BC0209–Fenômenos Eletromagnéticos

Segundo quadrimestre de 2016

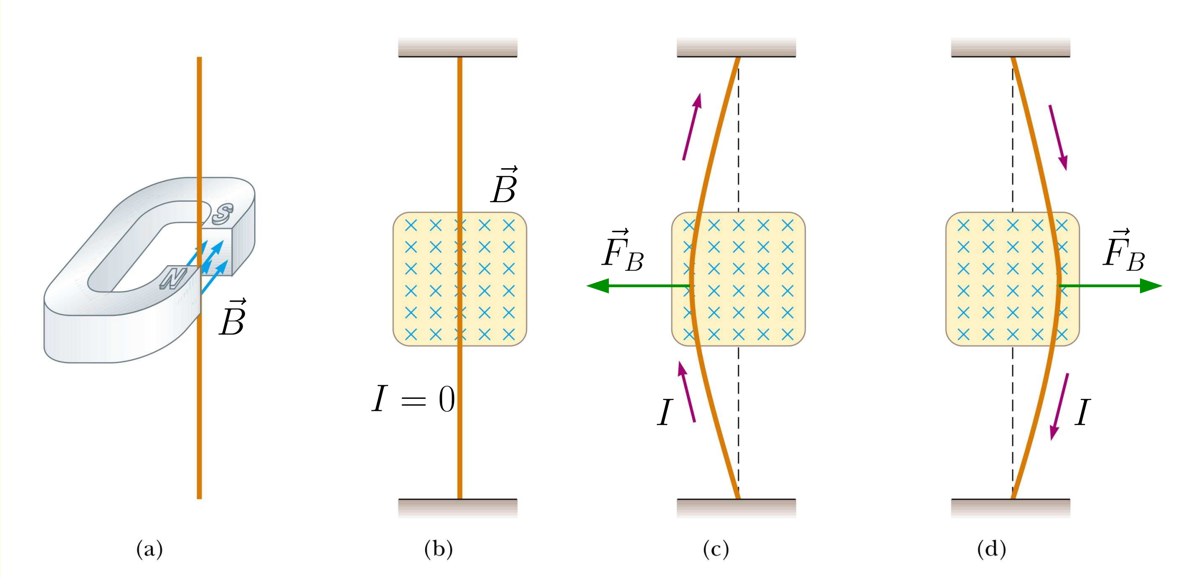
Prof. José Kenichi Mizukoshi

Aula 13 (versão 15/07/2015)

Força magnética sobre um fio. Torque sobre uma espira de corrente. Momento de dipolo magnético. Campo magnético gerado por uma carga em movimento.

Força Magnética sobre um Fio; Torque sobre uma Espira de Corrente; Momento de Dipolo Magnético; Campo Magnético Gerado por uma Carga em Movimento

- Considere um fio flexível na região de um campo magnético $\vec{B}$:



Os seguintes resultados são observados:

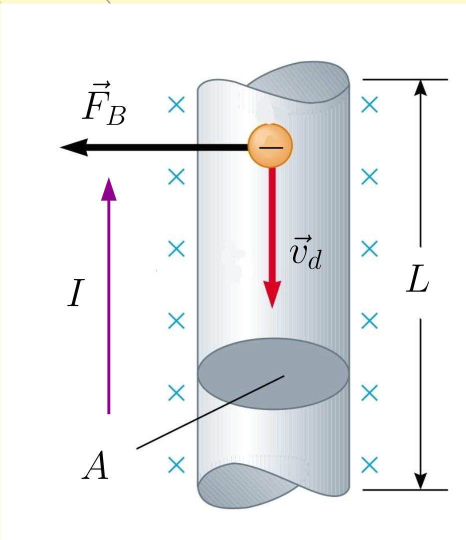
(i) Se não existir corrente no fio, nada ocorre a ele;

(ii) Se existir uma corrente para cima, o fio sofre uma deflexão para à esquerda;

(iii) Se existir uma corrente para baixo, o fio sofre uma deflexão para à direita.

