Corrente Elétrica e Circuitos

Fenômenos Eletromagnéticos

Prof. Eduardo Gregores (646-3)

UFABC

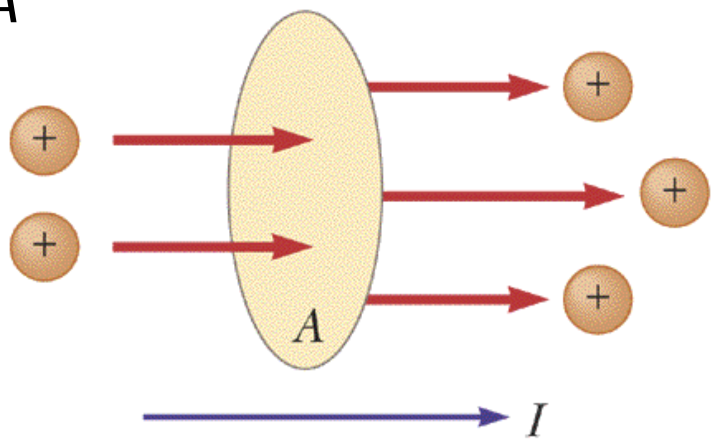
Corrente Elétrica e Circuitos

- Corrente Elétrica
- Resistência e Lei de Ohm
- Supercondutores
- Modelo Estrutural para Condução Elétrica
- Energia Elétrica e Potência
- Fontes de Força Eletromotriz (FEM)
- Resistores em Série e em Paralelo
- Regras de Kirchhoff e Circuitos de Correntes
- Circuitos RC – Resistores e Capacitores

Corrente Elétrica

- Carga Elétrica em movimento $\rightarrow$ Corrente Elétrica (I)
- I $\rightarrow$ Taxa com que a carga elétrica flui através de uma superfície

$$\begin{cases} \Delta Q \rightarrow \text{Quantidade da carga que atravessa a área } A \\ \Delta t \rightarrow \text{Tempo gasto para } \Delta Q \text{ atravessar essa área} \end{cases}$$



$$I_{\text{média}} = \frac{\Delta Q}{\Delta t} \quad \Rightarrow \quad I \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} \quad \Rightarrow \quad \boxed{I = \frac{dQ}{dt}}$$

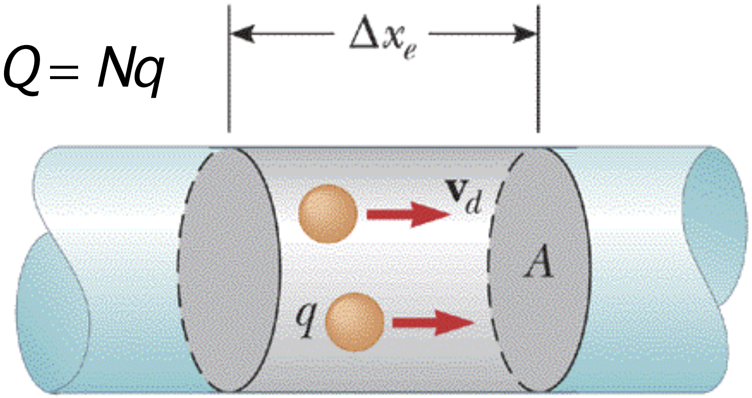
- Unidade de Corrente Elétrica (SI) $\rightarrow$ Ampere (A)

$$1\text{A} = 1\text{C/s}$$

- Direção da Corrente $\rightarrow$ Direção do movimento das cargas positivas
- Condutor metálico usual (fio elétrico) $\rightarrow$ Movimento de elétrons
  - Portador de carga negativo (elétrons).
  - Neste caso, a direção da corrente é oposta à direção de movimentação dos portadores de carga .

Descrição Microscópica da Corrente

$$\begin{cases} N \rightarrow \text{número de portadores de carga} \\ q \rightarrow \text{carga elétrica de cada portador} \end{cases} \Rightarrow \quad Q = Nq$$



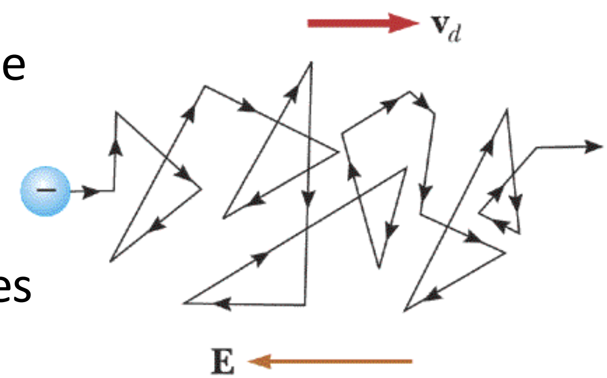
$\Delta V \rightarrow$ Volume de um pedaço do condutor

$$n = {}^{N}\!/_{\Delta V} \quad \Rightarrow \quad \Delta Q = \underbrace{n\Delta V}_{N} q$$

$$\Delta V = A\Delta x \quad \Rightarrow \quad \Delta Q = nAq\Delta x$$

$n \rightarrow$ número de portadores por unidade de volume

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} \quad \Rightarrow \quad I = nAq\frac{\Delta x}{\Delta t} \quad \Rightarrow \quad \boxed{I = nAqv_d}$$



$v_d \rightarrow$ velocidade de arrasto ("drift") dos portadores

J: Densidade de corrente $\rightarrow$ Corrente por unidade de área (A/m^2)

$$J = {}^{I}\!/_{A} \quad \Rightarrow \quad \boxed{J = nqv_d}$$

Exemplo 01: Velocidade de Arrasto em um Fio de Cobre

Um fio de cobre cuja área de seção transversal é $3{,}00\times 10^{-6}\,\text{m}^2$ tem uma corrente de $10{,}0$ A. Encontre a velocidade de arrasto dos elétrons desse fio.

A densidade do cobre é $8{,}95\,\text{g/cm}^3$ e sua massa molar é $63{,}5\,\text{g/mol}$. Considere que cada átomo do cobre contribua com 1 elétron livre para a condução elétrica.

$$I = nqAv_d \quad \Rightarrow \quad v_d = \frac{I}{nqA}$$

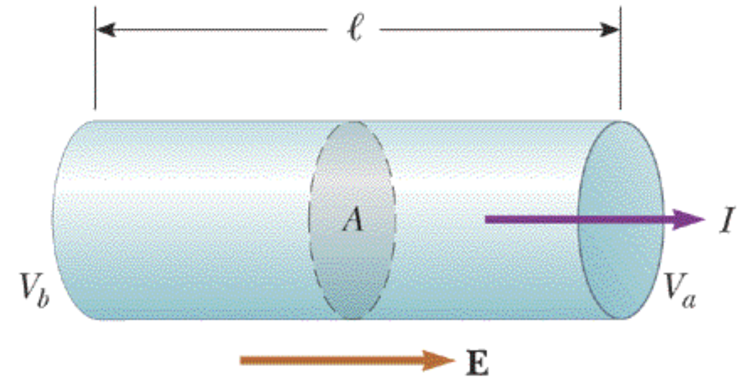
$n =$ número de elétrons (átomos do cobre) por unidade de volume

$$n = \frac{\text{N}}{\text{V}} = \frac{\text{g}/\text{cm}^3\ \text{N}/\text{mol}}{\text{g}/\text{mol}} = \frac{8{,}95\,\text{g}/\text{cm}^3 \times 6{,}02\times 10^{23}\,\text{N}/\text{mol}}{63{,}5\,\text{g}/\text{mol}} = 8{,}48\times 10^{22}\,\text{elétrons}/\text{cm}^3$$

$$1\,\text{cm}^3 = 10^{-6}\,\text{m}^3 \quad \Rightarrow \quad n = 8{,}48\times 10^{28}\,\text{m}^{-3}$$

$$v_d = \frac{10{,}0\,\text{C}/\text{s}}{8{,}48\times 10^{28}\,\text{m}^{-3}\times 1{,}60\times 10^{-19}\,\text{C}\times 3{,}00\times 10^{-6}\,\text{m}^2} \rightarrow \boxed{v_d = 2{,}46\times 10^{-4}\,\text{m}/\text{s}}$$

