Fenômenos Eletromagnéticos

J. Javier S. Acuña

Aula 02: 12 de Junho de 2017

1 Forças elétricas e Campos elétricos.

1.1 Campo Elétrico

- O símbolo que se costuma empregar para o campo elétrico é $\mathbf{E}$. Em notação vetorial, a definição de $\mathbf{E}$ torna-se

$$\mathbf{E} = \lim_{q \to 0} \frac{\mathbf{F}_q}{q} \tag{1}$$

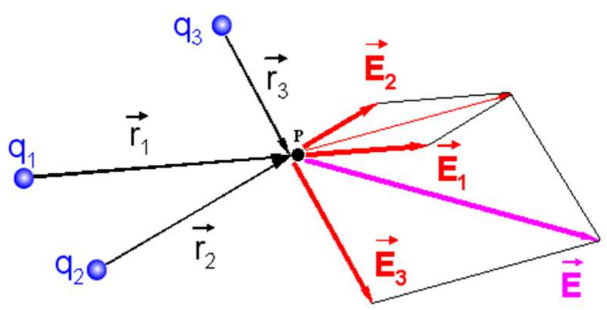
O limite está incluído na definição de $\mathbf{E}$ para assegurar que a carga teste não afete a distribuição de cargas produzidas por $\mathbf{E}$. Como a carga eletrônica tem um valor igual que é extremamente pequeno, para a maioria dos casos podemos tomar simplesmente

$$\mathbf{F}_q = q\mathbf{E} \tag{2}$$

e portanto, da equação de força elétrica, para um sistema de cargas pontuais resulta

$$\mathbf{E} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{E}_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^{N} \frac{q_i}{r_i^2} \hat{\mathbf{r}} \tag{3}$$

A soma de campos $\mathbf{E}$, é uma soma vetorial. Na figura temos $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_3$



- No caso em que a carga de prova não está na origem de cordenadas, o observador, as equações parecem complicadas. Aqui suponhamos que a distribuição de cargas consista de N cargas puntuais $q_1, q_2, ..., q_N$, localizadas nos pontos $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, ..., \mathbf{r}_N$, respectivamente, e/ou uma distribuição volumétrica de cargas especificada pela densidade de carga $\rho(\mathbf{r}')$ no volume V, e/ou uma distribuição superficial caracterizada pela densidade de carga superficial $\sigma(\mathbf{r}')$ sobre a superfície S. Se uma carga teste q estiver localizada no ponto $\mathbf{r}$, ela experimentará uma força $\mathbf{F}$ dada por

$$\mathbf{F} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\sum_{i=1}^{N} q_i \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}_i}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|^3} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\int_V \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}\,\rho(\mathbf{r}')\;dv' + \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\int_S \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}\,\sigma(\mathbf{r}')\;da' \tag{4}$$

por causa de uma dada distribuição de carga. Como a razão é independente de q, o campo elétrico em $\mathbf{r}$ é exatamente

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{i=1}^{N} q_i \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}_i}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|^3} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}\,\rho(\mathbf{r}')\;dv' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_S \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}\,\sigma(\mathbf{r}')\;da' \tag{5}$$

Simplificando a equação colocando a carga de prova na origem

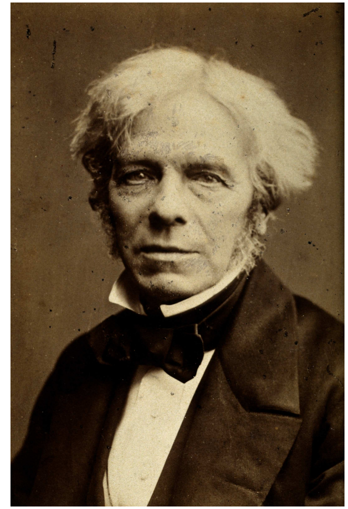
$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{i=1}^{N} \frac{q_i}{r^2} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{r^2}\;dv' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_S \frac{\sigma(\mathbf{r}')}{r^2}\;da' \tag{6}$$

Esta equação é bastante geral pois temos a soma de todos os casos, mas em muitas situações um ou dois termos não serão necessários. Observemos que no caso particular de termos um material tal que a carga apenas esteja distribuída num volume V com uma densidade ρ, colocando a carga teste na origem, e usando a eq.(**??**), podemos escrever

