Aula 25 (23/Mar)

Na aula de hoje:

* Revisão da aula anterior.
* Experiências de pensamento com o o aparato experimental de Stern-Gerlach.
* Precessão de Larmor.
* Sistemas de dois níveis.

——————— // ———————

Revisão da última aula

* Descrição clássica da experiência de Stern-Gerlach.
* Descrição quântica e operadores de spin.
* Preparação de um estado

——————— // ———————

6.1 Experiência de Stern-Gerlach (cont.)

6.1.4) Medição do spin

6.1.4.1) Preparação de um dado estado inicial

(...)

Preparação de estado geral $|\psi\rangle$

$$|\psi\rangle = \alpha|+\rangle + \beta|-\rangle \quad \text{com} \quad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1.$$

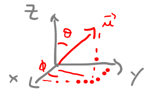
Vamos mostrar que existe sempre um vector $\vec{u} = |\vec{u}|.(\operatorname{sen}\theta\cos\phi, \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi, \cos\theta)$ para o qual $|+\rangle_{\vec{u}} = |\psi\rangle = \alpha|+\rangle + \beta|-\rangle$.

Na última aula escrevemos

$$\alpha = |\alpha| e^{ia}$$
$$\beta = |\beta| e^{ib}$$

bem como $|\alpha| = \cos\theta/2$ e $|\beta| = \operatorname{sen}\theta/2$, pois $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$.

↳ Como queremos $|+\rangle_u = |\psi\rangle$ escolhemos que $0 \leq \theta \leq \pi$.



esta escolha determina único "θ" para o conjunto α, β,

$$\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} = \left| \frac{\beta}{\alpha} \right|.$$

Se agora escolhermos definir

$$\begin{cases} \phi = b - a \\ \chi = b + a \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{\chi - \phi}{2} \\ b = \dfrac{\chi + \phi}{2} \end{cases}$$

então poderemos expressar $|\psi\rangle$ como

$$|\psi\rangle = \alpha |+\rangle + \beta |-\rangle$$

$$= \cos\frac{\theta}{2} \cdot e^{i\frac{\chi-\phi}{2}} |+\rangle + \operatorname{sen}\frac{\theta}{2} e^{i\frac{\chi+\phi}{2}} |-\rangle$$

$$= e^{i\chi/2} \underbrace{\left[\cos\frac{\theta}{2} e^{-i\phi/2} |+\rangle + \operatorname{sen}\frac{\theta}{2} e^{i\phi/2} |-\rangle \right]}_{\equiv |+\rangle_u}$$

$$= e^{i\chi/2} \cdot |+\rangle_u$$

que sabemos ser o mesmo estado físico que $|+\rangle_u$ (diferem em apenas fase global).

