# BC0209–Fenômenos Eletromagnéticos

## Segundo quadrimestre de 2016

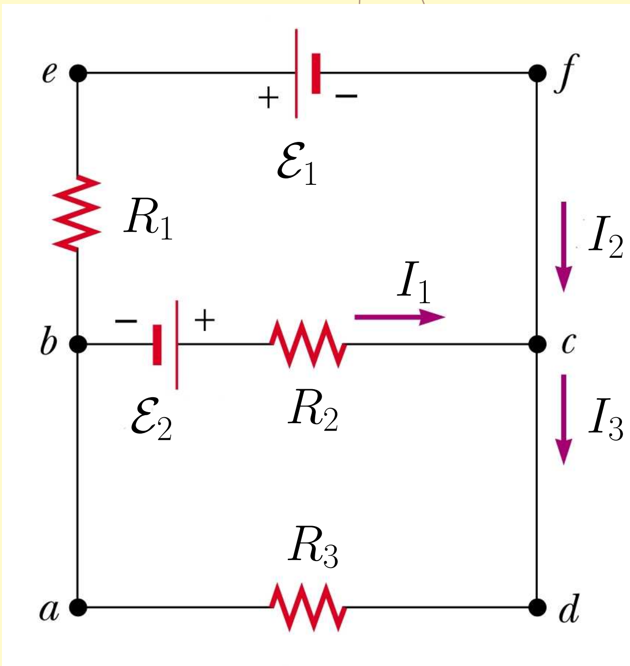
Prof. José Kenichi Mizukoshi

Aula 10 (versão 14/05/2015)

Leis de Kirchhoff. Transferência de energia em um circuito elétrico. Circuitos $RC$.

# Leis de Kirchhoff; Transferência de Energia em um Circuito Elétrico; Circuitos $RC$

# Leis de Kirchhoff




- As **leis de Kirchhoff** são um conjunto de duas regras usadas em análises de circuitos elétricos complexos, como o mostrado ao lado, onde não se consegue reduzir os resistores em combinações em série e/ou em paralelo.
- **Primeira lei de Kirchhoff ou a lei dos nós**:

  "A soma das correntes que entram em qualquer nó é igual à soma das correntes que saem desse nó."

  Ex.: no nó $c$ do circuito ao lado, $I_1 + I_2 = I_3$.

  ➢ A lei dos nós é um enunciado da conservação da carga elétrica. No exemplo acima,

$$q_1 + q_2 = q_3 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}(q_1 + q_2) = \frac{d}{dt} q_3 \quad \Rightarrow \quad I_1 + I_2 = I_3$$

# Leis de Kirchhoff

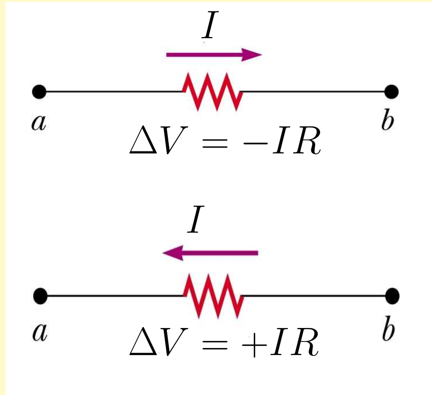


- **Segunda lei de Kirchhoff ou a lei das malhas**:

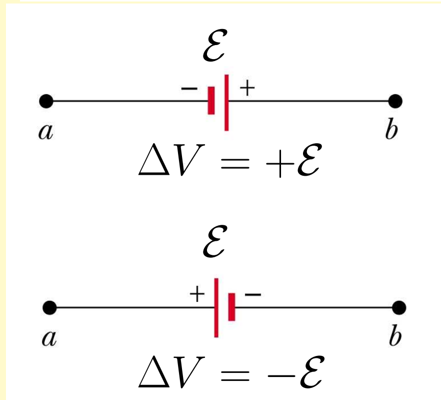
  "A soma de todas as diferenças de potencial em todos os elementos de uma malha fechada do circuito é igual a zero."

