Fenômenos Eletromagnéticos

J. Javier S. Acuña

Aula 03: 26 de Junho de 2017

1 Energia Eletrostática.

1.1 Capacitor e capacitância.

- Supomos que temos 2 condutores e que carregamos com cargas $+Q$ e $-Q$. As cargas darão origem a um campo elétrico $\mathbf{E}$, e este à vez, dará origem a um diferença de potencial elétrico $\Delta V = V_+ - V_-$ entre os condutores. Como o potencial num condutor é constante, em qualquer ponto do condutor ΔV será constante e proporcional ao campo $\mathbf{E}$.

- Se a forma geométrica dos condutores for complexa, não é garantido que campo elétrico nos condutores seja uniforme, e desde que $\mathbf{E}$ depende da carga (ou densidade de carga ρ) na lei de Gauss, não seria possível garantir uma relação entre as cargas Q e o campo $\mathbf{E}$, ou equivalentemente, entre Q e potencial elétrico ΔV.

Se a geometria for simplificada, podemos supor uma relação em que o campo $\mathbf{E}$ é *proporcional* à carga Q de forma que a diferença de potencial elétrico ΔV também é proporcional, assim, $Q \propto \Delta V$ e a constante de proporcionalidade é chamada de *capacitância* do conjuto, que como um todo é chamado de *capacitor*.

$$C = \frac{Q}{\Delta V} \tag{1}$$

- A capacitância mede-se me Faradios [F] é uma quantidade puramente geométrica, determinada pelos tamanhos, formas e separações dos condutores.

  Aqui quando escrevemos Q nos referimos à grandeza física positiva, gerando um potencial também positivo, e por conseqüência, a capacitância é uma grandeza intrinsecamente positiva.

- Vejamos o trabalho necessário para carregar o capacitor até uma carga total Q, inicialmente descarregado. Para isso, é preciso remover os elétrons da placa, p.ex., positivia e levá-los para a placa negativa. Ao fazê-lo, os elétrons enfrentarão o campo $\mathbf{E}$ que está puxando-os de volta para o condutor positivo e afastando-os de negativo. Suponha que em algum estágio intermedriário do processo, a carga da placa positiva seja q, de forma que a diferença de potencial seja q/C, conforme a eq.(1). Para o trabalho temos,

$$W = \int_{-}^{+} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = -q \int_{-}^{+} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = q\,(V_{+} - V_{-}) = q\Delta V$$

  Assim o trabalho que é preciso fazer para transportar a próxima porção de carga, dq, é

$$dW = \left(\frac{q}{C}\right) dq \tag{2}$$

  e por conseqüência o trabalho total necessário para ir de $q = 0$ a $q = Q$ é

$$W = \int_{0}^{Q} \left(\frac{q}{C}\right) dq = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$$

  ou, como $Q = CV$,

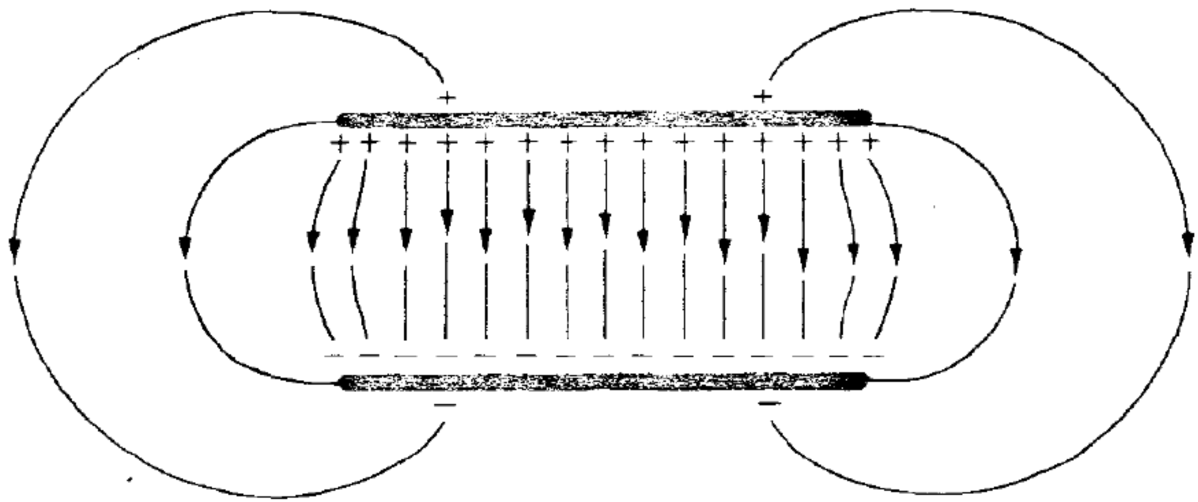
$$W = \frac{1}{2} C\ \Delta V^2 \tag{3}$$