Resistência e Lei de Ohm



- Corrente Elétrica $\rightarrow$ Movimento de cargas devido a um Campo Elétrico.
- Quanto maior a Diferença de Potencial, maior o Campo Elétrico. $I \propto \Delta V$
- Resistência Elétrica $\rightarrow$ Constante de proporcionalidade entre I e ΔV

$$R \equiv \Delta V / I \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Delta V = RI \qquad \text{Lei de Ohm}}$$

- Unidade da Resistência (S.I.) $\rightarrow$ Ohm (Ω) $\quad \Omega = \mathrm{V}/\mathrm{A}$
- Resistor $\rightarrow$ Componente elétrico/eletrônico com resistência específica.
- Resistência $\rightarrow$ Proporcional ao comprimento do condutor e inversamente proporcional à sua área transversal.

$$\boxed{R = \rho\, l / A \qquad \rho \rightarrow \text{Resistividade do Material } (\Omega.\text{m})}$$

- Condutividade (σ) $\rightarrow$ Inverso da Resistividade $(\Omega.\text{m})^{-1}$ $\quad \sigma = 1/\rho$

Exemplo 02: A Resistência de um fio de Nicromo

(a) Calcule a resistência por unidade de comprimento de um fio de nicromo que tenha um raio de $0,321$ mm. A resistividade do nicromo é $1,5\times 10^{-6}\Omega$m.

$$R = \rho\frac{l}{A} \quad\Rightarrow\quad R/l = \frac{\rho}{A}$$

$$R/l = \frac{1,5\times 10^{-6}\Omega\text{m}}{\pi\times\left(0,321\times 10^{-3}\text{m}\right)^2} \quad\Rightarrow\quad \boxed{R/l = 4,6\Omega\ /\text{m}}$$

(b) Qual será a corrente que passará em 1 metro desse fio se for aplicada uma diferença de potencial de 10 Volts em suas extremidades

$$l = 1\,\text{metro} \quad\Rightarrow\quad R = 4,6\Omega$$

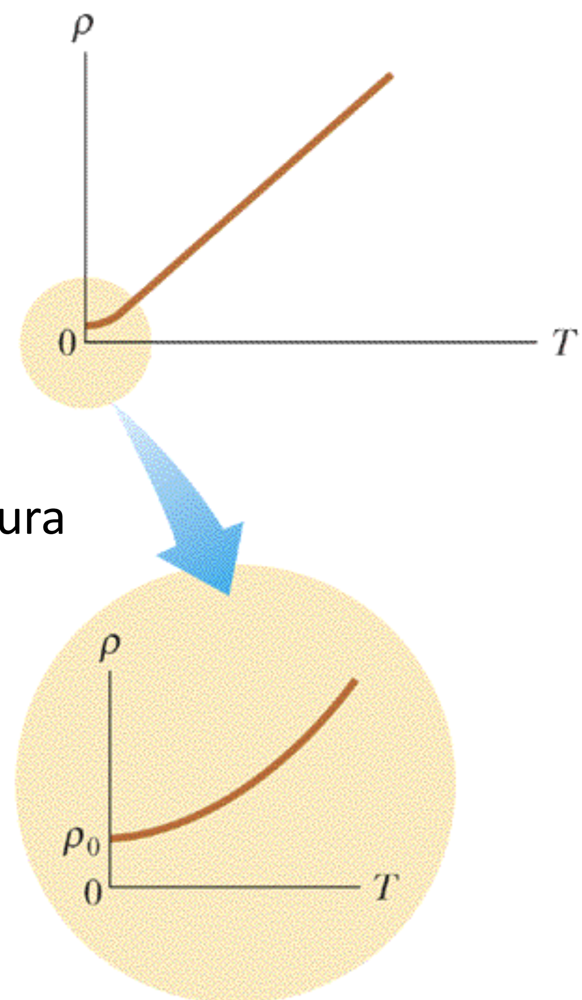
$$\Delta V = R\,I \quad\Rightarrow\quad I = \frac{\Delta V}{R} = \frac{10,0\text{V}}{4,6\Omega} \quad\Rightarrow\quad \boxed{I = 2,2\text{A}}$$

Variação da Resistividade com a Temperatura

- A resistividade varia linearmente com a temperatura

$$\begin{cases} \rho \rightarrow \text{Resistividade à temperatura } T \\ \rho_0 \rightarrow \text{Resistividade à temperatura } T_0 \\ \alpha \rightarrow \text{Coeficiente de temperatura da resistividade} \end{cases}$$

$$\boxed{\rho = \rho_0\left[1+\alpha\left(T-T_0\right)\right] \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = \frac{1}{\rho_0}\frac{\Delta\rho}{\Delta T}}$$



- A resistência é linearmente proporcional à temperatura

$$R = \rho\frac{l}{A} \quad \Rightarrow \quad \boxed{R = R_0\left[1+\alpha\left(T-T_0\right)\right]}$$

Exemplo 03: Um Termômetro de Resistência de Platina

Um termômetro de resistência de Platina tem uma resistência de $50,0\,\Omega$ a $20,0\,^{\circ}\mathrm{C}$. Quando imerso em um recipiente contendo Indio no ponto de fusão, sua resistência aumenta para $76,8\,\Omega$. Sabendo que o Coeficiente de Temperatura da Platina é $3,92\times10^{-3}\left(^{\circ}\mathrm{C}\right)^{-1}$, qual a temperatura de fusão do Indio?

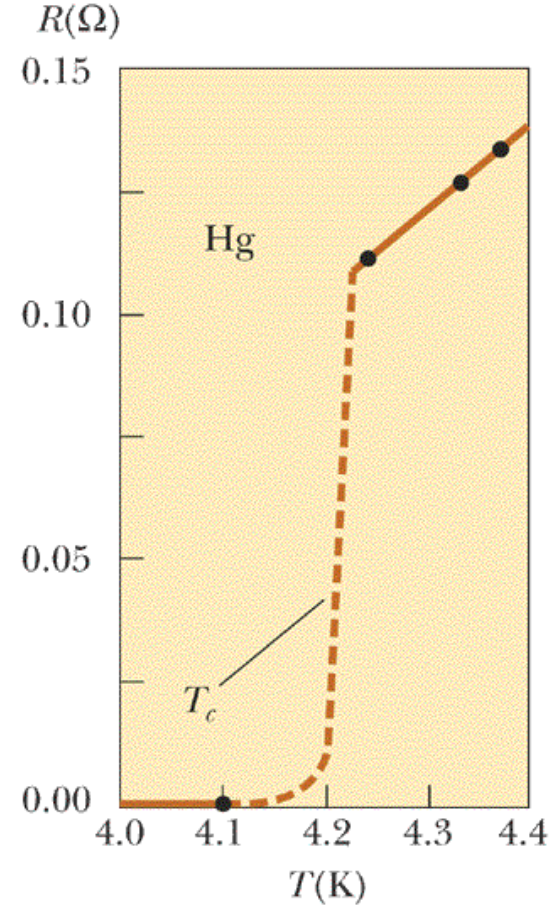
$$R = R_0\left[1+\alpha\left(T-T_0\right)\right] \quad \Rightarrow \quad \Delta T = \frac{R-R_0}{\alpha R_0}$$

$$\Delta T = \frac{76,8\,\Omega - 50,0\,\Omega}{3,92\times10^{-3}\times 50,0\,\Omega} \quad \rightarrow \quad \Delta T = 137\,^{\circ}\mathrm{C}$$

$$T_0 = 20,0\,^{\circ}\mathrm{C} \quad \Rightarrow \quad \boxed{T = 157\,^{\circ}\mathrm{C}}$$

Supercondutores

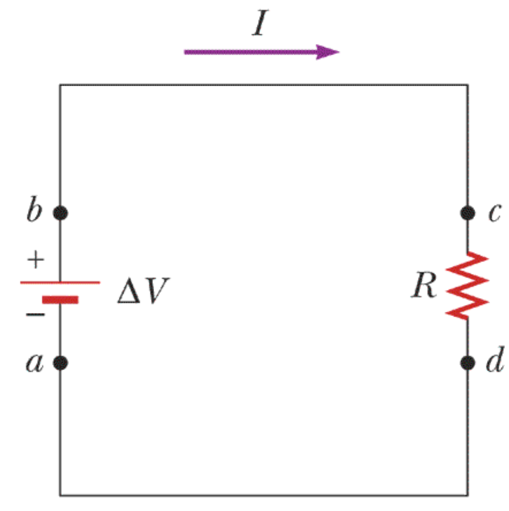
- Supercondutividade:
  - Propriedade apresentada por alguns materiais.
  - Resistência se torna-se nula quando a temperatura cai abaixo de uma dada Temperatura Crítica (T_c).
  - T_c próxima do zero absoluto (~0 K).
- Descoberta em 1911 por Heike Onnes.
- Resistividade menor do que $4x10^{-25}$ $\Omega.m$
- R=0 → Presença de corrente elétrica sem diferença de potencial (ΔV=0)
- Final do século XX (1986):
  - Descoberta da supercondutividade a altas temperaturas (~100 K).
- Magnetos Supercondutores:
  - Altíssimos campos magnéticos.