  Sinal da diferença de potencial. Considere o circuito percorrido de $a$ para $b$:

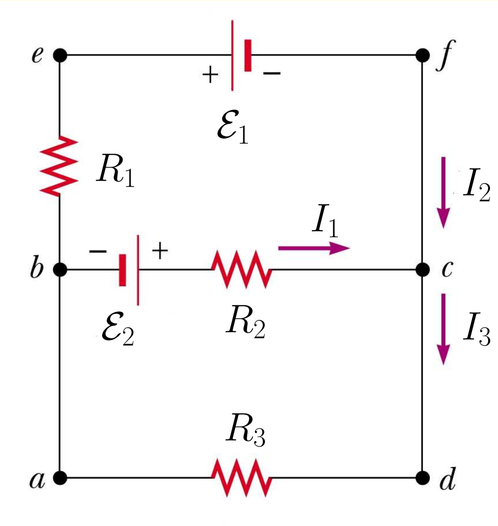
  - Se um resistor for atravessado no sentido da corrente, a diferença de potencial $\Delta V = V_b - V_a$ no resistor é $-IR$, enquanto que se for atravessado no sentido contrário, a diferença de potencial será $+IR$.




  - Se uma fonte de fem for atravessada do terminal "$-$" para o terminal "$+$", a diferença de potencial é $+\mathcal{E}$. Caso contrário, será $-\mathcal{E}$.



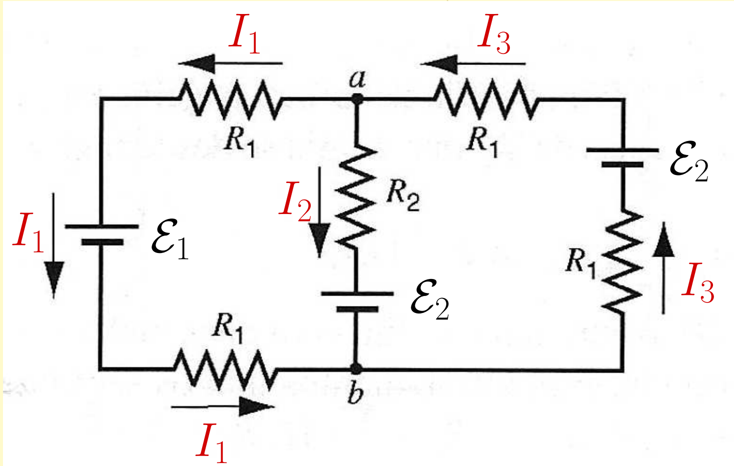
# Leis de Kirchhoff




- Considere o circuito da figura ao lado.
  - malha $befcb$ (sentido horário):
  $$-\mathcal{E}_1 + R_2 I_1 - \mathcal{E}_2 + (-R_1 I_2) = 0$$
  - malha $badcb$ (sentido anti-horário):
  $$+R_3 I_3 + R_2 I_1 - \mathcal{E}_2 = 0$$
- A malha $abefcda$ não produz resultados novos, pois se trata de uma combinação das malhas $befcb$ e $badcb$;
- O resultado não depende do sentido em que a malha é percorrida. Haverá um sinal "$-$" global para sentidos contrários, o que não altera o resultado.

➢ A lei das malhas é um enunciado da conservação da energia elétrica. De fato, para uma carga $q_0$ percorrendo uma malha fechada, a variação da energia potencial é dada por $\Delta U_{\text{tot}} = q_0 \Delta V_{\text{tot}} = 0$.

**Ex. 1** Encontre as correntes e a diferença de potencial entre os trechos $ab$ no circuito ao lado, sabendo-se que $\mathcal{E}_1 = 2{,}1$ V, $\mathcal{E}_2 = 6{,}3$ V, $R_1 = 1{,}7\ \Omega$ e $R_2 = 3{,}5\ \Omega$.




