S T Q Q S S D

___/___/___

5) Seja o sistema
$$\begin{cases} 2x + 4y - z = 0 \\ 5x + 2y - 2z = -7 \\ -x + 2y - 4z = -5 \end{cases}$$

A fim de utilizar algum método iterativo é necessário que primeiramente se aplique os critérios de convergência e para garantir a convergência é preciso que os maiores valores em módulo estejam presentes na diagonal principal.

Portanto ao trocar linhas obtemos o seguinte:
$$\begin{cases} 5x + 2y - 2z = -7 \\ 2x + 4y - z = 0 \\ -x + 2y - 4z = -5 \end{cases}$$

Utilizando o critério das linhas, temos:

$$i = 1 \quad \left|\frac{2}{5}\right| + \left|\frac{-2}{5}\right| = 0{,}8 < 1 \checkmark$$

$$i = 2 \quad \left|\frac{2}{4}\right| + \left|\frac{-1}{4}\right| = 0{,}75 < 1 \checkmark$$

$$i = 3 \quad \left|\frac{-1}{-4}\right| + \left|\frac{+2}{-4}\right| = 0{,}75 < 1 \checkmark$$

Com o critério das linhas satisfeito podemos aplicar o método de Jacobi - Richardson ou Gauss - Seidel

Neste exercício utilizaremos o método de Gauss- Seidel, portanto isolando as variáveis, temos o seguinte:

spiral®

S T Q Q S S D

__/__/__

$$\begin{cases} x_{n+1} = -7/5 - 2y_n/5 + 2z_n/5 \\ y_{n+1} = 0 - 2x_{n+1}/4 + z_n/4 \\ z_{n+1} = 5/4 - x_{n+1}/4 + 2y_{n+1}/4 \end{cases}$$

Utilizando $x_0 = -7/5$; $y_0 = 0$; $z_0 = 5/4$ e sabendo que $ER_x = \left|\frac{x_{n+1} - x_n}{x_{n+1}}\right|$, temos:

1° iteração:

$x_1 = -7/5 - 2(0)/5 + 2(5/4)/5 = -0,9$ $ER_x = 0,5556$
$y_1 = 0 - 2(-0,9)/4 + (5/4)/4 = 0,7625$ $ER_y = 1$
$z_1 = 5/4 - (-0,9)/4 + 2(0,7625)/4 = 1,8563$ $ER_z = 0,3266$

2° iteração:

$x_2 = -7/5 - 2(0,7625)/5 + 2(1,8563)/5 = -0,9625$ $ER_x = 0,065$
$y_2 = 0 - 2(-0,9625)/4 + (1,8563)/4 = 0,9453$ $ER_y = 0,1933$
$z_2 = 5/4 - (-0,9625)/4 + 2(0,9453)/4 = 1,9633$ $ER_z = 0,0545$

3° iteração:

$x_3 = -7/5 - 2(0,9453)/5 + 2(1,9633)/5 = -0,9928$ $ER_x = 0,031$
$y_3 = 0 - 2(-0,9928)/4 + (1,9633)/4 = 0,9872$ $ER_y = 0,042$
$z_3 = 5/4 - (-0,9928)/4 + 2(0,9872)/4 = 1,9918$ $ER_z = 0,014$

Com todos os erros relativos menores que 0,1 paramos na 3ª iteração de modo que:

$$\{(x;y;z)\} \cong \{(-1;1;2)\}$$

Sendo a permutação de linhas necessária como já foi mencionado anteriormente

spiral®