Medida da resistência em função da temperatura para o Mercúrio

Energia Elétrica e Potência

$$\begin{cases} Q \rightarrow \text{ Quantidade de carga que vai do ponto } a \text{ ao ponto } b \\ a \rightarrow \text{ Ponto de referência onde o potencial é tomado como zero } (V_a = 0) \\ \Delta V \rightarrow \text{ Diferença de potencial entre } a \text{ e } b \end{cases}$$



- Movimento da carga dentro da bateria ($a \rightarrow b$)
  - Sistema ganha energia potencial elétrica $\Delta U = Q\Delta V$
- Movimento da carga dentro do resistor ($c \rightarrow d$)
  - Sistema perde energia potencial elétrica
  - Energia dissipada na forma de Calor
- Potência Elétrica $\rightarrow$ Taxa de variação da energia elétrica

$$P = \frac{dU}{dt} = \frac{d}{dt}(Q\Delta V) = \frac{dQ}{dt}\Delta V = I\Delta V \quad \Rightarrow \quad \boxed{P = I\Delta V}$$

$$\Delta V = RI \quad \Rightarrow \quad \boxed{P = RI^2} \quad \text{ou} \quad \boxed{P = \Delta V^2 / R}$$

Exemplo 04: Potência Nominal de uma Lâmpada

Uma dada lâmpada é classificada com sendo de 120V / 75W, o que significa que, em sua voltagem de funcionamento pretendida de 120 V, ela tem potência de 75W. A lâmpada é alimentada por corrente contínua. Encontre a corrente na lâmpada e sua resistência.

$$P = I\Delta V \quad \Rightarrow \quad I = \frac{P}{\Delta V} = \frac{75,0}{120,0} \quad \Rightarrow \quad \boxed{I = 0,625\ \text{A}}$$

$$\Delta V = RI \quad \Rightarrow \quad R = \frac{\Delta V}{I} = \frac{120,0}{0,625} \quad \Rightarrow \quad \boxed{R = 192\ \Omega}$$

Exemplo 05: Custo de Funcionamento de uma Lâmpada

Quanto custa para manter acesa uma lâmpada de 100W durante 24h se a eletricidade custa R$0,12/kWh?

$E \rightarrow$ Energia consumida pela lâmpada em 24 horas

$$E = P\Delta t \quad \Rightarrow \quad E = 0,100\text{kW} \times 24\text{h} \quad \Rightarrow \quad E = 2,4\text{kWh}$$

$$\text{Custo} = 2,4\text{kWh} \times \text{R\$}0,12/\text{kWh} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\text{Custo} = \text{R\$}0,29}$$

Exemplo 06: Conectando a Eletricidade e a Termodinâmica

Qual a resistência necessária de um aquecedor de imersão que aumentará a temperatura de 1,50 kg de água de 10,0 °C para 50,0 °C em 10,0 minutos operando a 110V?

$$Q = mc\Delta T \quad \text{onde} \quad Q \rightarrow \text{Calor}$$

$$\text{Potência} = \frac{\text{Energia}}{\text{Tempo}} \quad \Rightarrow \quad P = \frac{mc\Delta T}{\Delta t}$$

$$P = \frac{\Delta V^2}{R} \quad \Rightarrow \quad R = \frac{\Delta V^2}{P} \quad \Rightarrow \quad R = \frac{\Delta V^2 \Delta t}{mc\Delta T}$$

$$R = \frac{(110\text{V})^2 \times 10{,}0\,\text{min} \times 60\,\text{seg/min}}{1{,}5\,\text{kg} \times 4.186\,\text{J/kg.°C} \times (50{,}0 - 10{,}0)\,\text{°C}}$$

$$R = 28{,}9\,\text{V}^2\text{s/J} \quad \rightarrow \quad \boxed{R = 28{,}9\,\Omega}$$

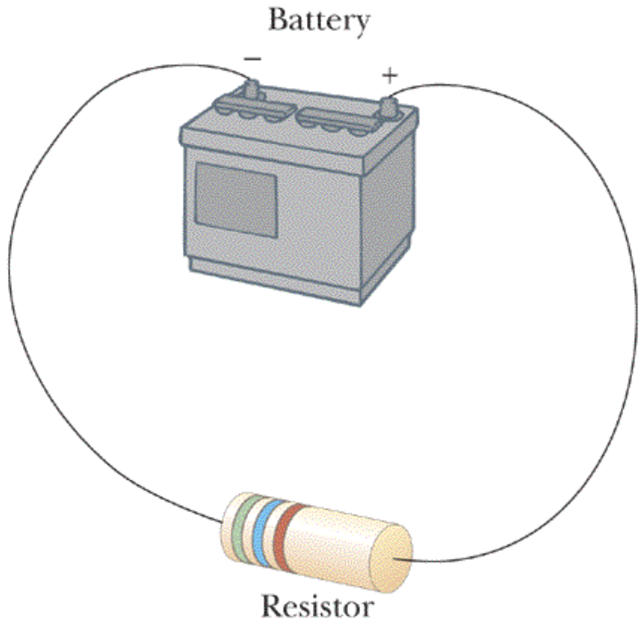
Fontes de Força Eletromotriz (FEM)

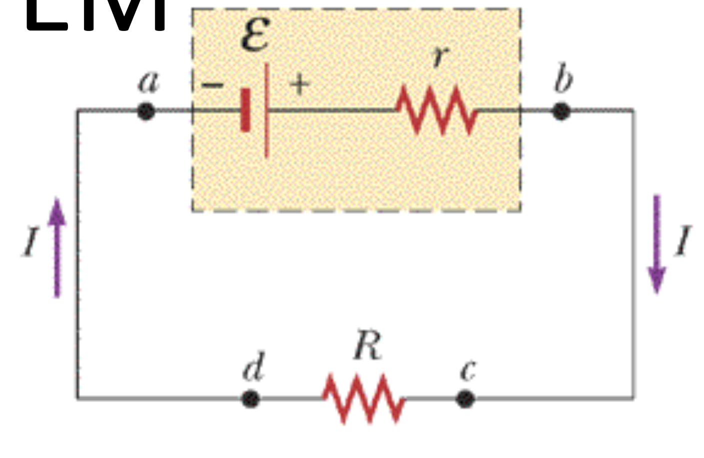
- Fonte de FEM $\rightarrow$ Dispositivo que mantém a Diferença de Potencial Constante
  - Bombeia cargas de um potencial menor para um potencial maior
  - Mantém a diferença de potencial enquanto é atravessado por cargas
- Baterias e Geradores
  - Dispositivos que contém uma fonte de FEM em seu interior
  - Possuem resistência elétrica à passagem da corrente

$$\left.\begin{array}{l} \mathcal{E} \rightarrow \text{Força Eletromotriz (Volts)} \\ r \rightarrow \text{Resistência Interna do Gerador} \\ \text{I} \rightarrow \text{Corrente que atravessa o Gerador} \end{array}\right\rangle \Rightarrow \Delta V = \mathcal{E} - rI$$

$$\begin{cases} \Delta V \rightarrow \text{Diferença de Potencial nos terminais do gerador quando há corrente} \\ \mathcal{E} \rightarrow \text{Diferença de Potencial nos terminais do gerador com o circuito aberto} \end{cases}$$