**Solução**

- Pela lei dos nós, $I_3 = I_1 + I_2$
- Aplicando a lei das malhas, partindo do ponto a:
  - para a malha à esquerda, sentido anti-horário, temos que

$$-I_1R_1 - \mathcal{E}_1 - I_1R_1 + \mathcal{E}_2 + I_2R_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad 2I_1R_1 - I_2R_2 = \mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1 \quad (*)$$

  - para a malha à direita, sentido horário, temos que

$$I_3R_1 - \mathcal{E}_2 + I_3R_1 + \mathcal{E}_2 + I_2R_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad 2I_3R_1 + I_2R_2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad 2I_1R_1 + I_2(2R_1 + R_2) = 0 \quad (**)$$

- Subtraindo a Eq. (*) da Eq. (**), obtém-se

$$-I_2R_2 - I_2(2R_1 + R_2) = \mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1 \quad \Rightarrow \quad I_2 = -\frac{\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1}{2(R_1 + R_2)}$$

Portanto,

$$I_2 = -\frac{6{,}3\ \text{V} - 2{,}1\ \text{V}}{2(1{,}7\ \Omega + 3{,}5\ \Omega)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{I_2 = -0{,}40\ \text{A}}$$

- Substituindo $I_2$ na Eq. (**), obtemos

$$I_1 = -I_2\frac{2R_1 + R_2}{2R_1} \quad \Rightarrow \quad \boxed{I_1 = 0{,}80\ \text{A}}$$

- Como $I_3 = I_1 + I_2$, obtemos $\boxed{I_3 = 0{,}40\ \text{A}}$.

# Leis de Kirchhoff: exemplo

- Temos que
  - (i) as correntes $I_1$ e $I_3$ obtidas são positivas, portanto estão no sentido correto;
  - (ii) $I_2$ é negativa, portanto está com o sentido invertido – no trecho $ab$ a corrente deve ser percorrida no sentido para cima.

- Diferença de potencial $\Delta V_{ab} = V_a - V_b$. Percorrendo o trecho do circuito $ab$, partindo de $a$, podemos escrever (mantendo o sentido original da corrente $I_2$)

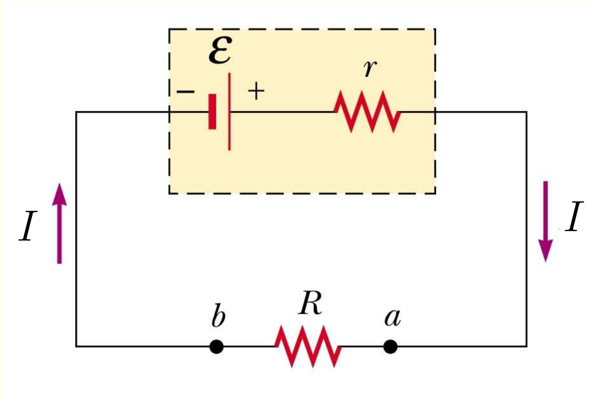
$$V_a - I_2R_2 - \mathcal{E}_2 = V_b \quad \Rightarrow \quad V_a - V_b = I_2R_2 + \mathcal{E}_2$$

Portanto,

$$\Delta V_{ab} = (-0{,}40) \times 3{,}5 + 6{,}3 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Delta V_{ab} = 4{,}9 \text{ V}}$$

# Transferência de energia em um circuito elétrico

- Considere um circuito elétrico composto por um resistor de resistência $R$ e uma bateria de força eletromotriz $\mathcal{E}$ e resistência interna $r$.




- Vamos analisar primeiro o caso em que a baterial é ideal, ou seja, $r = 0$. Neste caso, a diferença de potencial entre os terminais da bateria é $\Delta V = \mathcal{E}$ e o trabalho realizado pela bateria sobre uma carga $dq$ do terminal negativo para o terminal positivo é

$$dW = \Delta V dq = \mathcal{E} dq$$

- A **potência fornecida pela bateria** (trabalho por unidade de tempo) é dada por

$$\mathcal{P}_{\text{fem}} = \frac{dW}{dt} = \mathcal{E}\frac{dq}{dt} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{P}_{\text{fem}} = \mathcal{E} I$$

# Transferência de energia em um circuito elétrico

- Transferência de energia para o resistor. A diferença de potencial aplicada no resistor é dada por

$$\Delta V_R = V_a - V_b = RI$$

Para uma carga $dq$ que atravessa o resistor, a variação na energia potencial é dada por

$$dU = dq \Delta V_R$$

- **A potência transferida** para o resistor através do **efeito Joule** (transformação em energia térmica) é

$$\mathcal{P}_R = \frac{dU}{dt} = \frac{dq}{dt}\Delta V_R \quad \Rightarrow \quad \mathcal{P}_R = RI^2$$