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{r^2}\;\hat{\mathbf{r}}\;dv' \tag{7}$$

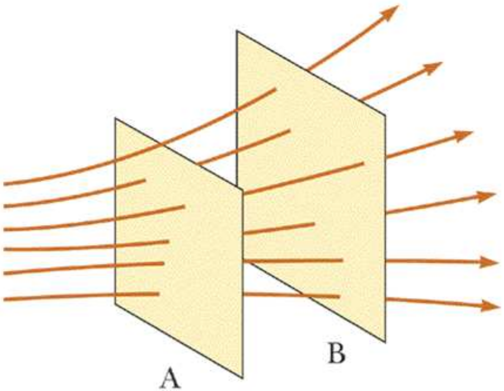
- Na eq.(5) temos que $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{r})$ é uma função vetorial puntual, ou um campo vetarial, e pode ser calculada em cada ponto do espaço na vizinhança de um sistema de cargas ou de uma distribuição de cargas.

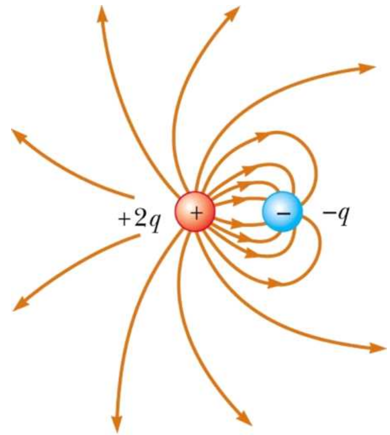
Como um auxIlio para visualizar a estrutura do campo elétrico associado com uma distribuição particular de carga, Michel Faraday (1791-1867) introduziu o conceito de *linhas de força*.

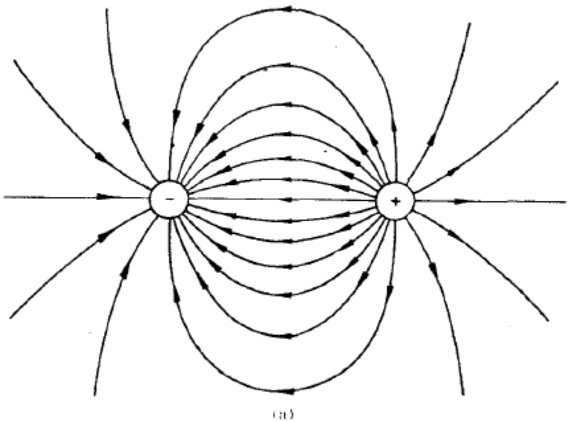


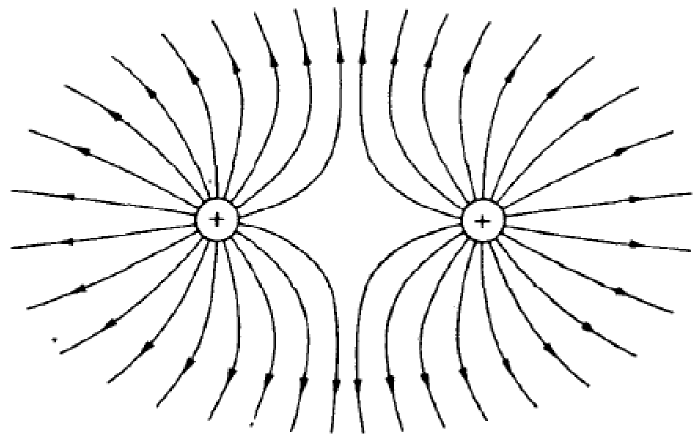
Uma linha de força é uma linha (ou curva) imaginária traçada de tal forma que sua direção e sentido em qualquer ponto sejam os do campo elétrico naquele ponto. Consideremos, por exemplo, a estrutura do campo elétrico associado a uma só carga puntual positiva q_1. As linhas de força são linhas radiais que se dirigem para fora de q_1. De forma semelhante, as linhas de força associadas a uma carga puntual negativa isolada são também linhas radiais mas, neste caso, o sentido é para dentro (isto é, em direção à carga negativa).

A figura a continuação ilustra dois campos elétricos simples que foram traçados com o auxI1io de linhas de força.