Potência da FEM



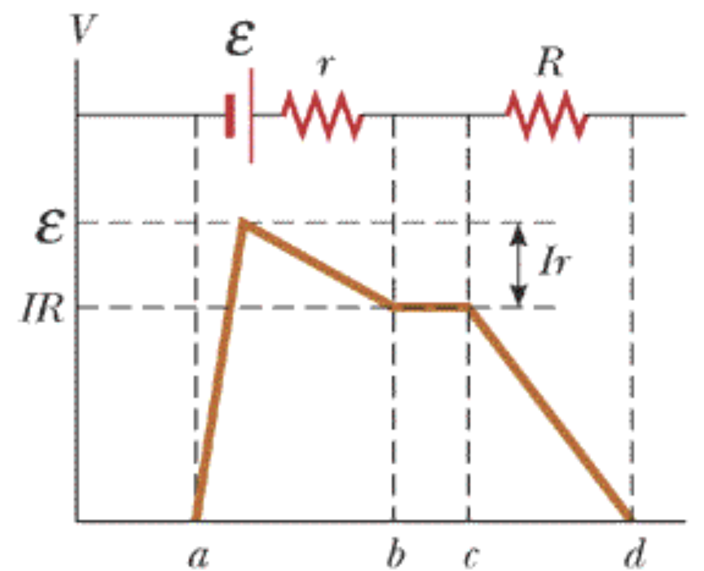


(a)

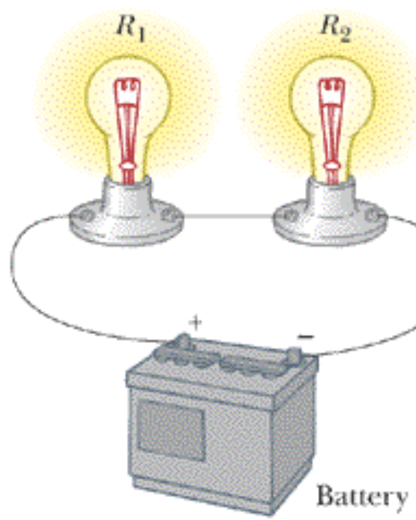
$$P = I\Delta V \quad \Rightarrow \quad P_{\mathcal{E}} = I\mathcal{E}$$

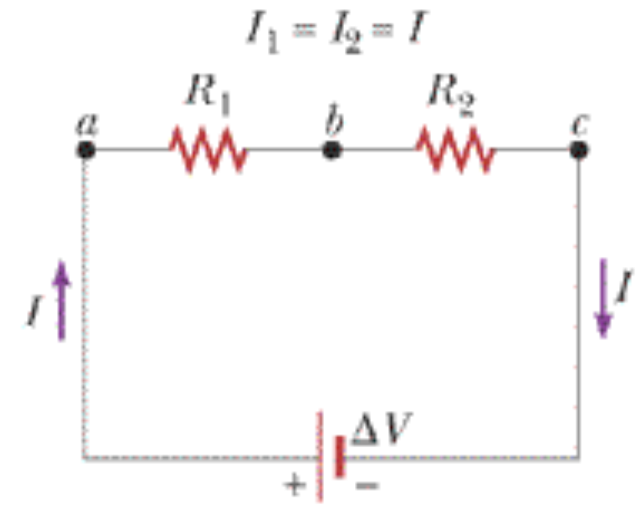
$$\begin{cases} \mathcal{E} = \Delta V_R + Ir \\ \Delta V_R = IR \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{E} = IR + Ir$$

$$\boxed{P_{\mathcal{E}} = I^2R + I^2r} \quad \text{e} \quad \boxed{I = \frac{\mathcal{E}}{R + r}}$$



Associação de Resistores em Série





$$\Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2$$

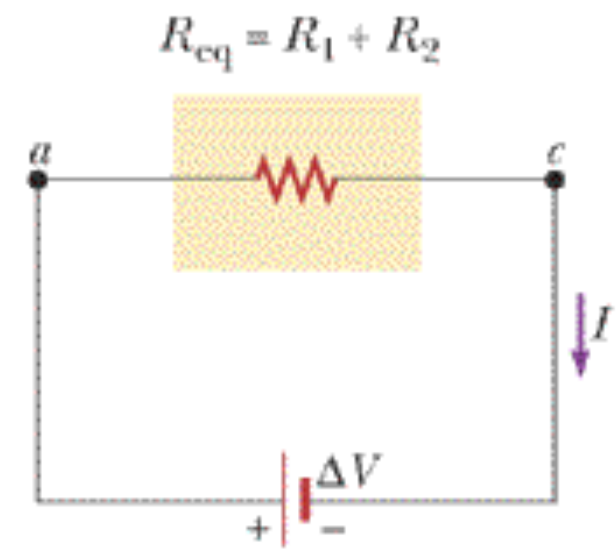
$$\Delta V = RI \quad \Rightarrow \quad \Delta V = R_1 I_1 + R_2 I_2$$

$$\begin{cases} I_1 = I_2 = I \\ \Delta V = R_{eq} I \end{cases} \Rightarrow \quad R_{eq} I = R_1 I + R_2 I$$

$$R_{eq} = R_1 + R_2$$

$$\boxed{R_{eq} = R_1 + R_2 + R_3 + \cdots}$$

Associação em Série



Associação de Resistores em Paralelo

$$I = I_1 + I_2$$

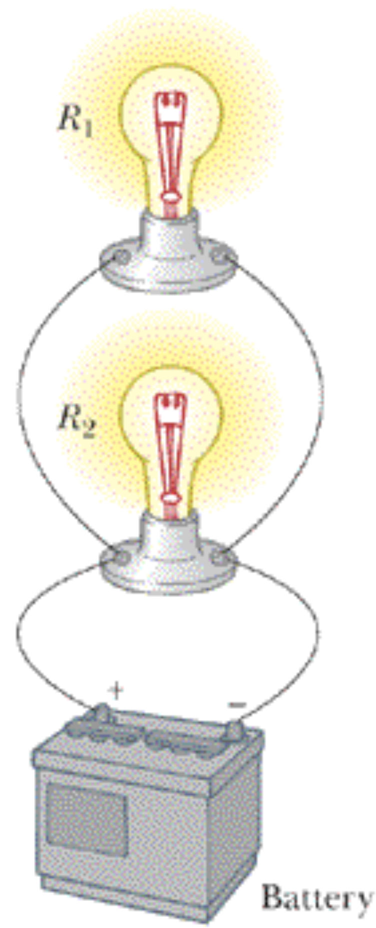
$$I = \frac{\Delta V}{R} \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta V}{R} = \frac{\Delta V_1}{R_1} + \frac{\Delta V_2}{R_2}$$

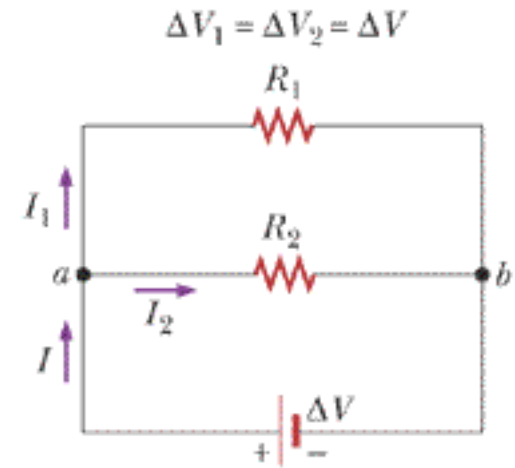
$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta V = \Delta V_1 = \Delta V_2 \\ I = \dfrac{\Delta V}{R_{eq}} \end{array} \right. \Rightarrow \frac{\Delta V}{R_{eq}} = \frac{\Delta V}{R_1} + \frac{\Delta V}{R_2}$$

