

# Aula 5 (9/Fev)

## Na aula de hoje:

- \* Revisão da última aula.
- \* Interpretação de Copenhaga (cont.)
- \* Princípio Incerteza Heisenberg.
- \* Regime aplicabilidade da Mecânica Quântica.
- \* Folha Exercícios 2.

— // —

## Revisão aula anterior:

- \* Propriedades quânticas fundamentais
  - Fenomenologia (onda-partícula; medição)
  - Interpretação de Copenhaga (inadequação de conceitos clássicos).

— // —

## ② Interpretação de Copenhaga

### 2.2.1) Inadequação conceitos clássicos

- \* Ondas e partículas distintas em MC.
  - ↳ Em MQ estão intimamente relacionadas.
- \* Noção de trajetória em MC,  $\vec{x}(t)$ .
  - ↳ Abandonada em MQ.

\* Medição determinística em  $\mathcal{H}$

↳ Probabilístico em  $\mathcal{H}_A$ . (fótons/elec. detectados em posições aleatórias, mas compatíveis com padrões interp.; probabilidade de de passar/não passar polarizador).

\* Observar sistema não o altera em  $\mathcal{H}$

↳ Em  $\mathcal{H}_A$ , alterações fundamentais // sistema quando observamos (ver por qual banda; fóton depois do polarizador está em estado diferente).

\* Todos resultados resultados possíveis em  $\mathcal{H}$ .

↳ alguns privilegiados em  $\mathcal{H}_A$  ("auto-resultados" e "auto-estado"; grandezas físicas quantizadas).

## 2.2.2) Função de onda e Eq. Schrodinger

Fótons:

\* Estado fóton é dado  $\vec{E}(t, \vec{r}) \Rightarrow$  toda info.

\* Probabilidade medir fóton em volume  $d^3\vec{r} = dx dy dz$  em torno  $\vec{r}$ , no instante  $t$  é dado por  $dP(t, \vec{r}) = |\vec{E}(t, \vec{r})|^2 \cdot d^3\vec{r}$ .

\* Evolução temporal de  $\vec{E}(t, \vec{r})$  governada

pelas eqs Maxwell.

## Matéria

- \* Estado em  $(t, \vec{r})$  dado por  $\psi(t, \vec{r}) \Rightarrow$  toda info.
- \* Probabilidade em  $d^3\vec{r}$  em  $t$ :  $dP(t, \vec{r}) = |\psi(t, \vec{r})|^2 d^3\vec{r}$
- \* Evolução temporal  $\psi(t, \vec{r})$ ?

$\Rightarrow$  Eq. Schrödinger

Notando eqs Schr., usando

$$\hbar = h/2\pi ; \omega = 2\pi\nu$$

$$\begin{cases} \textcircled{1} E = h\nu = \hbar\omega \rightarrow \text{Planck} \\ \textcircled{2} |\vec{p}| = \frac{h}{\lambda} = \hbar|\vec{k}| \rightarrow \text{de Broglie} \end{cases}$$

$\nwarrow |\vec{k}| = \frac{2\pi}{\lambda}$

Partícula livre  $\Rightarrow \begin{cases} E = E_{\text{cin}} \\ E_{\text{pot}} = 0 \end{cases}$

$$E = E_{\text{cin}} = \frac{|\vec{p}|^2}{2m} = \frac{m^2 v^2}{2m} = \frac{1}{2} m v^2$$

$$\textcircled{1} \Rightarrow \hbar\omega = \frac{\vec{p} \cdot \vec{p}}{2m} = \frac{\hbar^2 \vec{k}^2}{2m}$$

$\uparrow$   
 $\textcircled{2} |\vec{p}| = \hbar|\vec{k}|$

Considerar natureza ondulatória, então vamos assumir que a solução

$$\psi(t, \vec{r}) = e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$$



↳ onda plana

então

$$\hbar \omega = \frac{\hbar^2 \vec{k}^2}{2m}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$\Rightarrow i \hbar \frac{\partial}{\partial t} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} = - \frac{\hbar^2}{2m} \vec{\nabla}^2 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

$$\Rightarrow \omega \hbar e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} = - \frac{\hbar^2}{2m} \underbrace{i^2 (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)}_{\parallel |\vec{k}|^2} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

$$\Rightarrow \omega \hbar = \frac{\hbar^2 |\vec{k}|^2}{2m}$$

Para função de onda geral

$$\Rightarrow i \hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(t, \vec{r}) = - \frac{\hbar^2 \vec{\nabla}^2}{2m} \psi(t, \vec{r})$$

↳ partícula livre

Incluindo potencial escalar sentido pela partícula, teremos então

$$i \hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(t, \vec{r}) = \left[ - \frac{\hbar^2 \vec{\nabla}^2}{2m} + V(t, \vec{r}) \right] \psi(t, \vec{r})$$

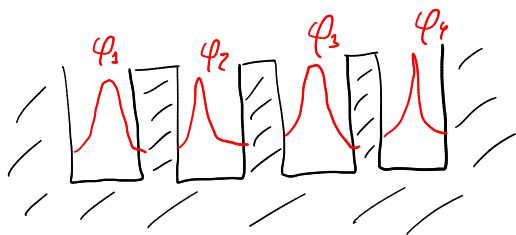
↳ Eqs. Schrödinger

Note: Eq. Sch. é linear e homogênea em  $\psi(t, \vec{r})$ . Podemos então combinar linearmente diferentes soluções.

