Aula 12 (27/Fev)

<u>Na aula de hoje:</u>

* Resolução de exercícios Folha 3.
  - Ex. 2: Barreira de potencial.
  - Ex. 3: Poço de potencial.
  - Ex. 4: Poço de potencial infinito.
  - Ex. 9: Evolução temporal de f.o. gaussiana.

—— // ——

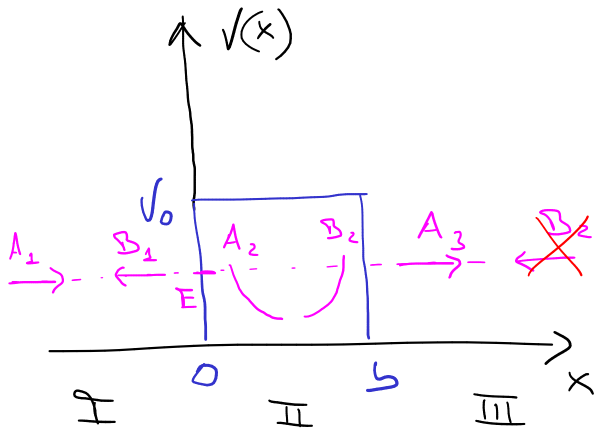
Folha de Problemas 3

Equação de Schrödinger

② Barreira de potencial

Potencial dado por $V(x) = \begin{cases} V_0 \ , \text{ se } 0 < x < b \\ 0 \ , \text{ se } x < 0 \text{ ou } x > 0 \end{cases}$

(a) Partícula com $E < V_0$



As f.o. nas regiões I, II e III são dadas por

$$
\begin{cases}
\phi_1(x) = A_1 e^{i\kappa_1 x} + B_1 e^{-i\kappa_1 x} & \\
\phi_2(x) = A_2 e^{-\kappa_2 x} + B_2 e^{+\kappa_2 x} & , \kappa_1 = \dfrac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \\
\phi_3(x) = A_3 e^{i\kappa_1 x} & , \kappa_2 = \dfrac{\sqrt{2m(V_0-E)}}{\hbar}
\end{cases}
$$

Impondo condições continuidade para a f.o. e sua derivada nas descontinuidade de $V(x)$,

$$
\underline{x=0}: \begin{cases} A_1 + B_1 = A_2 + B_2 & (1) \\ i\kappa_1 (A_1 - B_1) = -\kappa_2 (A_2 - B_1) & (2) \end{cases}
$$

$$
\underline{x=b}: \begin{cases} A_2 e^{-\kappa_2 b} + B_2 e^{\kappa_2 b} = A_3 e^{i\kappa_1 b} & (3) \\ -\kappa_2 \left(A_2 e^{-\kappa_2 b} - B_2 e^{\kappa_2 b}\right) = i\kappa_1 A_3 e^{i\kappa_1 b} & (4) \end{cases}
$$

Queremos T que é $T = \frac{I_t}{I_i} = \frac{|A_3|^2}{|A_1|^2}$ e então vamos determinar A_3 em função de A_1.

$$k_2 . ③ - ④ \Rightarrow 2A_2 e^{-k_2 b} . k_2 = (k_2 - ik_1) . A_3 e^{ik_1 b}$$

$$\Leftrightarrow A_2 = \underbrace{\frac{k_2 - ik_1}{2k_2} . e^{(ik_1 + k_2)b}}_{=\alpha} . A_3$$

$$k_2 ③ + ④ \Rightarrow \dots \Leftrightarrow B_2 = \underbrace{\frac{k_2 + ik_1}{2k_2} e^{(ik_1 - k_2)b}}_{=\beta} . A_3$$

Usando estas expressões em ① e ② teremos

$$① \Rightarrow A_1 + B_1 = (\alpha + \beta) . A_3 \qquad ⑤$$

$$② \Rightarrow ik_1 (A_1 - B_1) = -k_2 (\alpha - \beta) . A_3 \qquad ⑥$$

então fazemos

$$ik_1 . ⑤ + ⑥ \Rightarrow \dots \Leftrightarrow A_3 = \frac{2ik_1}{\alpha(ik_1 - k_2) + \beta(ik_1 + k_2)} . A_1$$

substituindo α e β, vamos ter

$$A_3 = \frac{4i K_1 . K_2}{-(iK_1 - K_2)^2 e^{K_2 b} + (iK_1 + K_2)^2 . e^{-K_2 b}} . e^{-iK_1 b} . A_1$$

A probabilidade de transmissão será

$$T = \frac{I_t}{I_i} = \frac{|A_3|^2 \cancel{\frac{\hbar K_1}{2m}}}{|A_1|^2 \cancel{\frac{\hbar K_1}{2m}}} = \left| \frac{2K_1 K_2 i e^{-iK_1 b}}{2iK_1K_2 \, ch(K_2 b) + (K_1^2 - K_2^2) \, sh(K_2 b)} \right|^2$$

$$= \frac{4K_1^2 K_2^2}{4K_1^2 K_2^2 \, ch^2(K_2 b) + (K_1^2 - K_2^2)^2 sh^2(K_2 b)}$$

□

Se queremos plotar $T(K_2)$, temos que notar que $K_1 = K_1(K_2)$. Notemos então que

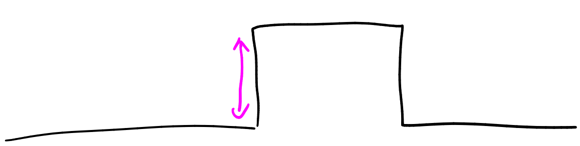
$$K_1^2 + K_2^2 = \frac{2mV_0}{\hbar^2} \equiv K_0^2 \rightarrow \text{constante}$$