$$\Longrightarrow |\psi\rangle = |+\rangle_u \quad \square$$

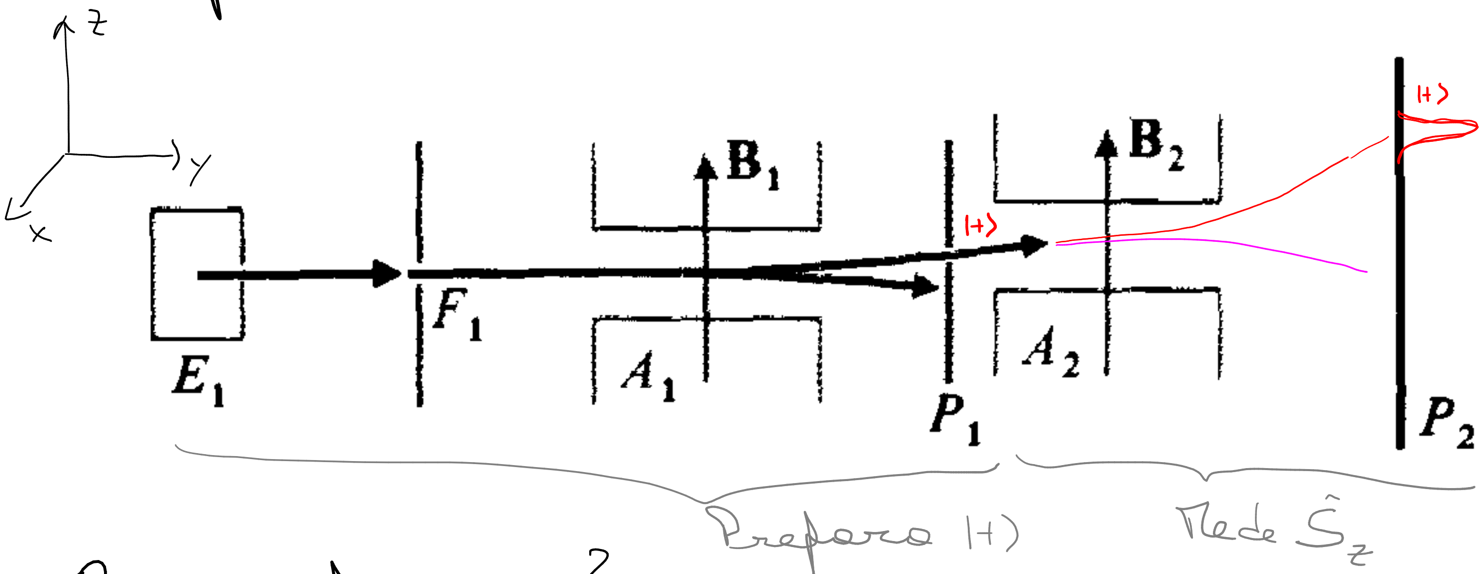
Para preparar o $|\psi\rangle = \alpha |+\rangle + \beta |-\rangle$ teremos apenas que escolher θ e ϕ que definem $\vec{u}$

$$\theta = 2 \operatorname{arctg}\left[\left|\frac{\beta}{\alpha}\right|\right]$$

$$\phi = \arg(\beta) - \arg(\alpha)$$

6.1.4.2) Primeira experiência

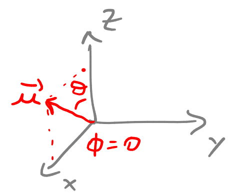
Preparamos estado $|+\rangle$ e depois medimos $\hat{S}_z$.



O que esperamos?

↳ observar todos os átomos como tendo spin $+\frac{\hbar}{2}$. E é isto que de facto é observado na exp.