↳ princípio de superposição

⇒ Superposição de ondas de pendo 1 e de pendo 2 na exp. de Young é o que dá o padrão de

$$\psi(t, \vec{r}) = \sum_{\alpha} c_{\alpha} \cdot \varphi_{\alpha}(t, \vec{r}) \Rightarrow \mathcal{P}_{\alpha} = \frac{|c_{\alpha}|^2}{\sum_{\alpha} |c_{\alpha}|^2}$$



$$\sum_{\alpha} \mathcal{P}_{\alpha} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{\sum_{\alpha} |c_{\alpha}|^2}{\sum_{\alpha} |c_{\alpha}|^2} = 1$$

### 2.2.3) Interpretação canônica da TQ

Interpretação canônica/Copenhaga, a como este conjunto conceitual e fenomenológico da seguinte forma:

- (i) Enquanto não é medido, o fóton/elétron não existe como entidade localizada (como partícula), mas encontra-se "diluído" em todo espaço como uma função de onda. (está numa superposição de estados/posições).

(ii) Apenas quando medimos, se dá o colapso do f.o. (para um dos estados possíveis), e se detecta electrão / fóton como partícula localizada (ou polarização definida, etc.).

(iii) O resultado da medição pode apenas ser previsto probabilístico // como

$$P(x) = \frac{|\psi(x)|^2}{\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x)|^2 dx}$$

(iv) A f.o. é colui governada pelo eq. Schr.

Nota: Paradoxo Einstein-Bohrski-Rosen (EPR).  
Desigualdades de Bell.  
Experiência Alain Aspect.

↳ Abandonamos noção localidade,  
mantendo noção de causalidade.

## 2.3 Princípio da Incerteza de Heisenberg

Existe expressão matemática traduzindo impossibilidade de ver simultaneamente propriedades ondulatórias

e corpusculares de sistema quântico

↳ Partícula tem posição bem definida,  $x$ .

↳ Onda tem comprimento de onda bem definido,  $\lambda$ .

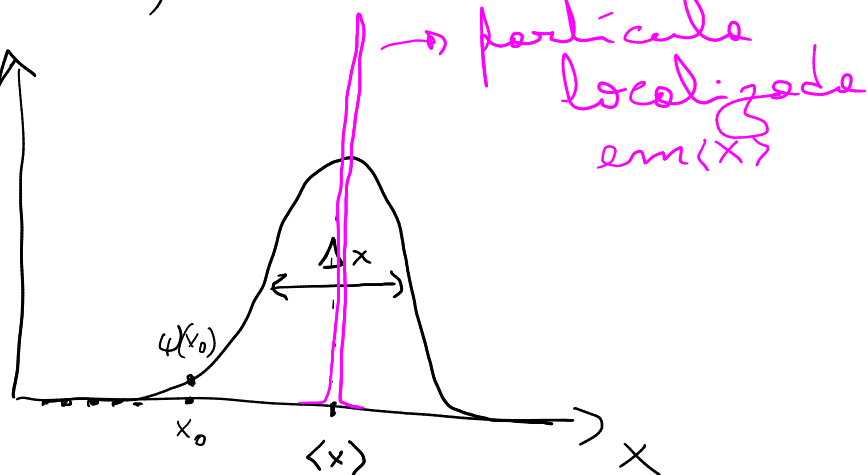
Partícula descrita por  $\psi(x)$ . A p.o. determina uma distribuição probabilística

$$P(x) = \frac{|\psi(x)|^2}{N_\psi}, \quad N_\psi = \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x)|^2 dx$$

$$\langle x \rangle_\psi = \int_{-\infty}^{+\infty} x P(x) dx$$

Quanto menor o desvio padrão da variável  $x$ ,  $\Delta x = \sqrt{\langle x^2 \rangle_\psi - \langle x \rangle_\psi^2}$ , mais parecida a p.o. com a p.o. localizada no espaço,

$|\psi(x)|$



Estamos a escrever  $\psi$  na base das posições

$\{x_0\} = \delta(x-x_0): \psi(x_0) \delta(x-x_0)$

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x_0) \delta(x-x_0) dx_0 \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x_0) \delta(x-x_0) dx_0 = \psi(x) \end{aligned}$$

Podemos também expressar  $\psi(x)$  como combinação linear de ondas planas,  $e^{ikx}$ , usando integral de Fourier,