  onde ΔV é a diferença de potencial final do capacitor. Desde que a energia potencial U acumulada será igual ao trabalho W realizado sobre o capacitor por um agente externo, $U = W$, resulta

$$U = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} C\ \Delta V^2 \tag{4}$$

- Se os dois condutores que formam o capacitor tiverem formas geométricas simples, a capacitância poderá ser obtida analiticamente. Assim, por exemplo, é fácil calcular a capacitância de duas placas paralelas, dois cilindros coaxiais, duas esferas concêntricas, ou a de um cilindro e um plano.

Por exemplo, deduziremos aqui a capacitância de um capacitor de placas paralelas. Ver figura a continuação.



Campo elétrico entre placas paralelas com cargas opostas, de área finita.

- Um capacitor de placas paralelas ideal é aquele no qual a separação d das placas é muito pequena comparada com as dimensões da placa; dessa forma, pode-se desprezar o campo deformado (efeito de borda), no caso ideal. Se a região entre as placas for preenchida com dielétrico de permissividade ϵ, o campo elétrico entre as placas será

$$E\ A = \frac{Q}{\epsilon} \qquad \Rightarrow \qquad E = \frac{Q}{\epsilon A}$$

onde A é a área de uma placa. A diferença de potencial $\Delta V = Ed$. Por conseguinte

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{\epsilon A}{d} \tag{5}$$

que é a capacitância dum *capacitor de placas paralelas*. Se a região entre as placas não for preenchida com um dielétrico, estando no vácuo, o campo elétrico entre as placas será.

$$C = \frac{\epsilon_0 A}{d}$$

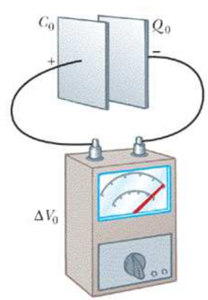
onde o vácuo tem permissividade ϵ_0.

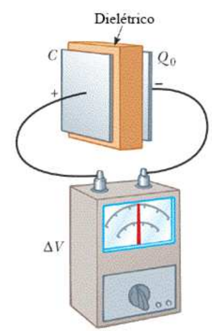
- En geral, a introdução de um dielétrico entre as placas de um capacitor aumenta a sua capacitância. Para suprir isto na matemática se introduze a constante dielétrica κ, que é um fator de quanto aumenta a capacitância pela inserção do dielétrico. Assim podemos supor C_0 para a capacitância dum capacitor no vácuo (sem dielétrico) e C para um capacitor com dielétrico no interior, e

$$C = \kappa C_0 \tag{6}$$

consequentemente

$$\epsilon = \kappa \epsilon_0 \tag{7}$$





- A densidade de energia, denotada por u, pode ser obtida dividindo a energia potencial acumulada pelo volume. Sendo $C = \frac{\epsilon_0 A}{d}$, $\Delta V = Ed$ resulta

$$u = \frac{U}{\Delta v} = \frac{C\ \Delta V^2}{2Ad} = \frac{\epsilon_0 A}{d}\frac{E^2 d^2}{2Ad} = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 \tag{8}$$

- Capacitância de um condutor esférico formado por uma esfera A de raio e outra esfera B de raio infinito. O potencial no ponto A será $V_A = k_e\frac{Q}{R}$, e no infinito $V_B = 0$. Assim

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{Q}{k_e\frac{Q}{R}} = \frac{R}{k_e}$$

e por tanto a capacitância de um condutor esférico é $C_{esfera} = 4\pi\epsilon_0 R$, que é independente da carga Q e da diferença de potencia ΔV.