Como $I = \Delta V_R / R$, temos também

$$\mathcal{P}_R = R\left(\frac{\Delta V_R}{R}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{P}_R = \frac{\Delta V_R^2}{R}$$

# Transferência de energia em um circuito elétrico

- Para uma bateria com resistência não desprezível, tem-se que a diferença de potencial entre os seus terminais é $\Delta V = \mathcal{E} - rI$ e o trabalho realizado pela bateria sobre uma carga $dq$ passar do terminal negativo para o positivo é

$$dW = \Delta V dq = (\mathcal{E} - rI)dq$$

Logo, a potência gerada por esta bateria é

$$\mathcal{P}_{\text{bat.}} = \frac{dW}{dt} = \frac{dq}{dt}(\mathcal{E} - rI) \quad \Rightarrow \quad \mathcal{P}_{\text{bat.}} = \mathcal{E}I - rI^2 = \mathcal{P}_{\text{fem}} - \mathcal{P}_r$$

➢ A energia disponível ao resto do circuito é diminuída pelo efeito Joule na resistência interna da bateria.

- Unidade da potência no SI: $[\mathcal{P}] = \text{volt} \cdot \text{ampère} = \frac{\text{joule}}{\text{segundo}} = \text{watt (W)}$.

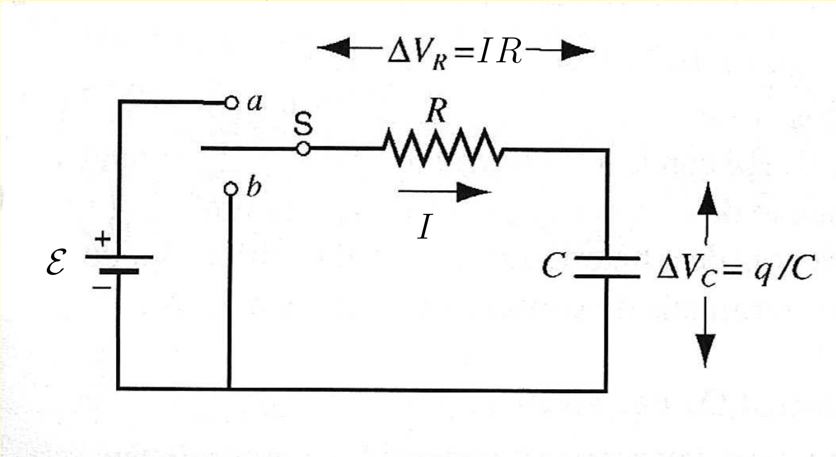
# Definição de kWh

- 1 kWh é a quantidade de energia transferida em um intervalo de tempo de 1 hora, à taxa constante de 1 kW. Ou seja,

$$1\ \mathrm{kWh} = 1 \times 10^3 \times \mathrm{W} \times (1\ \mathrm{hora}) = 3{,}6 \times 10^6\ \mathrm{W \cdot s}$$

$$\Rightarrow \quad 1\ \mathrm{kWh} = 3{,}6 \times 10^6\ \mathrm{J}$$

- Considere um circuito formado por uma bateria ideal, um resistor e um capacitor. Inicialmente a chave $S$ está aberta e o capacitor encontra-se descarregado. Se a chave for colocada na posição $a$, surge no circuito uma corrente variável com o tempo.




- Aplicando a lei das malhas no circuito fechado, no sentido anti-horário, obtém-se

$$-\mathcal{E} + \frac{q}{C} + IR = 0$$

Como $I = \dfrac{dq}{dt}$, temos que

$$-\mathcal{E} + \frac{q}{C} + R\frac{dq}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dq}{dt} = -\frac{-\mathcal{E} + \frac{q}{C}}{R}$$

Segue que

$$\int_{q_0}^{q} \frac{dq}{q - \mathcal{E}C} = -\frac{1}{RC}\int_{t_0}^{t} dt$$

- **Condição inicial**: em $t = t_0$ a carga no capacitor é $q_0 = 0$, ou seja, o capacitor encontra-se descarregado.