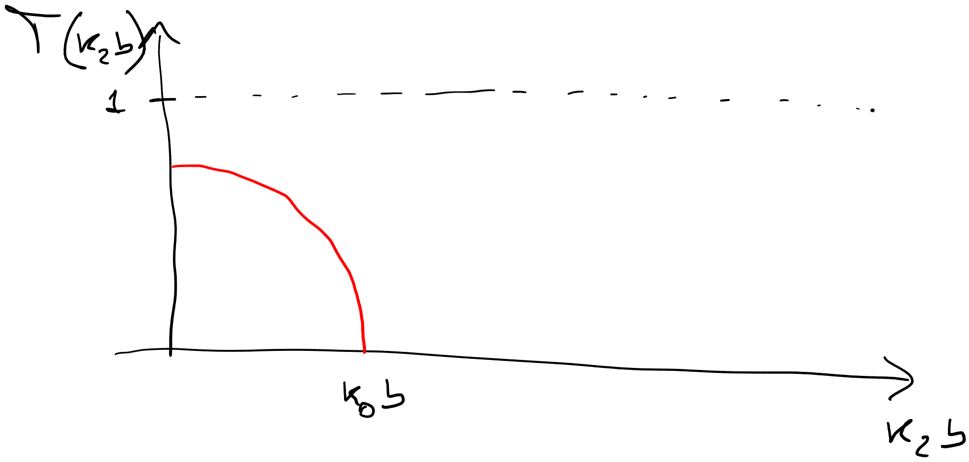
$$\Rightarrow K_1^2 = K_0^2 - K_2^2$$

$$\Rightarrow T(K_2) \quad \frac{4.(K_0^2 - K_2^2).K_2^2}{4(K_0^2 - K_2^2) K_2^2 \, ch^2(K_2 b) + (K_0^2 - 2K_2^2)^2 sh^2(K_2 b)}$$

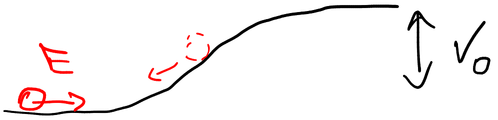
onde $K_2 > 0$ e $K_2 < K_0$

$\quad\quad = \frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar} \quad\quad = \frac{\sqrt{2mV_0}}{\hbar}$

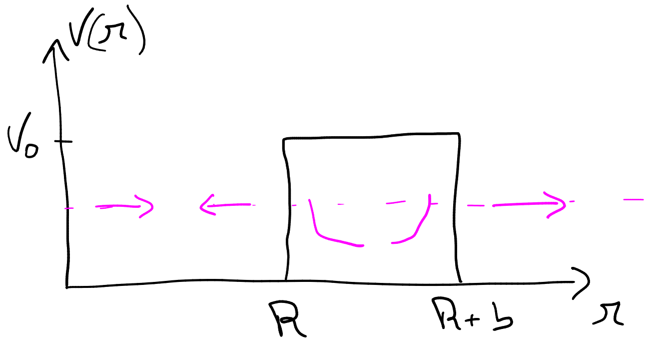




(b) Em M. Clássica a $T = 0$ quando $E < V_0$



(c)



$$v = \sqrt{\frac{2E}{m}} \Leftrightarrow E = \frac{mv^2}{2}$$

A probabilidade da partícula α ser transmitida sempre que chegar em R é dada por $T(k_2; k_0)$, onde $k_2 = \frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar} = \frac{\sqrt{2mV_0 - m^2 v^2}}{\hbar}$, sendo $k_0 = \frac{\sqrt{2mV_0}}{\hbar}$. $\left[k_1 = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} = \frac{\sqrt{m^2v^2}}{\hbar}. \right]$

(ii)

$$\Delta t = \frac{2R}{v}$$

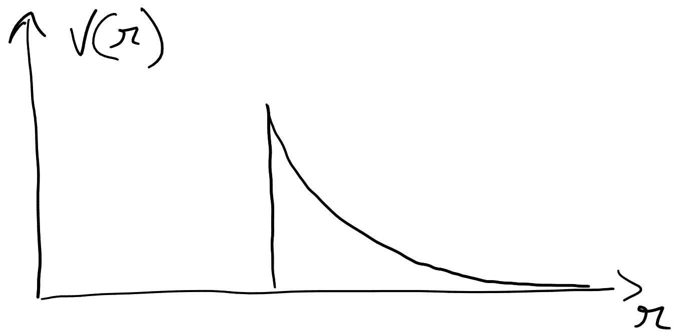
e então probabilidade de transmissão por unidade de tempo é

$$\Gamma = \frac{T}{\Delta t} = \frac{T \cdot v}{2R}$$

(iii) $\tau = \frac{1}{\Gamma} = \frac{2R}{T \cdot v}$ ou seja,

$$\tau = \frac{4k_1^2 k_2^2 \cosh^2(k_2 b) + (k_1^2 - k_2^2)^2 \sinh^2(k_2 b)}{4 k_1^2 k_2^2} \cdot \frac{2Rm}{\hbar k_1}$$