Força magnética sobre um fio

- Levando-se em conta que a corrente I é devida aos elétrons livres movendo-se no fio, no sentido contrário, com velocidade de deriva $\vec{v}_d$, a força magnética sobre eles é



$$\vec{F}_B = -Ne\vec{v}_d \times \vec{B}$$

N é o número total de elétrons, dado por

$$N = nAL$$

onde n é a densidade de elétrons no fio e AL o volume do fio.

- Podemos definir o vetor $\vec{L}$, paralelo ao fio reto, no sentido da corrente elétrica. Temos que

$$\frac{\vec{L}}{|\vec{L}|} = -\frac{\vec{v}_d}{|\vec{v}_d|} \quad \Rightarrow \quad \vec{v}_d = -v_d\frac{\vec{L}}{L}$$

- Segue que

$$\vec{F}_B = -nALe\left(\frac{-v_d}{L}\right)\vec{L}\times\vec{B} \quad \Rightarrow \quad \vec{F}_B = nAev_d\vec{L}\times\vec{B} \quad (\circledast)$$

- Foi visto na Aula 9, p. 7, que

$$\vec{J} = -ne\vec{v}_d$$

Para um cilindro homegêneo e isotrópico, temos que $J = \dfrac{I}{A} = nev_d$, o que implica que $I = nAev_d$. Portanto, a Eq. $(\circledast)$ pode se escrita como

$$\vec{F}_B = I\vec{L}\times\vec{B}$$

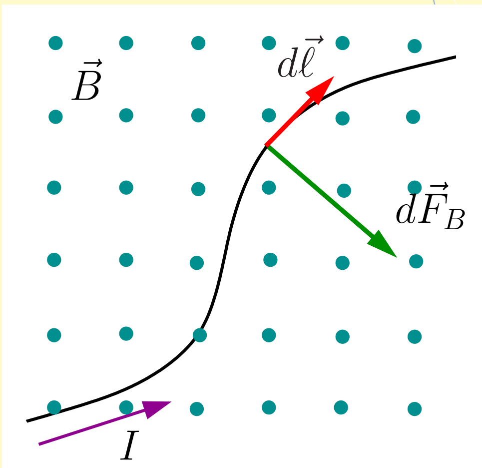
➠ A expressão acima é válida para um fio reto, com campo magnético uniforme (constante) ao longo do fio.

Força magnética sobre um fio

- Se o fio não for reto e/ou o campo magnético não for uniforme, calcula-se a força sobre cada segmento $d\ell$:

$$d\vec{F}_B = I d\vec{\ell} \times \vec{B}$$

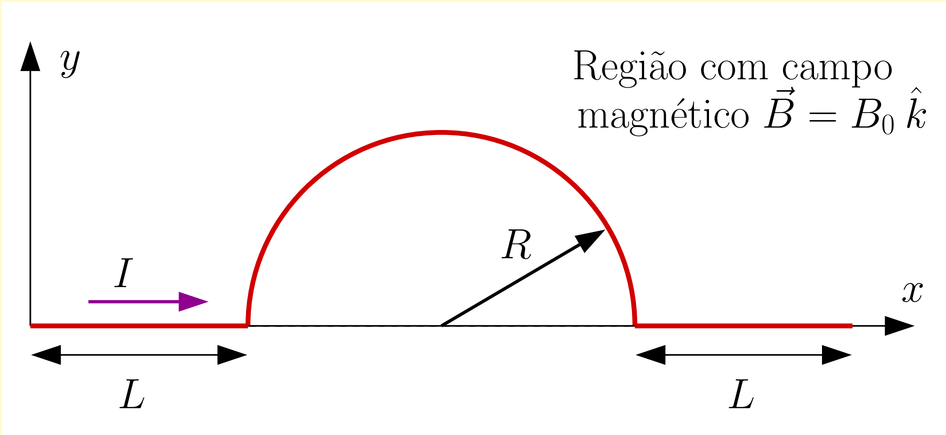
onde $d\vec{\ell}$ é um vetor paralelo ao fio, no sentido da corrente elétrica, e de comprimento infinitesimal.



