Universidade Federal do ABC – UFABC

ESTA020-17: Modelagem e Controle
Primeira Prova - Turma DA - 18/03/2021
Professor Dr. Alfredo Del Sole Lordelo **Boa prova!**

Nome: n^o**:**

Antes de iniciar a prova, leia as instruções com atenção: Responda a prova de forma clara, detalhada e legível, identificando as respostas de acordo com os respectivos números e itens das questões. Numere todas as páginas das folhas de respostas e escreva o seu nome completo e o RA em todas elas. As páginas das folhas de respostas deverão ser escaneadas ou fotografadas, com atenção quanto à legibilidade e ao enquadramento. Salve todas as páginas das folhas de respostas em um único arquivo (PDF ou JPEG). Se não for possível salvar todas as páginas das folhas de respostas em um único arquivo, salve cada página das folhas de respostas, em arquivos separados (PDF ou JPEG), em uma pasta que deverá ser compactada. O nome do arquivo ou da pasta compactada deverá ter o formato "NomeCompletoRA". Antes de fazer o upload no SIGAA, verifique se os arquivos estão abrindo corretamente. A prova é individual e estará disponível para download e upload dos arquivos ou da pasta compactada através do SIGAA, das 08h00 de 18/03/2021 às 08h00 de 21/03/2021, como "Tarefa" da "Primeira Prova (P1)".

***

1- (2,0 pontos) A população de uma cultura de bactérias é dada por $x(t) = x_0 e^{\alpha t}$ e tem inicialmente x_0 bactérias. Em $t = 1h$, o número de bactérias é $2x_0$. Se a taxa de crescimento for proporcional ao número de bactérias presentes no instante t, determine o tempo necessário para que o número de bactérias seja $3x_0$.

2- Considere o sistema mecânico massa-mola-amortecedor, linear e invariante no tempo, apresentado na Figura 1, no qual m é a massa, b é o coeficiente de amortecimento do amortecedor e k é a constante elástica da mola. Os parâmetros m, b e k são estritamente positivos. A entrada $u(t)$ é a força externa aplicada na massa m. Considere que a variável de entrada seja multiplicada por um ganho de valor igual à constante elástica da mola k para que o sistema tenha um erro de regime permanente nulo. A saída $y(t)$ do sistema é o deslocamento $w(t)$ da massa m medido a partir da posição de equilíbrio.

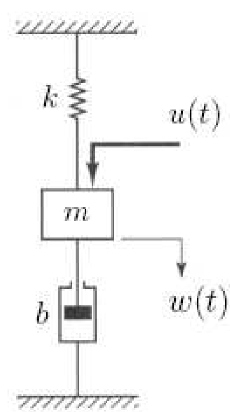

Figura 1: Sistema mecânico massa-mola-amortecedor.

a) (1,0 ponto) A equação diferencial linear de segunda ordem não homogênea que modela este sistema é dada por

$$\ddot{w}(t) + \frac{b}{m}\dot{w}(t) + \frac{k}{m}w(t) = \frac{k}{m}u(t).$$

Descreva este sistema através de variáveis de estado, na forma vetorial-matricial dada por

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{x}}(t) &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}u(t), \\ y(t) &= \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{D}u(t), \end{aligned}$$

considerando que o vetor de estado é definido como

$$\boldsymbol{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w(t) \\ \dot{w}(t) \end{bmatrix}.$$

b) (1,0 ponto) Os autovalores α da matriz de estado $\boldsymbol{A}$ são definidos como as raízes da equação $det\,(\alpha\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = 0$, na qual $\boldsymbol{I}$ é a matriz identidade com a mesma ordem da matriz de estado $\boldsymbol{A}$. Determine o intervalo de valores que b pode assumir, em função de m e k, de maneira que o sistema seja subamortecido.

c) (1,0 ponto) Suponha que haja uma falha estrutural, de maneira que o amortecedor deixe de atuar no sistema, ou seja, $b = 0$. Para esta situação particular, determine os autovalores α da matriz de estado $\boldsymbol{A}$ e classifique o sistema como estável, instável ou assintoticamente estável.

d) (1,0 ponto) Este sistema pode ser representado pela equação diferencial linear de segunda ordem não homogênea na forma padrão dada por

$$\ddot{w}(t) + 2\xi\omega_n\dot{w}(t) + \omega_n^2 w(t) = \omega_n^2 u(t),$$

na qual ξ é o fator de amortecimento e ω_n é a frequência natural não amortecida. Considerando $m = 2,0kg$, determine os parâmetros b e k, de maneira que a resposta dinâmica desse sistema seja a apresentada na Figura 2, para uma entrada degrau unitário $u(t) = r(t)$ definida como

$$r(t) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad t \geq 0, \\ 0 & \text{se} \quad t < 0. \end{cases}$$

