BC 0103 – Física Quântica – Segunda Avaliação - A

UFABC

Professor: Luciano Cruz   Turma: B2

Nome: ______________________________ R.A. ______________

Regras:

A avaliação tem duração de 1 hora e 40 minutos.
É **proibido** o uso de calculadora.
É **proibida** qualquer consulta a materiais auxiliares ou colegas, a avaliação será anulada caso isto ocorra.
Todas as respostas devem ser justificadas e os cálculos devem ser apresentados explicitamente.

Boa sorte!

Questões:

1 – (3 pontos) Uma partícula livre de massa m e número de onda k_1 está movendo-se para a direita. No ponto x = a, o potencial muda bruscamente de 0 para $6V_0$ e permanece com este valor para todos os valores de x > a. Se a energia inicial da partícula é 8 V_0. Determine:

(a) (1.5pt) Os números de onda k_1 (para região x <a) e k_2 (para a região x > a) em termos de V_0, m e constantes universais.

(b) (1.5pt) Os coeficientes de reflexão e transmissão associados ao potencial degrau.

2 – (4 pontos) Considere o problema de uma partícula de massa m confinada em uma dimensão que possui uma função de onda dada por $\psi(x) = \left(\frac{1}{\pi L^2}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{x^2}{2L^2}}$ e valida em qualquer ponto do eixo x. A energia desta partícula é dada por $E = \hbar^2/2mL^2$.

(a) (2pt) Determine qual deve ser a forma do potencial V(x) em termos dos parâmetros do problema para que $\psi(x)$ satisfaça a equação de Schrodinger unidimensional independente do tempo.

(b) (2pt) Calcule o valor de $\sigma_p^2 = \langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2$ para este estado em termos de constantes universais e parâmetros do problema.

3 – (3 pontos) Considere um átomo de Hidrogênio (Z=1) de massa reduzida μ, o elétron deste átomo encontra-se no estado com número quântico principal n = 3 (desconsidere o spin). O potencial de interação entre o núcleo e o elétron é dado por $V(r) = K\frac{e^2}{r}$.

(a) (1.5pt) Calcule a constante de normalização para a função de onda radial dada por $R_{32}(r) = A\, r^2\, e^{-\frac{r}{3a_0}}$, onde a_0 é o raio de Bohr.

(b) (1.5pt) Determine o valor do raio no qual a função de densidade de probabilidade de encontrar o elétron é máxima para o estado quântico definido no item a.

Formulário – Avaliação 2 - Física Quântica

Relações, equações e fórmulas principais

$$\Delta x\,\Delta p \geq \frac{\hbar}{2} \qquad E = hf = \hbar\omega \qquad E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{p^2}{2m}$$

$$k^2 = \frac{2m}{\hbar^2}\left[E_T - V(x)\right] \qquad T = \frac{k_2}{k_1}\frac{|C|^2}{|A|^2} = \frac{4k_1k_2}{(k_1+k_2)^2} \qquad R = \frac{|B|^2}{|A|^2} = \left(\frac{k_1-k_2}{k_1+k_2}\right)^2$$

$$\langle f(x)\rangle_\psi = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*(x)\, f(x)\, \psi(x)\, dx \qquad \hat{p}_x\psi(x) = -i\hbar\frac{d}{dx}\psi(x) \qquad p_x^2\psi(x) = -\hbar^2\frac{d^2}{dx^2}\psi(x)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Psi(x,t) + V(x,t)\,\Psi(x,t) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(x,t)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\psi(x) + V(x)\,\psi(x) = E\,\psi(x) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty}\psi^*(x)\psi(x)dx = 1$$

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d}{dr}R(r)\right) - \left[V(r) - \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu r^2}\right]R(r) = ER(r) \qquad \langle f(r)\rangle = \int_0^\infty R_{nl}^*(r)f(r)R_{nl}(r)r^2\,dr$$

$$\int_0^\infty\int_0^\pi\int_0^{2\pi} |\psi_{nlm}(r,\theta,\varphi)|^2\, r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi = \int_0^\infty |R_{nl}(r)|^2\, r^2\, dr = 1$$

$$a_0 = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{\mu e^2} \qquad E_n = -\frac{\mu}{2}\left(\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0\hbar}\right)^2\frac{1}{n^2}$$

