

MÉTODOS NUMÉRICOS PARA RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS (Métodos de Euler e Runge-Kutta)

Ellison Souza da Silva¹

RESUMO

Neste trabalho são apresentados os métodos numéricos de Euler, Euler Melhorado e Runge-Kutta de 4ª ordem cujo principal uso é a solução de Equações Diferenciais Ordinárias (EDO,s). Para análise comparativa entre os métodos, foram efetuados cálculos no software desenvolvido pela empresa Microsoft, amplamente difundido chamado Excel. As conclusões se basearam no resultados obtidos para aos erros considerando os resultados, analítico e aproximados, para uma EDO dada em diversos pontos. concluiu-se que o método Runge-Kutta de 4ª ordem tem erro inferior aos demais sendo neste caso o mais eficiente.

Palavras-chave: Equações diferenciais, Erro, Método de Euler, Método de Euler Melhorado, Método de Runge-Kutta.

ABSTRACT

This paper presents the numerical methods of Euler, Euler improved and Runge-Kutta 4th order which main use is the solution of ordinary differential equations (ODE, s). For comparative analysis between the methods, calculations were made on software developed by company company Microsoft called Excel. The conclusions were based on the results obtained for the errors considering the results, analytical and approximate to an ODE given at various points. it was concluded that the Runge-Kutta method of 4th order have error inferior to the other in which case the most efficient.

Keywords: Differential Equations, Euler method, Euler Improved Method, Runge-Kutta methods, error.

*Artigo apresentado como parte da avaliação da disciplina de Trabalho de Conclusão de Curso.

¹Acadêmico de Licenciatura Plena em matemática da Universidade Federal do Amapá - UNIFAP.
e-mail: ellisonsouza@yahoo.com.br

1 INTRODUÇÃO

Chama-se equação diferencial uma equação em que a incógnita é uma função, e apresenta uma relação com as derivadas desta função. As equações diferenciais são utilizadas em problemas de modelagem matemática e quando a função desconhecida depende de uma única variável independente, são chamadas de equações diferenciais ordinárias. Diversos problemas técnicos e científicos são descritos matematicamente por **Equações Diferenciais Ordinárias (EDO's)** que representam variações das quantidades físicas que os descrevem. As EDO's, que são aquelas equações que envolvem uma função desconhecida e suas derivadas ordinárias, são de grande interesse nas ciências exatas e em outras áreas do conhecimento humano, uma vez que muitas leis e relações físicas podem ser formuladas matematicamente por meio de uma equação diferencial ordinária.

São exemplos de equações diferenciais a:

Reação química de 1ª ordem $A \xrightarrow{\quad} B$, descrita pela equação $\frac{dC_A}{dt} = -kC_A$, onde C_A é a concentração de do reagente A , k é a constante e t o tempo decorrido desde o tempo da reação, e a condução de calor num material sólido, descrito pela equação de Fourier $q = kA \cdot \frac{dT}{dx}$, na qual q é o fluxo térmico, k é a condutividade térmica a área de secção transversal ao fluxo térmico, T a temperatura e x a coordenada espacial na direção do fluxo de calor.

Há vários métodos para se resolver analiticamente uma EDO, entretanto nem sempre é possível obter uma solução analítica ou se torna muito complexo tal resolução. Neste caso, os métodos numéricos são uma saída para se encontrar uma solução tão aproximada quanto se queira. O principal objetivo deste trabalho é apresentar e comparar três métodos numéricos (Euler, Euler melhorado e Runge-Kutta) utilizando uma mesma EDO para verificar a aproximação de cada método. Ela exige uma sequência de operações algébricas e lógicas que produzem a abordagem ao problema de matemática. Assim percebe-se que os métodos numéricos são os algoritmos (conjuntos detalhados e operações sequenciadas) que nos levam a estimativas dos problemas.

2 NOÇÕES BÁSICAS

De acordo com Boyce e Diprima em os trabalhos iniciais em métodos numéricos se iniciaram com Isaac Newton e Leibniz, mas foi com Leonhard Euler no sec. XVIII que os métodos numéricos tiveram forma mais concreta, Euler deduziu um processo iterativo que permitia determinar, de forma aproximada, a solução de um problema de condição inicial num determinado ponto. A demonstração deste método foi feita depois por Cauchy e melhorado por Lipschitz. A continuação desses processos de iteração numérica ou como chamamos métodos numéricos vieram sobretudo, por Carl Runge em 1895 e 1908 e por Martin Wilhelm Kutta em 1901, tendo sido considerados como generalizações das regras de integração. Para saber mais sobre história de métodos numéricos consulte o livro Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno de BOYCE, E. William, DIPRIMA, C. Richard.

Os métodos numéricos podem ser divididos em métodos de passo único aos quais pertence o método de Euler-Cauchy-Lipschitz; por outro os chamados métodos de passo múltiplo. A maior expansão dos métodos numéricos se deram com o aparecimento dos primeiros computadores. Maiores detalhes sobre classificação se encontram em Solução Numérica de Equações Diferenciais Ordinárias e Parciais de Helena.

DEFINIÇÃO: Derivadas no Ponto x_0 seja f uma função definida em um intervalo aberto I e x_0 um elemento de I . Chama-se *derivada* de f no ponto x_0 o limite.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right)$$

se este existir e for finito.

A derivada de f no ponto x_0 é habitualmente indicada com uma das seguintes notação:

$$f'(x_0), \left[\frac{df}{dx} \right]_{x=x_0} \text{ ou } Df(x_0)$$

assim a derivada de uma função é a aproximação se da através da reta tangente no ponto x_0

DEFINIÇÃO: O problema do valor inicial (PVI) consiste de uma equação diferencial $y' = f(x, y)$, e uma condição inicial $y(x_0) = y_0$, em que y_0 é um valor dado, chamado de problema de valor inicial. Assim temos um problema de valor inicial:

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Resolver o PVI significa determinar uma função $y(x)$ que satisfaça a equação isto é, $y' = f(x, y)$ e $y(x_0) = y_0$.

Para garantir a existência de unicidade de solução considera-se o **TEOREMA DE LIPSCHITZ** nos diz que seja a função $f = f(x, y(x))$ continua em x e localmente lipsiana em y no ponto y_0 . seja $y(x_0) = y_0$, então existe um intervalo $[x_0 - h, x_0 + h]$ tal que a equação diferencial $\frac{dy(x)}{dx} = f(x, y(x))$ possui solução única.

assim atendem-se essas seguintes condições

1. f é contínua em $\mathbb{R} \times I$
2. f é lipschitziana em relação a segunda variável, isto é existe uma constante positiva L (chamada constante de Lipschitz) tal que

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L |y_1 - y_2| \quad \forall t \in I \text{ e } \forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}.$$

Então o problema de Cauchy admite uma única solução $y = y(x)$.