O máximo sobressinal M_p e o tempo de pico t_p são definidos, respectivamente, como

$$M_p = e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \Rightarrow \xi = \sqrt{\frac{[ln(M_p)]^2}{[ln(M_p)]^2 + \pi^2}} \quad \text{e} \quad t_p = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}} \Rightarrow \omega_n = \frac{\pi}{t_p\sqrt{1-\xi^2}}$$

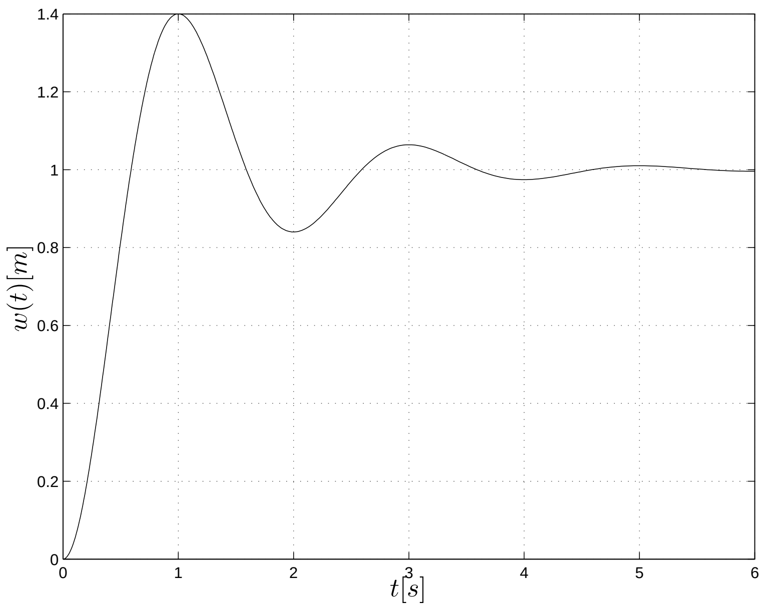

Figura 2: Resposta dinâmica do sistema em malha aberta para entrada degrau unitário.

e) (1,0 ponto) Um controlador proporcional-derivativo é definido como

$$u(t) = k_p e(t) + k_d \dot{e}(t),$$

no qual $e(t) = r(t) - y(t)$ é o erro. Projete, de forma detalhada, o ganho proporcional k_p e o ganho derivativo k_d, de maneira que, para uma entrada degrau unitário dada por

$$r(t) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad t \geq 0, \\ 0 & \text{se} \quad t < 0, \end{cases}$$

o máximo sobressinal e o tempo de acomodação sejam, respectivamente $M_p = 20\%$ e $t_s = 1,0s$, para os mesmos valores de m, b e k do item d). O tempo de acomodação é definido como

$$t_s = \frac{4}{\xi \omega_n} \Rightarrow \omega_n = \frac{4}{\xi t_s}$$

f) (1,0 ponto) Para o sistema controlado, calcule o tempo de subida t_r, dado por

$$t_r = \frac{\pi - tg^{-1}(\frac{\omega_d}{\xi \omega_n})}{\omega_d}$$

no qual $\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}$ é a frequência natural amortecida do sistema.

g) (1,0 ponto) Determine novos valores para os ganhos proporcional k_p e derivativo k_d, de maneira que, para um aumento aumento de 30% na massa m, os índices de desempenho do transitório sejam os mesmos do item e).

h) (1,0 ponto) Considerando que os autovalores da matriz de estado do sistema controlado são dados por $\alpha = -\xi \omega_n \pm j \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}$, determine o intervalo de valores do ganho derivativo k_d no qual o sistema é assintoticamente estável.

1- Temos que

$$x(t) = x_0 e^{\alpha t} \Rightarrow x(1) = 2x_0 = x_0 e^{\alpha \times 1} \Rightarrow 2 = e^{\alpha} \Rightarrow \alpha = ln(2)$$

Portanto,

$$x(t) = x_0 e^{ln(2)t} \Rightarrow 3x_0 = x_0 e^{ln(2)t_f} \Rightarrow 3 = e^{ln(2)t_f} \Rightarrow ln(3) = ln(2)t_f \Rightarrow t_f = \frac{ln(3)}{ln(2)} \Rightarrow t_f = 1,585h$$

ou seja, 1 hora 35 minutos e 6 segundos.