(iv) Considerar barreira de potencial diferente,



pois há interacção de Coulomb entre partícula α e o núcleo decaido

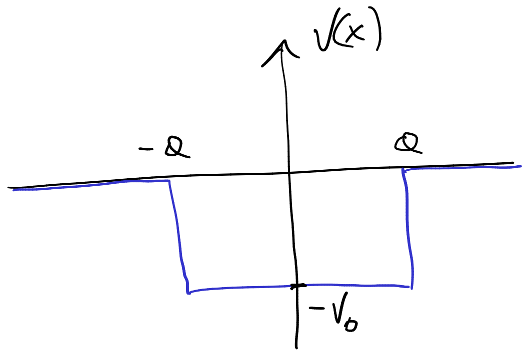
$\downarrow$ $+2e$ $\downarrow$ $+Ze$

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \frac{2 . Z . e^2}{r}$$

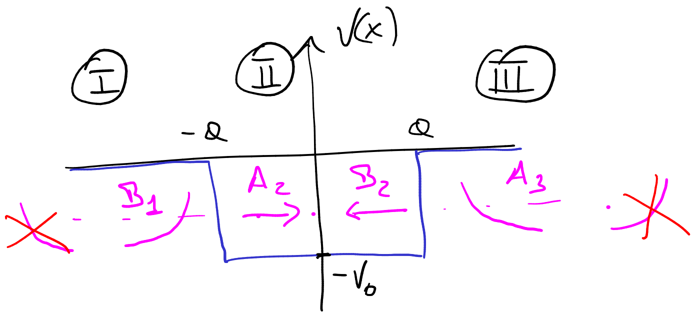
Um outro melhoramento seria considerar 3D.

③ Poço de Potencial

$$V(x) = \begin{cases} -V_0 , & |x| < a \\ 0 , & |x| > a \end{cases}$$



(a) Os estados ligados têm $-V_0 < E < 0$



$$\begin{cases} \phi_1(x) = B_1 e^{k_1 x} \\ \phi_2(x) = A_2 e^{ik_2 x} + B_2 e^{-ik_2 x} \\ \phi_3(x) = A_3 \cdot e^{-k_1 x} \end{cases} \quad , \; k_1 = \frac{\sqrt{2m|E|}}{\hbar} \quad , \; k_2 = \frac{\sqrt{2m(V_0 - |E|)}}{\hbar}$$

$E < 0$, $V_0 > 0$

que impondo condições continuidade

$$\underline{x = -a:} \begin{cases} B_1 e^{-k_1 a} = A_2 e^{-ik_2 a} + B_2 e^{ik_2 a} & (1) \\ k_1 B_1 e^{-k_1 a} = ik_2 \left(A_2 e^{-ik_2 a} - B_2 e^{ik_2 a} \right) & (2) \end{cases}$$

$$\underline{x = +a:} \begin{cases} A_2 e^{ik_2 a} + B_2 e^{-ik_2 a} = A_3 e^{-k_1 a} & (3) \\ ik_2 \left(A_2 e^{ik_2 a} - B_2 e^{-ik_2 a} \right) = -k_1 A_3 e^{-k_1 a} & (4) \end{cases}$$

Como queremos estados ligados, que vão ser identificados por k_2.

↳ Usando (1) em (2) para eliminar $B_1 e^{-k_1 a}$

$$\Rightarrow \cdots \Leftrightarrow \boxed{\frac{A_2}{B_2} = -e^{i2k_2 a} \frac{k_1 + ik_2}{k_1 - ik_2}}$$

Fazendo o mesmo para eliminar $A_3 \cdot e^{-k_1 a}$ usando (3) em (4), podemos escrever a expressão

$$\Rightarrow \dots \Leftrightarrow \boxed{\frac{A_2}{B_2} = - e^{-i2k_2 a} \cdot \frac{k_1 - ik_2}{k_1 + ik_2}}$$

Igualando estas duas equações

$$\Rightarrow \dots \Leftrightarrow e^{i4k_2 a} \left(\frac{k_1 + ik_2}{k_1 - ik_2} \right)^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow e^{i2k_2 a} \frac{k_1 + ik_2}{k_1 - ik_2} = \pm 1$$

↳ dois tipos de solução.

<u>Caso +1:</u>

$$\hookrightarrow e^{ik_2 a} (k_1 + ik_2) = e^{-ik_2 a} (k_1 - ik_2)$$

$$\Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \operatorname{tg}(k_2 a) = - \frac{k_2}{k_1} < 0$$

Mas sabemos que $k_1 = k_1(k_2)$, então

$$k_1^2 + k_2^2 = \cancel{\frac{2m|E|}{\hbar^2}} + \frac{2m(V_0 - \cancel{|E|})}{\hbar^2} = \frac{2mV_0}{\hbar^2} \equiv \underbrace{k_0^2}_{\text{constante}}$$