$n = 1,2,3\ldots \quad l = 0,1,2,\ldots,n-1 \quad m = 0,\pm1,\pm2,\ldots,\pm l$

Tabela de Derivadas e Integrais

$y = u^n \Rightarrow y' = n.u^{n-1}.u'$

$y = e^u \Rightarrow y' = e^u.u'$

$y = \mathrm{sen}(u) \Rightarrow y' = \cos(u).u'$

$y = \cos(u) \Rightarrow y' = -\mathrm{sen}(u).u'$

$\int u^n\,du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c, \quad n \neq -1 \qquad \int u\cdot dv = uv - \int v\,du$

$\int e^{at}\,dt = \frac{1}{a}e^{at} + C \qquad \int t^n \cdot e^{at}\,dt = \frac{1}{a}t^n e^{at} - \frac{n}{a}\int t^{n-1}e^{at}\,dt$

$\int \mathrm{sen}(at)\,dt = \frac{-1}{a}\cos(at) + C$

$\int \cos(at)\,dt = \frac{1}{a}\mathrm{sen}(at) + C$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^{2n}e^{-\beta x^2}dx = (-1)^n\pi^{1/2}\frac{d^n}{d\beta^n}\left[\beta^{-1/2}\right], \mathrm{n} = 0,1,2,3\ldots \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta x^2}dx = \sqrt{\frac{\pi}{\beta}}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^{2n+1}e^{-\beta x^2}dx = 0, \mathrm{n} = 0,1,2,3\ldots \qquad \int_0^{+\infty} x^n e^{-\frac{x}{\alpha}}dx = n!\,\alpha^{n+1}, \mathrm{n} = 0,1,2,3\ldots$$

Relação Trigonométricas

$\mathrm{sen}^2(\theta) = \frac{1-\cos(2\theta)}{2} \qquad \cos^2(\theta) = \frac{1+\cos(2\theta)}{2} \qquad \mathrm{sen}(2\theta) = 2\,\mathrm{sen}(\theta)\cos(\theta) \qquad \cos(2\theta) = \cos^2(\theta) - \mathrm{sen}^2(\theta) \qquad \mathrm{sen}^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1$

	0°	30°	45°	60°	90°
	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
sen(θ) =	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
cos(θ) =	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0
tg(θ) =	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	∄

$$ax^2 + bx + c$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Prova A

Q1-

a) $K_1^2 = \frac{2m}{\hbar^2} E = \frac{2m}{\hbar^2} 8V_0 = \boxed{16 \frac{mV_0}{\hbar^2}} \Rightarrow K_1 = 4\sqrt{\frac{mV_0}{\hbar^2}}$

$K_2^2 = \frac{2m}{\hbar^2}(E - V) = \frac{2m}{\hbar^2}(8V_0 - 6V_0) = \boxed{\frac{4mV_0}{\hbar^2}} \Rightarrow K_2 = 2\sqrt{\frac{mV_0}{\hbar^2}}$

b) $R = \left(\frac{K_1 - K_2}{K_1 + K_2}\right)^2 = \left(\frac{4\sqrt{\frac{mV_0}{\hbar^2}} - 2\sqrt{\frac{mV_0}{\hbar^2}}}{4\sqrt{\frac{mV_0}{\hbar^2}} + 2\sqrt{\frac{mV_0}{\hbar^2}}}\right)^2 = \left(\frac{2}{6}\right)^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \boxed{\frac{1}{9}}$

$T = \frac{4K_1K_2}{(K_1 + K_2)^2} = \frac{4 \cdot 4\sqrt{\frac{\cancel{m V_0}}{\cancel{\hbar^2}}} \cdot 2\sqrt{\frac{\cancel{mV_0}}{\cancel{\hbar^2}}}}{6^2 \frac{\cancel{m V_0}}{\cancel{\hbar^2}}} = \frac{32}{36} = \frac{2^2}{3^2} = \boxed{\frac{8}{9}}$