Integrando a expressão acima, obtemos

$$\ln|q - \mathcal{E}C|\Big|_0^q = -\frac{1}{RC}t\Big|_0^t \quad \Rightarrow \quad \underbrace{\ln|q - \mathcal{E}C| - \ln|-\mathcal{E}C|}_{=\ln\left(\frac{\mathcal{E}C-q}{\mathcal{E}C}\right)} = -\frac{t}{RC}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\mathcal{E}C - q}{\mathcal{E}C} = e^{-t/RC} \quad \Rightarrow \quad q(t) = \mathcal{E}C\left(1 - e^{-t/RC}\right)$$

# Circuito $RC$: carregando um capacitor

- Diferença de potencial no capacitor em função do tempo:

$$\Delta V_C = \frac{q}{C} \quad \Rightarrow \quad \Delta V_C = \mathcal{E}\left(1 - e^{-t/RC}\right)$$

- Diferença de potencial no resistor em função do tempo:

$$\begin{aligned}\Delta V_R = RI = R\frac{dq}{dt} \\ = R\mathcal{E}C\left(-e^{-t/RC}\right)\left(-\frac{1}{RC}\right) \quad \Rightarrow \quad \Delta V_R = \mathcal{E}e^{-t/RC}\end{aligned}$$

- Definição: $RC \equiv \tau$ é a **constante de tempo capacitiva** do circuito, que é o intervalo de tempo durante o qual a corrente diminui a $1/e$ do seu valor inicial.

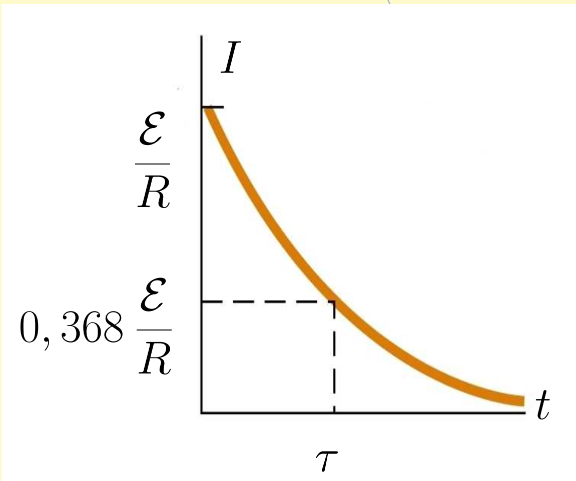
- Tem-se que

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}}{R} e^{-t/\tau} \quad \Rightarrow \quad I(0) = \frac{\mathcal{E}}{R}$$