$$\Leftrightarrow k_1^2 = k_0^2 - k_2^2$$

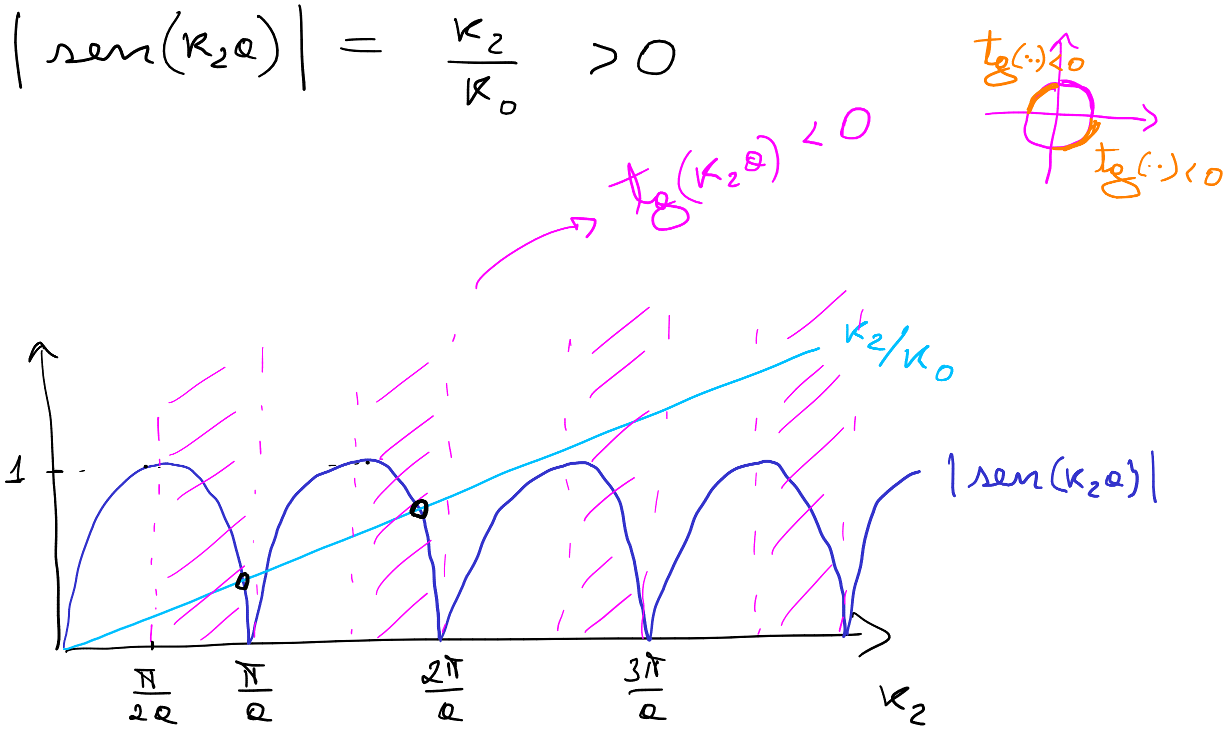
Tentando eliminar K_1 da expressão anterior

$$\mathrm{sen}^2(K_2 a) = \frac{\mathrm{sen}^2(\cdot\cdot)}{\cos^2(\ldots) + \mathrm{sen}^2(\cdot\cdot)} = \frac{1}{\frac{1}{tg^2(\ldots)} + 1}$$

$$= \frac{tg^2(\ldots)}{1 + tg^2(\ldots)} = \frac{K_2^2/K_1^2}{1 + K_2^2/K_1^2}$$

$$= \frac{K_2^2}{K_1^2 + K_2^2} = \frac{K_2^2}{K_0^2}$$

$$\iff |\mathrm{sen}(K_2 a)| = \frac{K_2}{K_0} > 0$$



Ou seja, em geral teremos número finito de soluções, dependendo de E e V_0, pois $K_2 = \frac{\sqrt{2m(V_0 - |E|)}}{\hbar}$ e $K_0 = \frac{\sqrt{2mV_0}}{\hbar}$.

Mas podemos não ter soluções (para este caso ± 1) quando

$$\frac{\pi/2a}{k_0} > 1 \Longrightarrow k_0 < \frac{\pi}{2a}$$

ou seja, se a profundidade do poço for menor do que

$$k_0^2 < \frac{\pi^2}{4a^2} \Longrightarrow \frac{2mV_0}{\hbar^2} < \frac{\pi^2}{4a}$$

$$\Longrightarrow V_0 < \frac{\hbar^2\pi^2}{8ma^2}$$

Caso -1:

$$\hookrightarrow e^{ik_2a}(k_1+ik_2) = -e^{-ik_2a}(k_1-ik_2)$$

$$\Longleftrightarrow \cdots \Longleftrightarrow \operatorname{tg}(k_2a) = \frac{k_1}{k_2} > 0$$

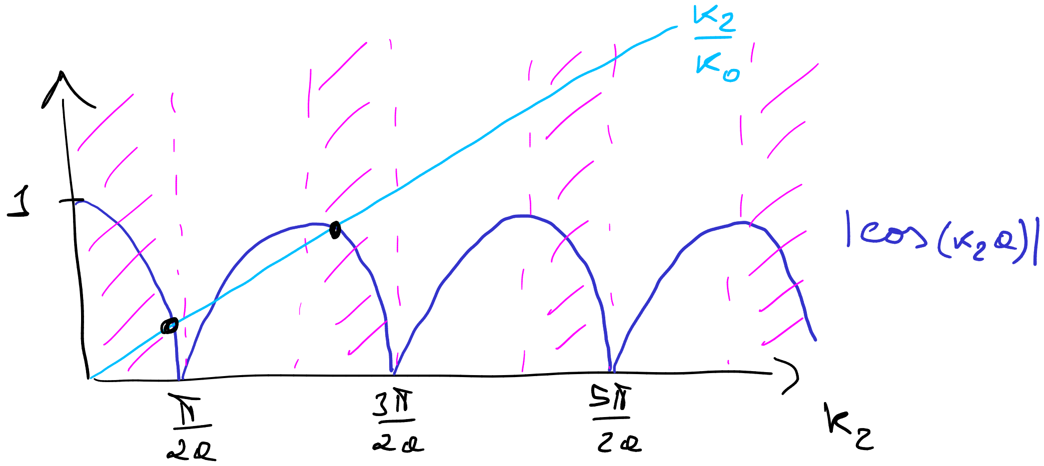
Tal como antes, para eliminar k_1 da equação em cima,

$$\frac{1}{\cos^2(k_2a)} = \operatorname{tg}^2(k_2a) + 1 = \frac{k_1^2}{k_2^2} + 1 = \frac{k_0^2}{k_2^2}$$

$$\Leftrightarrow \cos^2(k_2 a) = \frac{k_2^2}{k_0^2}$$

$$\Leftrightarrow |\cos(k_2 a)| = \frac{k_2}{k_0} > 0$$

e assim a soluções dadas graficamente por



ou seja, teremos sempre pelo menos uma solução do tipo "-1".