A
B


+2q
−q



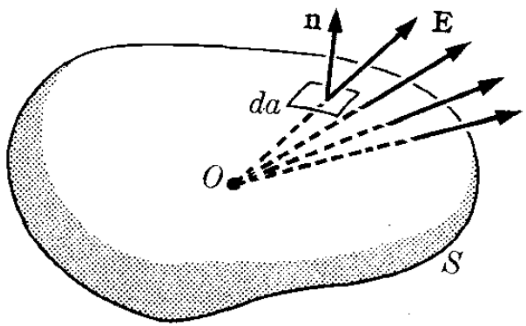


1.2 Lei de Gauss e fluxo elétrico.

- O campo elétrico num ponto $\mathbf{r}$ devido a uma carga puntual q localizada na origem é

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\mathbf{r}}{r^3}$$

Consideremos uma superfície fechada, S, e que encerre a origem e, conseqüentemente, a carga q, como é mostrada na figura



Aqui $\mathbf{n}$ é a componente normal do campo elétrico sobre uma superfície fechada, S.

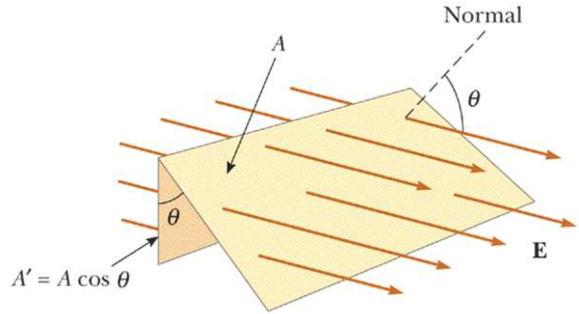
$$\mathbf{n}\,da = d\mathbf{A}$$

A integral sobre toda a superfície se denomina *fluxo* Φ_E sobre o campo elétrico através de S, e é simplesmente

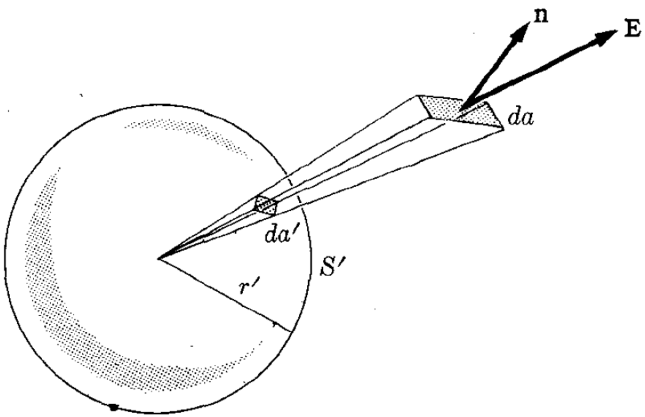
$$\begin{aligned} \Phi_E &= \oint_S \mathbf{E}\cdot d\mathbf{A} = \oint_S \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\mathbf{r}}{r^3}\cdot d\mathbf{A} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\oint_S \frac{q}{r^3}\,\mathbf{r}\cdot d\mathbf{A} \end{aligned} \tag{8}$$

Para uma superfície qualquer

$$\Delta\Phi_E = \mathbf{E}\cdot\Delta\mathbf{A} = EA\cos\theta$$



- Antes de imaginar um volume observemos a figura



Construção da superfície esférica S', como um auxílio para a avaliação do ângulo sólido subtendido por da.

Começamos pela forma mais simples de visualizar que é imaginar diretamente uma superfícies fechada esférica (de área $4\pi r^2$), é evidente que o campo $\mathbf{E}$, é constante em toda a superfície da esféra e pode sair da integral, resultando portanto

$$\oint_S \mathbf{E}\cdot d\mathbf{A} = E\oint_S d\mathbf{A} = \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\right)\left(4\pi r^2\right) = \frac{q}{\epsilon_0} \tag{9}$$

- A eq.(9) é conhecida como **leis de Gauss**. O termo à esquerda, a integral da componente normal do campo elétrico sobre a superfície S, é algumas vezes denominado *fluxo* Φ_E do campo elétrico através de S.