- Outro caso é de um condutor cilíndrico de raio a e carga Q coaxial com uma casca cilíndrica de raio b e carga $-Q$ com comprimento total l. Aqui utilizamos a relação $V_b - V_a = -\int \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s}$, mas antes devemos saber o valor de E e para aquilo usamos a lei de Gauss e assim obter o campo entre os cilindros, cujo resultado é

$$E = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 lr} = \frac{2k_e Q}{l\ r}$$

assim o integrando fica como

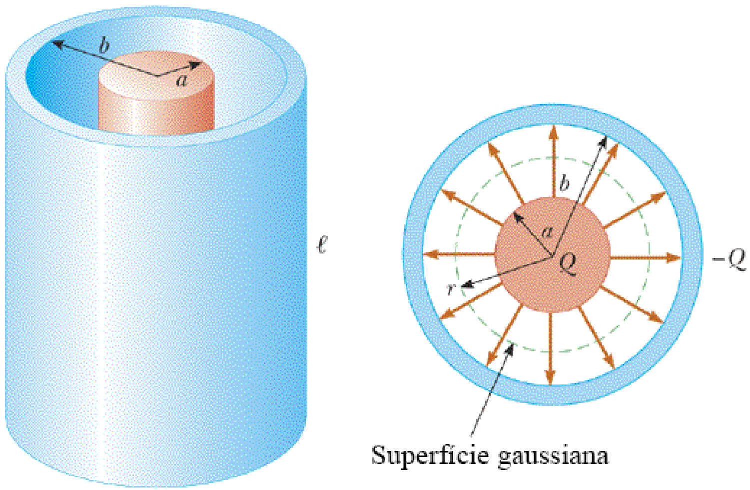
$$\mathbf{E}\cdot d\mathbf{s} = \frac{2k_e Q}{l\ r}dr$$

logo

$$V_b - V_a = -\int \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s} = -\int \frac{2k_e Q}{l\ r}dr = -2k_e\frac{Q}{l}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

como $|\Delta V| = \frac{Q}{C}$, resulta

$$C = \frac{l}{2k_e \ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$



- Comentário 1: A capacitância é a constante de proporcionalidade entre a carga e a diferencia de potencial, $Q \propto \Delta V$. No caso em que a geometria do capacitor for simplificada, temos que a diferença de potencial elétrico ΔV é proporcional à carga. Porém, para situações mais complexas da geometria, podemos escrever a capacitância do capacitor através do formalismo matemático dos *coeficientes de potencial* dos condutores. O formalismo resulta de pensar que existe uma relação linear entre os potenciais e as cargas de um conjunto de condutores. Assim, em um sistema composto de N condutores, o potencial de um deles é dado por

$$V_i = \sum_{j=1}^{N} p_{ij} Q_j \tag{9}$$

Estes coeficientes podem ser calculados, numericamente (analiticamente em alguns casos) ou por metodos experimentais diretos, tomando-se a energia eletrostática do sistema.

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m} q_i V_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} p_{ij} q_i Q_j \tag{10}$$

Há várias propriedades destes coeficientes p_{ij}, e as mais importantes são: (1) $p_{ij} = p_{ji}$, (2) todos os p_{ii} são positivos e (3) $p_{ii} - p_{ij} \geq 0$ para todo j.

No caso de termos 2 condutores (nosso caso) a capacitância pode ser escrita como

$$C = (p_{11} + p_{22} - 2p_{12})^{-1}$$

onde os coeficientes $p_{ii},\ p_{ij}$ são os coeficientes de potencial.

Se pensamos na relação matemática inversa da eq.(9) escrevemos

$$Q_i = \sum_{j=1}^{N} c_{ij} V_j \tag{11}$$

onde c_{ii} se denomina *coeficiente de capacitância* e c_{ij} $(i \neq j)$ é um *coeficiente de indução*.

- Comentário 2: Ao somar capacitâncias devemos ter o cuidado de saber se a conexão dos capacitores está em *paralelo* ou em *série*.

  No caso da conexão em paralelo, a mesma voltagem ΔV que aparece em cada capacitor também aparece na combinação; em conseqüência, p.ex., para 2 capacitores a capacitância equivalente é dada por