DEMONSTRAÇÃO: O PVI $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ com $y(x_0) = y_0$, onde isso é igual a equação integral $y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, y(s))dx$, assim $y(x)$ é continua e diferenciavel

De fato se $y(x)$ é continua, então por composição de funções continuas temos que $f(x, y(x))$ é contínua; pelo que $\frac{dy}{dx} = f(x, y(x))$ é contínua, e, $y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, y(s))dx$ sendo a integral indefinida de uma função contínua, tem derivada contínua. Defina-se por recorrência a seguinte sequência de funções $y_n(x)$:

$$y(x_{n+1}) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, y(s)) dx$$

com condição inicial $y(x_0) = y_0$

onde $y(x_n)$ será convergente em $[x_0 - h, x_0 + h]$, para $h > 0$, desta forma o $\lim_{n \rightarrow \infty} y(x_n)$ é a função limite $y(x)$ e continua.

Exemplo:

Encontre a solução particular da equação diferencial $\frac{dy}{dx} = 4 - x + 2y$ com a condição inicial $y(0) = 1$.

Veja que a equação $\frac{dy}{dx} = 4 - x + 2y$ pode ser resolvida fazendo a multiplicação pelo seu fator integrante e^{-2x} , o que leva a integração da equação $e^{-2x} \frac{dy}{dx} - (2e^{-2x} \cdot y) = 4e^{-2x} - xe^{-2x}$ assim $(2e^{-2x} \cdot y) = 2e^{-2x} - \frac{1}{2}xe^{-2x} + \frac{1}{4}e^{-2x} + c$, onde realizando a integração por partes teremos a solução geral que é $y = -\frac{7}{4} + \frac{1}{2}x + ce^{2x}$. A condição inicial dada é que a função $y(0) = 1$, ou seja, $y = 1$, e se $x_0 = 0$, que substituindo na solução geral teremos que $1 = -\frac{7}{4} + \frac{1}{2} \cdot 0 + ce^{2 \cdot 0}$, assim temos $1 = -\frac{7}{4} + c$, isolando c tem-se $c = 1 + \frac{7}{4}$, que vem ser $c = \frac{11}{4}$. Logo a solução particular é $-\frac{7}{4} + \frac{1}{2}x + \frac{11}{4}e^{2x}$.

SOLUÇÃO DE UMA EDO

Uma função $y = f(x)$ com derivadas até a ordem n é uma **solução** de uma E.D.O. $F(x, y, y', y'', \dots, y^n) = 0$ se, e somente se, a substituição da função $y = f(x)$ e de suas respectivas derivadas na equação, a tornarem uma identidade em x , ou seja, y e suas derivadas satisfizerem a igualdade $F(x, y, y', y'', \dots, y^n) = 0$.

De um modo geral, podemos apresentar a solução de uma equação diferencial ordinária $F(x, y, y', y'', \dots, y^n) = 0$ de duas formas (Boyce, pg 07)

- **A solução geral**, que é uma expressão que depende de um ou mais parâmetros e engloba todas as soluções da equação. Representa uma família de curvas chamadas curvas integrais ou primitivas

Exemplo

A solução geral da equação diferencial $y' = 2x$ é a família das funções $f(x) = x^2 + C$ constituída de todas as parábolas com concavidade para cima e vértice sobre o eixo y , pois para cada valor da parâmetro C temos uma solução da equação.

- **A solução particular** que é uma função específica dentro da família de funções que compõem a solução geral. Para se obter essa função é necessário que sejam atribuídas condições iniciais que permitam determinar valores particulares para as constantes. De uma maneira geral, para se obter uma solução particular de uma equação diferencial $F(x, y, y', y'', \dots, y^n) = 0$, com condições iniciais: $y_0 = f(x_0)$; $y_0' = f'(x_0)$; $y_0'' = f''(x_0)$; \dots ; $y_0^n = f^n(x_0)$, onde $x_0 \in D$, devemos encontrar a solução geral para em seguida aplicar essas condições.

FORMA DE SOLUCIONAR UMA EQUAÇÃO DIFERENCIAL

há varias formas de se solucionar equações diferenciais. Sendo que destas forma a que se da prioridade é o método analítico que se da através de integração, entretanto nem sempre é possível obter uma solução analítica ou se torna muito complexo tal resolução de equação diferencial, o método qualitativo, discute-se o comportamento geométrico das soluções e os aspectos das curvas integrais descritos por meio de campos de direções. Este procedimento, no estudo das equações diferenciais ordinárias de 1ª ordem, é baseado na interpretação da derivada. Já os métodos numéricos aproximam a solução particular de equações diferenciais.

DEFINIÇÃO: SERIE DE TAYLOR é um método de aproximação de uma função através do polinômio truncado com um determinado erro possível e estimado.

dada uma determinada função f onde esta é diferenciável num ponto x_0 , sendo finita a derivada de qualquer ordem da função f em $x = x_0$, $f_n(x)$, podemos escrever:

$$f(x) = f(x_0)(x - x_0)^0 + f(x_0) \frac{(f'(x_0)(x-x_0)^1)}{1!} + f(x_0) \frac{(f''(x_0)(x-x_0)^2)}{2!} + \dots + f(x_0) \frac{(f^n(x_0)(x-x_0)^n)}{n!}$$

ou seja a série de Taylor é uma expansão da função $f(x)$ na vizinhança de um ponto x_0 .

MÉTODOS NUMÉRICOS PARA EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS

Os métodos numéricos são algoritmos aritméticos que apresentam resultados aproximados de EDO's, desta forma percebe-se que se tem um valor $y_n \cong y(x_n)$ com y_n sendo o valor aproximado e $y(x_n)$ o valor exato, sendo os seguintes métodos apresentados e demonstrados. O primeiro método apresentado será o método de Euler que vem ser o método que servil de base para os demais métodos, após este vira o método de Euler Melhorado que como o nome no diz é um aperfeiçoamento do método de Euler, e por ultimo teremos o método de Runge-Kutta de quarta ordem.

MÉTODO DE EULER

Este é o mais simples e mais antigo dos métodos numéricos utilizados na solução particular de equações diferenciais, foi criada no séc. XVIII pelo matemático LEONHARD EULER (1707 – 1783), foi aluno de Johann Bernoulli. Ele seguiu seu passos de Daniel Bernoulli, indo para São Petersburgo em 1727. Durante o resto de sua vida esteve associado à Academiade São Petersburgo (1727-1741 e 1766-1783) e à Academiade Berlim (1741-1766). Euler foi o matemático mais **prolífico** de todos os tempos; suas obras completas enchem mais de 70 volumes. Seus interesses incluíam todas as áreas da matemática e muitos campos de aplicação. O método de Euler foi criado por volta do ano de 1768, este método é conhecido como método da reta secante ou método de Euler. [Boyce, 2006]

Vamos considerar a PVI $\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$

O método de Euler é baseado na expansão da função $y(x)$ em series de Taylor, assim, pode-se expandir a função $y(x)$ na vizinhança do ponto x_n , ate a ordem 1, podemos escrever:

$$y(x_n + h) \cong y(x_n) + h \cdot y'(x_n)$$

e como $(x_n + h) = x_{n+1}$ e sendo $y'(x_n) = f(x_n, y(x_n))$ então temos

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + h \cdot f(x_n, y(x_n))$$

assim para $n = 0$ temos

$$y(x_1) = y(x_0) + h \cdot f(x_0, y(x_0))$$

E $y(x_1) \cong y_0 + h \cdot f(x_0, y_0)$ chamado, $y_1 = y(x_0) + h \cdot f(x_0, y(x_0))$ temos o valor aproximada da função $y(x_0)$ no ponto x_1 , isto é $y(x_1) \cong y_1$.