Johann Carl Friedrich Gauss.
Alemão (1777 - 1855)

- Observemos que se várias cargas puntuais $q_1, q_2, ..., q_N$ estiverem encerradas pela superfície S, então o campo elétrico total, será dado pelo primeiro termo da equação geral do campo elétrico (eq.12-aula01), e a eq.(9) torna-se

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i=1}^{N} q_i \tag{10}$$

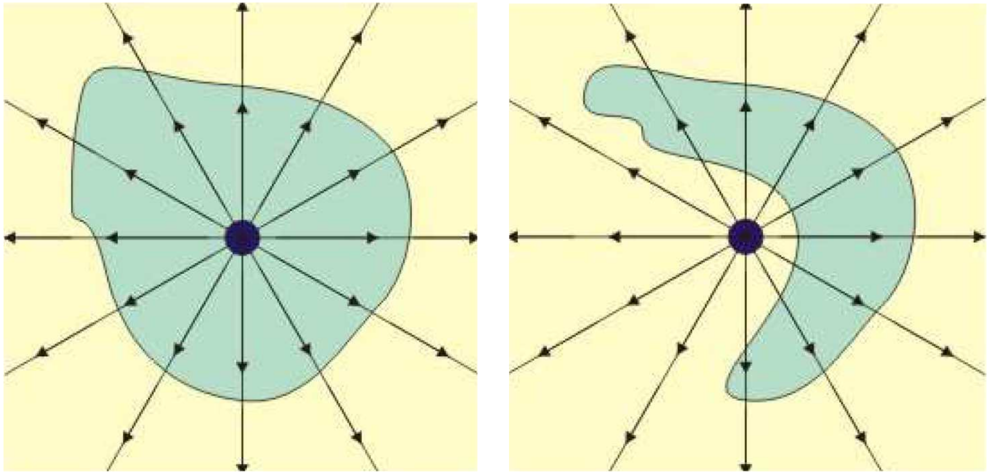
- Este resultado pode ser generalizado ao caso de uma distribuição contínua de cargas, caracterizada por uma densidade de carga. Assim, se S for uma superfície fechada que limita o volume V, temos

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho \, dv \tag{11}$$

- O fluxo de campo elétrico, $\Phi_E = \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$, é uma grandeza escalar e pode ser considerado como o número de linhas de campo $\mathbf{E}$ que atravessam a superfície. Se essa for fechada

$$\Phi_E = \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A}$$

Assim, a lei de Gauss diz que o fluxo de campo elétrico que atravessa uma superfície fechada é proporcional à carga neta contida no interior dela. Se a carga q estiver fora do volume do qual é calculado o fluxo de campo elétrico, sempre tem um mesmo número de linhas que entram quanto as que saem.



- Interessante é comentar aqui que se "suposemos" a lei de Gauss implica-se sempre que $\Phi_E = 0$, como no caso magnético, implicaria que não existe uma superfície que possa ser traçada, talque, podamos encerrar uma "mono-carga elétrica" (mas não é o que se cumpre). Esta é a razão de porqué não existe "mono-polo magnético" onde a lei de Gauss para o campo magnético para um mono-polo implica que $\Phi_B = 0$, o fluxo de campo magnético sempre anula-se, o que implica a "não existência" do monopolo magnético, ou seja, não existe um superfície fechada que possa envolver uma "mono-carga magnética".

- Para quem quer aprofundar na física-matemática, a lei de Gauss pode ser ainda expressa de outra forma, usando-se o teorema do divergente, estabelece que

$$\oint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A} = \int_V \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{F} \, dv$$

que aplicado à integral de superfície da componente normal de $\mathbf{E}$, dará

$$\oint_S \mathbf{E}\cdot d\mathbf{A} = \int_V \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{E}\; dv \tag{12}$$

e pela eq.(11)

$$\int_V \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{E}\; dv = \frac{1}{\epsilon_0}\int_V \rho\; dv \tag{13}$$

- A eq.(13) deve ser válida para todos os volumes, isto é, para qualquer escolha do volume V. Assim, eliminando os integrandos que aparecerem à esquerda e à direita podemos escrever a lei de Gauss na sua forma diferencial, como

