S T Q Q S S D — __/__/__

Nome : Lucas Moura de Almeida
RA : 11201811415

1) Atraves da expansão em série de Taylor dada por:

$$f(x) = f(x_e) + \left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=x_e} (x - x_e) + \dots + \frac{1}{n!} \left.\frac{d^n f(x)}{dx^n}\right|_{x=x_e} (x - x_e)^n$$

E considerando os dois primeiros fatores, temos:

$f(x) = \text{Sen}(x)$; $x_e = 0$

$$\Rightarrow f(x) \approx \text{sen}(0) + \cos(0)(x - 0) \approx 0 + 1(x)$$

$$\therefore \boxed{f(x) \approx x}$$

2) A estabilidade do seguinte sistema dinâmico será analisado através do primeiro método de Lyapunov, no ponto de equilíbrio $(x_1(t); x_2(t)) = (0,0)$

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$
$$\dot{x}_2(t) = -x_1(t) - x_2(t) + 3x_1^2(t)x_2(t) + 2x_2^3(t)$$

$$f(x) = \begin{bmatrix} x_2(t) \\ -x_1(t) - x_2(t) + 3x_1^2(t)x_2(t) + 2x_2^3(t) \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 + 6x_1(t)x_2(t) & -1 + 3x_1^2(t) + 6x_2^2(t) \end{bmatrix}$$

Nome: Lucas Moura de Almeida

__/__/__ RA: 11201811415

S T Q Q S S D

Linearizando em $x_0 = (x_1(t); x_2(t)) = (0;0)$, temos que

$$A = \left.\frac{\partial f(x)}{\partial x}\right|_{x=x_0} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Portanto os autovalores de A são dados por:

$$\det(\lambda I - A) = 0$$

$$\det\left(\lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ +1 & \lambda+1 \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$\rightarrow \lambda^2 + \lambda + 1 = 0$$

$$\therefore \lambda = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4.1.1}}{2.1}$$

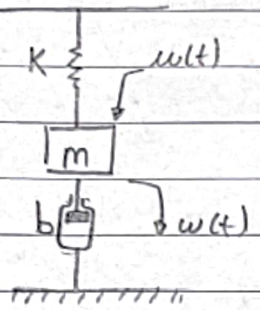
$$\lambda = \frac{-1 \pm j\sqrt{3}}{2} = \boxed{-\frac{1}{2} \pm \frac{j\sqrt{3}}{2}}$$

Portanto, pelo 1º método de Lyapunov, devido aos autovalores da matriz A estarem no semiplano esquerdo do plano complexo, temos que é assintoticamente estável

spiral

Nome: Lucas Moura de Almeida
RA: 11201811415

3)



Dado que:

$$T = \frac{1}{2} m\dot{w}^2(t) \quad \text{e}$$

$$V = \frac{1}{2} Kw^2(t)$$

E sabendo que o lagrangiano é dado por $L = T - V$, é possível deduzir a equação linear de segunda ordem não homogênea, através da equação de Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{w}(t)}\right) - \frac{\partial L}{\partial w(t)} = H(t)$$

Como $H(t)$ é a soma das forças não conservativas, e com base no enunciado, temos que:

$$H(t) = u(t) - b\dot{w}(t)$$

Primeiramente é preciso encontrar o lagrangiano:

$$L = \frac{1}{2} m\dot{w}^2(t) - \frac{1}{2} Kw^2(t)$$

$$\frac{\partial L}{\partial w(t)} = -Kw(t)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{w}(t)}\right) = m\ddot{w}(t)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{w}(t)} = m\dot{w}(t)$$

Nome: Lucas Moura de Almeida
RA: 11201811415

___/___/___ S T Q Q S S D

Portanto, temos:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{w}(t)}\right) - \frac{\partial L}{\partial w(t)} = H(t)$$

$$m\ddot{w}(t) + Kw(t) = u(t) - b\dot{w}(t)$$

$$m\ddot{w}(t) = u(t) - b\dot{w}(t) - Kw(t)$$

$$\therefore \boxed{\ddot{w}(t) = -\frac{b}{m}\dot{w}(t) - \frac{K}{m}w(t) + \frac{1}{m}u(t)}$$

4) O sistema dinâmico, de um pêndulo simples, é dado pela equação:

$$-mgl\,\text{sen}\,\theta(t) - bl\dot{\theta}(t) = ml^2\ddot{\theta}(t)$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta}(t) = -\frac{g}{l}\,\text{sen}\,\theta(t) - \frac{b}{ml}\dot{\theta}(t)$$

Energia total do sistema é dado por:

$$E_T(t) = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2(t) + mgl - mgl\cos\theta(t)$$

sendo definida positiva para quaisquer valores de $\theta(t)$ e $\dot{\theta}(t)$

Usando $E_T(t)$ como candidata à função de Lyapunov, podemos analisar a estabilidade deste sistema dinâmico no ponto de equilíbrio $(\theta(t); \dot{\theta}(t)) = (0; 0)$

S T Q Q S S D

Nome: Lucas Moura de Almeida
RA: 11201811415

___/___/___

$$\dot{E}_T(t) = \frac{1}{2} m\ell^2 2\, \dot{\theta}(t)\, \ddot{\theta}(t) + mg\ell\, \dot{\theta}(t) \,\mathrm{sen}\,\theta(t)$$

$$\therefore \dot{E}_T(t) = m\ell^2 \dot{\theta}(t)\, \ddot{\theta}(t) + mg\ell\, \dot{\theta}(t) \,\mathrm{sen}\,\theta(t)$$

sabendo o valor de $\ddot{\theta}(t)$, apresentado anteriormente, temos:

$$\dot{E}_T(t) = m\ell^2 \dot{\theta}(t) \left(-\frac{g}{\ell} \,\mathrm{sen}\,\theta(t) - \frac{b}{m\ell} \dot{\theta}(t) \right) + mg\ell\, \dot{\theta} \,\mathrm{sen}\,\theta(t)$$

$$= \cancel{-mg\ell\, \dot{\theta} \,\mathrm{sen}\,\theta(t)} - b\ell\, \dot{\theta}^2(t) + \cancel{mg\ell\, \dot{\theta} \,\mathrm{sen}\,\theta(t)}$$

$$\therefore \dot{E}_T(t) = -b\ell\dot{\theta}^2(t)$$

como ℓ, m, g e b são estritamente positivos

$$\dot{E}_T(t) = -b\ell\dot{\theta}^2(t) < 0$$

Portanto é negativa para quaisquer valores de $\theta(t)$ e $\dot{\theta}(t)$. Assim as trajetórias convergem para o ponto de equilíbrio $(\theta(t); \dot{\theta}(t)) = (0;0)$. De modo que é assintoticamente estável

spiral