Aqui estamos a escrever  $\psi$  numa base de ondas planas

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\hat{\psi}(k)}_{\text{"}\hat{\psi}_k\text{"}} \cdot \underbrace{e^{ikx}}_{\text{"}\hat{\psi}_k\text{"}} \cdot dk$$

onde  $\hat{\psi}(k)$  é a T.F. dada por

$$\hat{\psi}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x) e^{-ikx} dx.$$

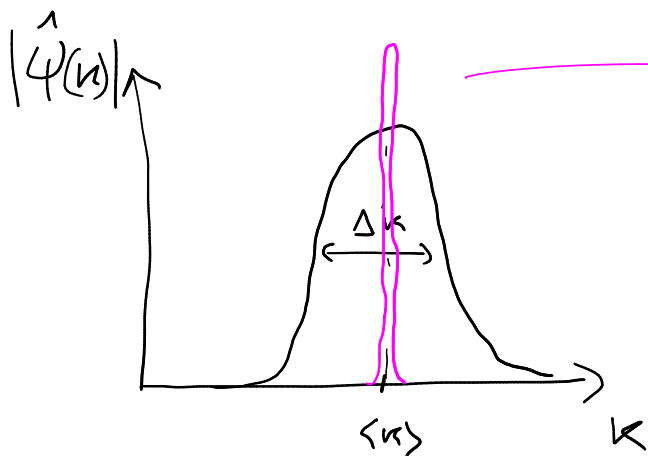
Podemos ver então  $\hat{\psi}(k)$  como p.o. no espaço de Fourier, com dist. prob. (de medições vector onde  $k = 2\pi/\lambda$ ) dada por

$$\hat{P}(k) = \frac{|\hat{\psi}(k)|^2}{N_{\hat{\psi}}},$$



onde  $N_{\hat{\psi}} = \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{\psi}(k)|^2 \cdot dk$ .

O nosso pacote/elec. será tão mais parecido com onda plana, quanto menor for  $\Delta k = \sqrt{\langle k^2 \rangle_{\hat{\psi}} - \langle k \rangle_{\hat{\psi}}^2}$ .



só um valor de  $k$   
 $\Rightarrow$  equivalente a  
 onda plana no  
 espaço  $x$

$$\Rightarrow \psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx}$$



Acontece que há propriedades das  
 transf. de Fourier que nos diz que

$$\boxed{\Delta x \cdot \Delta k \geq \frac{1}{2}} \rightarrow \boxed{\text{Ex 5, Folha 2}}$$

Esta desigualdade matemática  
 tem profundas implicações físicas

quando usamos as relações de de Broglie,  $p = h/\lambda = \hbar k$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta x \Delta p \geq \hbar/2}$$

↳ Princípio da Incerteza Heisenberg

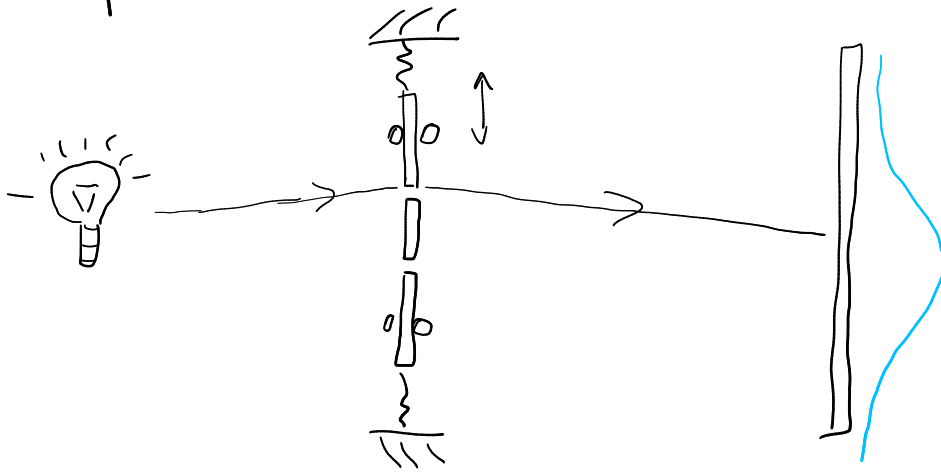
Nota: Em d-dimensões teremos

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{d\hbar}{2}.$$

Nota: Apenas o último passo tem relevância física (até ali apenas fizemos manipulações matemáticas de análise de Fourier). Usar de Broglie para transformar  $k$  (propriedade de onda) em  $p$  (propriedade de partícula) deixa claro que não podemos conhecer simultaneamente e com precisão arbitrária as duas propriedades corpusculares: posição e momento.

# Experiência Young modificada

[Ex 4, Folha 2]



↳ Veremos na Folha 2 que destruição do padrão de interferência quando temos ver por qual fenda passa o phóton, está intimamente relacionada com o Princípio de Incerteza de Heisenberg.