- A força magnética total entre os pontos a e b do fio é obtida integrando-se a expressão acima. Como $d\vec{\ell} \times \vec{B}$ pode mudar de direção, sentido e módulo ao longo do fio, a integração deve se feita componente a componente (x, y e z separadamente, no caso de coordenadas cartesianas).

Força magnética sobre um fio: exemplo

Ex. 1 Determine a força resultante sobre o segmento de fio conduzindo uma corrente I, localizado numa região com campo magnético constante $\vec{B} = B_0\,\hat{k}$, conforme mostrado na figura abaixo.



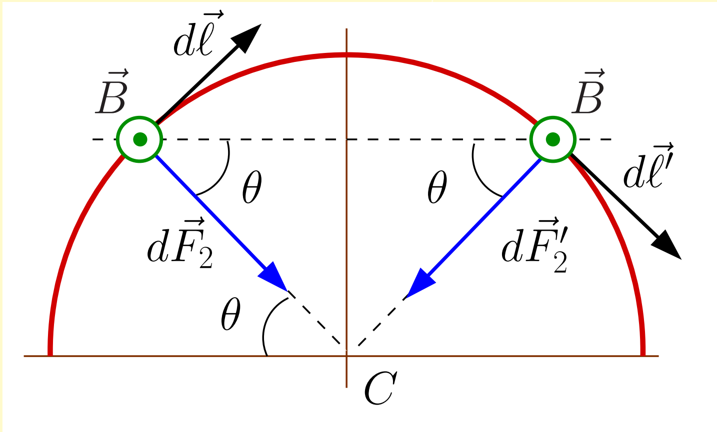
Solução

- Para o segmento reto à esquerda, tem-se que $d\vec{\ell} = dx\,\hat{\imath}$. Logo,

$$d\vec{F}_1 = I d\vec{\ell} \times \vec{B} = I B_0 dx \underbrace{(\hat{\imath} \times \hat{k})}_{= -\hat{\jmath}} = -I B_0 \int_0^L dx\,\hat{\jmath} \quad \Rightarrow \quad \vec{F}_1 = -I B_0 L\,\hat{\jmath}$$

Similarmente, para o segmento reto à direita, $\vec{F}_3 = -IB_0L\,\hat{\jmath} = \vec{F}_1$

- Para o segmento curvo, tem-se que



$$d\vec{F}_2 = Id\vec{\ell} \times \vec{B} = IB_0 d\ell\,(-\hat{r})$$

ou seja, o elemento de força é radial, apontando para o ponto C.

Temos que

$$d\vec{F}_2 = dF_2 \cos\theta\,\hat{\imath} - dF_2\,\text{sen}\,\theta\,\hat{\jmath}$$

onde $dF_2 = |d\vec{F}_2| = IB_0 d\ell$.

- Um segmento de fio infinitesimal oposto, em relação ao eixo vertical, produz uma força infinitesimal $d\vec{F}_2'$. Por simetria, a componente horizontal da força $d\vec{F}_2 + d\vec{F}_2'$ é cancelada.

Logo,

$$\vec{F}_2 = -\int dF_2 \,\text{sen}\,\theta\,\hat{\jmath} = -IB_0 \int \text{sen}\,\theta\, d\ell\,\hat{\jmath}$$

Como $d\ell = R d\theta$, temos que

$$\vec{F}_2 = -IB_0R \underbrace{\int_0^{\pi} \text{sen}\,\theta\, d\theta}_{-\cos\theta\big|_0^{\pi}=2}\,\hat{\jmath} \quad \Rightarrow \quad \vec{F}_2 = -2IB_0R\,\hat{\jmath}$$