Portanto o método de Euler aproxima o valor y_1 do valor exato $y(x_1)$ no ponto x_1 .

Ao continuar repetindo esse procedimento para os pontos $x_2, x_3, x_4, \dots, x_n$, onde $n = 1, 2, 3, \dots$, com N de um intervalo $I = [a, b]$ temos as aproximações $y_2, y_3, y_4, \dots, y_n$, dos valores exatos $y(x_2), y(x_3), y(x_4), \dots, y(x_n)$: de uma forma geral temos:

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot f(x_n, y_n), \text{ para } n = 1, 2, 3, \dots$$

Por outro lado sabe-se que método de Euler aproxima o valor exato da função $y(x_n)$ através da reta tangente no ponto $(x_n, y(x_n))$ da seguinte forma:

$$(y - y_0) = m(x - x_0)$$

Com $m = y'(x_0) = f(x_0, y_0)$ é a inclinação da reta tangente.

e se considerarmos a uniformidade para o passo $h = (x - x_0)$ entre os pontos $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ onde este pertence ao intervalo $I = [a, b]$, temos

$$y_1 = y_0 + f(x_0, y_0) \cdot h$$

Desta forma o ponto (x_1, y_1) pertence a reta tangente, e isso vale para as demais aproximações, como mostra o gráfico:

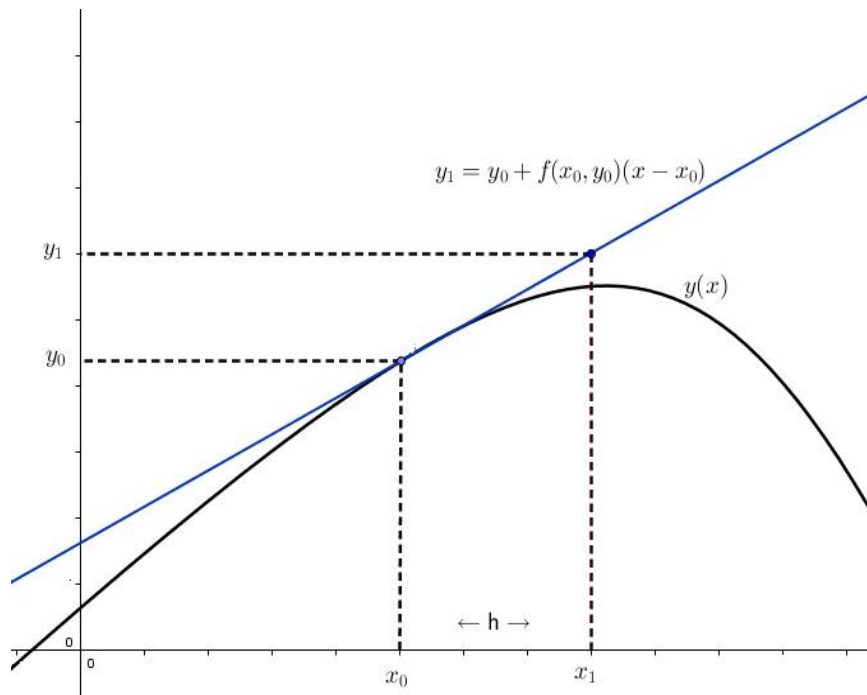


figura 03 – gráfico–

Mediante a ser uma aproximação os métodos numéricos possuem erros nesta aproximação para análise dos erros devemos ter a noção no que se refere ao erro

MÉTODO DE EULER MELHORADO

O método de Euler comparado a outros métodos numéricos percebe-se que é uma ferramenta simples, mas que para determinados problemas ele se torna falho, assim na busca por melhorar os erros $e_n = y(x_n) - y_n$ criou-se o **método de Euler melhorado**, que consiste em uma aproximação semelhante ao primeiro método utilizado, onde para fazer a aproximação $y(x_1)$ devemos realizar todos os passos do método de Euler, desta forma observamos que o método de Euler melhorado é uma modificação do método de Euler, onde este método é escrito da seguinte forma:

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot \left(\frac{f(x_n, y_n) + f(x_n + h, y_n + h \cdot y_n)}{2} \right)$$

Sendo $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

para um melhor entendimento observe a figura

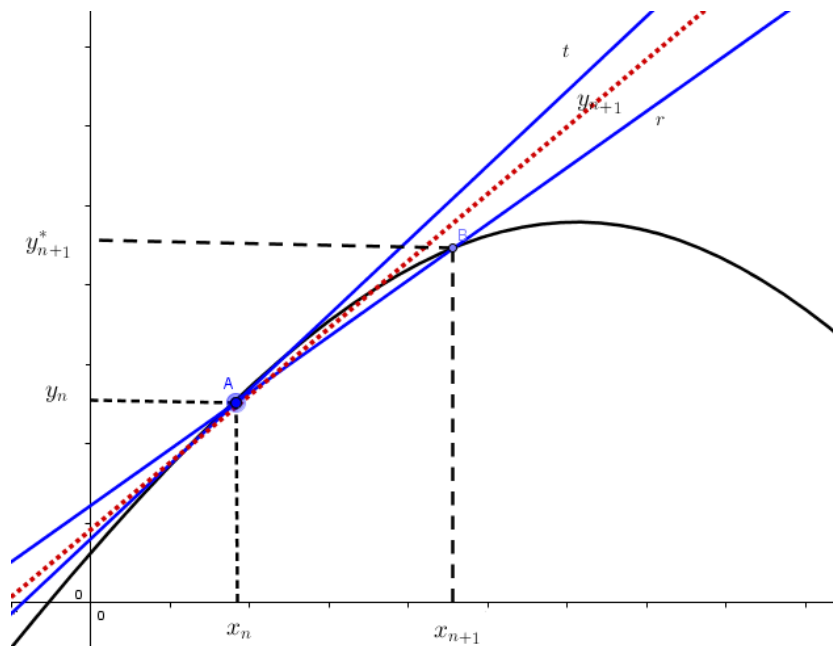


Figura 04 – Gráfico Método de Euler Melhorado

Para realizar essa aproximação necessita-se que seja realizado o método de Euler. Onde teremos $f(x_n, y_n) = k_n$ como a inclinação da reta tangente no ponto inicial $A = (x_n, y_n)$. E utilizando o método de Euler calcula-se $y_{n+1}^* = y_n + h \cdot f(x_n, y_n)$ e assim tem-se $y_{n+1}^* = k_{n+1}$, sendo a inclinação da reta que passa pelo ponto $B = (x_{n+1}, y_{n+1}^*)$, e assim tem-se a modificação no método onde se faz a media sendo $med = \left(\frac{k_n + k_{n+1}}{2} \right)$