Para $t = \tau$, obtemos

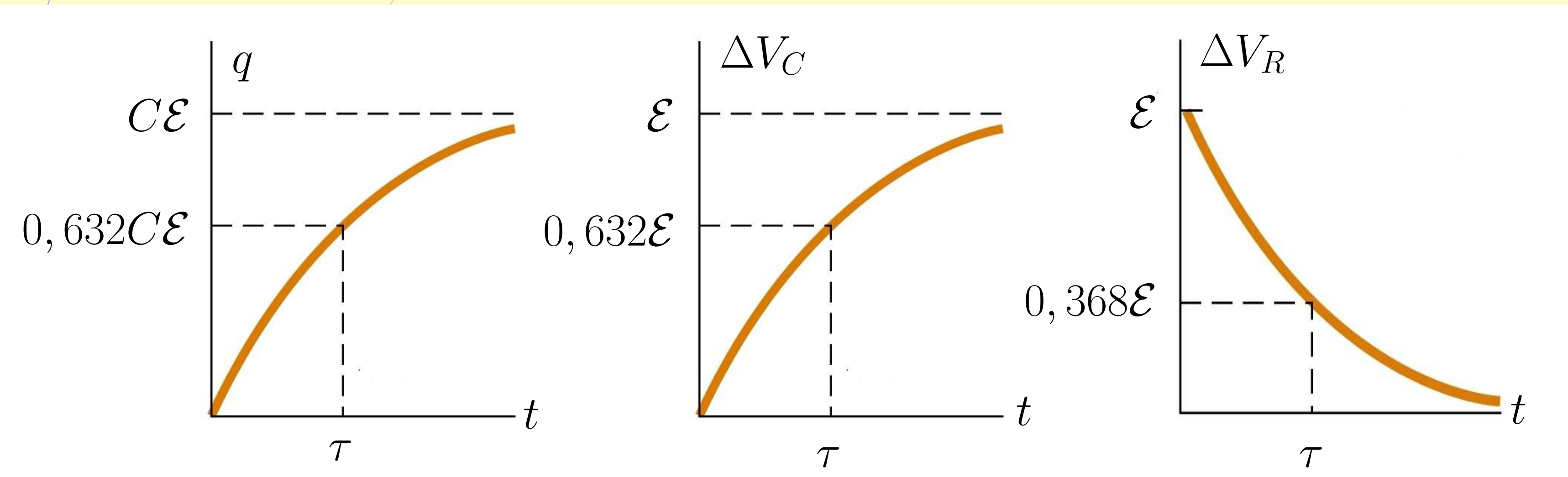
$$I(\tau) = \frac{\mathcal{E}}{R} e^{-1} \quad \Rightarrow \quad I(\tau) = \frac{I(0)}{e} \approx 0{,}368 \frac{\mathcal{E}}{R}$$

- Para $t \gg \tau$, a corrente $I(t)$ no circuito vai a zero.



# Circuito $RC$: carregando um capacitor

- Para $t \gg \tau$, o capacitor está totalmente carregado, com carga $q = \mathcal{E}C$ e a diferença de potencial entre as suas placas sendo $\Delta V_C = \mathcal{E}$. Por outro lado, como a corrente $I(t)$ no circuito vai a zero, a diferença de potencial no resistor vai a zero.



# Circuito $RC$: descarregando um capacitor

- Considere o circuito $RC$ da p. 13. Vamos supor que no instante $t_0 = 0$ o capacitor esteja completamente carregado com carga $q_0$. Colocando a chave na posição $b$, o capacitor descarregará através do resistor.
- Como para $t > 0$ a bateria está desconectada do circuito, tem-se que

$$\frac{q}{C} + IR = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dq}{dt} = -\frac{q}{RC} \quad \Rightarrow \quad \frac{dq}{q} = -\frac{dt}{RC}$$

Segue que,

$$\int_{q_0}^{q} \frac{dq}{q} = -\frac{1}{RC} \int_{t_0}^{t} dt$$

Condição inicial: para $t_0 = 0$, $q_0$ é a carga inicial no capacitor. Logo, integrando ambos os lados,

$$\ln q \Big|_{q_0}^{q} = -\frac{1}{RC} t \Big|_{0}^{t} \quad \Rightarrow \quad \ln \frac{q}{q_0} = -\frac{t}{RC} \quad \Rightarrow \quad q(t) = q_0 e^{-t/RC}$$

# Circuito $RC$: descarregando um capacitor



- Diferença de potencial no capacitor em função do tempo. Como $\Delta V_C = \frac{q}{C}$, tem-se que

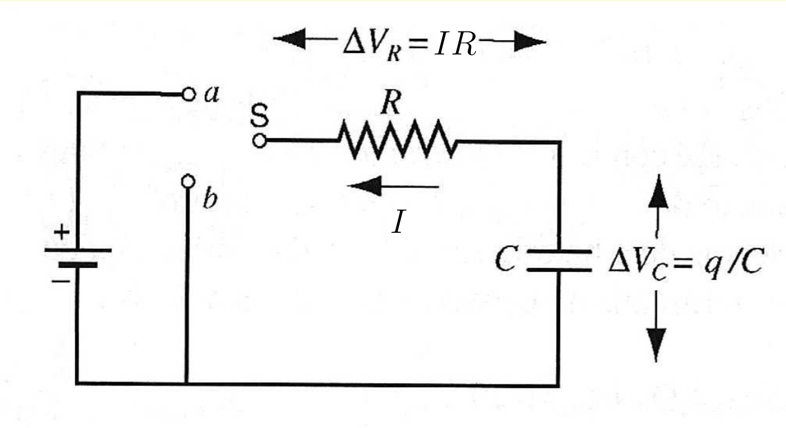
$$\Delta V_C = \frac{q_0}{C} e^{-t/RC}$$