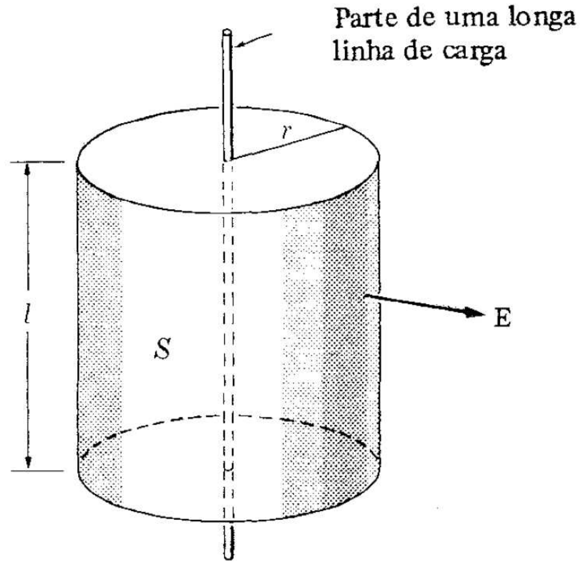
$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{14}$$

- Como exemplo, consideremos uma longa linha de carga de densidade de carga λ por unidade de comprimento, como ilustrado na figura a continuação

  Aqui devemos ver que como o fio é infinito, o campo elétrico apontará sem na direção radial. Assim, as duas cara laterais circulares não contribuem, uma vez que o campo elétrico é paralelo a elas, e duas integrais de superfície se anulam, ficando

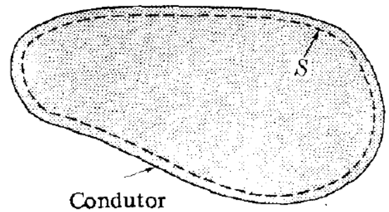
$$\begin{aligned}
\int_{S_3} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{A} &= \frac{1}{\epsilon_0}\int_L \lambda\; dz \\
E\int dS_3 &= \frac{1}{\epsilon_0}\lambda\int dz \\
E2\pi r l &= \frac{\lambda l}{\epsilon_0} \qquad \Rightarrow \qquad E_r = \frac{\lambda}{2\pi r\epsilon_0}
\end{aligned}$$

que não depende do comprimento ao qual foi escolhido o valor de l.



- Com a lei de Gauss podemos verificar facilmente que a carga (carga líquida) de um condutor carregado se localiza em sua superfície externa.

  Como a carga pode mover-se livremente num condutor, mesmo sob a influência de campos elétricos muito pequenos, os portadores de carga (elétrons ou íons) movem-se até encontrarem posições em que não experimentam nenhuma força líquida. Quando atingem o repouso, o interior do condutor deve ser uma região desprovida de campo elétrico; isto deve ser assim porque a população de portadores de carga no interior não se esgota de nenhuma forma e, se um campo persistir, os portadores continuarão a se mover. *Assim, sob condições estáticas, o campo elétrico no interior de um condutor se anula*. Além disso, como $\mathbf{E} = 0$ no interior de um condutor, o potencial é o mesmo em todos os pontos do material condutor. Em outras palavras, *em condições estáticas, cada condutor forma uma região eqüipotencial no espaço*.

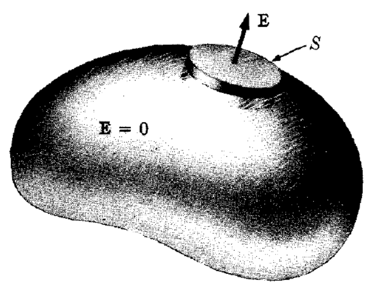


- Assim, podemos construir uma superfície gaussiana S em qualquer parte no interior do condutor; pela lei de Gauss, a carga líquida que cada uma dessas superfícies encerra sempre será nula.

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{q}{\epsilon_0} \qquad E = 0 \qquad \Rightarrow \qquad q = 0$$

  Por tanto, o único lugar em que a carga pode estar, sem entrar em contradição com a lei de Gauss, é na superfície do condutor.

- O campo elétrico na região imediatamente externa a um condutor carregado deve ser normal à superfície do condutor. Isto ocorre porque a superfície é uma eqüipotencial, e $\mathbf{E} = -\boldsymbol{\nabla} V$. Suponhamos que a carga de um condutor seja dada pela função densidade superficial σ. Se a lei de Gauss for aplicada à pequena superfície S, em forma de caixa de pílulas, da figura a continuação,



- então, apenas a cara superior contribuirá na integração, pois na cara inferior $\mathbf{E} = 0$ e nas laterais o campo elétrico é perpendicular à normal $\mathbf{n}$. Assim,

$$E\Delta S = \left(\frac{\sigma}{\epsilon_0}\right)\Delta S$$

onde ΔS é a área de uma das bases da caixa de pílulas. Portanto, o campo elétrico na região imediatamente externa a um condutor será