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot \left(\frac{f(x_n, y_n) + (f(x_{n+1}, y_{n+1}^*))}{2} \right)$$

Logo temos $y_{n+1} = y_n + h \cdot \left(\frac{k_1 + k_2}{2} \right)$, com $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

MÉTODO DE RUNGE-KUTTA

Carl David Runge (1856-1927). Matemático e físico alemão. A análise de dados o levou a considerar problemas em computação numérica, e o método de Runge-Kutta tem origem em seu artigo sobre soluções numéricas de equações diferenciais de 1895. O método foi estendido para sistemas de

equações em 1901 por M. Wilhelm Kutta (1867-1944). Kutta era um matemático alemão que trabalhava com aerodinâmica e é, também, muito conhecido por suas contribuições importantes à teoria clássica de aerofólio.

o método de Runge-Kutta é um método de quarta ordem, esse método possui um erro de truncamento igual a h^5 , sendo assim é duas ordens de grandezas mais preciso que o método de Euler aperfeiçoado e três ordens de grandezas mais preciso que o método de Euler. Este método é relativamente simples de usar e suficientemente preciso para tratar de muitos problemas de forma eficiente. [Boyce 2006].

O método de Euler Melhorado pode ser considerado como um Runge-Kutta de segunda ordem. No método de Euler a estimativa do valor de y_{n+1} é realizado com o valor de y_n e com a derivada no ponto x_n . No método de Runge-Kutta, busca-se uma melhor estimativa da derivada com a avaliação da função em mais pontos no intervalo $[x_n, x_{n+1}]$. em vez de calcular a derivada esse método simula os efeitos de derivadas de ordem superior determinando o valor de f varias vez entre x_n e x_{n+1} .

O método de Runge-Kutta de 4ª ordem é o mais usado na solução numérica de problemas com equações diferenciais ordinárias. A seguir será discutido o método de Runge-Kutta de 2ª ordem, ilustrado pela Figura 3. No método de Euler de passo h , a estimativa de y_{n+1} é realizada com os valores de x_n e da derivada de y_n . No método de Runge-Kutta de 2ª ordem, o valor da estimativa de y_{n+1} é encontrado com o valor de y_n e com uma estimativa da derivada em um ponto mais próximo de x_{n+1} , em $x_n + \frac{h}{2}$:

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_{n+\frac{1}{2}}\right)$$

Na equação $y_{n+\frac{1}{2}}$ é o valor de y em $x_n + \frac{h}{2}$ uma estimativa do valor de $y_{n+\frac{1}{2}}$ é obtido com auxilio do método de Euler:

$$y_{n+\frac{1}{2}} = y_n + \frac{h}{2} \cdot f(x_n, y_n)$$

denominando

$$k_1 = h \cdot f(x_n, y_n)$$

$$k_2 = h \cdot f\left(x_n + \frac{1}{2} \cdot h, y_n + \frac{1}{2} \cdot k_1\right)$$

assim

$$y_n + h \cdot f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_{n+\frac{1}{2}}\right) = y_n + k_2$$

O método de Runge-Kutta de 4ª ordem tem as seguintes equações:

$$k_1 = h \cdot f(x_n, y_n)$$

$$k_2 = h \cdot f\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_1\right)$$

$$k_3 = h \cdot f\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_2\right)$$

$$k_4 = h \cdot f(x_n + h, y_n + k_3)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2 \cdot k_2 + 2 \cdot k_3 + k_4)$$

e

$$x_{n+1} = x_n + h$$

ERROS

O conhecimento de uma aproximação para a solução de um problema só tem qualquer interesse se é acompanhada de informação sobre o seu erro.

ERRO

Seja y_n o valor aproximado e $y(x_n)$ o valor exato temos a definição de **erro** como $E_n = y(x_n) - y_n$. Existem vários critérios para se analisar e avaliar a qualidade de uma aproximação.

Erro absoluto

O erro absoluto do valor aproximado $y(x)$, define-se como o valor absoluto de Δx , é

$$e_{An} = y(x_n) - y_n$$

Erro relativo

Se $x \neq 0$, o erro relativo do valor aproximado y_n , define-se como o erro absoluto sobre o valor exato.

$$e_{re} = \frac{y(x_n) - y_n}{y(x_n)}$$

Considerando os métodos numéricos estudados, onde esses também chamados métodos de um passo, dizemos que o método possui **ordem consistente**, se o erro de truncamento local de interação satisfaz a inequação:

$$\|e(x, h)\| \leq C \cdot h^{p+1}$$

Para $x \in [a, b]$, $0 \leq h \leq b - x$ para alguma constante $C \geq 0$ independente de x ou h .

ERROS DE APROXIMAÇÃO

A forma para achar soluções aproximadas utilizando Métodos numéricos acontecem índices de erro e a cada passo ocorrerá o aumento gradativo de erro, pois há uma acumulação, o que nos distanciará ainda mais da solução real do problema a ponto até mesmo de tornar os cálculos inúteis. Os erros cometidos são de duas naturezas.

DEFINIÇÃO: Erro de arredondamento se da quando utilizamos uma ferramenta como computador ou uma calculadora para realizar a aproximação de uma equação diferencial, por apresentarem casas decimais finitas.

Assim o erro de arredondamento dependerá do tipo de máquina utilizado. Sendo assim, será feita uma análise superficial e sem muito rigor matemático.

Se efetuarmos o cálculo em aritmética com apenas um número finito de dígitos isso nos leva a um erro de arredondamento E_{Ar} definido por:

$$E_{Ar} = y_n - Y_n$$

Onde Y_n é o valor computado pelo método numérico.

O valor absoluto do erro total em se calcular $y(x_n)$ é dado por:

$$|y(x_n) - y_n| = (y(x_n) - y_n + y_n - Y_n) \leq |y(x_n) - y_n| + |y_n - Y_n| \leq |E_R| + |E_A|$$

Logo o erro é limitado pela soma dos valores absolutos dos erros de interação e de arredondamento.

DEFINIÇÃO: Erros de truncamentos são causados pelo tipo de técnica empregada para a atualização do valor de y

Como podemos observar nas tabelas acima, as fórmulas de Euler e Runge-Kutta carregam um erro a cada passo. O método de Euler possui em cada interação um erro proporcional (h^2), para um intervalo.

Para verificação do erro de truncamento será utilizado a série de Taylor com resto. onde esta é escrita da seguinte forma:

$$y(x) = y(a) + y'(a) \frac{(x-a)}{1!} + y''(a) \frac{(x-a)^2}{2!} + \dots + y^n(a) \frac{(x-a)^n}{n!} + y^{(n+1)}(C) \frac{x-a}{n+1} + R_n$$

Onde C é um ponto entre a e x e R_n o resto.

$$a = x_n \text{ e } x = x_{n+1} = x_n + h$$

$$\text{Com } y_{n+1} = y_n + y'(x_n)h + \frac{y''(x_n)h^2}{2!} + \dots + y^n \frac{h^n}{n!}$$

No Método de Euler, truncamos a Série de Taylor em $P = 1$, e o erro é dado por $E = y'' \frac{(C)h^2}{2!}$, $C \in [a, b]$

Os erros de truncamento podem ser separados em duas partes:

Erro de truncamento local: erro cometido num ponto genérico x_{n+1} , determinado pela diferença do valor aproximado y_{n+1} e o valor no ponto x_{n+1} da solução da equação diferencial que passa em y_{n+1} ;

Erro de truncamento acumulado: erros cometidos pelas aproximações produzidas nos passos anteriores. É determinado pela diferença entre o valor aproximado y_{n+1} com o valor exato $y(x_{n+1})$.