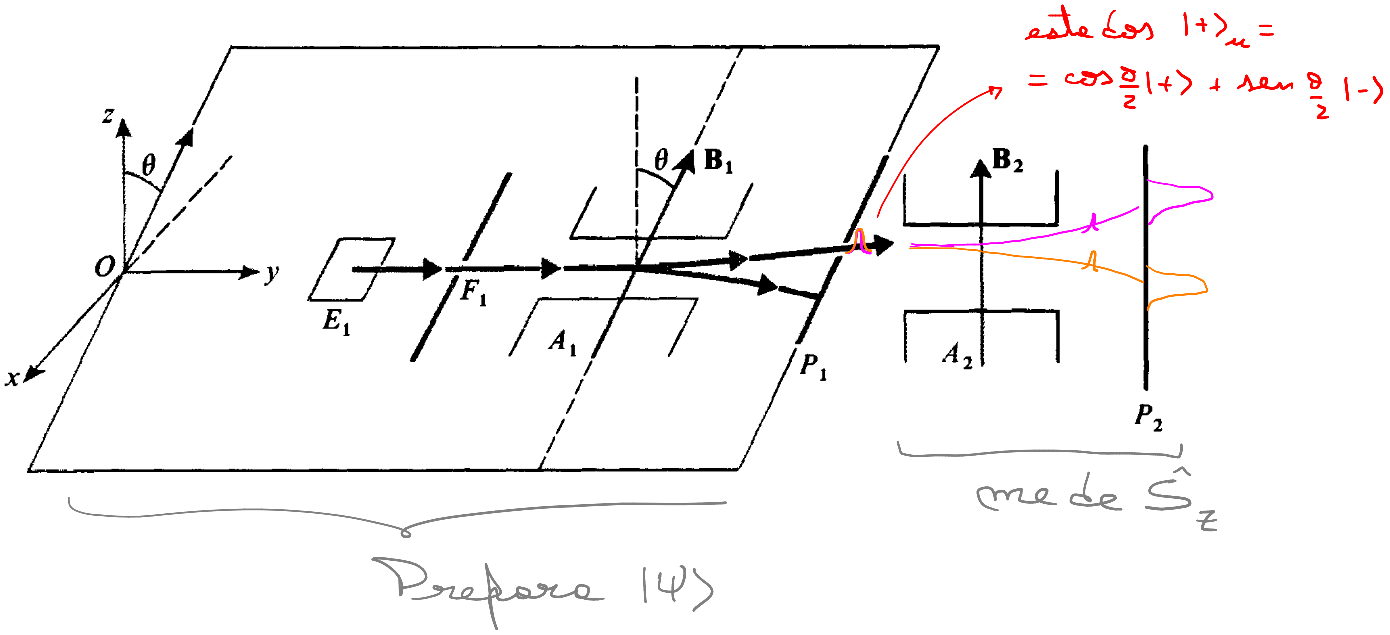
6.1.4.3) Segunda experiência



Preparar estado $|\psi\rangle \overset{\phi=0}{=} \cos\frac{\theta}{2}|+\rangle + \operatorname{sen}\frac{\theta}{2}|-\rangle$,

(direccionando aparato ao longo de $\vec{u}$ onde

θ e $\phi = 0$) e medimos $\hat{S}_z$.



O que esperamos observar?

↳ apesar todos os átomos no mesmo estado $|\psi\rangle$, alguns colidirão em cima e outros em baixo

$$N_+ = N \cdot \cos^2\frac{\theta}{2}$$

$$N_- = N \cdot \operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}$$

Postulado 3

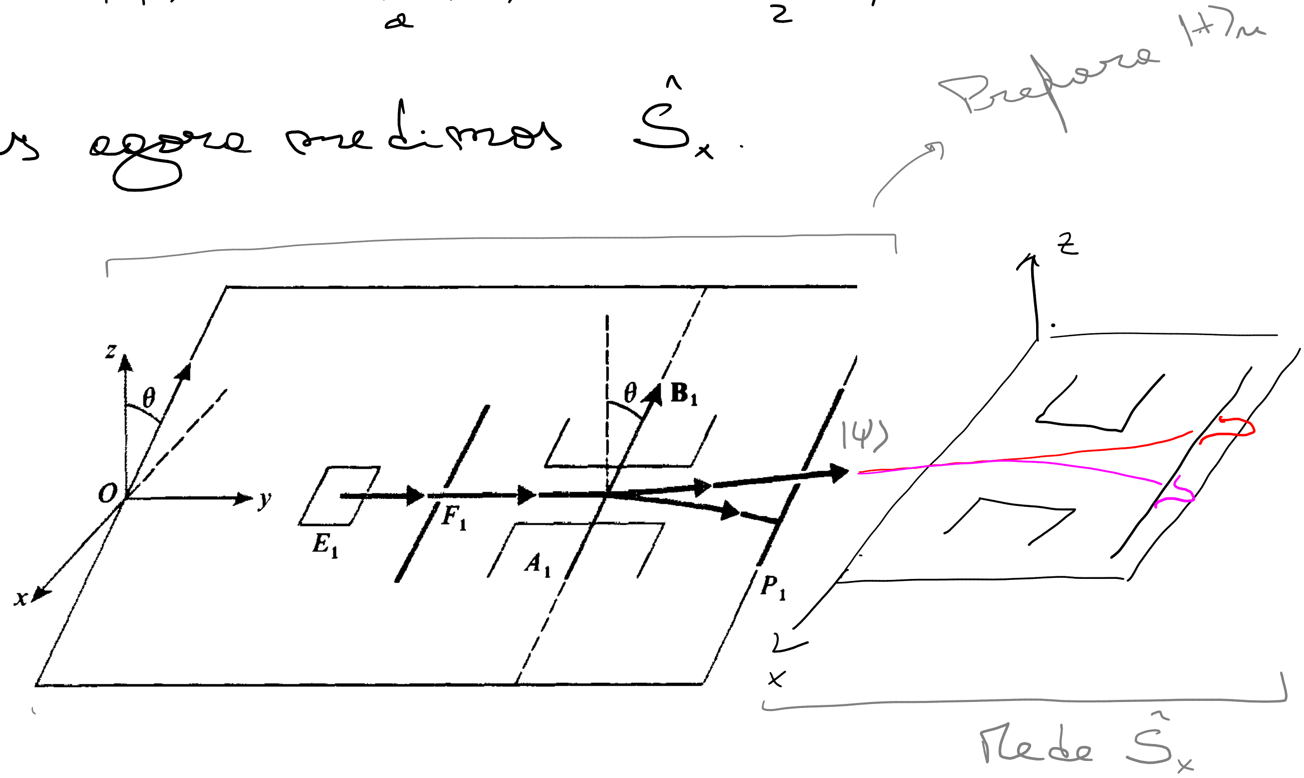
Há indeterminação na medição. Só conseguimos saber a probabilidade (Postulado 4)