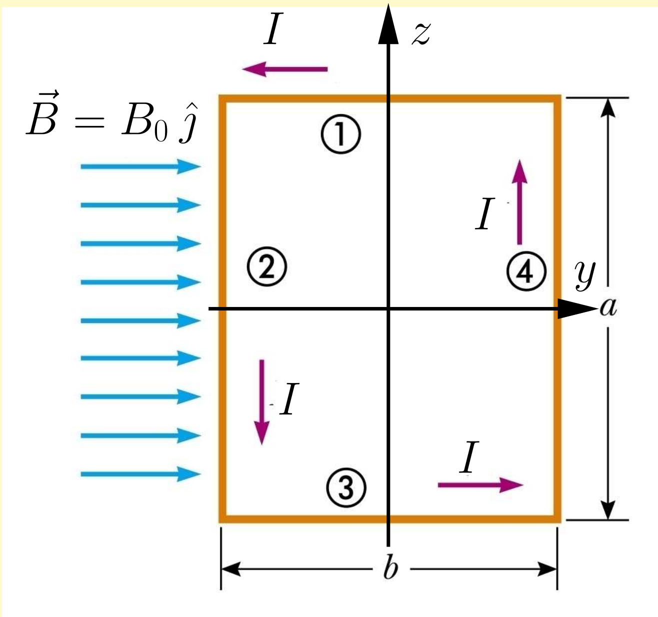
- Portanto, a força resultante sobre o fio é dada por

$$\vec{F}_{\text{res}} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{F}_{\text{res}} = -2IB_0(L+R)\,\hat{\jmath}}$$

Torque sobre uma espira de corrente

- O **torque** sobre uma espira de corrente é o princípio responsável pelo funcionamento do motor elétrico e voltímetros e amperímetros analógicos.

- Considere uma espira retangular conduzindo uma corrente I, imersa numa região com campo magnético constante. Suponha que a espira seja livre para girar em torno do eixo z vertical, conforme mostra a figura.



Se a espira estiver inicialmente sobre o plano yz, temos que as forças nos lados 1 e 3 são nulas, pois o campo magnético é (anti-)paralelo aos fios nesses trechos ($d\vec{\ell} \times \vec{B} = 0$).

Nos lados 2 e 4, temos que

$$\vec{F}_2 = IaB_0\,\hat{\imath}\;; \quad \vec{F}_4 = -IaB_0\,\hat{\imath}$$

- A força resultante na espira é dada por

$$\vec{F}_{\text{res}} = \sum_{i=1}^{4} \vec{F}_i = IaB_0\,\hat{\imath} - IaB_0\,\hat{\imath} \quad \Rightarrow \quad \vec{F}_{\text{res}} = 0$$

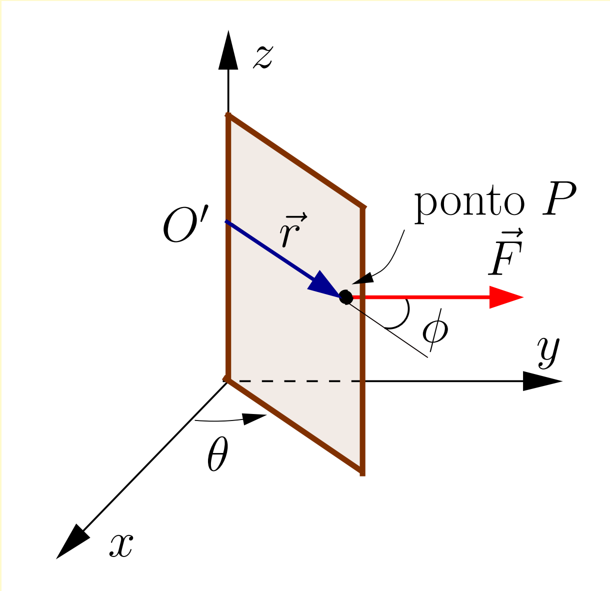
➠ $\vec{F}_{\text{res}}$ é zero, mas a espira sofre um **torque não nulo na direção** z devido às forças $\vec{F}_2$ e $\vec{F}_4$, causando uma rotação da mesma em torno do eixo z.

