BC0209–Fenômenos Eletromagnéticos

Segundo quadrimestre de 2016

Prof. José Kenichi Mizukoshi

Aula 17 (versão 19/07/2015)

Campo elétrico induzido. Auto–indutância, indutor, circuito RL.

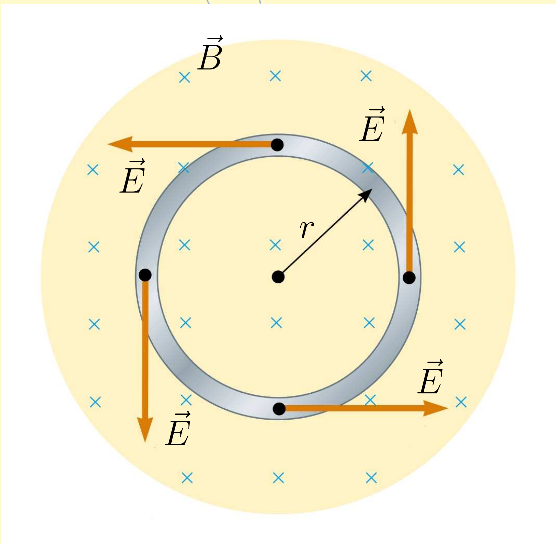
Energia armazenada em um campo magnético.

Campo Elétrico Induzido; Auto–indutância, Indutor, Circuito RL; Energia Armazenada em um Campo Magnético

Campo elétrico induzido

- De acordo com a lei de Faraday, um fluxo magnético variável induz uma fem e uma corrente em uma espira condutora.
- Podemos interpretar a situação acima de uma outra abordagem: <u>um fluxo magnético variável induz um campo elétrico</u>, que será responsável pela força sobre os elétrons livres do condutor, gerando corrente elétrica.
- Considere uma espira condutora de raio r em uma região com campo magnético uniforme, cuja intensidade pode variar com o tempo. Como $\vec{B}$ varia com o tempo, o fluxo magnético variará com o tempo, o que induzirá na espira uma fem

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$



- A corrente induzida implica na existência de um campo elétrico $\vec{E}$, que devido à direção da corrente, deve ser <u>tangencial</u> à espira.

Campo elétrico induzido

- Trabalho realizado pelo campo elétrico para fazer uma carga de prova q_0 dar uma volta completa na espira:

$$W_E = q_0\mathcal{E} = \oint \vec{F}_E \cdot d\vec{\ell} = q_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$$

Segue que o **campo elétrico induzido** está relacionado com a fem induzida pela relação

$$\mathcal{E} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$$

- O campo elétrico induzido é **um campo não conservativo** (ao contrário do campo elétrico eletrostático), pois o trabalho sobre um circuito fechado dá diferente de zero;
- embora o resultado acima tenha sido derivado levando-se em conta uma espira condutora, **o campo elétrico é induzido no espaço, mesmo na ausência de um condutor ou de cargas**.

Campo elétrico induzido

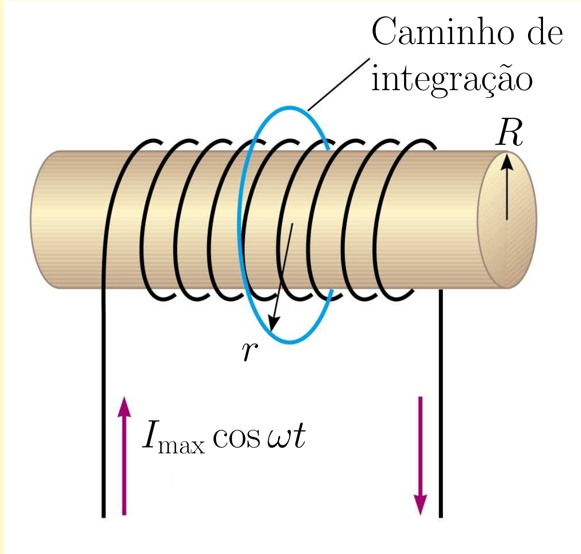
- Em termos do fluxo magnético, a expressão fica

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt}\int \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

➠ Se o fluxo magnético muda com o tempo, haverá um campo elétrico induzido.

Campo elétrico induzido – exemplo

Ex. 1 Considere um solenóide de raio R com n espiras por unidade de comprimento, mostrado na figura ao lado, conduzindo uma corrente $I = I_{\max}\cos\omega t$.



Determine a magnitude do campo elétrico induzido fora do solenóide, a uma distância $r > R$ de seu eixo longo central.

Solução

- Pela lei de Faraday,

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = -\frac{d}{dt}\int \vec{B}\cdot d\vec{A}$$

Para o caminho de integração mostrado na figura acima, $\vec{E}$ é tangente a ele e o seu módulo é constante.

