

Fenômenos Eletromagnéticos

J. Javier S. Acuña

Aula 01: 29 de Maio de 2017

Forças elétricas e Campos elétricos.	2
Antecedentes: carga elétrica.	2
Lei de Coulomb. Força elétrica.	4
Campo Elétrico	9

1 Forças elétricas e Campos elétricos.

1.1 Antecedentes: carga elétrica.

- A *carga elétrica* será definida como q , e conceitualmente pode se pensar como a experiência comum que ao se esfregar um pente de plástico com um pedaço de lã, o plástico adquire a capacidade de levantar pequenos pedaços de papel. Dizemos aqui que o plástico e a lã, adquirem uma propriedade; estão carregados.

No entanto, a própria carga não é criada durante este processo; a carga total é conservada, ou a soma das cargas nos dois corpos, é ainda a mesma que antes da eletrificação.

- Benjamin Franklin (1706 — 1790) foi o primeiro a ver que existem duas espécies de carga, a positiva e a negativa, e um pedaço ordinário de matéria contém quantidades aproximadamente iguais de cada espécie.

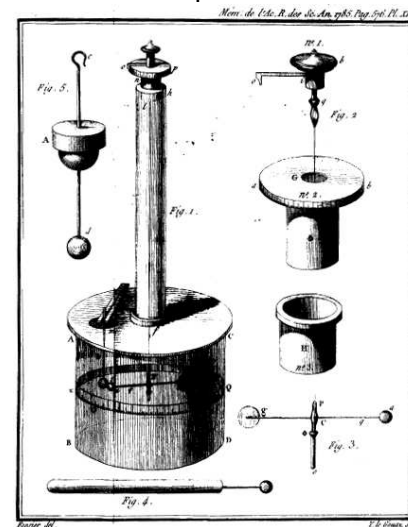
Quando dizemos que um objeto está carregado, queremos dizer que ele tem um excesso de cargas, um excesso de elétrons (negativo) ou um excesso de prótons (positivo).

Benjamin Franklin (Boston, 17 de janeiro de 1706 — Filadélfia, 17 de abril de 1790) foi um jornalista, editor, autor, filantropo, abolicionista, funcionário público, cientista, diplomata e inventor



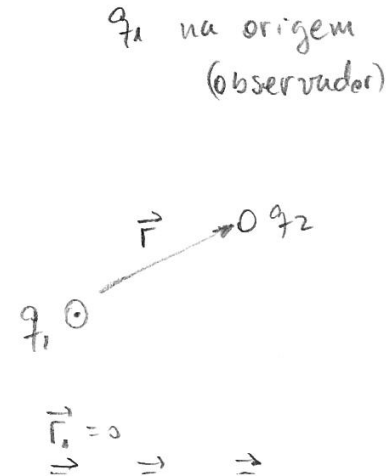
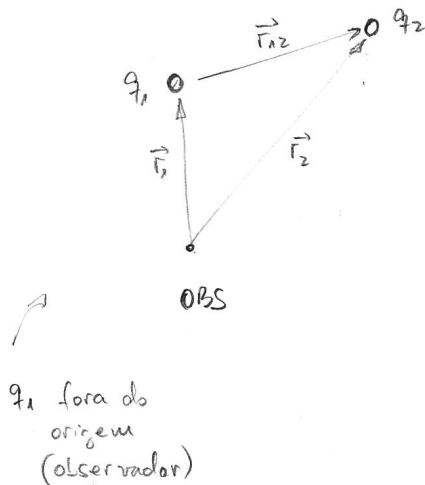
- Em física moderna, sabemos que partículas microscópicas carregadas, especificamente elétrons, são transferidas da lã para o plástico, deixando a lã positivamente carregada e o plástico negativamente carregado.
- Pela observação experimental sabemos que a carga não pode ser criada, nem destruída. A carga total de um sistema isolado não pode variar. Do ponto de vista macroscópico, as cargas podem ser reagrupadas, acumuladas e combinadas de modos diferentes; todavia, podemos estabelecer que *a carga líquida é conservada num sistema isolado*.
- Além disto, é interessante notar aqui que em um isolante, as cargas vão ficar sempre onde a colocarem, não vão se mover, quanto em um material condutor as cargas cobrem e equilibram toda a superfície no primeiro contato.
- No caso de um metal, podemos considerar um átomo como um íon carregado positivamente, com 1 ou 2 elétrons na sua superfície, devilmente ligados. Estes átomos no interior de um metal estão tão pertos, um de outro, que esses 1 ou 2 elétrons podem se mover livremente por la supefície de cada átomo vizinho, e por todos os átomos da estrutura. Resulta disto, um "mar de elétrons" uniformemente distribuidos na superfície.

