função diferenciável e seja $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma curva diferenciável em $]a,b[$ e contínua em $[a,b]$. Suponha que a derivada direcional de f na direção $\vec{v}$ apontada por γ (isto é, $\vec{v} = \frac{\gamma'(c)}{||\gamma'(c)||}$) no ponto $\gamma(c)$ é sempre nula,ou seja $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(\gamma(c)) = 0$ para todo c em $]a,b[$ Mostre que a imagem de γ está contida em uma curva de nível de f.

8. (1.0) Encontre os pontos em que os planos (são 2) que passam por $(0,5,4)$ e $(5,0,4)$ tangenciam o gráfico de $f(x,y) = xy$.