- Considere uma porta que pode girar livremente em torno do eixo z vertical. O torque da força $\vec{F}$, que atua no ponto P, em relação ao ponto O' é definido como

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Se os vetores $\vec{r}$ e $\vec{F}$ são paralelos ao plano xy, temos que

$$\vec{\tau} = \tau\,\hat{k}\;; \quad \tau = rF\,\mathrm{sen}\,\phi$$

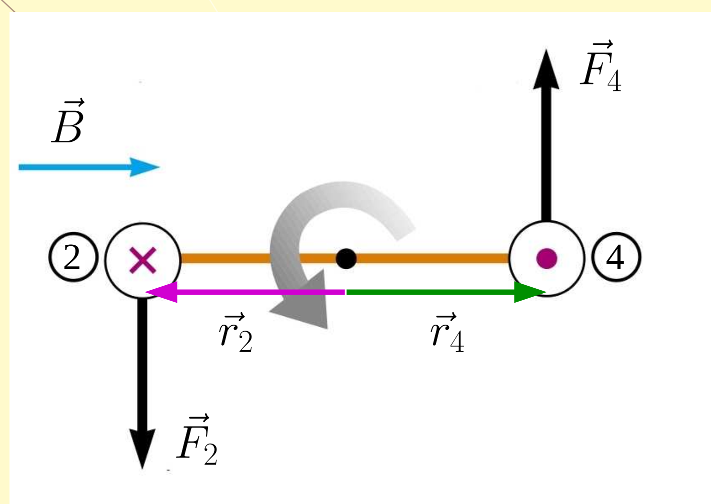


- De acordo com a versão da 2ª lei de Newton para corpos em rotação, tem-se que

$$\tau_{\text{res}} = I_0 \alpha$$

onde I_0 é o **momento de inércia** do objeto em torno do eixo o qual irá girar e α é a sua **aceleração angular** $(d^2\theta/dt^2)$. Se $\tau \neq 0$, a porta inicialmente em repouso começa a girar em torno do eixo z.

- Voltando à espira no campo magnético, a figura ao lado mostra uma vista de cima para baixo da figura da p. 10. O torque resultante é dado por



$$\vec{\tau}_{\rm res} = \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 + \vec{r}_4 \times \vec{F}_4$$

onde as forças $\vec{F}_2$ e $\vec{F}_4$ estão dadas na p. 11.

Temos que

$$\vec{r}_2 = -\frac{b}{2}\,\hat{\jmath} \qquad \text{e} \qquad \vec{r}_4 = \frac{b}{2}\,\hat{\jmath}$$

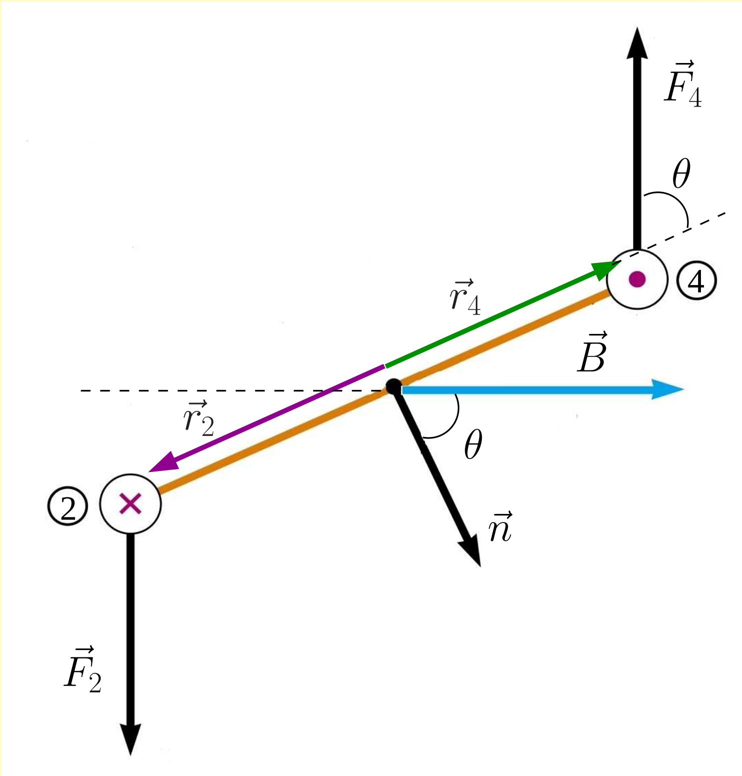
Logo,

$$\vec{\tau}_{\rm res} = -\frac{b}{2} IaB_0\,\hat{\jmath}\times\hat{\imath} - \frac{b}{2} IaB_0\,\hat{\jmath}\times\hat{\imath} \quad \Rightarrow \quad \vec{\tau}_{\rm res} = IabB_0\,\hat{k}$$

- Como $\vec{\tau}_{\rm res}$ está no sentido positivo do eixo z, a espira gira no sentido anti-horário (para quem a vê de cima para baixo).