P2

Q2

$$\psi(x) = \left(\frac{1}{\pi L^2}\right)^{1/4} e^{-x^2/2L^2} \qquad E = \frac{\hbar^2}{2mL^2}$$

a) $$\frac{-\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\psi(x) + V(x)\psi(x) = E\,\psi(x)$$

$$\frac{d}{dx}\psi(x) = \left(\frac{1}{\pi L^2}\right)^{1/4}\left(\frac{-2x}{2L^2}\right)e^{-x^2/2L^2} = -\left(\frac{1}{\pi L^2}\right)^{1/4}\frac{1}{L^2}\,x e^{-x^2/2L}$$

$$\frac{d^2}{dx^2}\psi(x) = -\left(\frac{1}{\pi L^2}\right)^{1/4}\frac{1}{L}\left[e^{-x^2/2L^2} + x\left(-\frac{2x}{2L^2}\right)e^{-x^2/2L}\right]$$

$$\frac{d^2}{dx^2}\psi(x) = -\frac{1}{L^2}\underbrace{\left(\frac{1}{\pi L^2}\right)^{1/4}e^{-x^2/2L^2}}_{\psi(x)} + \frac{x^2}{L^4}\underbrace{\left(\frac{1}{\pi L^2}\right)^{1/4}e^{-x^2/2L}}_{\psi(x)} = -\frac{1}{L^2}\psi(x) + \frac{x^2}{L^4}\psi(x)$$

Assim:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left[-\frac{1}{L^2}\psi(x) + \frac{x^2}{L^4}\psi(x)\right] + V(x)\psi(x) = \frac{\hbar^2}{2mL^2}\psi(x)$$

$$+\cancel{\frac{\hbar^2}{2mL^2}\psi(x)} - \frac{\hbar^2}{2mL^4}x^2\psi(x) + V(x)\psi(x) - \cancel{\frac{\hbar^2}{2mL^2}\psi(x)} = 0$$

$$\boxed{V(x) = \frac{\hbar^2}{2mL^4}x^2}$$

b) $$\langle p\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty}\psi^*(x)\left(-i\hbar\frac{d}{dx}\right)\psi(x) = -i\hbar\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{\pi L^2}\right)^{1/4}e^{-x^2/2L^2}\left[-\left(\frac{1}{\pi L^2}\right)^{1/4}\frac{1}{L^2}\,x\,e^{-x^2/2L^2}\right]dx$$

$$= +i\hbar\left(\frac{1}{\pi L^2}\right)^{1/2}\frac{1}{L^2}\int_{-\infty}^{+\infty}x e^{-2x^2/2L^2}dx = 0$$

cont. 2b

$$\langle p^2\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*(x)\left(-\hbar^2\frac{d^2}{dx^2}\psi(x)\right)dx = -\hbar^2\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{\pi L^2}\right)^{1/4} e^{-x^2/2L^2}\left[-\frac{1}{L^2}\left(\frac{1}{\pi L^2}\right)^{1/4} e^{-x^2/2L^2} + \frac{x^2}{L^4}\left(\frac{1}{\pi L^2}\right)^{1/4} e^{-x^2/2}\right.$$

$$= +\frac{\hbar^2}{L^2}\left(\frac{1}{\pi L^2}\right)^{1/2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/L^2}dx - \frac{\hbar^2}{L^4}\left(\frac{1}{\pi L^2}\right)^{1/2}\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-x^2/L^2}dx$$

Do formulario:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta x^2}dx = \sqrt{\frac{\pi}{\beta}}, \quad \text{assim: } \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\frac{1}{L^2}\right)x^2}dx = \left(\pi L^2\right)^{1/2}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-\beta x^2}dx = (-1)^1\,\pi^{1/2}\frac{d^1}{d\beta^1}\left(\beta^{-1/2}\right) = -\pi^{1/2}\left(-\frac{1}{2}\beta^{-3/2}\right) = +\frac{\pi^{1/2}}{2}\beta^{-3/2}$$

para $\beta = +\frac{1}{L^2}$ $\quad \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-x^2/L^2}dx = +\frac{\pi^{1/2}}{2}\left(\frac{1}{L^2}\right)^{-3/2} = \frac{\pi^{1/2}}{2}L^3$