Mas quais f.o. para estes dois tipos de solução "± 1"?

<u>Caso $+1$:</u>

$$\phi_2(x) = A_2 e^{ik_2 x} + B_2 e^{-ik_2 x}$$

que como $\frac{A_2}{B_2} = -e^{i2k_2 a} \frac{k_1 + ik_2}{k_1 - ik_2} = -1$

$$\Rightarrow \quad B_2 = -A_2$$

e assim,

$$\boxed{\phi_2(x) = A_2 \, 2i \, \text{sen}(k_2 x)}$$

$\rightarrow$ ímpar por inversão $x \to -x$

Caso -1:

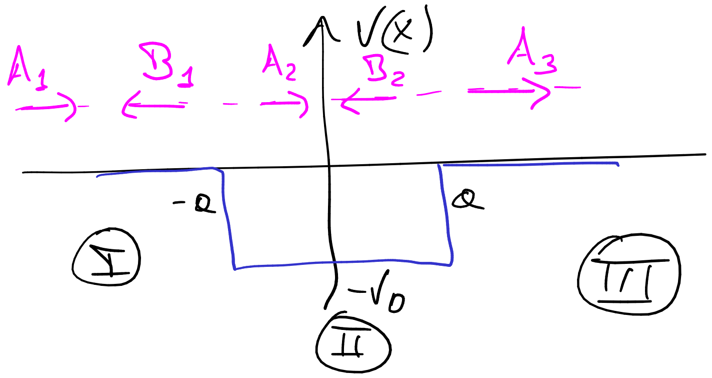
$$\frac{A_2}{B_2} = - \cdots = +1$$

e nossa solução em II será

$$\boxed{\phi_2(x) = A_2 . 2 . \cos(k_2 a)}$$

$\rightarrow$ solução par por inversão $x \to -x$

(b) Partícula com $E > 0$



(i)

As f.o de onda serão

$$\begin{cases} \phi_1(x) = A_1 e^{ik_1 x} + B_1 e^{-ik_1 x} \\ \phi_2(x) = A_2 e^{ik_2 x} + B_2 e^{-ik_2 x} \\ \phi_3(x) = A_3 e^{ik_1 x} \end{cases} , \quad k_1 = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} , \quad k_2 = \frac{\sqrt{2m(E+V_0)}}{\hbar}$$

$A_1 e^{-ik_1 a} + B_1 e^{ik_1 a} = A_2 e^{-ik_2 a} + B_2 e^{ik_2 a}$

sendo condições de continuidade dadas por

$$x = -a : \begin{cases} A_1 e^{-ik_1 a} + B_1 e^{ik_1 a} = A_2 e^{-ik_2 a} + B_2 e^{ik_2 a} & (1) \\ ik_1\left(A_1 e^{-ik_1 a} - B_1 e^{ik_1 a}\right) = ik_2\left(A_2 e^{-ik_2 a} - B_2 e^{ik_2 a}\right) & (2) \end{cases}$$

$$x = +a : \begin{cases} A_2 e^{ik_2 a} + B_2 e^{-ik_2 a} = A_3 e^{ik_1 a} & (3) \\ ik_2\left(A_2 e^{ik_2 a} - B_2 e^{-ik_2 a}\right) = ik_1 A_3 e^{ik_1 a} & (4) \end{cases}$$

$k_2 \cdot (3) + (4) \Rightarrow \cdots \Rightarrow A_2 = \tilde{\alpha} \cdot A_3$

$k_2 \cdot (3) - (4) \Rightarrow \cdots \Rightarrow B_2 = \tilde{\beta} A_3$

Substituindo em ① e ② dando eqs ⑤ e ⑥ e fazendo

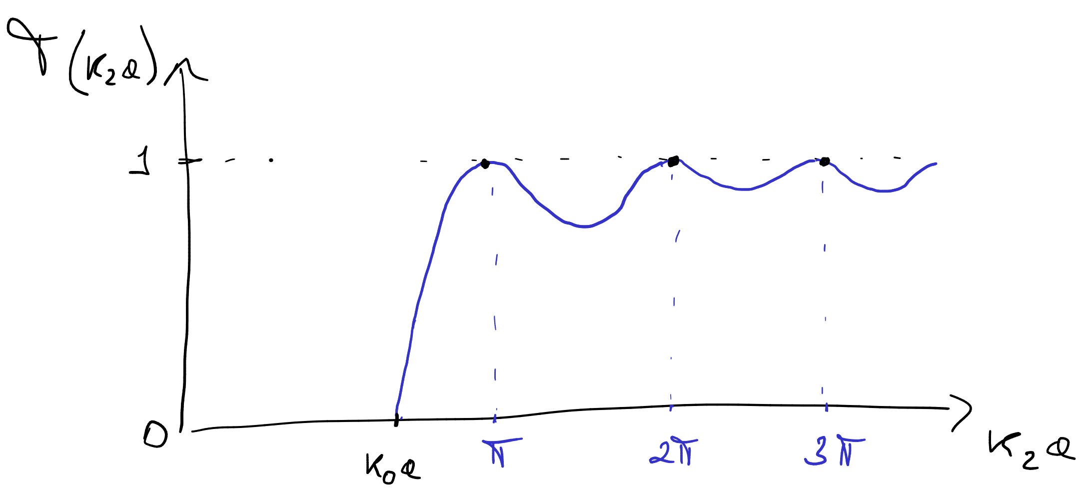
$$⑤+⑥ \Rightarrow A_3 = -\frac{4k_1k_2\, e^{-i2k_1a}}{2i(k_1^2+k_2^2)\,\text{sen}(2k_2a) + 4k_1k_2\cos(2k_2a)} \cdot A_1$$