6.1.4.4) Terceira experiência

Voltemos a preparar átomos no estado $|\psi\rangle$ dado por

$$|\psi\rangle = \cos\frac{\theta}{2}|+\rangle + \operatorname{sen}\frac{\theta}{2}|-\rangle$$

mas agora medimos $\hat{S}_x$.



O que esperamos observar?

↳ Sabemos medição $\hat{S}_x$ terá resultados possíveis que são auto-vals de $\hat{S}_x$. Nós sabemos que auto-vals S_x são $\pm\frac{\hbar}{2}$.

↳ Se queremos probabilidade temos que escrever $|\psi\rangle$ na base auto-estados de $\hat{S}_x$

$$|+\rangle_x\,{}_x\langle+| + |-\rangle_x\,{}_x\langle-|$$

$$|\psi\rangle = \cos\frac{\theta}{2}|+\rangle + \operatorname{sen}\frac{\theta}{2}|-\rangle =$$

$$= \left(|+\rangle_x\,{}_x\langle+| + |-\rangle_x\,{}_x\langle-|\right)\left(\cos\frac{\theta}{2}|+\rangle + \operatorname{sen}\frac{\theta}{2}|-\rangle\right)$$

$$= \left(\cos\frac{\theta}{2}\underbrace{{}_x\langle+|+\rangle}_{+1/\sqrt{2}} + \operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\underbrace{{}_x\langle+|-\rangle}_{+1/\sqrt{2}}\right)|+\rangle_x + \left(\cos\frac{\theta}{2}\underbrace{{}_x\langle-|+\rangle}_{1/\sqrt{2}} + \operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\underbrace{{}_x\langle-|-\rangle}_{-1/\sqrt{2}}\right)|-\rangle_x$$

que como temos $|\pm\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle \pm |-\rangle)$, então

$$|\psi\rangle = \frac{1}{2}\underbrace{\left(\cos\frac{\theta}{2} + \text{sen}\frac{\theta}{2}\right)}_{\text{“} \cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)}|+\rangle_x + \frac{1}{\sqrt{2}}\underbrace{\left(\cos\frac{\theta}{2} - \text{sen}\frac{\theta}{2}\right)}_{\text{“} \text{sen}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)}|-\rangle_x$$

e assim as probabilidades

$$|+\rangle_x \longrightarrow P_{|+\rangle_x} = \cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)$$

$$|-\rangle_x \longrightarrow P_{|-\rangle_x} = \text{sen}^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)$$

6.1.5) Valores esperados (Valores médios)

Quais valores médios observados se repetirmos muitas vezes estas experiências?