Assim:

$$\langle p^2\rangle = \frac{\hbar^2}{L^2}\cancel{\left(\frac{1}{\pi L^2}\right)^{1/2}}\cancel{\left(\pi L^2\right)^{1/2}} - \frac{\hbar^2}{L^4}\left(\frac{1}{\cancel{\pi} L^2}\right)^{1/2}\frac{\cancel{\pi}^{1/2}}{2}L^3$$

$$\langle p^2\rangle = \frac{\hbar^2}{L^2} - \frac{\hbar^2}{2L^2} = \frac{\hbar^2}{2L^2}$$

Por fim:

$$\sigma_p^2 = \langle p^2\rangle - \langle p\rangle^2 = \frac{\hbar^2}{2L^2} - 0^2 = \frac{\hbar^2}{2L^2}$$

Q3- $R_{32}(r) = A r^2 e^{-r/3a_0}$

a) $\int_0^{+\infty} |R_{32}(r)|^2 r^2 dr = 1 = \int_0^{+\infty} A^2 r^4 e^{-2r/3a_0} r^2 dr = A^2 \int_0^{+\infty} r^6 e^{-2r/3a_0} dr = 1$

$\int_0^{+\infty} r^6 e^{-2r/3a_0} dr$ Do formulario $\int_0^{+\infty} x^6 e^{-x/\alpha} = 6!\, \alpha^7$

para $\alpha = \frac{3a_0}{2}$, temos: $A^2\, 6! \left(\frac{3a_0}{2}\right)^7 = 1$

$$\Rightarrow A = \left[\frac{2^7}{6!(3a_0)^7}\right]^{1/2} = \frac{2^3\, 2^{1/2}}{(6!)^{1/2}\, 3^3 a_0^3\, (3a_0)^{1/2}} = \frac{8\sqrt{2}}{\sqrt{720}\; 27 a_0^3 \sqrt{3a_0}}$$

$$\underline{A = \frac{8}{27 a_0^3 \sqrt{1080 a_0}}}$$

b) $P_{32}(r) = A^2 r^4 e^{-2r/3a_0} r^2 = A^2 r^6 e^{-2r/3a_0}$

$$\frac{d}{dr} P_{32}(r) = 0 = A^2 \left[6 \cancel{r^5} \cancel{e^{-2r/3a_0}} - \left(\frac{2}{3a_0}\right) \cancel{r^6} \cancel{e^{-2r/3a_0}} \right] = 0$$

$$6 - \frac{2r}{3a_0} = 0$$

$$6 \cdot 3a_0 = 2r \Rightarrow r = \underline{9a_0}$$

BC 0103 – Física Quântica – Segunda Avaliação - B

Professor: Luciano Cruz   Turma: B2

UFABC

Nome: ______________________________ R.A. ______________

Regras:

A avaliação tem duração de 1 hora e 40 minutos.
É **proibido** o uso de calculadora.
É **proibida** qualquer consulta a materiais auxiliares ou colegas, a avaliação será anulada caso isto ocorra.
Todas as respostas devem ser justificadas e os cálculos devem ser apresentados explicitamente.

Boa sorte!

Questões:

1 – (3 pontos) Uma partícula livre de massa m e número de onda k_1 está movendo-se para a direita. No ponto x = a, o potencial muda bruscamente de 0 para $10V_0$ e permanece com este valor para todos os valores de x > a. Se a energia inicial da partícula é 18 V_0. Determine:

(a) (1.5pt) Os números de onda k_1 (para região x <a) e k_2 (para a região x > a) em termos de V_0, m e constantes universais.

(b) (1.5pt) Os coeficientes de reflexão e transmissão associados ao potencial degrau.

2 – (3 pontos) Considere o problema do oscilador harmônico quântico unidimensional. Uma partícula de massa m possui a função de onda $\psi(x) = A.x.e^{-\frac{x^2}{2L^2}}$ em qualquer ponto do espaço e a sua energia é dada por $E = 3\hbar^2/2mL^2$. Determine:

(a) (1.5pt) A constante de normalização deste estado.

(b) (1.5pt) Os valores das posições que são máximos da probabilidade de encontrar esta partícula para este estado.