e então T será

$$\boxed{T = \frac{|A_3|^2}{|A_1|^2} = \frac{4k_1^2k_2^2}{(k_1^2+k_2^2)^2\,\text{sen}^2(k_2a) + 4k_1^2k_2^2\cos^2(k_2a)}}$$

(ii) Se queremos $T(k_2)$ e sabendo que $k_2^2 - k_1^2 = k_0^2 \Rightarrow k_1^2 = k_0^2 + k_2^2$ e assim

$$T(k_2) = \frac{4\cdot(k_2^2+k_0^2)\,k_2^2}{(2k_2^2+k_0^2)^2\,\text{sen}^2(k_2a) + 4(k_2^2+k_0^2)\,k_2^2\cos^2(k_2a)}$$



Como $k_2 > k_0$

Em $k_2 a = n\pi$ teremos transmissão perfeita, o poço potencial é "invisível" à partícula.

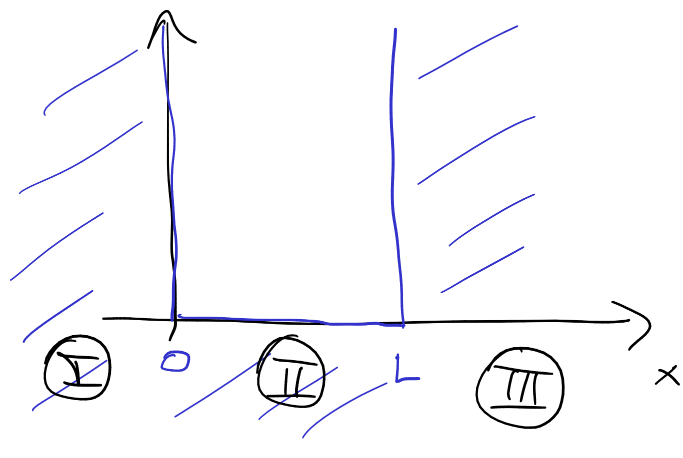
(iii) O poço é transparente para $k_2 a = n\pi$ onde $n = 1, 2, 3, \ldots$, então

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{2m(E+V_0)}}{\hbar} = \frac{n\pi}{a} \Leftrightarrow V_0 = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2ma^2} - E = 16{,}01 \text{ eV}$$

↳ condição transparência

④ Poço potencial infinito

$$V(x) = \begin{cases} \infty, & x<0 \text{ e } x>L \\ 0, & 0<x<L \end{cases}$$



(a) Nas aulas teóricas vimos que apenas a f.o. tem que ser contínua

$$\begin{cases} \phi_2(0) = \phi_1(0) \\ \phi_2(L) = \phi_3(L) \end{cases}$$

mas como $V(x) = \infty$ em I e III as f.o. $\phi_1(x) = 0$ e $\phi_3(x) = 0$, logo

$$\begin{cases} \phi_2(0) = 0 \\ \phi_2(L) = 0 \end{cases}$$

(b) Se $E<0$, teremos

$$\phi_2(x) = A e^{-kx} + B e^{kx},$$

então as condições continuidade impõe que

$$\phi_2(0) = 0 \Rightarrow A + B = 0 \Leftrightarrow A = -B$$

$$\phi_2(L) = 0 \Rightarrow A e^{-kL} + B e^{kL} = 0$$

$$\Rightarrow A(e^{-kL} - e^{kL}) = 0$$

$$\Rightarrow A = 0 \quad \vee \quad e^{-kL} = e^{kL}$$

$\Leftrightarrow k = 0 \Rightarrow$ f.o. constante

$\Rightarrow$ será zero em II.

Ou seja, não teremos soluções não-triviais se $E<0$.

(c) Caso $E>0$ (estados confinados)

(i) $\phi_1(x) = 0$

$$\phi_2(x) = A e^{ikx} + B e^{-ikx} \quad , \quad k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

$$\phi_3(x) = 0$$

(ii) $\phi_2(0) = 0 \Rightarrow A + B = 0 \Leftrightarrow B = -A$

$$\phi_2(L) = 0 \Rightarrow A e^{ikL} + B e^{-ikL} = 0$$

$$\Leftrightarrow A(e^{ikL} - e^{-ikL}) = 0$$

$$\Leftrightarrow A 2i \operatorname{sen}(kL) = 0$$

$$\Leftrightarrow A = 0 \ \vee \ \operatorname{sen}(kL) = 0$$

$$\Leftrightarrow kL = n\pi \quad , \quad n \in \mathbb{N}$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{n\pi}{L}$$

$n = 1, 2, 3, \ldots$

Os $-n$ são a mesma f.o. dos $+n$; apenas diferem por uma fase global.