A balança de torção, também denominada o pêndulo de torção, é um aparelho científico para medir forças muito débeis. Seu desenho se acredita a Charles-Augustin de Coulomb, quem o inventou em 1777, ainda que John Michell tem um desenho independentemente em 1783.



1.2 Lei de Coulomb. Força elétrica.

- A meados do século XVIII conheciam-se 3 fortes evidências experimentais para a carga elétrica, e que terminariam com a **lei de Coulomb**, em homenagem a Charles Augustin de Coulomb (1736-1806).
 - (a) Existem duas e somente duas espécies de carga elétrica, hoje conhecidas como positiva e negativa.
 - (b) Duas cargas pontuais exercem, entre si, forças que atuam ao longo da linha que as une e que são inversamente proporcionais ao quadrado da distância entre elas.
 - (c) Estas forças são também proporcionais ao produto das cargas; são repulsivas para cargas de mesmo sinal e atrativas para cargas de sinais opostos.



- A lei de Coulomb para cargas pontuais pode ser formulada como

$$\mathbf{F}_1 = k_e \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \hat{\mathbf{r}}_{12} \quad (1)$$

com

$$\hat{\mathbf{r}}_{12} = \frac{\mathbf{r}_{12}}{r_{12}} \quad (2)$$

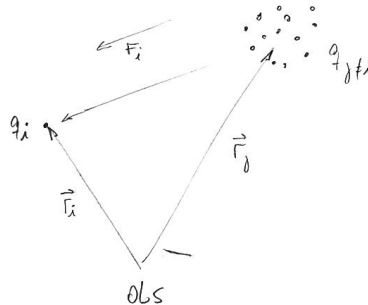
o vetor unitário na direção \mathbf{r}_{12} , e $\mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$.

Aqui \mathbf{F}_1 é a força sobre a carga q_1 , \mathbf{r}_{12} é o vetor que vai de q_2 a q_1 , r_{12} é o módulo de \mathbf{r}_{12} , e k_e é a constante de proporcionalidade.

- A eq.(1) aplica-se à repulsão eletrostática entre núcleos a distâncias maiores que 10^{-14} metros, aproximadamente; para distâncias menores, as forças nucleares, intensas, mas de curto alcance, dominam o quadro.
- O valor da unidade de carga, o coulomb, é estabelecido por meio de experiências magnéticas; isto requer que $k_e = 8,987 \times 10^9 [Nm^2/C^2]$. Fazemos a substituição aparentemente complicada,

$$k_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0},$$

no intuito de simplificar alguma das outras equações. A constante ϵ_0 ocorrerá repetidamente, ela é conhecida como a *permissividade do espaço livre* e é numericamente igual a $\epsilon_0 = 8,854 \times 10^{-12} [C^2/Nm^2]$.