3 – (4 pontos) Considere um átomo de Hidrogênio (Z=1) de massa reduzida μ. A energia neste estado é dada por $E = -\frac{\hbar^2}{2\mu a_0^2}$ e a parte radial da função de onda deste estado é $R_{10}(r) = \frac{2}{\sqrt{a_0^3}} e^{-\frac{r}{a_0}}$, onde a_0 é o raio de Bohr.

(a) (2pt) Determine qual deve ser a forma do potencial em termos da variável r e parâmetros do problema para que $R_{10}(r)$ satisfaça a equação de Schrodinger radial em coordenadas esféricas.

(b) (2pt) Calcule o valor de $\sigma_r^2 = \langle r^2 \rangle - \langle r \rangle^2$ para este estado em termos de constantes universais e parâmetros do problema.

Formulário – Avaliação 2 - Física Quântica

Relações, equações e fórmulas principais

$$\Delta x\,\Delta p \geq \frac{\hbar}{2} \qquad E = hf = \hbar\omega \qquad E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{p^2}{2m}$$

$$k^2 = \frac{2m}{\hbar^2}\left[E_T - V(x)\right] \qquad T = \frac{k_2}{k_1}\frac{|C|^2}{|A|^2} = \frac{4k_1k_2}{(k_1+k_2)^2} \qquad R = \frac{|B|^2}{|A|^2} = \left(\frac{k_1-k_2}{k_1+k_2}\right)^2$$

$$\langle f(x)\rangle_\psi = \int_{-\infty}^{+\infty}\psi^*(x)\,f(x)\,\psi(x)\,dx \qquad \hat{p}_x\psi(x) = -i\hbar\frac{d}{dx}\psi(x) \qquad p_x^2\psi(x) = -\hbar^2\frac{d^2}{dx^2}\psi(x)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Psi(x,t) + V(x,t)\,\Psi(x,t) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(x,t)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\psi(x) + V(x)\,\psi(x) = E\,\psi(x) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty}\psi^*(x)\psi(x)dx = 1$$

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d}{dr}R(r)\right) - \left[V(r) - \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu r^2}\right]R(r) = ER(r) \qquad \langle f(r)\rangle = \int_0^\infty R_{nl}^*(r)f(r)R_{nl}(r)r^2\,dr$$

$$\int_0^\infty\int_0^\pi\int_0^{2\pi}|\psi_{nlm}(r,\theta,\varphi)|^2\,r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi = \int_0^\infty|R_{nl}(r)|^2\,r^2\,dr = 1$$

$$a_0 = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{\mu e^2} \qquad E_n = -\frac{\mu}{2}\left(\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0\hbar}\right)^2\frac{1}{n^2}$$

$n = 1,2,3\ldots \quad l = 0,1,2,\ldots,n-1 \quad m = 0,\pm1,\pm2,\ldots,\pm l$

Tabela de Derivadas e Integrais

$y = u^n \Rightarrow y' = n.u^{n-1}.u'$

$y = e^u \Rightarrow y' = e^u.u'$

$y = \text{sen}(u) \Rightarrow y' = \cos(u).u'$

$y = \cos(u) \Rightarrow y' = -\text{sen}(u).u'$

$\int u^n\,du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c, \quad n \neq -1 \qquad \int u\cdot dv = uv - \int v\,du$

$\int e^{at}\,dt = \frac{1}{a}e^{at} + C \qquad \int t^n\cdot e^{at}\,dt = \frac{1}{a}t^n e^{at} - \frac{n}{a}\int t^{n-1}e^{at}\,dt$

$\int \text{sen}(at)\,dt = \frac{-1}{a}\cos(at) + C$

$\int \cos(at)\,dt = \frac{1}{a}\text{sen}(at) + C$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}x^{2n}e^{-\beta x^2}dx = (-1)^n\pi^{1/2}\frac{d^n}{d\beta^n}\left[\beta^{-1/2}\right], \text{n} = 0,1,2,3.. \qquad \int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\beta x^2}dx = \sqrt{\frac{\pi}{\beta}}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}x^{2n+1}e^{-\beta x^2}dx = 0, \text{n} = 0,1,2,3.. \qquad \int_0^{+\infty}x^n e^{-\frac{x}{\alpha}}dx = n!\,\alpha^{n+1}, \text{n} = 0,1,2,3..$$