(iii)
$$\phi_2(x) = A.(e^{ikx} - e^{-ikx})$$
$$= 2iA \operatorname{sen}(kx)$$

A condição de normalização

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\phi(x)|^2 \, dx = 1 \Leftrightarrow \int_0^L |\phi_2(x)|^2 \, dx = 1$$

$$\Leftrightarrow 4 \cdot |A|^2 \cdot \underbrace{\int_0^L sen^2(kx) \cdot dx}_{\left[\frac{x}{2} - \frac{sen(2kx)}{4k}\right]_0^L} = 1$$

$k = \frac{n\pi}{L}$

$$\left[\frac{x}{2} - \frac{sen(2kx)}{4k}\right]_0^L = \frac{L}{2} - \cancelto{0}{\frac{sen\, 2kL}{4k}}$$

$$\Leftrightarrow 4|A|^2 \cdot \frac{L}{2} = 1$$

$$\Leftrightarrow A = \sqrt{\frac{1}{2L}}$$

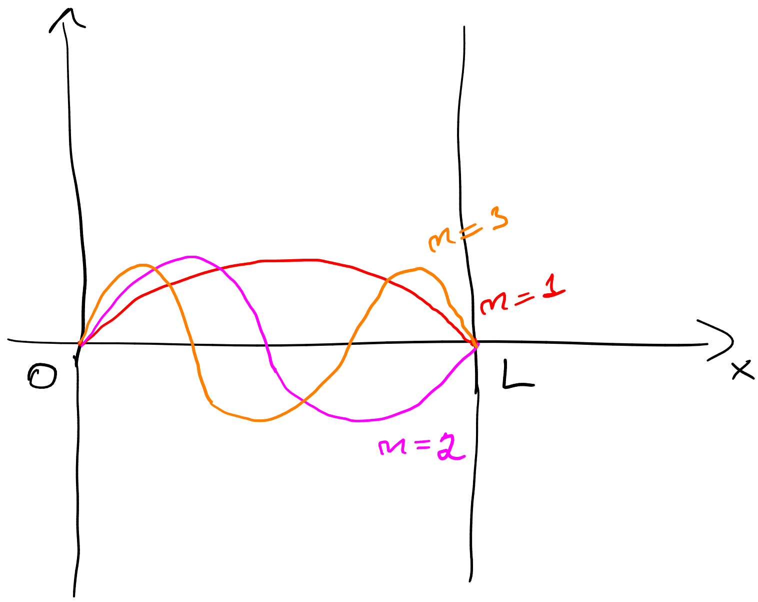
(iv) Da alínea (ii) $k = n\pi/L$

Da alínea (iii) $A = \frac{1}{\sqrt{2L}}$ e $B = -\frac{1}{\sqrt{2L}}$

(v) $E_n = \frac{\hbar^2 k_n^2}{2m} \Rightarrow \boxed{E_n = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2} \cdot n^2}$ → auto-energia

(vi) Os auto-estados do nosso problema são

$$\psi_n(x) = \begin{cases} 0 & , \text{ se } x<0 \text{ ou } x>L \\ i\sqrt{\frac{2}{L}}\,\text{sen}(k_n x) & , \text{ se } 0<x<L \end{cases}$$



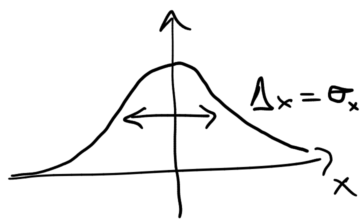
⑨ Evolução de f.o. gaussiana

Verifiquemos normalização desta f.o.

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{2\pi\sigma_x}}\, e^{-x^2/4\sigma_x}$$

$$N_\psi^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x)|^2 \cdot dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_x}} \cdot dx$$



Nota:

$$① \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2}\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

$$② \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 . e^{-ax^2}\,dx = -\frac{d}{da}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2}\,dx$$

$$= -\frac{d}{da}\sqrt{\frac{\pi}{a}} = -\sqrt{\pi}.\left(-\frac{1}{2}\right).\frac{1}{a^{3/2}}$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,a^{-3/2}$$

$$\Rightarrow N_\psi^2 \overset{①}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x}}\cdot\sqrt{\frac{\pi}{1/2\sigma_x}} = 1 \;//$$

a f.o. está normalizada.

É trivial ver que

$$\langle x\rangle = (\psi, x\psi) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\,|\psi(x)|^2\,dx = 0.$$

Verifiquemos então que $\langle x^2\rangle = \sigma_x$

$$\langle x^2\rangle = (\psi, x^2\psi) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 . |\psi(x)|^2 . dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \frac{e^{-\frac{x^2}{2\sigma_x}}}{\sqrt{2\pi\sigma_x}} \cdot dx$$

$$\overset{(2)}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x}} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{1}{\left(1/2\sigma_x\right)^{3/2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x}} \sqrt{\frac{\pi . 8 . \sigma_x{}^3}{4}}$$

$$= \sqrt{\frac{\sigma_x{}^3}{\sigma_x}} = \sigma_x \qquad \square$$

(a) $\Delta p = \sqrt{\langle p^2\rangle - \langle p\rangle^2} = \;?$

Temos que fazer T. Fourier de $\psi(x)$,

$$\hat{\psi}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{x^2}{4.\sigma_x}}}{\sqrt[4]{2\pi\sigma_x}} \cdot e^{ikx} \cdot dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{}} \frac{1}{\sqrt[4]{}} \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{e^{-\frac{x^2}{4\sigma_x} + ikx}}_{=\, e^{-\left(\sqrt{a}\,x - \frac{ik}{2\sqrt{a}}\right)^2 - \frac{k^2}{4a}}} dx \qquad \left(\frac{1}{4\sigma_x} = a\right)$$