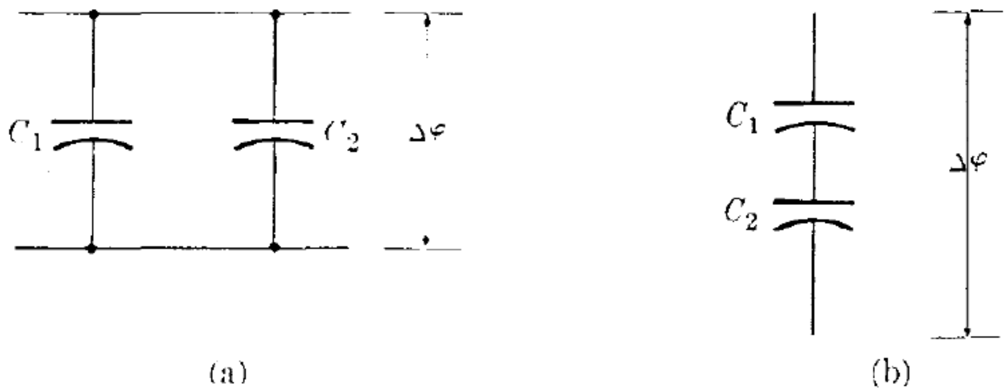
$$C = \frac{Q_1 + Q_2}{\Delta V} = C_1 + C_2 \tag{12}$$

  Se 2 capacitores forem conectados em série, a *conservação da carga* requererá que cada capacitor adquira a mesma carga. Dessa forma, a capacitância equivalente C da combinação se relaciona com C_1 e C_2 pela expressão

$$C = \frac{Q}{\Delta V_1 + \Delta V_2}$$

  ou bem

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \tag{13}$$

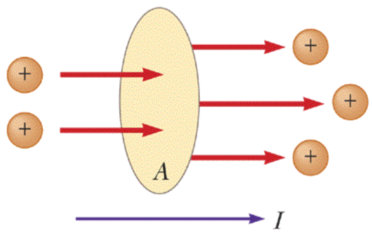


Conexão de capacitores (a) em paralelo, e (b) em série.

1.2 Corrente e densidade de corrente.

- Podemos pensar a corrente elétrica I com cargas elétricas em movimento. O simbolo I será a taxa com que a carga elétrica flui através de uma superfície. Tomaremos ΔQ como a quantidade da carga que atravessa a área A, e Δt o tempo gasto para ΔQ atravessar essa área.

$$I_{médio} = \frac{\Delta Q}{\Delta t} \qquad \rightarrow \qquad I = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{dQ}{dt} \tag{14}$$

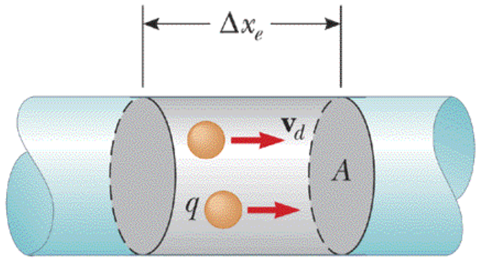


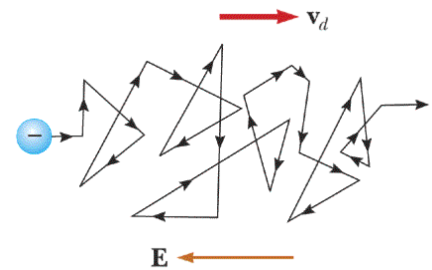
- Comentários: A unidade de corrente elétrica (SI) é o ampère (A), e assim $1\,[A] = 1\,[C/s]$. A direção da corrente é a direção do movimento das cargas positivas, que no caso de um condutor metálico usual (fio elétrico) o movimento é dos elétrons. Isto é portador de carga negativo (elétrons) e a direção da corrente é oposta à direção de movimentação dos portadores de carga

- Para uma Descrição microscópica da corrente vejamos que podemos definir

$$Q = Nq$$

onde N é número de portadores de carga e q a carga elétrica de cada portador. Vejamos a figura





representando um volume de um pedaço de condutor. Aqui $\Delta V = A\Delta x_e$, e definindo $n = N/\Delta V$, como o número de portadores por unidade de volume, resulta

$$\Delta Q = (n\Delta V)\, q = (nA\Delta x_e)\, q$$

dividindo por Δt, resulta

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{(nA\Delta x_e)\, q}{\Delta t} = nAq\frac{\Delta x_e}{\Delta t} = nAqv_d$$

onde v_d é a velicidade de migração (drift) dos portadores.