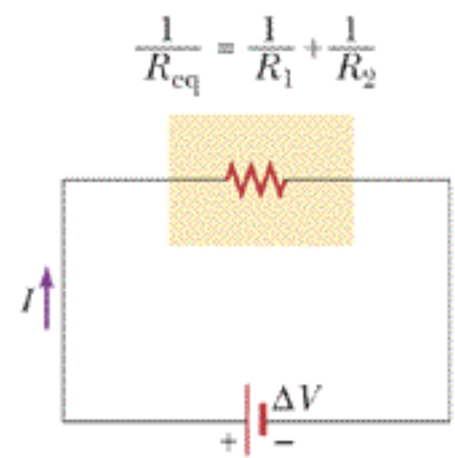
$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

$$\boxed{\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_2} + \cdots}$$

Associação em Paralelo





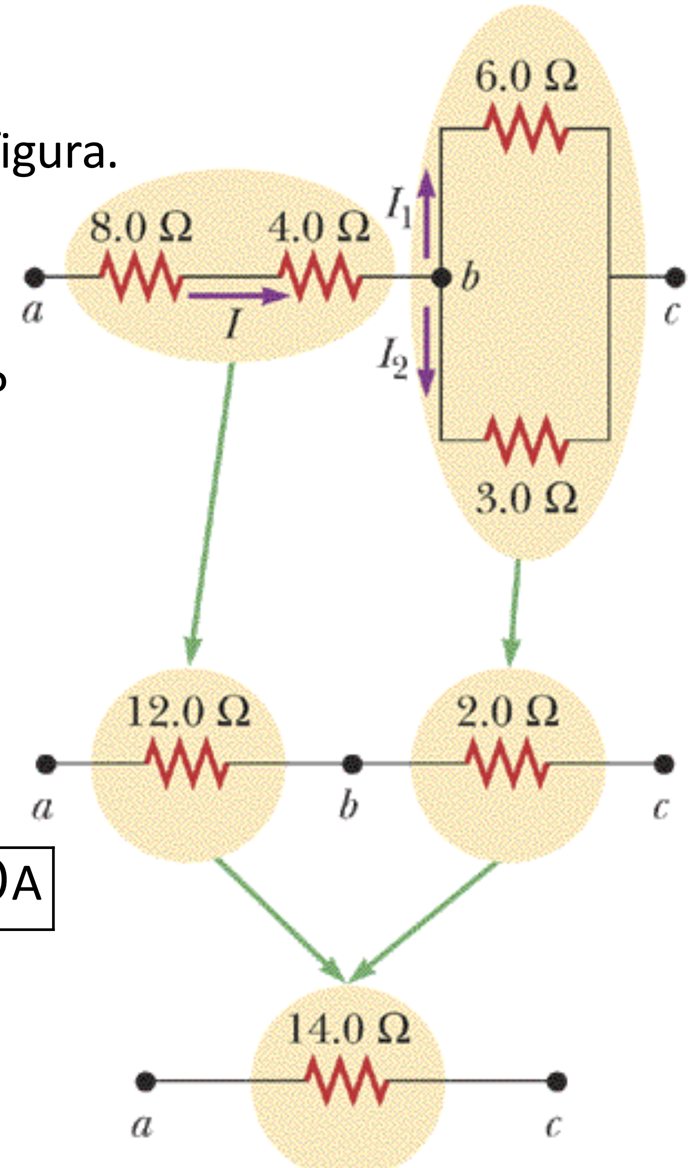


Exemplo 07: Encontre a Resistência Equivalente

Quatro resistores são conectados como mostrado na figura.

(a) Encontre a resistência equivalente entre *a* e *c*.

(b) Qual será a corrente em cada resistor se uma diferença de potencial de 42V for mantida entre *a* e *c*?



$$R_{eq}^{(1)} = 8,0 + 4,0 \Rightarrow R_{eq}^{(1)} = 12,0$$

$$\frac{1}{R_{eq}^{(2)}} = \frac{1}{6,0} + \frac{1}{3,0} = \frac{1}{2} \Rightarrow R_{eq}^{(2)} = 2,0$$

$$R_{eq} = R_{eq}^{(1)} + R_{eq}^{(2)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{R_{eq} = 14,0\Omega}$$

$$I = \frac{\Delta V}{R_{eq}} = \frac{42,0\text{V}}{14,0\Omega} \rightarrow I = 3,0\text{A} \quad \Rightarrow \quad \boxed{I_{8,0} = I_{4,0} = 3,0\text{A}}$$

$$\Delta V_{a,c} = \Delta V_{a,b} + \Delta V_{b,c}$$

$$\Delta V_{a,b} = IR_{eq}^{(1)} = 3,0 \times 12,0 \rightarrow \Delta V_{a,b} = 36,0\text{V}$$

$$\Delta V_{b,c} = \Delta V_{a,c} - \Delta V_{a,b} = 42,0 - 36,0 \rightarrow \Delta V_{b,c} = 6,0\text{V}$$

$$I = \frac{\Delta V}{R} \quad \Rightarrow \quad I_{6,0} = \frac{6,0}{6,0} \rightarrow \boxed{I_{6,0} = 1,0\text{A}} \qquad I_{3,0} = \frac{6,0}{3,0} \rightarrow \boxed{I_{6,0} = 2,0\text{A}}$$

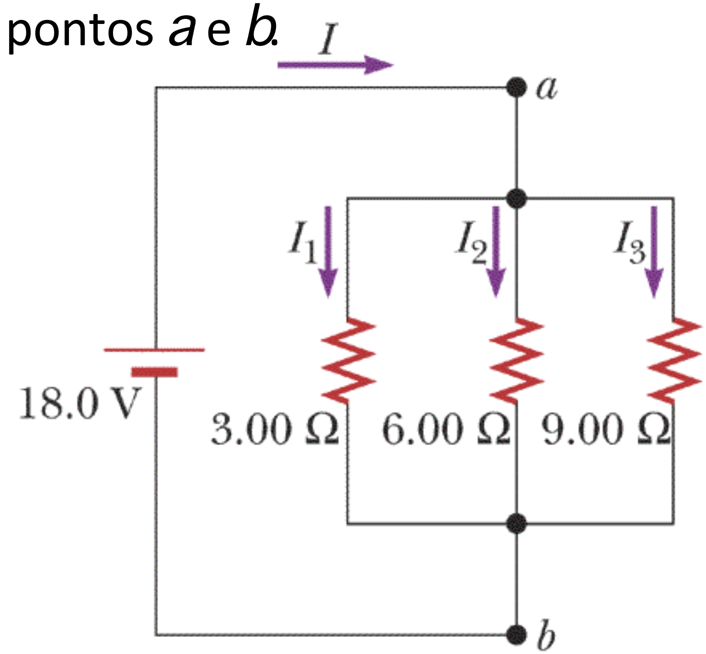
Exemplo 08: Três resistores em paralelo

Tres resistores são conectados em paralelo como mostrado na figura. Uma diferença de potencial de 18,0 V é mantida entre os pontos *a* e *b*.

(a) Encontre a corrente em cada resistor

(b) Encontre a potência em cada resistor e a total

(c) Calcule a resistência equivalente



$$I = \Delta V / R \Rightarrow \begin{cases} I_1 = 18{,}0/3{,}0 \rightarrow \boxed{I_1 = 6{,}0\,\mathrm{A}} \\ I_2 = 18{,}0/6{,}0 \rightarrow \boxed{I_2 = 3{,}0\,\mathrm{A}} \\ I_3 = 18{,}0/9{,}0 \rightarrow \boxed{I_3 = 2{,}0\,\mathrm{A}} \end{cases}$$

$$P = I\Delta V \Rightarrow \begin{cases} P_1 = 6{,}0 \times 18{,}0 \rightarrow \boxed{P_1 = 108\,\mathrm{W}} \\ P_2 = 3{,}0 \times 18{,}0 \rightarrow \boxed{P_2 = 54{,}0\,\mathrm{W}} \\ P_3 = 2{,}0 \times 18{,}0 \rightarrow \boxed{P_3 = 36{,}0\,\mathrm{W}} \end{cases}$$

$$P_{\text{Total}} = P_1 + P_2 + P_3 \rightarrow \boxed{P_{\text{Total}} = 198\,\mathrm{W}}$$