2-

a) As variáveis de estado são definidas como $x_1(t) = w(t)$ e $x_2(t) = \dot{w}(t)$. Assim,

$$\begin{aligned} x_1(t) &= w(t) \\ x_2(t) &= \dot{w}(t) = \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) &= \ddot{w}(t) = -\frac{k}{m}w(t) - \frac{b}{m}\dot{w}(t) + \frac{k}{m}u(t) = -\frac{k}{m}x_1(t) - \frac{b}{m}x_2(t) + \frac{k}{m}u(t) \end{aligned}$$

A equação de saída é dada por $y(t) = w(t) = x_1(t)$. A descrição na forma vetorial-matricial

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{x}}(t) &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}u(t) \\ y(t) &= \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{D}u(t) \end{aligned}$$

é dada por

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{k}{m} \end{bmatrix} u(t) \quad \text{e} \quad y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + 0u(t)$$

na qual

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{k}{m} \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{D} = 0$$

b) Os autovalores α da matriz de estado $\boldsymbol{A}$ são definidos por $det(\alpha \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = 0$ na qual $\boldsymbol{I}$ é a matriz identidade de ordem 2. Assim

$$det\left(\alpha \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix}\right) = 0 \Rightarrow det\left(\begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix}\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow det\left(\begin{bmatrix} \alpha & -1 \\ \frac{k}{m} & \alpha + \frac{b}{m} \end{bmatrix}\right) = 0 \Rightarrow \alpha^2 + \frac{b}{m}\alpha + \frac{k}{m} = 0$$

Logo

$$\alpha = \frac{-\frac{b}{m} \pm \sqrt{\frac{b^2}{m^2} - \frac{4k}{m}}}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{-\frac{b}{m} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4mk}{m^2}}}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{-\frac{b}{m} \pm \frac{1}{m}\sqrt{b^2 - 4mk}}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4mk}}{2m}$$

A condição para que o sistema seja subamortecido é que os autovalores sejam complexos conjugados, lembrando que $b > 0$. Assim,

$$b^2 - 4mk < 0 \Rightarrow b^2 < 4mk \Rightarrow 0 < b < 2\sqrt{mk}$$

c) Para esta situação particular, do item b) e considerando $b = 0$, temos que os autovalores α da matriz de estado $\boldsymbol{A}$ são dados por

$$\alpha = \frac{\pm\sqrt{-4mk}}{2m} \Rightarrow \alpha = \pm\sqrt{\frac{-4mk}{4m^2}} \Rightarrow \alpha = \pm j\sqrt{\frac{k}{m}}$$

Como os autovalores são complexos conjugados puramente imaginários, o sistema é estável.

d) Temos que

$$M_p = e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \Rightarrow \xi = \sqrt{\frac{[ln(M_p)]^2}{[ln(M_p)]^2 + \pi^2}} \Rightarrow \xi = \sqrt{\frac{[ln(0,40)]^2}{[ln(0,40)]^2 + \pi^2}} \Rightarrow \xi = 0,2800$$

e

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}} \Rightarrow \omega_n = \frac{\pi}{t_p\sqrt{1-\xi^2}} \Rightarrow \omega_n = \frac{\pi}{1,0 \times \sqrt{1-0,2800^2}} \Rightarrow \omega_n = 3,272 rad/s$$

Igualando-se os termos semelhantes em

$$\ddot{w}(t) + 2\xi\omega_n\dot{w}(t) + \omega_n^2 w(t) = \omega_n^2 u(t) \quad \text{e} \quad \ddot{w}(t) + \frac{b}{m}\dot{w}(t) + \frac{k}{m}w(t) = \frac{k}{m}u(t)$$

temos que

$$\omega_n^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow k = m\omega_n^2 \Rightarrow k = 2,0 \times 3,272^2 \Rightarrow k = 21,41 N/m$$

e

$$2\xi\omega_n = \frac{b}{m} \Rightarrow b = 2m\xi\omega_n \Rightarrow b = 2 \times 2,0 \times 0,2800 \times 3,272 \Rightarrow b = 3,665 Ns/m$$

e) O erro é dado por $e(t) = r(t) - y(t)$ e o sinal de controle é dado por

$$u(t) = k_p e(t) + k_d\dot{e}(t) \Rightarrow u(t) = k_p(r(t) - w(t)) + k_d(\dot{r}(t) - \dot{w}(t)) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u(t) = k_p r(t) - k_p w(t) + k_d\dot{r}(t) - k_d\dot{w}(t) \Rightarrow u(t) = k_p r(t) - k_p w(t) - k_d\dot{w}(t)$$

pois

$$r(t) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad t \geq 0 \\ 0 & \text{se} \quad t < 0 \end{cases}$$