- A densidade de corrente é definida como $J = \frac{I}{A}$, e por conseguinte

$$J = \frac{I}{A} = nqv_d \tag{15}$$

1.3 Resistência e Lei de Ohm

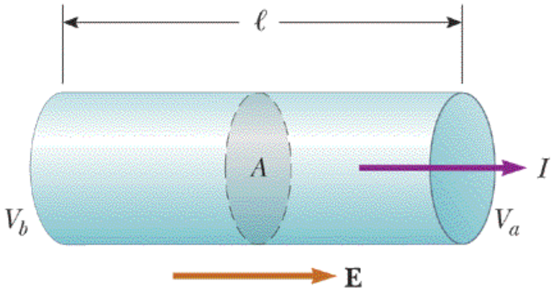
- Uma corrente elétrica implica um movimento de cargas devido a um campo elétrico, e por quanto maior a diferença de potencial, maior o campo elétrico. Por tanto deve haver uma relação entre corrente elétrica e diferença de potencial, e esta é chamada de *resistência elétrica*, ou seja, a constante de proporcionalidade entre I e ΔV. O fenômeno físico é que um resistor se opõe ao passo dos elétrons na condução.

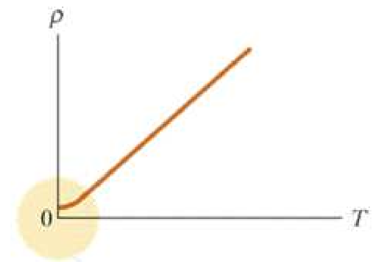
  Assim, definimos

$$\Delta V = RI \tag{16}$$

conhecida como *Lei de Ohm*.

- A unidade de resistência (SI) é o Ohm (■) $\Omega = [V/A]$. Chamamos *resistor* ao componente elétrico/eletrônico do condutor com resistência específica





- A resistividade do material (■m), denota como ρ, é proporcional ao comprimento do condutor e inversamente proporcional à sua área transversal, assim

$$R = \rho \frac{l}{A} \tag{17}$$

Chama-se *condutividade*, σ, ao inverso da resistividade

$$\sigma = \frac{1}{\rho} \tag{18}$$

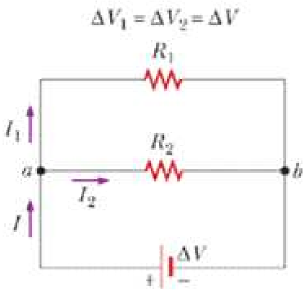
- Experimentalmente temos uma variação da resistividade com a temperatura, ela varia linearmente. Seja ρ a resistividade à temperatura T, e ρ_0 a resistividade à temperatura T_0, também seja α o coeficiente de temperatura da resistividade. Resulta

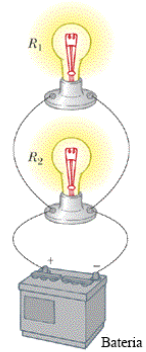
$$\rho = \rho_0 \left[1 + \alpha \left(T - T_0\right)\right] \qquad \rightarrow \qquad = \alpha = \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0 \left(T - T_0\right)} = \frac{1}{\rho_0} \frac{\Delta \rho}{\Delta T}$$

Portanto a resistência é linearmente proporcional à temperatura

$$R = R_0 \left[1 + \alpha \left(T - T_0\right)\right]$$

- Vejamos o caso da Associação de resistores em paralelo





- Neste caso temos que $I = I_1 + I_2$, e lembrando que $I = \Delta V/R$ resulta
$$\frac{\Delta V}{R} = \frac{\Delta V_1}{R_1} + \frac{\Delta V_2}{R_2}$$
dado que aqui o potencial é igual em todos os pontos em paralelo, temos que $\Delta V = \Delta V_1 = \Delta V_2$, por tanto ΔV sai da equação e resulta
$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + ... \tag{19}$$
Aqui R é *chamada resistencia* equivalente R_{eq}

- Quando as resistências estão conetadas em serie, como o resistor se opõe ao passo dos elétrons na condução, a soma é direta
$$R = R_1 + R_2 + ...$$

1.4 Fontes de força eletromotriz (fem)

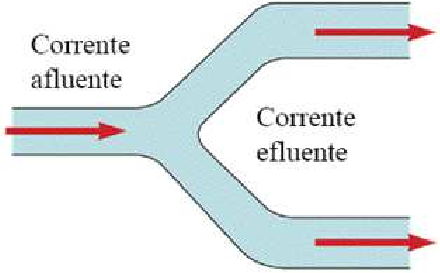
- Fonte de fem é um dispositivo que mantém a diferença de potencial constante. Ele bombeia cargas de um potencial menor para um potencial maior, e mantém a diferença de potencial enquanto é atravessada por cargas. Os exemplos destas fontes são as baterias e geradores. Se ε é a força eletromotriz (em volts), r a resistência interna do gerador, e I a corrente que atravessa o gerador, resulta