- Se estiverem presentes mais do que duas cargas pontuais, as forças mútuas serão determinadas pela aplicação repetida e somada da eq.(1). Particularmente, se for considerado um sistema de N cargas, a força na carga de índice i será dada pelo princípio da *superposição de forças*, $\mathbf{F}_1 = \mathbf{F}_{21} + \mathbf{F}_{31} + \mathbf{F}_{41} + \dots + \mathbf{F}_{N1}$

$$\mathbf{F}_i = q_i \sum_{j \neq i}^N \frac{q_j}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}_{ij}}{r_{ij}^3} = k_e q_i \sum_{j \neq i}^N \frac{q_j}{r_{ij}^2} \hat{\mathbf{r}}_{ij} \quad (3)$$

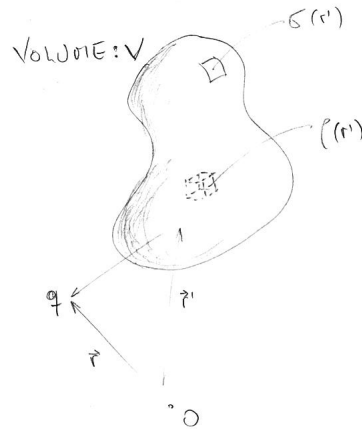
com

$$\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j,$$

onde a soma à direita se estende sobre todas as cargas, exceto à de índice i . Este é justamente o princípio da superposição de forças, que diz que a força total que atua sobre um corpo é a soma vetorial das forças individuais que atuam sobre ele.

- Sabe-se agora que a carga elétrica é encontrada sob a forma de múltiplos de uma carga básica: a carga do elétron, mas o fato da carga ser discreta não causa dificuldades, simplesmente porque a carga eletrônica tem um valor igual a $q = -e = -1,6019 \times 10^{-19} [C]$, que é extremamente pequeno.

Pode-se então descrever uma distribuição de cargas em termos de uma função densidade de carga, definida como o limite da carga por unidade de volume quando o volume se torna infinitesimal.



- No formalismo matemático podemos proceder como se um segmento de carga pudesse ser subdividido indefinidamente e descrever a *distribuição de cargas* por meio de funções pontuais:

- uma *densidade de carga volumétrica* definida por

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta V} = \frac{dq}{dV} \quad (4)$$

- e uma *densidade de carga superficial* definida por

$$\sigma = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta S} = \frac{dq}{dS} \quad (5)$$

- e uma *densidade de carga linear* definida por

$$\lambda = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta l} = \frac{dq}{dl} \quad (6)$$

onde ρ , σ e λ são densidades de carga líquida.

- Se a carga estiver distribuída num volume V com uma densidade ρ , e/ou, na superfície S que limita V com uma densidade σ , a força exercida por esta distribuição de cargas sobre uma carga puntual q , localizada em \mathbf{r} , será obtida por meio da eq.(3) pela substituição de q_j por $\rho_j dv'_j$ (ou por $\sigma_j da'_j$), aplicando-se o limite:

$$\mathbf{F}_q = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \rho(\mathbf{r}') dv' + \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \sigma(\mathbf{r}') da' \quad (7)$$

onde a variável \mathbf{r}' é usada para localizar um ponto no interior da distribuição de carga, isto é, faz o papel do ponto fonte \mathbf{r}_j na eq.(3). Colocando a carga de prova na origem

$$\mathbf{F}_q = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{r^2} \rho(\mathbf{r}') dv' + \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\sigma(\mathbf{r}')}{r^2} da' \quad (8)$$

- Observemos que no caso particular de termos um metal tal que a carga apenas estiver distribuída num volume V com uma densidade ρ , e usando a eq.(2), podemos escrever

$$\mathbf{F}_q = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')^2} \hat{\mathbf{r}} dv' \quad (9)$$

e que colocando a carga de prova na origem (observador) fica como

$$\mathbf{F}_q = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{r^2} \hat{\mathbf{r}} dv' \quad (10)$$

observemos que a \mathbf{F}_q é uma intensidade proporcional a $1/r^2$, e isto é equivalente ao caso de uma intensidade emitida esfericamente desde um ponto central, onde a área em cada esfera concêntrica aumenta proporcional a r^2 , quanto sua intensidade diminui com r^2 .