Exp. 1:

$$\langle\psi|\hat{S}_z|\psi\rangle = \langle +|\overbrace{\hat{S}_z|+\rangle}^{\text{“} +\frac{\hbar}{2}|+\rangle} = +\frac{\hbar}{2}\langle +|+\rangle$$

$$= +\frac{\hbar}{2}$$

Exp 2:

$$\langle\psi|\hat{S}_z|\psi\rangle = \left[\cos\frac{\theta}{2}\langle +| + \text{sen}\frac{\theta}{2}\langle -|\right]\hat{S}_z \cdot \left[\cos\frac{\theta}{2}|+\rangle + \text{sen}\frac{\theta}{2}|-\rangle\right]$$

$$= \left[\cos\frac{\theta}{2}\langle +| + \mathrm{sen}\frac{\theta}{2}\langle -|\right]\left[\frac{\hbar}{2}\cos\frac{\theta}{2}|+\rangle - \frac{\hbar}{2}\mathrm{sen}\frac{\theta}{2}|-\rangle\right]$$

$$= \frac{\hbar}{2}\left(\cos^2\frac{\theta}{2} - \mathrm{sen}^2\frac{\theta}{2}\right) = \frac{\hbar}{2}\cos\theta \quad //$$

Exp. 3:

$$\langle\psi|S_x|\psi\rangle = \left[\cos\frac{\theta}{2}\langle +| + \mathrm{sen}\frac{\theta}{2}\langle -|\right]\underbrace{\overbrace{\hat{S}_x}^{\frac{\hbar}{2}\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}}\left[\cos\frac{\theta}{2}\overbrace{|+\rangle}^{\binom{1}{0}} + \mathrm{sen}\frac{\theta}{2}\overbrace{|-\rangle}^{\binom{0}{1}}\right]}_{\frac{\hbar}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2}|-\rangle + \mathrm{sen}\frac{\theta}{2}|+\rangle\right)}$$

$$= \frac{\hbar}{2}\,2\cos\frac{\theta}{2}\,\mathrm{sen}\frac{\theta}{2} = \frac{\hbar}{2}\,\mathrm{sen}\,\theta \quad //$$

Nota: Recordar que $|\psi\rangle = |+\rangle_{\vec{u}}$ onde $\vec{u}$ é determinado especificando $\theta, \phi = 0$

$$\Rightarrow \vec{u} = |\vec{u}|.(\mathrm{sen}\,\theta, 0, \cos\theta)$$

Podemos mostrar que valores esperados $\hat{S}_x$, $\hat{S}_y$ e $\hat{S}_z$, para estado $|\psi\rangle = |+\rangle_{\vec{u}}$, $\vec{u} = |\vec{u}|(\mathrm{sen}\,\theta\cos\phi, \mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\phi, \cos\theta)$ são dados por

$${}_u\langle +|\hat{S}_x|+\rangle_u = \frac{\hbar}{2}\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\phi$$