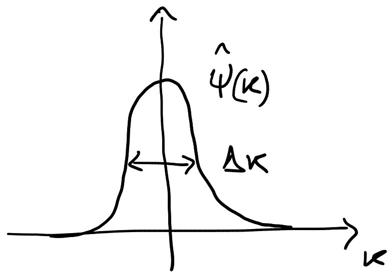
$$\underbrace{\sqrt{a}\,x - \frac{ik}{2\sqrt{a}}}_{\equiv\, a\tilde{x}} \Rightarrow dx = d\tilde{x}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{}} \frac{1}{\sqrt[4]{}} e^{-k^2/4a} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a\tilde{x}} d\tilde{x}$$

(1) $\rightarrow$ $= \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \dfrac{1}{\sqrt[4]{2\pi\sigma_x}} e^{-k^2\sigma_x} \cdot \sqrt{4\sigma_x\pi}$

$$= \sqrt[4]{\frac{8\pi\sigma_x}{4\pi^2}}\; e^{-k^2\sigma_x}.$$

$$\Rightarrow \hat{\psi}(k) = \frac{e^{-k^2\cdot\sigma_x}}{\sqrt[4]{\pi/2\sigma_x}}$$



Calculemos $\Delta k = \sqrt{\langle k^2\rangle - \langle k\rangle^2}$. É trivial ver que $\langle k\rangle = 0$. Calculando $\langle k^2\rangle$

$$\langle k^2\rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi/2\sigma_x}} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} k^2 e^{-k^2\sigma_x 2} \, dx}_{= \frac{\sqrt{\pi}}{2}(2\sigma_x)^{-3/2}}$$

$$= \sqrt{\frac{2\sigma_x}{\pi} \frac{\pi}{4} \cdot \frac{1}{8\sigma_x^3}} = \frac{1}{4\sigma_x}$$

Como $\Delta k = \sqrt{\langle k^2\rangle - \langle k\rangle^2} = \sqrt{1/4\sigma_x}$ e como $\Delta x = \sqrt{\langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2} = \sqrt{\sigma_x}$ então

$$\Delta x \, \Delta k = \frac{1}{2}$$

que é o valor mínimo possível da incerteza Heisenberg.

$$p = \hbar k \Rightarrow \Delta p = \hbar \Delta k = \sqrt{\frac{\hbar^2}{4\sigma_x}}.$$

(b) A evolução temporal

$$\psi(t,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\psi}(k) \cdot e^{i[kx - \omega(k).t]} \cdot dk$$

onde $\omega(k) = \dfrac{\hbar k^2}{2m}$. Assim sendo

$$\psi(t,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dk \; \frac{e^{-k^2\sigma_x}}{\sqrt[4]{\pi/2\sigma_x}} \cdot e^{i(kx + \underbrace{c}_{=\frac{\hbar t}{2m}}.k^2)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\;}} \frac{1}{\sqrt[4]{\;}} \int_{-\infty}^{+\infty} dk \; \underbrace{e^{-\underbrace{(\sigma_x + ic)}_{=a}k^2 + ikx}}_{= e^{-(\underbrace{\sqrt{a}k - \frac{ix}{2\sqrt{a}}}_{=a\tilde{k} \Rightarrow dk = d\tilde{k}})^2 - \frac{x^2}{4a}}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\cancel{\pi}}\,\sqrt[4]{\pi/2\sigma_x}} \sqrt{\frac{\cancel{\pi}}{\sigma_x + ic}} \cdot e^{-\frac{x^2}{4(\sigma_x + ic)}}$$

Calculando $\Delta x(t) = \sqrt{\langle x^2\rangle - \underbrace{\langle x\rangle^2}_{=0}} = \sqrt{\langle x^2\rangle}$, temos

$$\langle x^2\rangle(t) = \frac{1}{\sqrt{\cancel{\pi}/\cancel{2}\sigma_x}} \frac{1}{2(\sigma_x^2 + c^2)^{1/2}} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} dx.\, x^2 \; e^{-\frac{x^2}{4}\underbrace{\frac{2\sigma_x}{\sigma_x^2+c^2}}_{=a}}}_{\to \frac{\cancel{\sqrt{\pi}}}{\cancel{2}} \cdot \left(\frac{4(\sigma_x^2+c^2)}{2\sigma_x}\right)^{3/2}}$$

$$= \sqrt{\frac{\cancel{\sigma_x}}{\cancel{8}} \frac{1}{\cancel{\sigma_x^2 + c^2}} \frac{\cancel{8}(\sigma_x^2+c^2)^{\cancel{3}}}{\sigma_x^{\cancel{3}}}} = \frac{\sigma_x^2 + c^2}{\sigma_x}$$

$$= \sigma_x + \frac{1}{\sigma_x}\frac{\hbar^2}{4m^2}t^2$$

σ_p pois $p = \hbar k$

ou seja, $\boxed{\sigma_x(t) = \sigma_x + \frac{\sigma_k \hbar^2}{m^2}.t^2 = \sigma_x + \frac{\sigma_p}{m^2}t^2}$ $\square$

(c) À medida que o tempo avança a nossa gaussiana (centrada em $x=0$ pois $\langle x\rangle = 0$) vai ficar com uma largura cada vez maior dada por

$$\boxed{\sigma_x(t) = \sigma_x + \frac{\sigma_p}{m^2}.t^2}$$