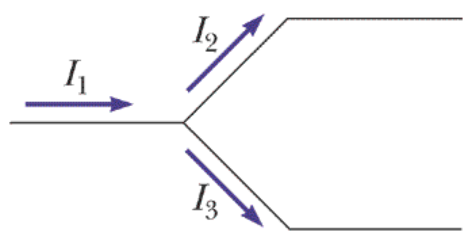
$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{3{,}00} + \frac{1}{6{,}00} + \frac{1}{9{,}00}$$

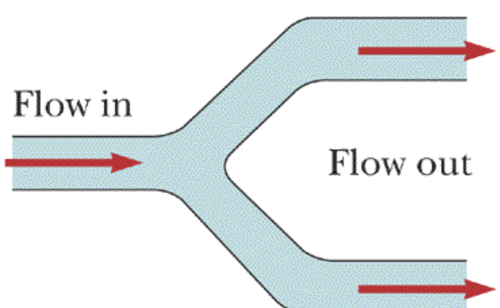
$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{11{,}0}{18{,}0} \rightarrow \boxed{R_{eq} = 1{,}64\,\Omega}$$

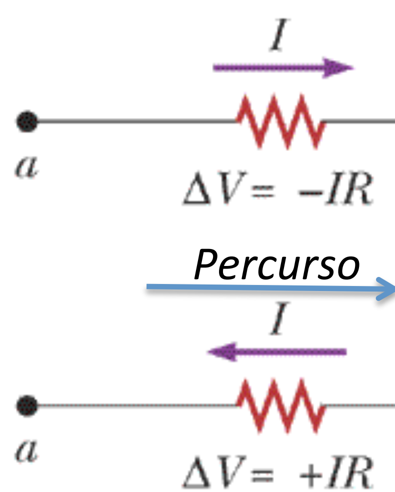
Regras de Kirchhoff e Circuitos de Corrente Contínua

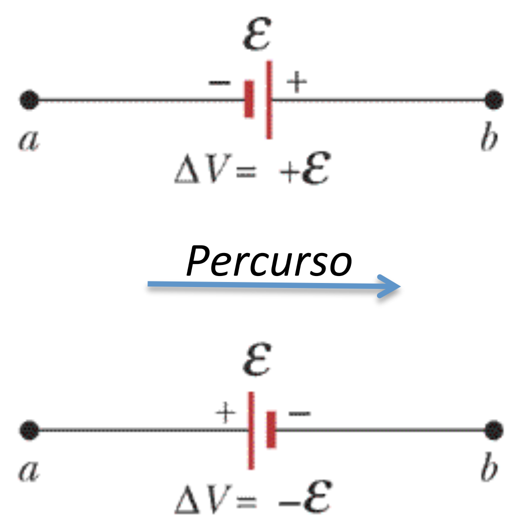
- A soma das correntes que entram em qualquer nó é igual a soma das correntes que saem desse nó.
- A soma das diferenças de potencial em todos os elementos de uma malha fechada do circuito é igual a zero.



(a)



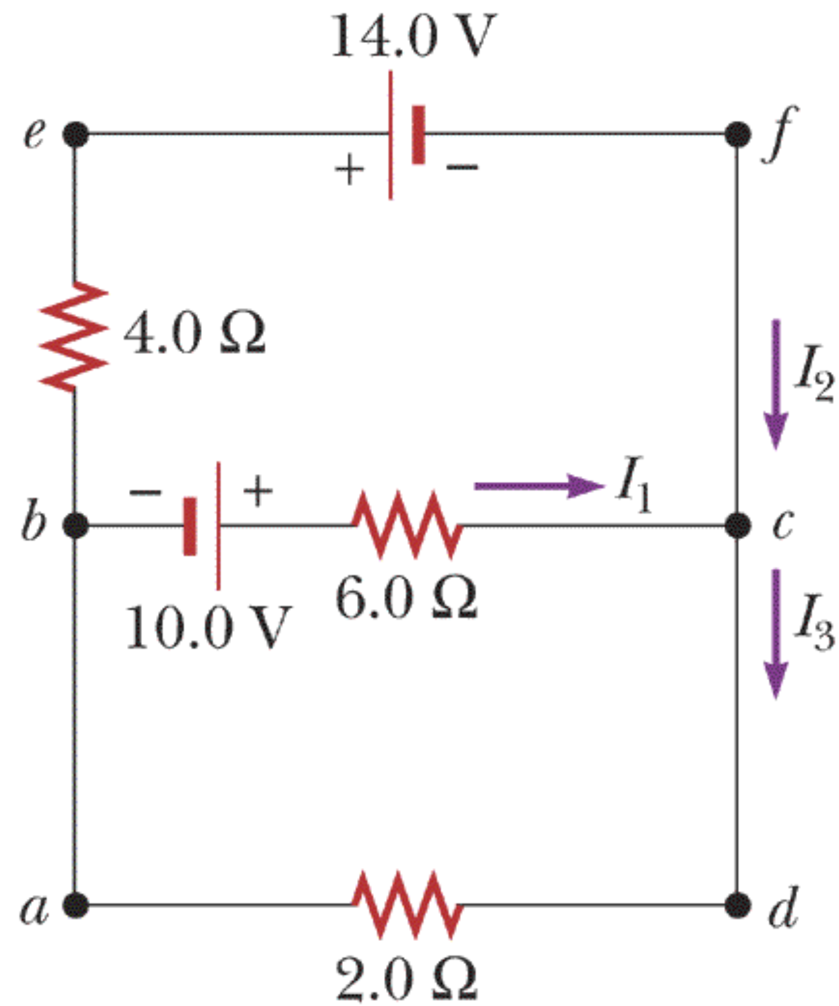




Exemplo 09: Aplicando as Regras de Kirchhoff

(a) Encontre as correntes I_1, I_2 e I_3.

(b) Encontre a diferença de potencial entre os pontos b e c.



▷ Na direção escolhida para as correntes

$$I_1 + I_2 = I_3 \quad (1)$$

▷ Malha <u>abcda</u>

$$10{,}0 - 6{,}0I_1 - 2{,}0I_3 = 0 \quad (2)$$

▷ Malha <u>befce</u>

$$-4{,}0I_2 - 14{,}0 + 6{,}0I_1 - 10{,}0 = 0 \quad (3)$$

(1) em (2) $\rightarrow 10{,}0 - 8{,}0I_1 - 2{,}0I_2 = 0 \quad (4)$

(3) e (4) $\rightarrow \boxed{I_1 = 2{,}0\,\text{A}}$ e $\boxed{I_2 = -3{,}0\,\text{A}}$

(1) $\rightarrow \boxed{I_3 = -1{,}0\,\text{A}}$

▷ Seguindo de $b \rightarrow c$

$$V_c - V_b = 10{,}0 - 6{,}0I_1 = 10{,}0 - 12{,}0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_c - V_b = -2{,}0\,\text{V}}$$