- **ERRO de truncamento no método de Euler**

Encontrar o valor C muitas vezes se torna complexo de mais. Mas, uma forma de fazer uma relação é definir um majorante para o erro.

Se $y(x)$ possui **segunda derivada contínua** num intervalo fechado $[x_n, x_{n+1}]$, que contém os pontos sobre os quais está sendo feita a discretização, então existe o máximo $y''(x)$ de neste intervalo que denotamos por:

$$M_2 = \max |y''(x)|, \text{ para } x \in [x_n, x_{n+1}]$$

assim

$$|y''(C)| \leq M_2 \forall C \in [x_n, x_{n+1}]$$

$$E_T = \left| y''C \frac{h^2}{2!} \right|$$

$$\frac{h^2}{2!} |y''C| \leq \frac{M_2 h^2}{2!}$$

Pode-se observar ainda que para a determinação do erro de truncamento local, necessita-se do valor máximo da segunda derivada de , o que restringe sua utilização na prática. Assim sendo, o erro de truncamento local do método de Euler é de ordem $O(h^2)$. isto é o $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{E_T h}{h^2} = 0$

Exemplo

Obtenha um limite para o erro de truncamento local do método de Euler aplicado a

$$\frac{dy}{dx} = 4 - x + 2y \text{ com } y_0 = 1$$

da solução temos $y = -\frac{7}{4} + \frac{1}{2}x + \frac{11}{4}e^{x^2}$, obtemos $y'' = 11e^{x^2}$ e, por tanto, o erro de truncamento local temos:

$$y''(c) \frac{h^2}{2!} = 11e^{c^2} \frac{h^2}{2!}$$

Onde C esta entre x_n e $x_n + h$, com $h = 0,1$, pode-se obter um limite superior para o erro de truncamento local para y_1 com $C = 0,1$:

$$11 \cdot e^{(0,1)^2} \left(\frac{(0,1)^2}{2!} \right) = 0.0555527591896$$

- **Erro de truncamento para o método de Euler melhorado**

O erro local de truncamento do método de Euler melhorado é $O(h^3)$. A obtenção desse resultado é similar à do erro de truncamento local do método de Euler.

- **Erro de truncamento para o método de Runge-Kutta**

Como a primeira equação coincide com um polinômio de Taylor de grau quatro, o erro de truncamento local desse método é:

$$y^5 = (c) \cdot \frac{h^5}{5!}$$

assim da solução temos $y = -\frac{7}{4} + \frac{1}{2}x + \frac{11}{4}e^{x^2}$, obtemos $y^5 = 4e^{x^2}(33x + 22x^3)$ e, por tanto, o erro de truncamento local temos para $(C) = 0,1$:

$$4e^{(0,1)^2}(33(0,1) + 22(0,1)^3) \frac{(0,1)^5}{5!} = 1,3524 \cdot 10^{-6}$$

De maneira análoga, pode-se analisar o erro de truncamento local e global dos métodos de terceira e quarta ordem, portanto o método de Runge-Kutta de terceira possui erro de truncamento local ordem $O(h^4)$ e global $O(h^3)$. O método de Runge-Kutta de quarta ordem possui erro de truncamento local ordem $O(h^5)$ e erro de truncamento global ordem $O(h^4)$, daí o nome do método, Runge-Kutta de *quarta ordem*.

SIMULAÇÃO

As simulações apresentaram uma mesma equação $\frac{dy}{dx} = 4 - x - 2y$ com o mesmo passo $h = 0,1$, para a resolução dos três métodos numéricos, apresentado em cada interação o seu valor aproximado e exato relacionando os erros absoluto e relativo em %, garantindo uma melhor visualização do aproximamento através dos métodos numéricos, haverá a representação gráfica do valores y_n e $y(x_n)$.

EXEMPLO UTILIZANDO O MÉTODO DE EULER

Vamos considerar o seguinte problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = 4 - x + 2y & 0 \leq t \leq 2 \\ y(0) = 1 \end{cases},$$

sendo sua solução exata $y(t) = -\frac{7}{4} + \frac{1}{2}x + \frac{11}{4}e^{2x}$

como passo $h = 0,1$, pertencente ao intervalo $I = [0,1]$

$$y_1 = y_0 + h \cdot f(x_0, y_0) = y_0 + h \cdot f(4 - x + 2y)$$

$$y_1 = 1 + 0,1 \cdot (4 - 0 + 2 \cdot 1) = 1,6$$

Continuando este processo teremos os seguintes resultados

Tabela 01: Resultados do método numérico da equação 1 pelo método de Euler com $h = 0,1$

Método de Euler					
n	x_n	y_n (Aproximado)	y_n (exato)	erro Abs	Erro relativo %
0	0	1	1	0	0
1	0,1	1,6	1,658857585	0,058857585	3,548079442
2	0,2	2,31	2,452517919	0,142517919	5,811085719
3	0,3	3,152	3,410826701	0,258826701	7,588386153
4	0,4	4,1524	4,570237553	0,417837553	9,142578443
5	0,5	5,34288	5,975275028	0,632395028	10,58353005
6	0,6	6,761456	7,680321538	0,918865538	11,96389413
7	0,7	8,4537472	9,751799909	1,298052709	13,31090384
8	0,8	10,47449664	12,27083917	1,796342527	14,6391172
9	0,9	12,88939597	15,33653053	2,447134559	15,95624613
10	1	15,77727516	19,06990427	3,29262911	17,26610193
11	1,1	19,23273019	23,61878712	4,38605693	18,57020391
12	1,2	23,36927623	29,16373505	5,794458814	19,86871299
13	1,3	28,32313148	35,9252796	7,602148117	21,16099917
14	1,4	34,25775778	44,17277862	9,915020845	22,44599764
15	1,5	41,36930933	54,23522654	12,86591721	23,72243656
16	1,6	49,8931712	66,51445804	16,62128685	24,98898335
17	1,7	60,11180544	81,50127513	21,38946969	26,24433748
18	1,8	72,36416652	99,79514472	27,4309782	27,48728736
19	1,9	87,05699983	122,1282574	35,07125753	28,71674278
20	2	104,6783998	149,3949126	44,7165128	29,9317507

Podemos notar que a cada interação o valor do erro, tanto absoluto quanto relativo vai aumentando gradativamente, sendo que no final do intervalo $x = 2$ o erro relativo atinge 30% na margem de erro.