Relação Trigonométricas

$$\text{sen}^2(\theta) = \frac{1-\cos(2\theta)}{2} \qquad \cos^2(\theta) = \frac{1+\cos(2\theta)}{2} \qquad \text{sen}(2\theta) = 2\,\text{sen}(\theta)\cos(\theta) \qquad \cos(2\theta) = \cos^2(\theta) - \text{sen}^2(\theta) \qquad \text{sen}^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1$$

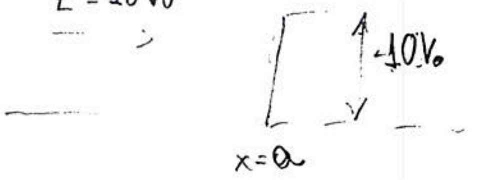
	0°	30°	45°	60°	90°
	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
sen(θ) =	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
cos(θ) =	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0
tg(θ) =	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	∄

$$ax^2 + bx + c$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Prova B

Q1 $\quad E = 18V_0$



a) $K_1^2 = \frac{2m}{\hbar^2}E = \frac{2m}{\hbar^2}18V_0 = 36\frac{mV_0}{\hbar^2} \Rightarrow K_1 = 6\frac{\sqrt{mV_0}}{\hbar}$

$K_2^2 = \frac{2m}{\hbar^2}(E-V) = \frac{2m}{\hbar^2}(18V_0 - 10V_0) = 16\frac{mV_0}{\hbar^2} \Rightarrow K_2 = 4\frac{\sqrt{mV_0}}{\hbar}$

b) $R = \left(\frac{6\sqrt{\frac{mV_0}{\hbar^2}} - 4\sqrt{\frac{mV_0}{\hbar^2}}}{6\sqrt{\frac{mV_0}{\hbar^2}} + 4\sqrt{\frac{mV_0}{\hbar^2}}}\right)^2 = \left(\frac{2}{10}\right)^2 = \left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{1}{25}$

$T = \frac{4K_1K_2}{(K_1+K_2)^2} = \frac{4 \cdot 6\sqrt{\frac{mV_0}{\hbar^2}} \cdot 4\sqrt{\frac{mV_0}{\hbar^2}}}{\left(6\sqrt{\frac{mV_0}{\hbar^2}} + 4\sqrt{\frac{mV_0}{\hbar^2}}\right)^2} = \frac{4 \cdot 6 \cdot 4}{10^2} = \frac{96}{100} = \frac{24}{25}$

$Q2\cdot\ \Psi(x) = A\,x e^{-x^2/2L^2}$

a) $\int_{-\infty}^{+\infty} \Psi^*(x) \cdot \Psi(x)\, dx = 1$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} A^2 x^2 e^{-x^2/L^2} dx = A^2 \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-x^2/L^2} dx = 1$$

Do formulario: $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-\beta x^2} dx = (-1)^1 \pi^{1/2} \frac{d}{d\beta}\left(\beta^{-1/2}\right) = +\frac{\pi^{1/2}}{2}\beta^{-3/2}$

para $\beta = \frac{1}{L^2}$ $\quad \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-x^2/L^2} dx = \frac{\pi^{1/2}}{2}\left(\frac{1}{L^2}\right)^{-3/2} = \frac{\pi^{1/2}L^3}{2}$

$$A^2 \cdot \frac{\pi^{1/2}L^3}{2} = 1$$

$$A = \sqrt{\frac{2}{\pi^{1/2}L^3}} = \frac{2^{1/2}}{\pi^{1/4}L^{3/2}} = \boxed{\left(\frac{4}{\pi L^6}\right)^{1/4}}$$

b) $P(x) = |\Psi(x)|^2 = A^2 x^2 e^{-x^2/L^2}$

$$\frac{d}{dx} P(x) = A^2\left(\cancel{2}x\cancel{e^{-x^2/L^2}} + x^2\left(\frac{-\cancel{2x}}{L^2}\right)\cancel{e^{-x^2/L^2}}\right) = 0$$

$$= 1 - \frac{x^2}{L^2} = 0 \Rightarrow x = \boxed{\pm L}$$

Q3. $R_{21}(r) = \frac{1}{\sqrt{a_0^3}} e^{-r/a_0}$

a)