Exemplo 10: Circuito com Várias Malhas

Encontre as correntes desconhecidas no circuito

▷ Capacitor $\rightarrow I = 0 \Rightarrow I_{fg} = I_{gb} = I_{bc} = I_1$

▷ Nó de Kirchhoff em c $\Rightarrow I_1 + I_2 = I_3 \quad (1)$

▷ Malha defcd

$$4,0 - 3,0I_2 - 5,0I_3 = 0,0 \quad (2)$$

▷ Malha cfgbc

$$3,0I_2 - 5,0I_1 + 8,0 = 0,0 \quad (3)$$

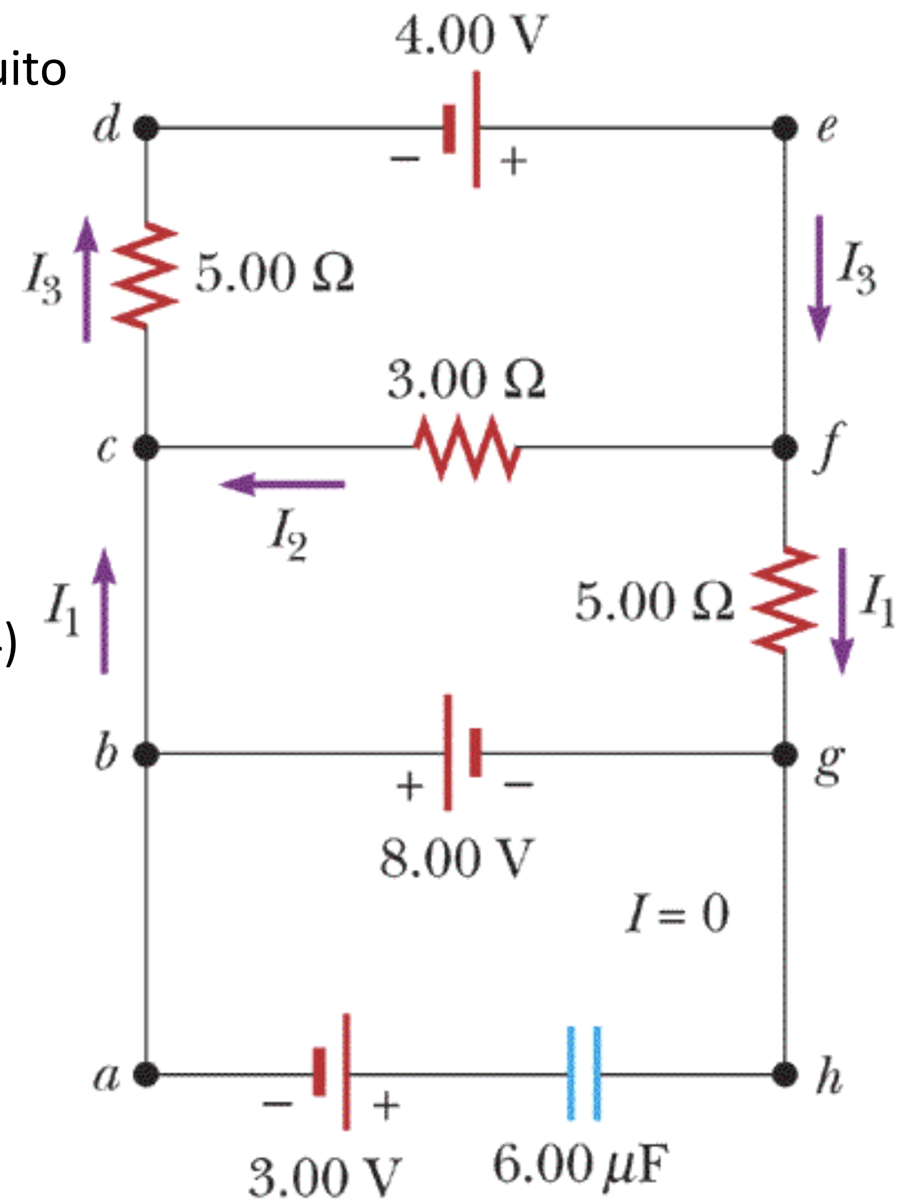
▷ (1) em (2) $\rightarrow 4,0 - 8,0I_2 - 5,0I_1 = 0,0 \quad (4)$

▷ (4) – (3) $\rightarrow -4,0 - 11,0I_2 = 0,0$

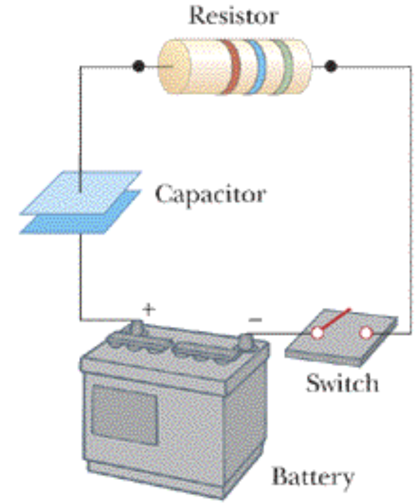
$$I_2 = {-4,0}/{11,0} \rightarrow \boxed{I_2 = -0,364\,\text{A}}$$

▷ I_2 em (3) $\rightarrow \boxed{I_1 = 1,38\,\text{A}}$

▷ I_2 e I_1 em (1) $\rightarrow \boxed{I_3 = 1,02\,\text{A}}$



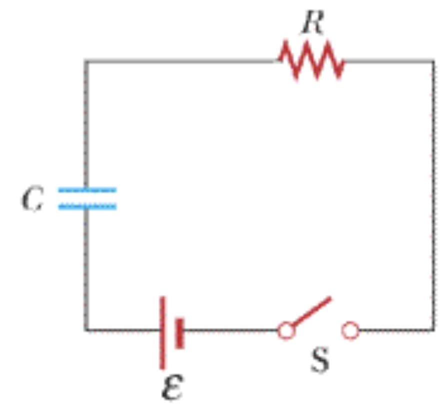
Circuitos RC



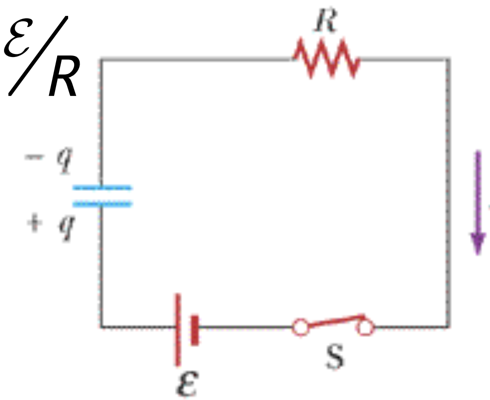
- Circuitos RC $\rightarrow$ Circuitos com Resistores e Capacitores.
- Corrente que flui enquanto o capacitor é (des)carregado.
- Capacitor completamente carregado $\rightarrow$ corrente nula
  - ▹ Malha de Kirchhoff:

$$\mathcal{E}_{\text{Bat}} - \Delta V_{\text{Cap}} - \Delta V_{\text{Res}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{E} - \frac{q}{C} - IR = 0$$

$$\begin{cases} q \rightarrow \text{Carga no capacitor em um dado instante} \\ I \rightarrow \text{Corrente no resistor nesse instante} \end{cases}$$



- Início:
  - Carga no capacitor igual a zero $\rightarrow \Delta V_{\text{Cap}} = 0$
  - Diferença de potencial inteiramente no resistor $\rightarrow I_0 = \mathcal{E}/R$
- Final:
  - Carga no capacitor no seu máximo $\rightarrow \Delta V_{\text{Cap}} = Q/C$
  - Corrente no resistor igual a zero $\rightarrow Q = C\mathcal{E}$



Carregando circuito RC com FEM

$$\mathcal{E}-\frac{q}{C}-IR=0 \quad \text{e} \quad I=\frac{dq}{dt} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{E}-\frac{q}{C}-\frac{dq}{dt}R=0 \quad \Rightarrow \quad \underbrace{\frac{dq}{dt}=\frac{\mathcal{E}}{R}-\frac{q}{RC}}_{\text{Eq. Dif. Ord.}}$$

$$dq=\left(\frac{\mathcal{E}}{R}-\frac{q}{RC}\right)dt=\frac{C\mathcal{E}-q}{RC}dt \quad \Rightarrow \quad \frac{dq}{q-C\mathcal{E}}=-\frac{1}{RC}dt \quad \Rightarrow \quad \int_0^q \frac{dq}{q-C\mathcal{E}}=-\frac{1}{RC}\int_0^t dt$$

Em um instante t, o capacitor estará com uma carga q.

$$\begin{cases} x=q-C\mathcal{E} \\ dx=dq \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \int_0^q \frac{dq}{q-C\mathcal{E}}=\int_{-C\mathcal{E}}^{q-C\mathcal{E}} \frac{dx}{x}=\ln x\Big|_{-C\mathcal{E}}^{q-C\mathcal{E}}=\ln\left(\frac{q-C\mathcal{E}}{-C\mathcal{E}}\right)$$

$$-\frac{1}{RC}\int_0^t dt=-\frac{t}{RC} \quad \Rightarrow \quad \ln\left(\frac{q-C\mathcal{E}}{-C\mathcal{E}}\right)=-\frac{t}{RC} \quad \Rightarrow \quad e^{-t/RC}=\frac{q-C\mathcal{E}}{-C\mathcal{E}}$$

$$q=C\mathcal{E}\left(1-e^{-t/RC}\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{q(t)=Q\left(1-e^{-t/RC}\right)}$$