- Vamos considerar agora o caso em que um vetor normal à área da espira faz um ângulo θ com o campo magnético, conforme mostra a figura ao lado.
- As forças $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_3$ não são iguais a zero, contudo $\vec{r}_1 = \vec{r}_3 = 0$, logo não contribuem para o torque resultante, que continua sendo dado por

$$\vec{\tau}_{\text{res}} = \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 + \vec{r}_4 \times \vec{F}_4$$



Observando que $\vec{r}_2$ ($\vec{r}_4$) faz um ângulo θ com $\vec{F}_2$ ($\vec{F}_4$), temos que

$$\vec{\tau}_{\text{res}} = IabB_0 \,\text{sen}\, \theta \,\hat{k}$$

Momento de dipolo magnético

- A expressão do torque sobre uma espira da página anterior pode ser escrita como

$$\vec{\tau} = IAB_0 \,\mathrm{sen}\,\theta \,\hat{k}$$

  onde $A = ab$ é a área da espira. Esta expressão, por sua vez, pode ser escrita como uma expressão vetorial:

$$\vec{\tau} = I\vec{A} \times \vec{B}$$

  onde o vetor área é dado por $\vec{A} = A\hat{n}$, com $\hat{n}$ sendo o versor perpendicular à superfície de área A.

- O produto $I\vec{A}$ é definido como sendo o **momento de dipolo magnético** da espira:

$$\vec{\mu} = I\vec{A}$$

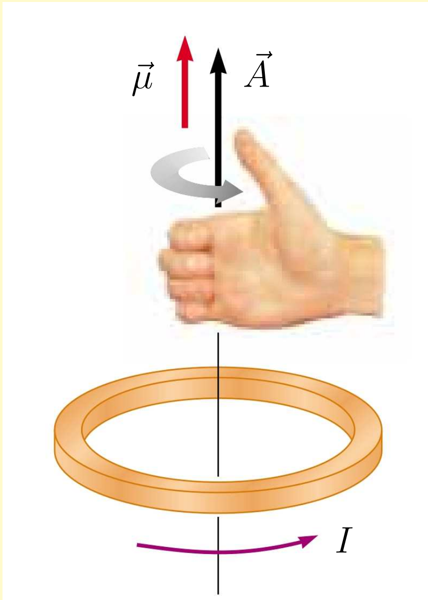
Momento de dipolo magnético

Temos portanto que

$$\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}$$

➠ Embora a expressão acima tenha sido deduzida para uma espira retangular e para uma orientação específica de $\vec{B}$ em relação à espira, ela é geral.

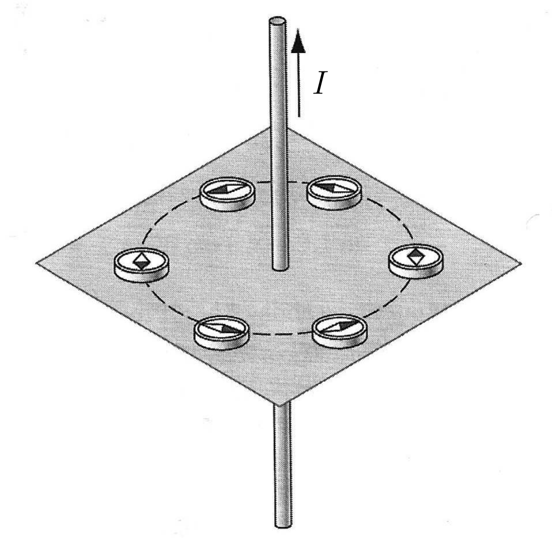
- O sentido do vetor $\vec{A}$ e consequentemente do momento de dipolo magnético, $\vec{\mu}$, é estabelecido pela <u>regra da mão direita</u>:



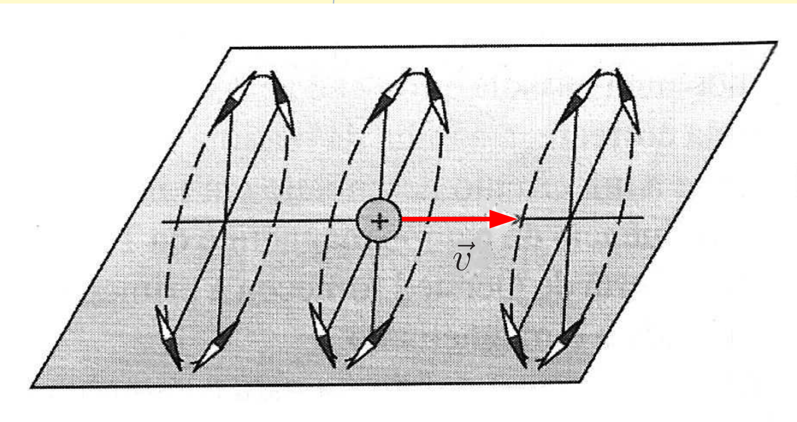
Campo magnético gerado por uma carga em movimento

- Em 1820, H. C. Oersted observou que a agulha de uma bússola é defletida na presença de um fio conduzindo corrente elétrica.

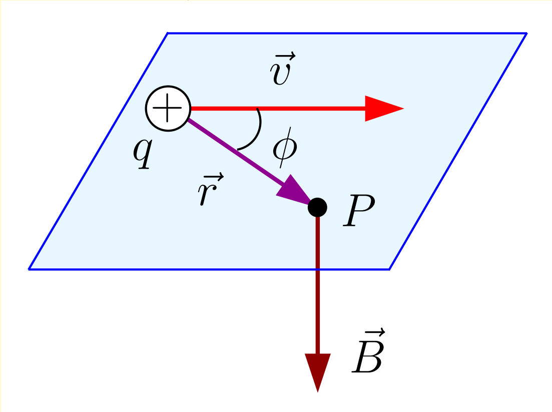
  Como a corrente elétrica é $I = \dfrac{dq}{dt}$, conclui-se que cargas em movimento produzem campo magnético.



- Considere uma carga $q > 0$ movendo-se com velocidade de módulo v (v muito menor do que a velocidade da luz, para desprezar os efeitos relativísticos). Na figura ao lado são mostradas as linhas de campo geradas pela carga q em três instantes de tempo.



Campo magnético gerado por uma carga em movimento



- O campo magnético gerado por q num ponto P, dado pela posição $\vec{r}$ (com a origem na carga), é dado por

$$\vec{B} = k\frac{q\vec{v} \times \hat{r}}{r^2} \; ; \quad \hat{r} = \frac{\vec{r}}{r}$$

Observa-se que $B \propto \dfrac{1}{r^2}$, análogo ao campo elétrico de uma carga pontual.

- No SI de unidades, $k = \dfrac{\mu_0}{4\pi} = 10^{-7}$ T $\cdot$ m/A
- μ_0 é a constante de permeabilidade ou constante magnética. Relação com ε_0:

$$\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = c = \text{ velocidade da luz no vácuo}$$

Campo magnético gerado por uma carga em movimento

- No SI, temos então que o campo magnético gerado por uma carga q, com velocidade $v \ll c$, é dado por