- Diferença de potencial no resistor em função do tempo. Como

$$I = \frac{dq}{dt} = -\frac{q_0}{RC} e^{-t/RC}$$

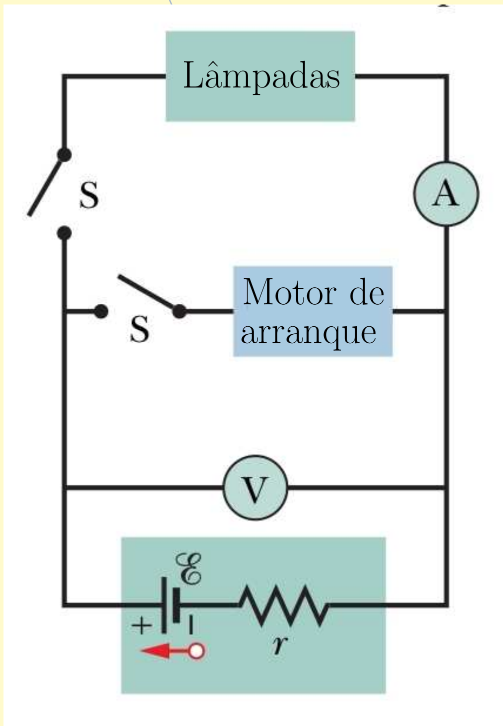
tem-se que $\Delta V_R = RI = -\frac{q_0}{C} e^{-t/RC}$

  - Observa-se que $I < 0$, portanto o sentido da corrente é invertido em relação ao sentido original.



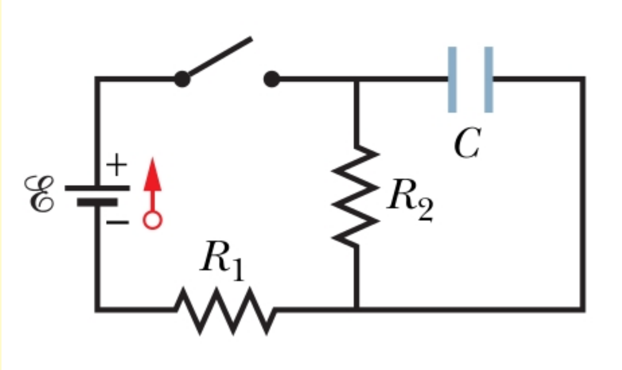
# Problemas Propostos

**P1** Quando as lâmpadas de um carro são acesas, um amperímetro em série com elas marca 10,0 A e um voltímetro conectado através deles marca 12,0 V (veja Fig. ao lado). Quando o motor de arranque elétrico é ligado, a leitura do amperímetro cai para 8,00 A e as luzes diminuem um pouco. Se a resistência interna da bateria é 0,0500 $\Omega$ e a do amperímetro é desprezível, quais são (a) a fem da bateria e (b) a corrente através do motor dando a partida com as luzes ligadas?




**Resp.** (a) $\mathcal{E} = 12{,}5$ V; (b) $I_{\text{motor}} = 50{,}0$ A.

**P2** Na Fig. ao lado, $R_1 = 10{,}0$ k$\Omega$, $R_2 = 15{,}0$ k$\Omega$, $C = 0{,}400$ $\mu$F e a bateria ideal possui uma fem de 20,0 V. Primeiro, a chave é fechada por um tempo longo tal que o estado estacionário é atingido. Então, a chave é aberta no tempo $t = 0$. Qual é a corrente no resistor 2 em $t = 4{,}00$ ms?




**Resp.** $I_2(4{,}00\text{ ms}) = 4{,}11 \times 10^{-4}$ A.

# Referências




- R. A. Serway, e J. W. Jewett Jr., *Princípios de Física, Vol. 3*, Cengage Learning;
- D. Halliday, R. Resnick e K. S. Krane, *Física, Vol. 3*, LTC;