Carregando um Circuito RC com FEM

▷ Carga no capacitor em função do tempo:

$$q(t) = Q\left(1 - e^{-t/RC}\right) \quad \rightarrow \quad \begin{cases} q(0) = 0 \\ q(t \rightarrow \infty) = Q \end{cases}$$

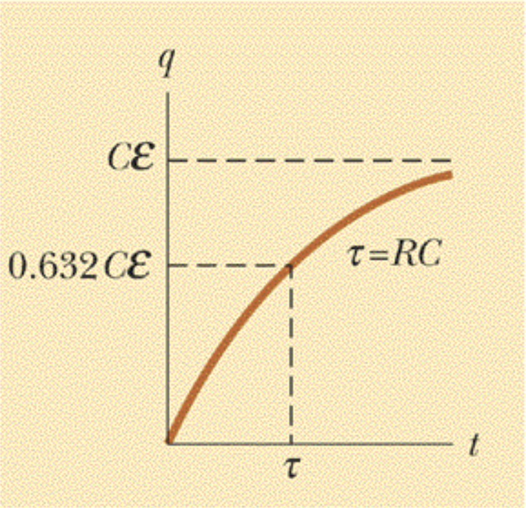
▷ Corrente no circuito em função do tempo:

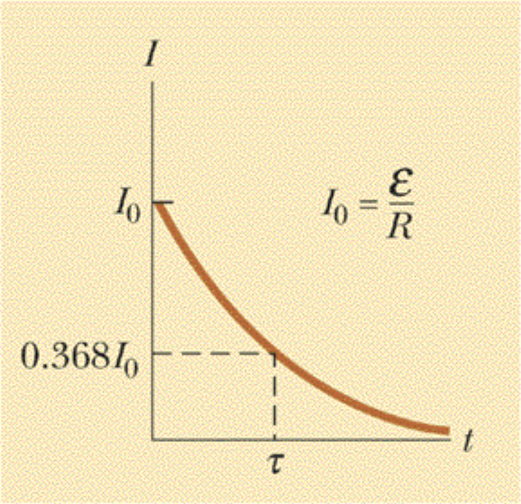
$$I = \frac{dq}{dt} \quad \Rightarrow \quad I(t) = -Q\frac{-1}{RC}e^{-t/RC}$$

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}}{R}e^{-t/RC} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} I(0) = \mathcal{E}/R \\ I(t \rightarrow \infty) = 0 \end{cases}$$

▷ Constante τ do circuito $\boxed{\tau = RC}$

$$t = \tau \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} q(t) = \left(1 - \frac{1}{e}\right) q_{max} \\ I(t) = \frac{1}{e} I_{max} \end{cases}$$



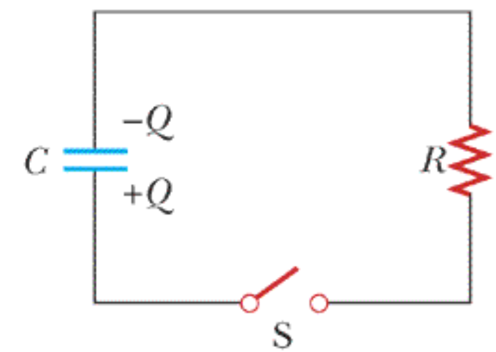


Descarregando um Capacitor

▷ Malha de Kirchhoff sem a FEM:

$$-\frac{q}{C} - IR = 0$$

$$I = \frac{dq}{dt} \quad \rightarrow \quad -R\frac{dq}{dt} = \frac{q}{C} \quad \rightarrow \quad \frac{dq}{q} = -\frac{1}{RC}dt$$



$t < 0$

(a)

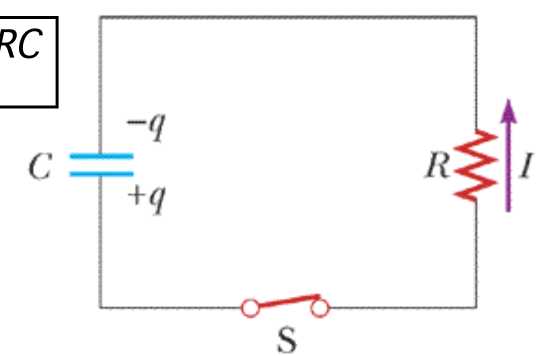
▷ Integrando a partir do instante que a chave é fechada

$$\int_Q^q \frac{dq}{q} = -\frac{1}{RC}\int_0^t dt \quad \rightarrow \quad \ln\left(\frac{q}{Q}\right) = -\frac{t}{RC} \quad \rightarrow \quad \boxed{q(t) = Qe^{-t/RC}}$$

$$I(t) = \frac{dq}{dt} \quad \rightarrow \quad I(t) = Q\frac{-1}{RC}e^{-t/RC} \quad \rightarrow \quad \boxed{I(t) = -I_0 e^{-t/RC}}$$

onde $Q/C = \Delta V_0$ e $\Delta V_0/R = I_0$

▷ $\tau = RC \quad \Rightarrow \quad \boxed{q(t) = Qe^{-t/\tau} \quad \text{e} \quad I(t) = -I_0 e^{-t/\tau}}$



$t > 0$

Exemplo 11: Carregando um capacitor em um circuito RC

Um capacitor descarregado e um resistor são conectados em série a uma bateria. Se $\mathcal{E} = 12,0\,\text{V}$, $C = 5,00\mu F$ e $R = 8,00\times 10^5\Omega$, encontre a constante de tempo do circuito, a carga máxima no capacitor, a corrente máxima no circuito e a carga e a corrente como funções do tempo.

▷ Constante de tempo: $\tau = RC = 8,00\times 10^5 \times 5,00\times 10^{-6} \quad \rightarrow \quad \boxed{\tau = 4,00\,\text{s}}$

▷ Carga máxima: $Q = C\mathcal{E} = 5,00\times 10^{-6} \times 12,0 \quad \rightarrow \quad \boxed{Q = 60,0\mu\text{C}}$

▷ Corrente máxima: $I_0 = \mathcal{E}/R = 12,0/8,00\times 10^5 \quad \rightarrow \quad \boxed{I_0 = 15,0\mu\text{A}}$

▷ Carga em função do tempo: $q(t) = Q\left(1 - e^{-t/\tau}\right) \quad \rightarrow \quad \boxed{q(t) = 60,0\mu\text{C}\left(1 - e^{-t/4,00}\right)}$

▷ Corrente em função do tempo: $I(t) = I_0 e^{-t/\tau} \quad \rightarrow \quad \boxed{I(t) = 15,0\mu\text{A}\ e^{-t/4,00}}$

Exemplo 12: Descarregando um capacitor

Considere um capacitor C que está sendo descarregado através de um resistor R.

(a) Depois de quanto tempo a carga do capacitor terá caído a $1/4$ de seu valor inicial?

$$q(t) = Qe^{-t/RC}$$

$$q(t) = \frac{Q}{4} \Rightarrow \frac{Q}{4} = Qe^{-t/RC} \rightarrow \frac{1}{4} = e^{-t/RC} \rightarrow \ln\left(\frac{1}{4}\right) = -\frac{t}{RC}$$

$$\ln 4 = \frac{t}{RC} \rightarrow t = RC \ln 4 \rightarrow \boxed{t = 1{,}39RC \quad \text{ou} \quad t = 1{,}39\tau}$$

(b) Após quantas constantes de tempo a energia armazenada terá caído a $1/4$ de seu valor inicial?

$$U = \frac{q^2}{2C} = \frac{\left(Qe^{-t/RC}\right)^2}{2C} = \frac{Q^2}{2C} e^{-2t/RC} \rightarrow \underline{U = U_0 e^{-2t/RC}}$$

$$\frac{1}{4}U_0 = U_0 e^{-2t/RC} \Rightarrow \frac{1}{4} = e^{-2t/RC} \rightarrow \ln 4 = \frac{2t}{RC} \rightarrow t = \frac{\ln 4}{2}\underbrace{RC}_{\tau}$$

$$\boxed{t = 0{,}693\tau}$$