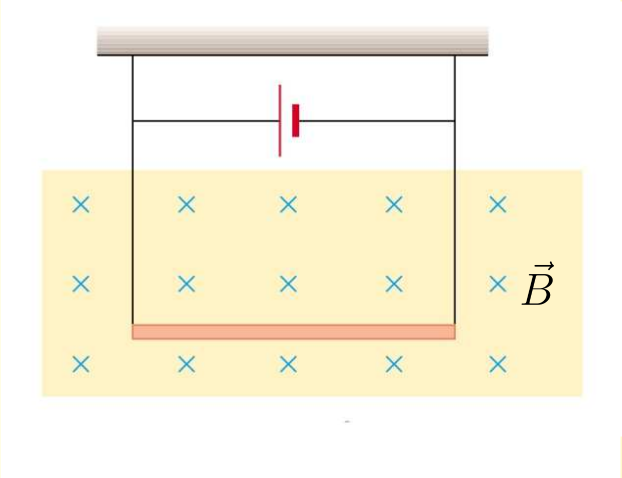
$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\vec{v}\times\hat{r}}{r^2} \qquad \text{ou} \qquad \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\vec{v}\times\vec{r}}{r^3}$$

- Para cargas andando próximas à velocidade da luz, efeitos relativísticos passam a ser importantes e como consequência, a expressão acima é modificada de uma forma não trivial.

Problemas Propostos

Força magnética sobre um fio

P1 Um condutor suspenso por dois fios flexíveis, como mostra a figura ao lado, tem uma massa por unidade de comprimento de 0,040 kg/m. Que corrente terá de existir no condutor para ser nula a tração nos fios de suporte quando o campo magnético for 3,60 T para dentro da página? Qual será o sentido necessário para a corrente?



Resp. $I = 0{,}109$ A para à direita no condutor.

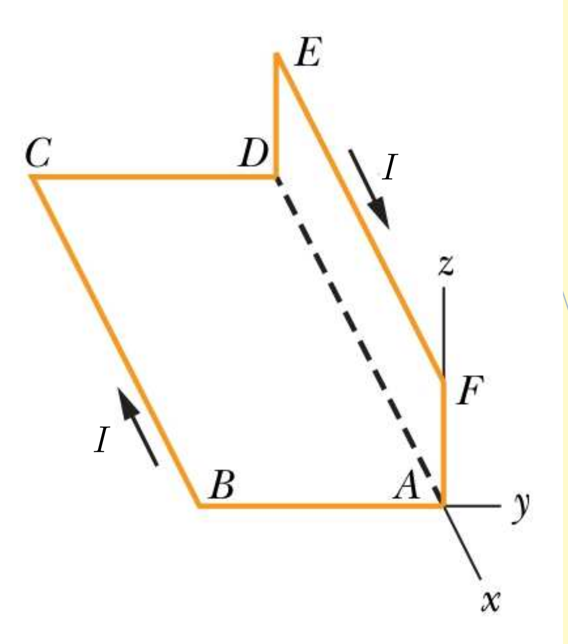
Força magnética sobre um fio

P2 Um condutor longo e rígido, localizado ao longo do eixo x, conduz uma corrente de 5,0 A que circula no sentido negativo de x. Um campo magnético, dado por $\vec{B} = 3{,}0\,\hat{\imath} + 8{,}0x^2\,\hat{\jmath}$, com x em metros e B em militeslas, está presente na região. Encontre, em unidades de notação com vetores unitários, a força sobre 2,0 m de segmento do condutor que está entre $x = 1{,}0$ m e $x = 3{,}0$ m.

Resp. $\vec{F} = -0{,}35$ N $\hat{k}$.

Momento de dipolo magnético

P3 A Fig. ao lado mostra uma espira $ABCDEFA$ conduzindo uma corrente $I = 5{,}00$ A. Os lados da espira são paralelos aos eixos coordenados, conforme mostrado, com $AB = 20{,}0$ cm, $BC = 30{,}0$ cm e $FA = 10{,}0$ cm. Em notação com vetor unitário, qual é o momento de dipolo magnético desta espira?



Dica: Imagine duas corrente I iguais e opostas no segmento AD; então considere as espiras retangulares $ABCDA$ e $ADEFA$.

Resp. $\vec{\mu} = (0{,}150\,\hat{\jmath} - 0{,}300\,\hat{k})$ A $\cdot$ m^2.

Referências

- R. A. Serway, e J. W. Jewett Jr., *Princípios de Física, Vol. 3*, Cengage Learning;
- D. Halliday, R. Resnick e K. S. Krane, *Física, Vol. 3*, LTC;