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d}{dr}R_{10}(r)\right) - \left[V(r) - \frac{\hbar^2 \cancel{l(l+1)}}{\cancel{2}\mu r^2}\right]R_{10}(r) = E R_{10}(r)$$

$$\frac{-\hbar^2}{2\mu r^2}\frac{d}{dr}\left[r^2\frac{d}{dr}\left(\frac{2}{\sqrt{a_0^3}}e^{-r/a_0}\right)\right] - V(r)\frac{2}{\sqrt{a_0^3}}e^{-r/a_0} = -\frac{\hbar^2}{2\mu a_0^2}\frac{2}{\sqrt{a_0^3}}e^{-r/a_0}$$

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu r^2}\frac{d}{dr}\left[r^2\frac{2}{\sqrt{a_0^3}}\left(-\frac{1}{a_0}\right)e^{-r/a_0}\right] - V(r)\frac{2}{\sqrt{a_0^3}}e^{-r/a_0} = -\frac{\hbar^2}{2\mu a_0^2}\frac{2}{\sqrt{a_0^3}}e^{-r/a_0}$$

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu r^2}\left(-\frac{\cancel{2}}{a_0\cancel{\sqrt{a_0^3}}}\right)\frac{d}{dr}\left(r^2 e^{-r/a_0}\right) - V(r)\frac{\cancel{2}}{\cancel{\sqrt{a_0^3}}}e^{-r/a_0} = -\frac{\hbar^2}{2\mu a_0^2}\frac{\cancel{2}}{\cancel{\sqrt{a_0^3}}}e^{-r/a_0}$$

$$+\frac{\hbar^2}{2\mu r^2 a_0}\left(2re^{-r/a_0} + r^2\left(-\frac{1}{a_0}\right)e^{-r/a_0}\right) - V(r)e^{-r/a_0} = -\frac{\hbar^2}{2\mu a_0^2}e^{-r/a}$$

$$+\frac{\hbar^2}{\mu a_0}\frac{1}{r}\cancel{e^{-r/a_0}} - \frac{\cancel{\hbar^2}}{\cancel{2\mu a_0^2}}\cancel{e^{-r/a_0}} - V(r)\cancel{e^{-r/a_0}} = -\frac{\cancel{\hbar^2}}{\cancel{2\mu a_0^2}}$$

$$+\frac{\hbar^2}{\mu a_0}\frac{1}{r} - V(r) = 0$$

$$\boxed{V(r) = +\frac{\hbar^2}{\mu a_0}\frac{1}{r}}$$

b) $\langle r \rangle = \int_0^{\infty} R_{10}^*(r)\, r\, R_{10}(r)\, r^2 dr$

$$\langle r \rangle = \int_0^{\infty} \frac{2}{\sqrt{a_0^3}} e^{-r/a_0}\, r\, \frac{2}{\sqrt{a_0^3}} e^{-r/a_0}\, r^2 dr = \frac{4}{a_0^3} \int_0^{+\infty} r^3 e^{-2r/a_0} dr.$$

Do formulario $\int_0^{+\infty} x^n e^{-x/\alpha} dx = n!\, \alpha^{n+1}$

para $\alpha = \frac{a_0}{2}$ $\int_0^{+\infty} r^3 e^{-2r/a_0} = 3! \left(\frac{a_0}{2}\right)^4$

$$\langle r \rangle = \frac{4}{\cancel{a_0^3}} \cdot 6 \cdot \frac{a_0^4}{16} = \frac{6}{4} a_0 = \frac{3}{2} a_0$$

$$\langle r^2 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{10}^*(r)\, r^2 R_{10}(r)\, r^2 dr = \frac{4}{a_0^3} \int_{-\infty}^{+\infty} r^4 e^{-2r/a_0} dr$$

$$\langle r^2 \rangle = \frac{4}{\cancel{a_0^3}} \cdot 24 \cdot \frac{a_0^5}{32} = 3\, a_0^2$$

$$\sigma_r^2 = \langle r^2 \rangle - \langle r \rangle^2 = 3a_0^2 - \frac{9}{4} a_0^2 = \frac{(12-9) a_0}{4}$$

$$\sigma_r^2 = \frac{3}{4} a_0$$