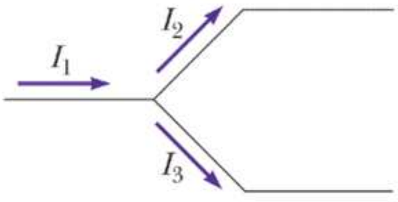
$$\Delta V = \varepsilon - Ir$$

onde ΔV é a diferença de potencial nos terminais do gerador quando há corrente, e ε é a diferença de potencial nos terminais do gerador com o circuito aberto.

1.5 Regras de Kirchhoff e circuitos de corrente contínua

- A primeira é a *regra dos nós* que diz que: a soma das correntes que entram em qualquer nó é igual à soma das correntes que saem deste nó.



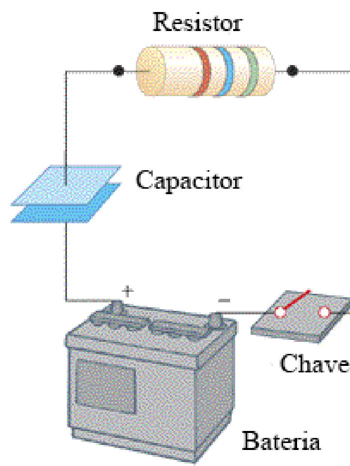


- A segunda é a *regra das malhas* que diz que: a soma das diferenças de potencial em todos os elementos de uma malha fechada do circuito é igual a zero.

1.6 Circuitos RC

- Chamamos de circuitos RC aos circuitos com resistores e capacitores. Aqui a corrente que flui enquanto o capacitor é carregado ou descarregado. Um capacitor completamente carregado implica uma corrente nula.

- Vejamos da figura



- da malha de Kirchhoff temos

$$\varepsilon_{bat} - \Delta V_{res} - \Delta V_{cap} = 0$$

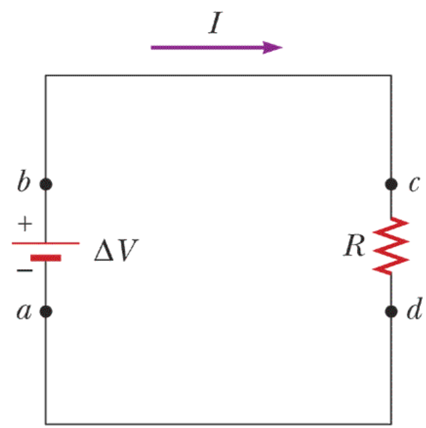
  assim

$$\varepsilon_{bat} - IR - \frac{q}{C} = 0$$

  onde q é a carga no capacitor em um dado instante, e I é a corrente no resistor nesse instante.

1.7 Energia elétrica e potência

- Vejamos a figura



- A *potência elétrica* e definida como a taxa de variação da energia elétrica

$$P = \frac{\Delta U}{\Delta t} \qquad \text{ou} \qquad P = \frac{dU}{dt}$$

O sistema ganha energia potencial elétrica $\Delta U = Q\Delta V$ devido ao movimento da carga dentro da bateria (de $a \to b$). O sistema perde energia potencial elétrica (energia dissipada na forma de calor) devido ao movimento da carga dentro do resistor $(c \to d)$.

Vejamos que se Q é a quantidade de carga que vai do ponto a ao ponto b, sendo a o ponto de referência onde o potencial é tomado como zero $(V_a = 0)$

$$P = \frac{dU}{dt} = \frac{d\,(Q\Delta V)}{dt} = \frac{dQ}{dt}\Delta V = I\ \Delta V$$

se $\Delta V = RI$, resulta

$$P = RI^2 \qquad \text{ou} \qquad P = \frac{\Delta V^2}{R}$$

- Agora podemos calcular a Potência da fem. Sendo $\varepsilon = \Delta V_R + Ir$, e $\Delta V_R = IR$, resulta

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \Delta V_R + Ir \\ &= IR + Ir \end{aligned}$$

por tanto

$$P_\varepsilon = I^2 R + I^2 r \qquad \rightarrow \qquad I = \frac{\varepsilon}{R + r}$$