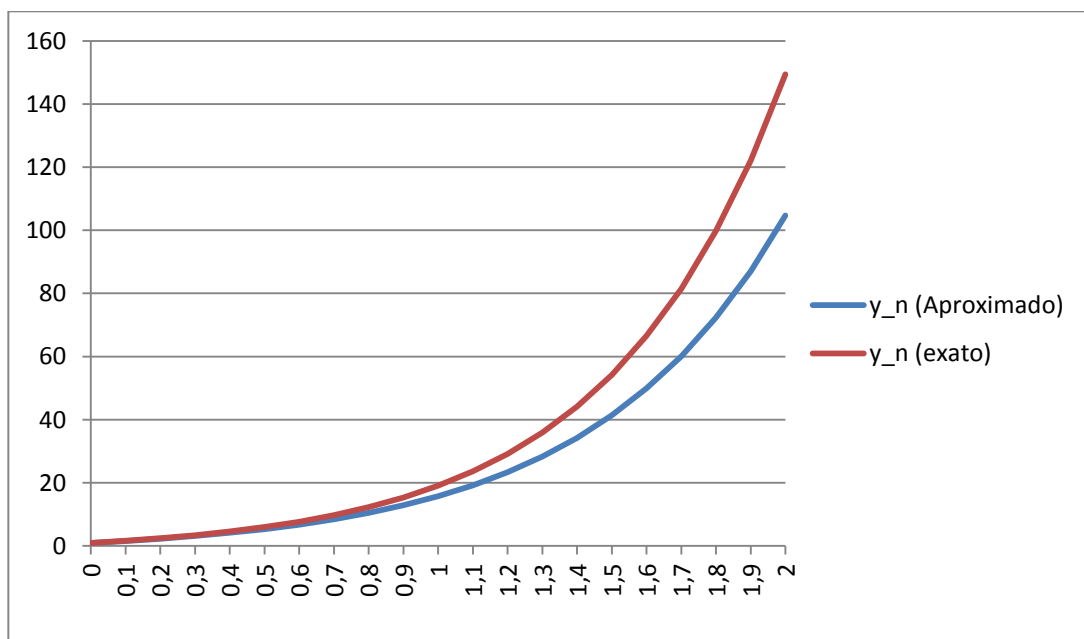


Gráfico 01- Gráfico apresentando os resultados numéricos e analíticos para $h = 0,1$

Podemos notar que no ponto x_0 o erro tanto relativo quanto absoluto é 0 (zero), mas a medida que vai aumentando para os valores x_n temos um aumento gradativo no distanciamento entre o valor exato e aproximado, sendo assim um aumento gradativo dos erros.

Agora verificaremos como se comporta de tal método diminuindo o passo $h = 0,05$

Tabela 02 : Resultados do método numérico da equação 1 pelo método de Euler com $h = 0,05$

n	x_n	y_n (Aproximado)	y_n (exato)	erro Abs	Erro relativo %
0	0	1	1	0	0
1	0,05	1,3	1,314220025	0,014220025	1,082012482
2	0,1	1,6275	1,658857585	0,031357585	1,890312057
3	0,15	1,98525	2,037111721	0,051861721	2,545845685
4	0,2	2,376275	2,452517919	0,076242919	3,108760916
5	0,25	2,8039025	2,908983494	0,105080994	3,612292563
6	0,3	3,27179275	3,410826701	0,139033951	4,076253743
7	0,35	3,783972025	3,962819946	0,178847921	4,513147784
8	0,4	4,344869228	4,570237553	0,225368326	4,931216884
9	0,45	4,95935615	5,238908556	0,279552405	5,336081026
10	0,5	5,632791765	5,975275028	0,342483263	5,731673628
...
35	1,75	76,40670133	90,19249289	13,78579155	15,28485477
36	1,8	84,15987147	99,79514472	15,63527325	15,66736869
37	1,85	92,68585861	110,405087	17,71922838	16,04928619
38	1,9	102,0619445	122,1282574	20,06631288	16,4305242
39	1,95	112,3731389	135,081735	22,70859612	16,81100418
40	2	123,7129528	149,3949126	25,68195978	17,19065217

Observando esta tabela vemos que há uma diminuição nos erros, mas também necessita o dobro de cálculos para se alcançar o final do intervalo.

Ao compararmos as tabelas 01 e 02 podemos perceber que quanto menor o passo $h = \frac{b-a}{N}$ menor o erro $e_n = y(x_n) - y_n$, pois com o passo $h = 0,1$ o erro relativo é de aproximadamente 30%, já com o passo $h = 0,05$ temos uma diminuição considerável no erro relativo que passa a ser de 17%, desta forma percebemos que ao diminuir o passo h , também diminui o erro relativo.

Exemplo utilizando o método de Euler melhorado

Com $x_0 = 0$ e $y_0 = 1$, $f(x_n, y_n) = 4 - x_n + 2y_n$ com $n = 0$ e $h = 0,1$ calculamos primeiro o método de Euler:

$$y_1^* = y_0 + h \cdot f(x_0, y_0)$$

$$y_1^* = 1 + 0,1 \cdot (4 - 0 + 2 \cdot 1) = 1,6$$

$$y_1 = y_0 + h \cdot \left(\frac{f(x_0, y_0) + f(x_1, y_1^*)}{2} \right)$$

$$y_1 = 1 + 0,1 \cdot \left(\frac{(4 - 0 + 2 \cdot 1) + (4 - 0,1 + 2 \cdot (1,6))}{2} \right)$$

$$y_1 = 1 + 0,1 \cdot \left(\frac{6 + 7,1}{2} \right) = 1 + 0,1 \cdot (6,55)$$

$$y_1 = 1,655$$

Tabela 03: Resultados do método numérico da equação 1 pelo método de Euler Melhorado para $h = 0,1$.

n	x_n	y_n^*	y_n (Aproximado)	y_n (exato)	erro Abs	Erro rel %
0	0	1	1	1	0	0
1	0,1	1,6	1,655	1,658857585	0,00385758	0,232544673
2	0,2	2,31	2,4365	2,452517919	0,01601792	0,653121365
3	0,3	3,152	3,37035	3,410826701	0,0404767	1,186712332
4	0,4	4,1524	4,487625	4,570237553	0,08261255	1,807620553
5	0,5	5,34288	5,8256755	5,975275028	0,14959953	2,503642553
6	0,6	6,761456	7,42938865	7,680321538	0,25093289	3,267218518
7	0,7	8,453747	9,352702235	9,751799909	0,39909767	4,092553965
8	0,8	10,4745	11,66042212	12,27083917	0,61041704	4,974533822
9	0,9	12,8894	14,43040393	15,33653053	0,9061266	5,908289323
10	1	15,77728	17,75617184	19,06990427	1,31373243	6,88903527
11	1,1	19,23273	21,75006204	23,61878712	1,86872508	7,912028121
12	1,2	23,36928	26,54699587	29,16373505	2,61673917	8,972579028
13	1,3	28,32313	32,30900861	35,9252796	3,61627099	10,06609003
14	1,4	34,25776	39,23068525	44,17277862	4,94209338	11,18809713
15	1,5	41,36931	47,5456847	54,23522654	6,68954184	12,3343116
16	1,6	49,89317	57,53457029	66,51445804	8,97988775	13,50065537
17	1,7	60,11181	69,53420787	81,50127513	11,9670673	14,68328838
18	1,8	72,36417	83,9490453	99,79514472	15,8460994	15,87862762
19	1,9	87,057	101,2646498	122,1282574	20,8636075	17,08335809
20	2	104,6784	122,0639548	149,3949126	27,3309578	18,29443676

O método de Euler Melhorado tem uma diminuição nos seus erros Absoluto e Relativo, tendo o erro absoluto no valor aproximado de 27,33 e o erro relativo de aproximadamente 18,20.