- Está claro que a força \mathbf{F}_q , como é dada pela eq.(7), é proporcional a q ; o mesmo é válido na eq.(3), assim $F \propto q$. Esta observação leva-nos a introduzir um vetor de campo que é independente de q , este vetor de campo, é conhecido como *campo elétrico*.

1.3 Campo Elétrico

- O símbolo que se costuma empregar para o campo elétrico é \mathbf{E} . Em notação vetorial, a definição de \mathbf{E} torna-se

$$\mathbf{E} = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{\mathbf{F}_q}{q} \quad (11)$$

O limite está incluído na definição de \mathbf{E} para assegurar que a carga teste não afete a distribuição de cargas produzidas por \mathbf{E} . Como a carga eletrônica tem um valor igual que é extremamente pequeno, para a maioria dos casos podemos tomar simplesmente

$$\mathbf{F}_q = q\mathbf{E} \quad (12)$$

- Suponhamos que a distribuição de cargas consista de N cargas pontuais q_1, q_2, \dots, q_N , localizadas nos pontos $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N$, respectivamente, e/ou uma distribuição volumétrica de cargas especificada pela densidade de carga $\rho(\mathbf{r}')$ no volume V , e/ou uma distribuição superficial caracterizada pela densidade de carga superficial $\sigma(\mathbf{r}')$ sobre a superfície S . Se uma carga teste q estiver localizada no ponto \mathbf{r} , ela experimentará uma força \mathbf{F} dada por

$$\mathbf{F} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N q_i \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \rho(\mathbf{r}') dv' + \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \sigma(\mathbf{r}') da' \quad (13)$$

por causa de uma dada distribuição de carga. Como a razão é independente de q , o campo elétrico em \mathbf{r} é exatamente

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N q_i \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \rho(\mathbf{r}') dv' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \sigma(\mathbf{r}') da' \quad (14)$$

colocando a carga de prova na origem

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{r^2} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{r^2} dv' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\sigma(\mathbf{r}')}{r^2} da' \quad (15)$$

Esta equação é bastante geral e em muitos casos, um ou dois termos, não serão necessários. Observemos que no

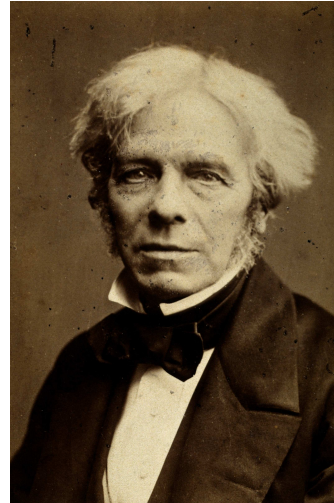
caso particular de termos um material tal que a carga apenas esteja distribuída num volume V com uma densidade ρ , colocando a carga teste na origem, e usando a eq.(2), podemos escrever

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{r^2} \hat{\mathbf{r}} dv' \quad (16)$$

- Na eq.(14) temos que $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{r})$ é uma função vetorial puntual, ou um campo vetorial, e pode ser calculada em cada ponto do espaço na vizinhança de um sistema de cargas ou de uma distribuição de cargas.

- .

Como um auxílio para visualizar a estrutura do campo elétrico associado com uma distribuição particular de carga, Michel Faraday (1791-1867) introduziu o conceito de *linhas de força*.



Uma linha de força é uma linha (ou curva) imaginária traçada de tal forma que sua direção e sentido em qualquer ponto sejam os do campo elétrico naquele ponto. Consideremos, por exemplo, a estrutura do campo elétrico associado a uma só carga puntual positiva q_1 . As linhas de força são linhas radiais que se dirigem para fora de q_1 . De forma semelhante, as linhas de força associadas a uma carga puntual negativa isolada são também linhas radiais

mas, neste caso, o sentido é para dentro (isto é, em direção à carga negativa).

A figura a continuação ilustra dois campos elétricos simples que foram traçados com o auxílio de linhas de força.