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

1.3 Potencial Elétrico.

- Se temos uma carga positiva, e movemos aoredor uma carga de prova também positiva, temos que elas se repelem. Então devemos fazer um trabalho para intentar juntar elas. Realizando trabalho sobre a força elétrica.

$$dW = -\mathbf{F}_e \cdot d\mathbf{r} \tag{15}$$

Aqui $W > 0$ se a força e feita para juntar as cargas. Ao igual que na mecância o trabalho realizado corresponde à energia potencial, neste caso energia potencial elétrica, assim, $dW = dU$.

$$\Delta W = \Delta U = -\int \mathbf{F}_e \cdot d\mathbf{r} = -\int q\mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} \tag{16}$$

Portanto, ΔU é igual à carga de prova q multiplicada por uma expressão que depende apenas da sua trajetoria no campo $\mathbf{E}$, isto é o *potencial eletrostático* V.

$$\Delta U = -q\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \ qV \tag{17}$$

com

$$\Delta V = -\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} \tag{18}$$

Esta equação é um caso particular de uma equação mais geral que diz a eq., $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\boldsymbol{\nabla} V(\mathbf{r})$.

- Desde um ponto de vista físico-matemático, o campo elétrico $\mathbf{E}$ não é uma função vetorial qualquer, ele é um tipo de função vetorial especial, cujo rotacional é sempre nulo. $\mathbf{E} = y\hat{\mathbf{x}}$, p.ex., não poderia ser de forma alguma um campo eletrostático, nemhum conjunto de cargas, sejam quaisquer tamanho e configuração de cargas, poderia produzir um campo assim. Por própriedades vetoriais (demostração feita no livre referência: Reitz-Milford) quando o rotacional de uma grandeza vetorial é sempre nulo, esta pode ser escrita como o gradiente de um potencial escalar, neste caso, dado pela equação geral

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\boldsymbol{\nabla} V\left(\mathbf{r}\right) \tag{19}$$

Deve-se observar que é convencional a inclusão do sinal negativo na eq.(19) e a denominação de V para o *potencial elétrico* (ou também chamado *diferença de potencial eletrostático* $\varphi = V$).

- Em um campo E uniforme, o deslocamento de uma carga de prova na direção do campo por uma distância d, está dada por

$$\Delta V = V_B - V_A = -\int \mathbf{E}\cdot d\mathbf{r} = -\int E dr\cos(0) = -Ed$$

- Agora temos que encontrar a forma formal da função V. A vista da eq.(2) é fácil ver que o potencial eletrostático devido a uma carga puntual q_1 é exatamente

$$V\left(\mathbf{r}\right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r} \tag{20}$$

que pode se verificar facilmente por diferenciação direta. Com esta indicação, é fácil ver que o potencial que dá o campo elétrico da eq.(5) é soma dos seguintes termos

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{i=1}^{N}\frac{q_i}{r} \qquad \rightarrow \qquad \text{para um sistema de cargas} \tag{21}$$

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \frac{\rho}{r}\; dV \qquad \rightarrow \qquad \text{para uma distribuição de cargas ao interior dum volume} \tag{22}$$

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_S \frac{\sigma}{r}\; dS \qquad \rightarrow \qquad \text{para uma distribuição de cargas numa superfície} \tag{23}$$

- Pode-se compreender a utilidade do potencial eletrostático no cálculo dos campos elétricos, comparando as eqs.(5) e (21). A eq.(5) é uma equação vetorial; para obter o campo elétrico a partir dela, é necessário resolver três somas ou três integrais para cada termo. Na melhor das hipóteses, é um procedimento tedioso; em alguns casos, é quase impossível resolver as integrais. Estas últimas três eqs. a partir da (21), por outro lado, são equações escalares e envolvem somente a soma ou integral por termo. Além disso, os denominadores que aparecem nesta equação são todos da forma $r = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ o que simplifica as integrais, em comparação com as da eq.(5).

- No sistema MKS, a unidade de energia é o newton-metro ou joule. A unidade de potencial é joule/coulomb, unidade que ocorre tão freqüentemente que lhe é dado um nome especial, volt (V). A unidade do campo elétrico é o newton/coulomb ou volt/metro.