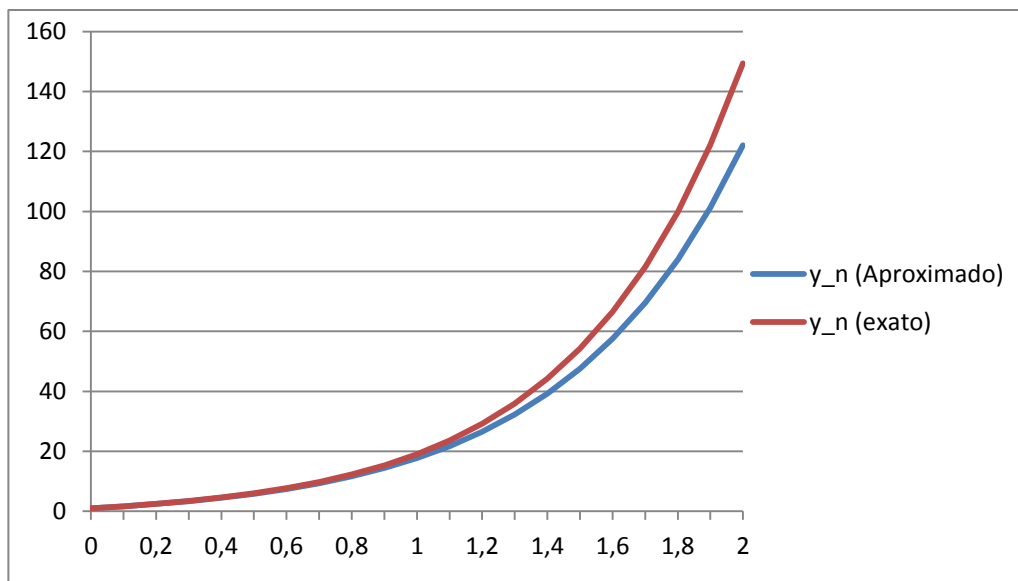


Gráfico 02- Gráfico apresentando os resultados numéricos e analíticos para $h = 0,1$

Este gráfico mostra um distanciamento em menor intensidade se comparado ao gráfico do método de Euler, sendo que assim como o primeiro gráfico vemos que no ponto x_0 os valores de $y(x_n)$ se sobrepõe aos valores de y_n , mas que ao longo do intervalo também a um distanciamento significativo.

Tabela 04: Resultados do método numérico da equação 1 pelo método de Euler melhorado para $h = 0,05$.

n	x_n	y_n^*	$y_n(\text{aproximado})$	$y_n(\text{exato})$	Erro absoluto	erro relativo%
0	0	1	1	1	0	0
1	0,05	1,3	1,31375	1,314220025	0,000470025	0,035764537
2	0,1	1,642625	1,65781875	1,658857585	0,001038835	0,062623516
3	0,15	2,018601	2,035389719	2,037111721	0,001722002	0,084531549
4	0,2	2,431429	2,449980639	2,452517919	0,002537279	0,103456096
5	0,25	2,884979	2,905478606	2,908983494	0,003504888	0,120484977
6	0,3	3,383526	3,40617886	3,410826701	0,004647841	0,136267289
7	0,35	3,931797	3,95682764	3,962819946	0,005992305	0,151213159
8	0,4	4,53501	4,562669543	4,570237553	0,007568011	0,16559338
9	0,45	5,198936	5,229499845	5,238908556	0,009408711	0,179592964
10	0,5	5,92995	5,963722328	5,975275028	0,0115527	0,19334173
11	0,55	6,735095	6,772413173	6,786456566	0,014043393	0,206932632
12	0,6	7,622154	7,663391556	7,680321538	0,016929982	0,220433242
13	0,65	8,599731	8,645297669	8,665565836	0,020268167	0,233893172
14	0,7	9,677327	9,727678924	9,751799909	0,024120984	0,24734905
15	0,75	10,86545	10,92108521	10,94964494	0,028559732	0,260827928
16	0,8	12,17569	12,23717416	12,27083917	0,033665008	0,274349684
17	0,85	13,62089	13,68882745	13,72835533	0,039527882	0,287928751

18	0,9	15,21521	15,29027933	15,33653053	0,0462512	0,301575379
19	0,95	16,97431	17,05725866	17,11120972	0,05395106	0,315296585
20	1	18,91548	19,00714582	19,06990427	0,062758457	0,329096863

Quando observamos os dois métodos percebemos que com na tabela 01(método de Euler) com passo $h = 0,1$ o **erro relativo** é de aproximadamente 30%, já na tabela 03 (método de Euler melhorado) com o passo $h = 0,1$ o erro relativo é de aproximadamente 18%, uma grande diferença com relação ao erro, e isso se torna mais evidente quando se utiliza o passo $h = 0,05$, pois o erro relativo para o método de Euler é de 17% e o erro para o método de Euler melhorado é de 0,32%.

Exemplo para o método Runge-Kutta

Vamos calcular uma aproximação utilizando o método de Runge-Kutta para a equação $\frac{dy}{dx} = 4 - x + 2y$ para $y(0) = 1$ no intervalo $0 \leq x \leq 2$ e passo $h = 0,1$ sendo

$$k_1 = (0,1) \cdot (4 - 0 + 2 \cdot 1) = 0,6$$

$$k_2 = (0,1) \cdot \left(4 - \left(0 + \frac{0,1}{2}\right) + 2 \cdot \left(1 + \frac{0,6}{2}\right)\right) = 0,655$$

$$k_3 = (0,1) \cdot \left(4 - \left(0 + \frac{0,1}{2}\right) + 2 \cdot \left(1 + \frac{0,655}{2}\right)\right) = 0,605$$

$$k_4 = (0,1) \cdot (4 - (0 + 0,1) + 2 \cdot (1 + 0,605)) = 0,7221$$

$$y_1 = 1 + \frac{1}{6}(0,6 + 2 \cdot (0,655) + 2 \cdot (0,605) + 0,7221) = 1,65885$$

Tabela 05: Resultados do método numérico de RUNGE-KUTTA para $h = 0,1$.

