

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC
IEDO — 2013.1
Prova 1 — Diurno — horário: 8h-10h — tipo II

1. Considere a equação autônoma $\frac{dy}{dt} = 8y - 2y^2$. Esboce os gráficos das soluções $y(t)$ dessa equação diferencial para diferentes condições iniciais $y(0) = y_0$. Determine os pontos críticos da equação e os classifique.

RESOLUÇÃO:

O gráfico do campo $\frac{dy}{dt}$ em função de y é o de uma parábola com concavidade para baixo e interseção com o eixo horizontal em $y = 0$ e $y = 4$. Se $y(0) = y_0 < 0$, então $\frac{dy}{dt} < 0$ e a solução $y(t)$ decresce, tendendo assintoticamente a $-\infty$. Se $0 < y(0) = y_0 < 4$, então $\frac{dy}{dt} > 0$ e a solução $y(t)$ cresce, tendendo assintoticamente ao ponto fixo estável 4. Se $y(0) = y_0 > 4$, então $\frac{dy}{dt} < 0$ e a solução $y(t)$ decresce, tendendo assintoticamente ao ponto fixo estável 4. Finalmente, 0 é ponto fixo instável e 4 é ponto fixo estável. Note que as funções $y(t)$ têm ponto de inflexão em $y = 2$. O esboço das funções $y(t)$ fica por sua conta.

2. Considere o seguinte Problema de Valor Inicial: $\sin(x)dy = ydx$, $y(0) = 0$.

- (a) Mostre que $y(x) = 0$ e $y(x) = \frac{\sin x}{1+\cos x}$ são soluções do PVI.

RESOLUÇÃO:

Note que a equação dada equivale a $\sin(x)y' - y = 0$.

Se $y(x) = 0 \forall x$, então $y'(x) = 0 \forall x$ e a substituição de y e y' no lado esquerdo da equação resulta zero para todo x . Além disso, $y(0) = 0$. Portanto, $y(x) = 0$ é solução do PVI.

Se $y(x) = \frac{\sin(x)}{1+\cos x}$, então a regra de derivação do quociente resulta, após simplificações, $y'(x) = \frac{1}{1+\cos(x)}$. Desse modo, o lado esquerdo da equação fica $\frac{\sin(x)}{1+\cos(x)} - \frac{\sin(x)}{1+\cos x} = 0$. Ademais, $y(0) = 0$ nesse caso. Portanto, $y(x) = \frac{\sin(x)}{1+\cos(x)}$ também é solução do PVI.

- (b) Isso contradiz o Teorema de Existência e Unicidade? Explique.

RESOLUÇÃO:

Não. O teorema requer a continuidade das funções $p(x)$ e $g(x)$ na equação escrita na forma $y' + p(x)y = g(x)$. O ponto em que a condição inicial é prescrita corresponde a $x_0 = 0$. Nesse ponto, a função $p(x) = \frac{-1}{\sin(x)}$ não é definida e, portanto, não é contínua.

3. Um novo produto é introduzido no mercado através de uma campanha publicitária cujo alvo são os N_0 habitantes de uma cidade X. A taxa com que a população fica sabendo sobre o produto é proporcional ao número de pessoas que ainda não ouviram falar sobre o produto. Supondo que, ao fim de um ano, metade da população tenha ouvido falar sobre o produto, qual será a fração da população que terá ouvido falar sobre o produto ao fim de três anos?

RESOLUÇÃO:

Chamando de $y(t)$ o número de pessoas que já ouviram falar sobre o produto no instante t , a equação que descreve o processo é $y' = k(N_0 - y)$. Essa equação separável tem como solução

$\int \frac{dy}{y-N_0} = -\int k dt + c$, que resulta $\ln|y-N_0| = -kt + c$. Segue que $N_0 - y = c_1 e^{-kt}$. A condição inicial $y(0) = 0$ implica $c_1 = N_0$, donde $y(t) = N_0(1 - e^{-kt})$. Ao fim de um ano, metade da população terá ouvido falar sobre o produto, de modo que $N_0/2 = N_0(1 - e^{-k})$, o que implica $k = \ln 2$, de modo que $y(t) = N_0(1 - e^{-t \ln 2})$. Com isso, $y(3) = 7N_0/8$.

4. Resolva os Problemas de Valor Inicial abaixo:

(a) $y' = \frac{3 \cos(3x)}{3+2y}, \quad y(0) = -1$

RESOLUÇÃO:

A equação é separável, de modo que obtemos: $\int (3+2y) dy = 3 \int \cos(3x) dx + c$. Resolvendo as integrais, chegamos a $y^2 + 3y - \sin(3t) = c$. A condição inicial nos dá $c = -2$ e também implica que $y(t) = \frac{-3 + \sqrt{4 \sin(3t) + 1}}{2}$.

(b) $y' + (4/t)y = (3 \cos t)/t^4, \quad y(-\pi) = 0, \quad t < 0.$

RESOLUÇÃO:

A equação é linear, tendo fator integrante $\mu(t) = \exp[\int \frac{4}{t} dt] = \exp[4 \ln |t|] = t^4$. Sua solução é $y(t) = \frac{\int 3 \cos(t) dt + c}{t^4} = \frac{3 \sin(t) + c}{t^4}$. A condição inicial implica $c = 0$, de modo que a solução do PVI é $y(t) = \frac{3 \sin(t)}{t^4}$.