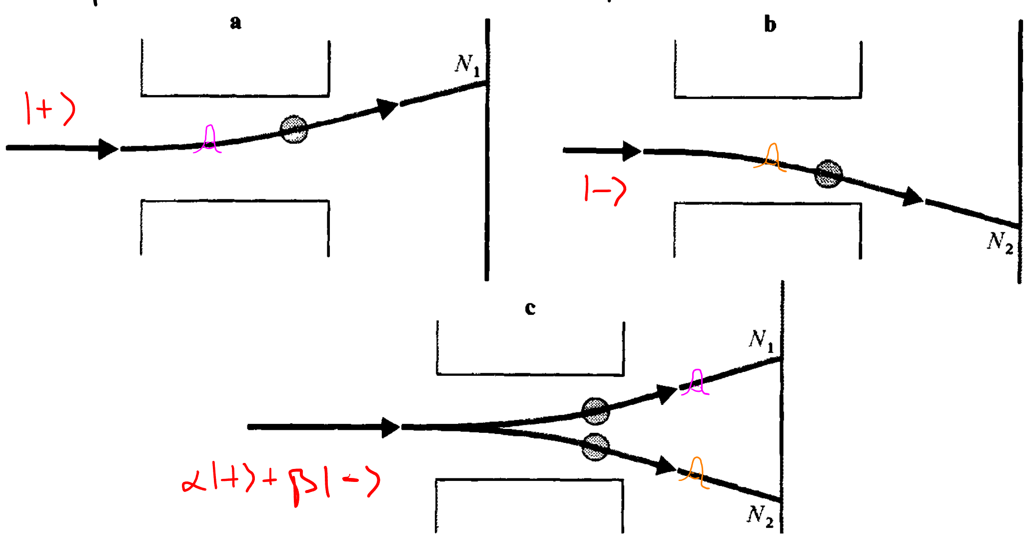
$$ {}_u\langle + | \hat{S}_y | + \rangle_u = \frac{\hbar}{2} \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi $$

$$ {}_u\langle + | \hat{S}_z | + \rangle_u = \frac{\hbar}{2} \cos\theta $$

que são resultados esperados classicamente.

<u>Nota</u>: Argumentamos anteriormente que os graus de liberdade externos podiam ser tratados classicamente (pois f.o. muito concentrada junto ao valor médio, comparativamente com todas as outras dimensões do problema)

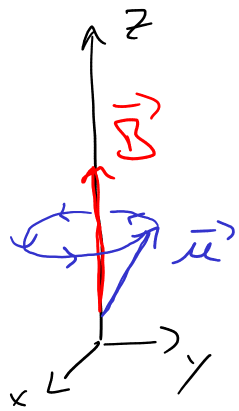
↳ Uma sobreposição linear de $|+\rangle$ e $|-\rangle$ tem f.o. com duas trajectórias clássicas simultâneas, pois é composta por dois pacotes de onda, um correspondendo à trajectória de $|+\rangle$ e outro à trajectória $|-\rangle$. Note que não são duas partículas, mas apenas uma!



6.2 Spin-1/2 num campo $\vec{B}$ uniforme

Átomo preso parado com $\vec{B}(\vec{r}) = \vec{B}$

↳ Esperamos que o momento magnético vá precessar em torno do campo magnético.



6.2.1) Descrição clássica da precessão de Larmor

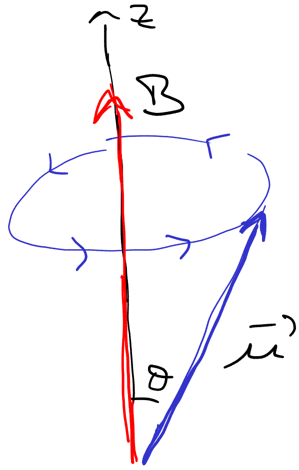
De EMG sabemos que torque num momento mag. na presença de $\vec{B}$ é dado por

$$\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}.$$

Do teorema momento angular

$$\frac{d}{dt}\vec{\mathcal{L}} = \vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B} = g \cdot \vec{\mathcal{L}} \times \vec{B}$$

ou seja $\frac{d\vec{\mathcal{L}}}{dt}$ é perpendicular a $\vec{\mathcal{L}}$ e $\vec{B}$.