n	x_n	k_1	k_2	k_3	k_4	$y_n(\text{aprox})$	$y_n(\text{exato})$	erro abs	erro rel%
0	0					1	1	0	0
1	0,1	0,6	0,655	0,6605	0,7221	1,65885	1,65886	$7,6E-06$	0,00046
2	0,2	0,72177	0,78895	0,79566	0,8709	2,4525	2,45252	$1,9E-05$	0,00076
3	0,3	0,8705	0,95255	0,96075	1,05265	3,41079	3,41083	$3,4E-05$	0,001
4	0,4	1,05216	1,15237	1,1624	1,27464	4,57018	4,57024	$5,5E-05$	0,00121
5	0,5	1,27404	1,39644	1,40868	1,54577	5,97519	5,97528	$8,4E-05$	0,00141
6	0,6	1,54504	1,69454	1,70949	1,87694	7,6802	7,68032	0,00012	0,00161
7	0,7	1,87604	2,05864	2,0769	2,28142	9,75162	9,7518	0,00018	0,00181
8	0,8	2,28032	2,50336	2,52566	2,77546	12,2706	12,2708	0,00025	0,00201

9	0,9	2,77412	3,04653	3,07377	3,37887	15,3362	15,3365	0,00034	0,0022
10	1	3,37724	3,70996	3,74323	4,11589	19,0694	19,0699	0,00046	0,00241
11	1,1	4,11389	4,52028	4,56092	5,01607	23,6182	23,6188	0,00062	0,00261
12	1,2	5,01363	5,51	5,55963	6,11556	29,1629	29,1637	0,00082	0,00282
13	1,3	6,11258	6,71884	6,77947	7,45848	35,9242	35,9253	0,00109	0,00303
14	1,4	7,45484	8,19532	8,26937	9,09871	44,1713	44,1728	0,00143	0,00324
15	1,5	9,09427	9,9987	10,0891	11,1021	54,2334	54,2352	0,00187	0,00345
16	1,6	11,0967	12,2013	12,3118	13,549	66,512	66,5145	0,00244	0,00366
17	1,7	13,5424	14,8916	15,0266	16,5377	81,4981	81,5013	0,00316	0,00388
18	1,8	16,5296	18,1776	18,3424	20,1881	99,7911	99,7951	0,00409	0,0041
19	1,9	20,1782	22,191	22,3923	24,6467	122,123	122,128	0,00527	0,00432
20	2	24,6346	27,0931	27,3389	30,0924	149,388	149,395	0,00678	0,00454

Esta tabela apresenta os valores aproximados e exatos utilizando de Runge-Kutta e ao comparamos os resultados as tabelas 01 método de EULER, tabela 03 Euler Melhorado e tabela 04 método Runge-Kutta percebemos que o métodos de Runge-Kutta é muito mais eficiente mesmo utilizando um mesmo passo h , sendo seus valores erro dez vezes menor.

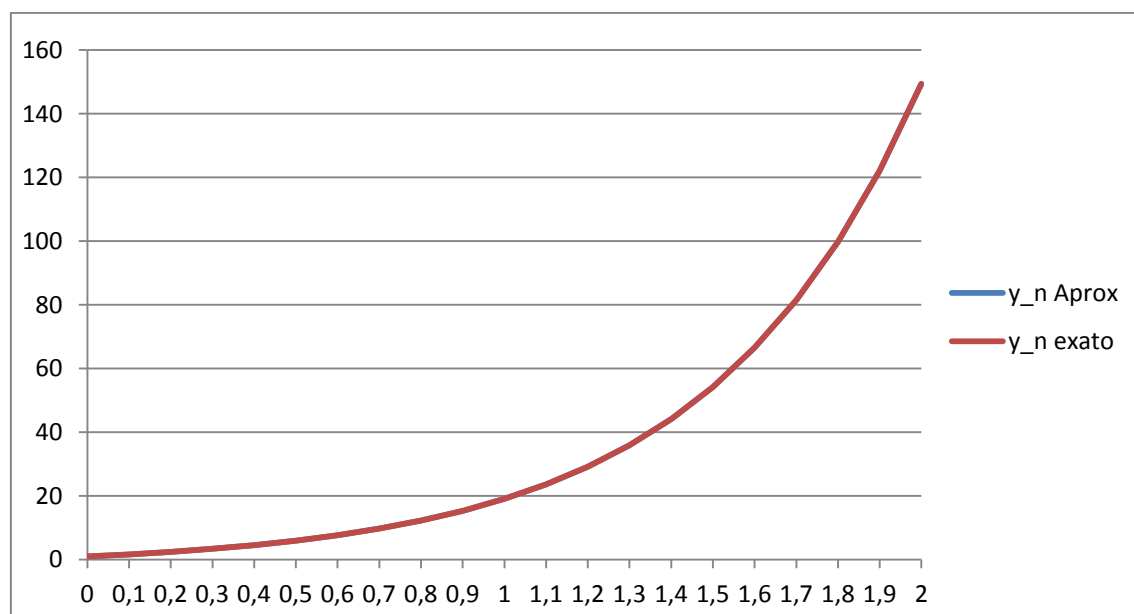


Gráfico 03 – Gráfico apresentando os resultados numéricos de Runge-Kutta e analíticos para $h = 0,1$

Este gráfico mostra que os valores de $y(x_n)$ se sobrepõe a de y_n , assim no intervalo de x_n o erro não é visualmente percebível.

Desta forma o que se pode analisar e que, assim como os demais métodos numéricos há um aumento gradativos no erro, mas em menor escala.

Análise dos erros truncamentos dos métodos numéricos:

Da tabela 01 temos que o valor do erro após o primeiro passo é 0,058857585, maior que o valor dado pelo limite. Assim podemos obter para cada passo um limite para o erro de truncamento local.

Da tabela 04 temos que o valor do erro após o primeiro passo é $7,6^{-6}$, maior que o valor dado pelo limite. Assim podemos obter para cada passo um limite para o erro de truncamento local.

Nos métodos utilizados a análise do erro de truncamento não se fez importante, pois tinha-se o conhecimento do valor exato, assim a análise do erro se deu de forma mais direta, mas para um problema onde o valor exato não é conhecido é de extrema importância a estimativa do truncamento já que ele mostrara o comportamento do erro.

CONCLUSÃO

Os métodos apresentados neste trabalho são métodos de prática simples e produzem soluções eficientes para diversos problemas envolvendo equações diferenciais, e mostram de forma aproximada resultados de EDO. E observando os erros, tanto absoluto quanto o erro relativo% podemos concluir que o método de Runge-Kutta de 4ª ordem tem eficácia melhor que os outros métodos apresentados, pois mesmo ao diminuir o passo h no demais o método de Runge-Kutta continuou tendo erro 10 vezes menor.

REFERENCIAS

BARATTO, Giovani. **SOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS USANDO METODOS NUMÉRICOS**. Versão 01, UFSM – Fevereiro de 2017.

BOYCE, E. William, DIPRIMA, C. Richard. **Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno**. oitava edição, editora LTC.

GONÇALVES. Leonardo, Brito, REIS. Tatiane. **Método de Euler e Runge-Kutta para solução de Equações diferenciais ordinárias**. Departamento de Matemática, IFNMG – 2012.

HELNA. Selma. **Solução Numérica de Equações Diferenciais Ordinárias e Parciais**. UFScar – Unidade 06.

NAYARA. Karina, F. Vale, **Métodos Numéricos de Euler e Runge-Kutta**. Monografia – UFMG – Belo Horizonte 2012.