e, portanto, $\dot{r}(t) = 0$. Assim,

$$\ddot{w}(t) = -\frac{k}{m}w(t) - \frac{b}{m}\dot{w}(t) + \frac{k}{m}(k_p r(t) - k_p w(t) - k_d\dot{w}(t)) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ddot{w}(t) = -\frac{k}{m}w(t) - \frac{b}{m}\dot{w}(t) + \frac{kk_p}{m}r(t) - \frac{kk_p}{m}w(t) - \frac{kk_d}{m}\dot{w}(t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ddot{w}(t) = -\left(\frac{k + kk_p}{m}\right)w(t) - \left(\frac{b + kk_d}{m}\right)\dot{w}(t) + \frac{kk_p}{m}r(t)$$

Igualando-se os termos semelhantes de

$$\ddot{w}(t) = -\omega_n^2 w(t) - 2\xi\omega_n\dot{w}(t) + \omega_n^2 u(t) \quad \text{com} \quad \ddot{w}(t) = -\left(\frac{k + kk_p}{m}\right)w(t) - \left(\frac{b + kk_d}{m}\right)\dot{w}(t) + \frac{kk_p}{m}r(t)$$

temos que

$$\omega_n^2 = \frac{k + kk_p}{m} \Rightarrow k_p = \frac{m\omega_n^2 - k}{k} \quad \text{e} \quad 2\xi\omega_n = \frac{b + kk_d}{m} \Rightarrow k_d = \frac{2m\xi\omega_n - b}{k}$$

Para $M_p = 20\%$, temos

$$M_p = e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \Rightarrow \xi = \sqrt{\frac{[ln(M_p)]^2}{[ln(M_p)]^2 + \pi^2}} = \sqrt{\frac{[ln(0,20)]^2}{[ln(0,20)]^2 + \pi^2}} \Rightarrow \xi = 0,4559$$

e, portanto

$$t_s = \frac{4}{\xi\omega_n} \Rightarrow \omega_n = \frac{4}{\xi t_s} = \frac{4}{0,4559 \times 1,0} \Rightarrow \omega_n = 8,774 rad/s$$

Assim,

$$k_p = \frac{m\omega_n^2 - k}{k} = \frac{2,0 \times 8,774^2 - 21,41}{21,41} \Rightarrow k_p = 6,191$$

e

$$k_d = \frac{2m\xi\omega_n - b}{k} = \frac{2 \times 2,0 \times 0,4559 \times 8,774 - 3,665}{21,41} \Rightarrow k_d = 0,5761$$

f) A frequência natural amortecida do sistema controlado é dada por

$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\xi^2} \Rightarrow \omega_d = 8,774\sqrt{1 - 0,4559^2} \Rightarrow \omega_d = 7,809 rad/s$$

O tempo de subida do sistema controlado será dado por

$$t_r = \frac{\pi - tg^{-1}(\frac{\omega_d}{\xi\omega_n})}{\omega_d} \Rightarrow t_r = \frac{\pi - tg^{-1}(\frac{7,809}{0,4559 \times 8,774})}{7,809} \Rightarrow t_r = 0,2618 s$$

g) Para um aumento de 30% na massa m e os mesmos indices de desempenho de transitório do item e), os novos valores de k_p e k_d serão, respectivamente

$$k_p = \frac{1,3m\omega_n^2 - k}{k} = \frac{1,3 \times 2,0 \times 8,774^2 - 21,41}{21,41} \Rightarrow k_p = 8,349$$

e

$$k_d = \frac{2 \times 1,3 \times m\xi\omega_n - b}{k} = \frac{2 \times 1,3 \times 2,0 \times 0,4559 \times 8,774 - 3,665}{21,41} \Rightarrow k_d = 0,8003$$

h) Como os autovalores da matriz de estado do sistema controlado são dados por $\alpha = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$, temos que o sistema será assintoticamente estável, se e somente se, ambos os autovalores tiverem parte real negativa. Da expressão obtida no item e) para o ganho derivativo k_d, temos que

$$k_d = \frac{2m\xi\omega_n - b}{k} \Rightarrow \xi\omega_n = \frac{kk_d + b}{2m} > 0 \Rightarrow -\xi\omega_n = -\left(\frac{b + kk_d}{2m}\right) < 0 \Rightarrow -\xi\omega_n = \frac{-b - kk_d}{2m} < 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -b - kk_d < 0 \Rightarrow -kk_d < b \Rightarrow kk_d > -b \Rightarrow k_d > -\frac{b}{k} \Rightarrow k_d > -\frac{3,665}{21,41} \Rightarrow k_d > -0,1712$$