$$\vec{\mathcal{L}} = (l_x, l_y, l_z)$$

$$\vec{B} = (0, 0, B)$$

$$\frac{d\vec{\mathcal{L}}}{dt} = g \cdot \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ l_x & l_y & l_z \\ 0 & 0 & B \end{vmatrix} = g\left(l_y . B, -l_x B, 0\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{dl_x}{dt} = g B l_y \Rightarrow \frac{d^2 l_x}{dt^2} = g . B . \frac{dl_y}{dt} \\ \frac{dl_y}{dt} = -g B l_x \\ \frac{dl_z}{dt} = 0 \Leftrightarrow l_z(t) = l_z^0 \end{cases}$$

$$\frac{dl_y}{dt} = -g B . l_x$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 l_x}{dt^2} = \overbrace{-g^2 B^2}^{= \omega_c^2} l_x \Rightarrow l_x(t) = A . e^{\pm i \omega_c t}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 l_y}{dt^2} = -g^2 B^2 l_y \Rightarrow l_y(t) = A e^{\pm i \omega_c t}$$

em $t=0$
$\vec{L} = (l_x^0, 0, l_z^0)$

$$\Rightarrow \left\| \begin{array}{l} l_x(t) = l_x^0 \cdot \cos(\omega_c t) \\ l_y(t) = l_x^0 \, \mathrm{sen}(\omega_c t) \end{array} \right.$$

↳ precessão em xy.

6.2.2) Descrição quântica da precessão de Larmor

A energia potencial sentida pelo momento mag. é dada por

$$V = -\vec{\mu} \cdot \vec{B} = -g \vec{L} \cdot \vec{B}$$

$$= -g \, l_z \cdot B = \omega_c \cdot l_z$$

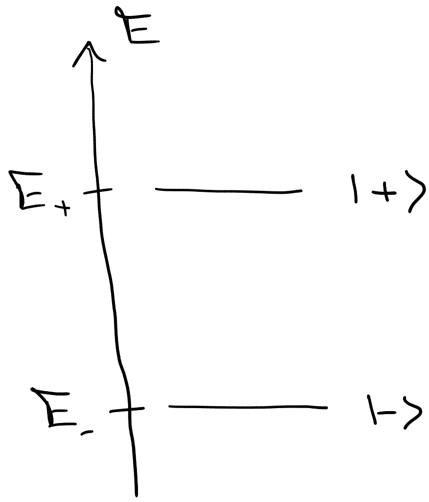
$\vec{B} = B \vec{e_z}$

Não temos energia cinética pois átomo parado, então o operador hamiltoniano será

$$H = \omega_c l_z \xrightarrow[\text{canônica}]{\text{quantif.}} \hat{H} = \omega_c \hat{S}_z$$

e assim, os estados estacionários do problema são $|\pm\rangle$, sendo as auto-energias

$$\left.\begin{aligned} \hat{H}|+\rangle &= \overbrace{+\omega_c \frac{\hbar}{2}}^{E_+}|+\rangle \\ \hat{H}|-\rangle &= \underbrace{-\omega_c \frac{\hbar}{2}}_{E_-}|-\rangle \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$



Nota: Para átomos Ag sabemos $g<0$, então $\omega_c = -gB > 0$.

Assumiremos que temos estado inicial

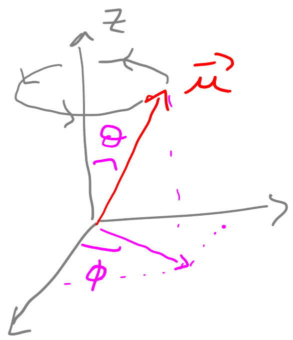
$$|\psi(0)\rangle = \cos\frac{\theta}{2}\, e^{-i\phi/2}|+\rangle + \operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\, e^{i\phi/2}|-\rangle$$

então a evol. do estado

$$|\psi(t)\rangle = \cos\frac{\theta}{2}\, e^{-i\frac{\phi}{2}} \cdot e^{-iE_+ t/\hbar}|+\rangle + \operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\, e^{i\frac{\phi}{2}}\, e^{-iE_- t/\hbar}|-\rangle$$

$$= \cos\frac{\theta}{2} \cdot e^{-i(\phi+\omega_c t)/2} |+\rangle + \operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\, e^{i(\phi+\omega_c t)/2} |-\rangle$$

$$\Rightarrow \left| \begin{array}{l} \theta = \text{constante} \\ \phi(t) = \phi + \omega_c \cdot t \end{array} \right.$$



Continuaremos a ter indeterminação numa única medida, mas valores esperados, mais uma vez seguirão a evolução clássica,

$$\langle \hat{S}_z \rangle(t) = \langle \psi(t) | \hat{S}_z | \psi(t) \rangle = \frac{\hbar}{2} \cos\theta$$

$$\langle \hat{S}_x \rangle(t) = \langle \psi(t) | S_x | \psi(t) \rangle = \frac{\hbar}{2} \operatorname{sen}\theta \cos(\phi+\omega_c t)$$

$$\langle S_y \rangle(t) = \langle \psi(t) | \hat{S}_y | \psi(t) \rangle = \frac{\hbar}{2} \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}(\phi+\omega_c t)$$

que são análogos à evol. clássica (T. Ehrenfest).

6.3) Estudo geral de sistemas de dois níveis

$\mathcal{E}$ tem dim. 2.

$\hat{H}$ que numa $\{|\varphi_i\rangle\}$ $i=1,2$, base ortonormal $\langle\varphi_i|\varphi_j\rangle = \delta_{ij}$, $\sum_{i=1}^{2}|\varphi_i\rangle\langle\varphi_i| = \hat{1}$;

Nesta base $\hat{H}$ ser escrito

$$\hat{H} = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix}$$

com $H_{21} = H_{12}^{*}$ porque $\hat{H}^{+} = \hat{H}$.

6.3.1) Estática

Estados estacionários e auto-energias dados por

$$\begin{vmatrix} H_{11}-\lambda & H_{12} \\ H_{12}^{*} & H_{22}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow E_{\pm} = \frac{(H_{11}+H_{22}) \pm \sqrt{(H_{11}+H_{22})^2 + 4|H_{12}|^2}}{2}$$

e os auto-estados são, se definirmos

$$a \equiv H_{11} - H_{22}$$

$$b \equiv H_{12} \; ,$$

dados por,

$$|\Phi_{\pm}\rangle = \frac{|b|}{\sqrt{4|b|^2 + \left(a \pm \sqrt{a^2+4|b|^2}\right)^2}} \left[\frac{a \pm \sqrt{a^2+4|b|^2}}{b^*} |\varphi_1\rangle + 2|\varphi_2\rangle \right]$$

$$= \alpha_{\pm}|\varphi_1\rangle + \beta_{\pm}|\varphi_2\rangle$$

6.3.2) Dinâmica

Se temos estado inicial

$$|\psi(t=0)\rangle = c_1|\varphi_1\rangle + c_2|\varphi_2\rangle$$

teremos que escrever $|\psi(t=0)\rangle$ na base $\{|\Phi_{\pm}\rangle\}$ de auto-estados de $\hat{H}$, pois então saberemos evoluir trivialmente,

$$|\varphi_1\rangle = \frac{\beta_-|\phi_+\rangle - \beta_-|\phi_-\rangle}{\alpha_+\beta_- - \alpha_-\beta_+}$$

$$|\varphi_2\rangle = \frac{\alpha_-|\phi_+\rangle - \alpha_+|\phi_-\rangle}{\alpha_-\beta_+ - \alpha_+\beta_-}$$

Assim,

$$|\psi(t=0)\rangle = \gamma_+|\phi_+\rangle + \gamma_-|\phi_-\rangle$$

e a evol. temporal

$$|\psi(t)\rangle = \gamma_+ e^{-iE_+t/\hbar}|\phi_+\rangle +$$

$$+ \gamma_- e^{-iE_-t/\hbar}|\phi_-\rangle$$

A probabilidade de encontrar o sistema no estado $|\varphi_1\rangle$ ou $|\varphi_2\rangle$ da base original será dependente do tempo, oscilando no tempo (em geral como seno ou cosseno).