Campo elétrico induzido – exemplo

Segue que

$$\oint E d\ell = E \underbrace{\oint d\ell}_{2\pi r} = -\frac{d}{dt}(B \underbrace{\int dA)}_{=\pi R^2} \quad \Rightarrow \quad E = -\frac{R^2}{2r}\frac{dB}{dt}$$

- Conforme deduzida na aula 14, pp. 3-5, o campo magnético dentro de um solenóide ideal é $B = \mu_0 n I$. Logo,

$$E = -\frac{R^2}{2r}\frac{d}{dt}(\mu_0 n I) = -\frac{\mu_0 n I_{\max} R^2}{2r} \underbrace{\frac{d}{dt}(\cos\omega t)}_{= -\omega \,\text{sen}\, \omega t}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{E = \frac{\mu_0 n I_{\max} \omega R^2}{2r} \text{sen}\, \omega t}$$

Campo elétrico induzido – exemplo

Determine a magnitude do campo elétrico induzido dentro do solenóide, a uma distância $r < R$ de seu eixo longo central.

Solução

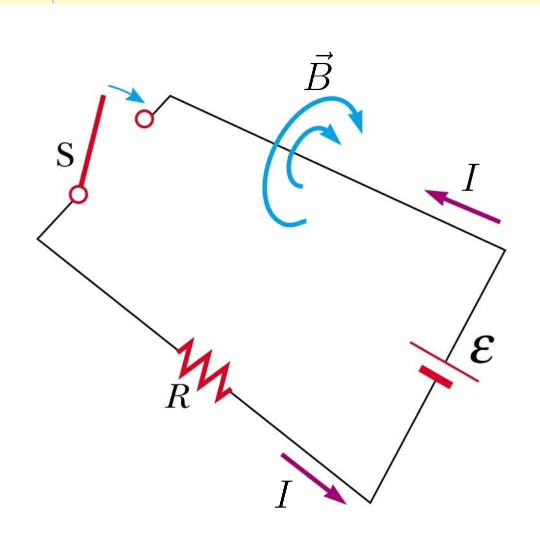
- Utiliza-se novamente a lei de Faraday, onde agora o caminho de integração possui raio $r < R$, portanto o fluxo magnético será dado por $B\pi r^2$:

$$E(2\pi r) = -\frac{d}{dt}(B\pi r^2) \quad \Rightarrow \quad E = -\frac{r}{2}\frac{dB}{dt} = -\frac{r}{2}\frac{d}{dt}(\mu_0 n I_{\max}\cos\omega t)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{E = \frac{\mu_0 n I_{\max}\omega r}{2}\,\mathrm{sen}\,\omega t}$$

Auto-indutância

- Considere o circuito da figura ao lado, formado por uma fonte de fem, uma resistência e uma chave. Quando a chave S é fechada, observa-se que
  - A corrente não salta imediatamente de zero a $\mathcal{E}/R$.
  - À medida que a corrente aumenta com o tempo, haverá aumento no fluxo magnético.



- Para conter o aumento no fluxo, surgirá uma fem induzida, <u>no sentido contrário à corrente</u>, para se opor ao seu aumento. Esse efeito é conhecido como **auto-indutância** e a fem em questão é uma **fem auto-induzida**, $\mathcal{E}_L$.

  Para uma bobina com N espiras, a lei de Faraday pode ser escrita como

$$\mathcal{E}_L = -N\frac{d\Phi_B}{dt} = -L\frac{dI}{dt}$$

Auto-indutância

- L é uma constante de proporcionalidade, conhecida como **indutância** da bobina, e só depende da geometria da bobina e do material o qual as espiras estão enroladas.

  Da última igualdade da equação da página anterior,

$$-N \underbrace{\frac{d\Phi_B}{dt}dt}_{=\,d\Phi_B} = -L \underbrace{\frac{dI}{dt}dt}_{=\,dI} \quad \Rightarrow \quad -N\int_0^{\Phi_B} d\Phi_B = -L\int_0^{I} dI$$

  portanto para uma bobina com N espiras,

$$L = \frac{N\Phi_B}{I}$$

  - Unidade da indutância no SI: $[L] = \dfrac{\mathsf{V}\cdot\mathsf{s}}{\mathsf{A}} =$ henry (H)

Indutância de um solenóide – exemplo

Ex. 2 Obtenha a indutância de um solenóide ideal uniformemente enrolado com N espiras, de comprimento ℓ.

Solução

- O campo magnético no interior de um solenóide ideal é dado por (veja aula 14, pp. 3-5)

$$B = \mu_0 n I = \mu_0 \frac{N}{\ell} I$$

- O fluxo magnético em cada espira de área da seção transversal A é dado por

$$\Phi_B = BA = \frac{\mu_0 N A I}{\ell}$$

Como $L = \dfrac{N\Phi_B}{I}$, tem-se que

$$L = \frac{\mu_0 N^2 A}{\ell} \qquad \text{ou} \qquad L = \mu_0 n^2 A \ell$$

Indutância de um solenóide – exemplo

Como $A\ell$ é o volume do solenóide, $\mathcal{V}_{\text{solen.}}$, temos que a indutância pode ser dada por

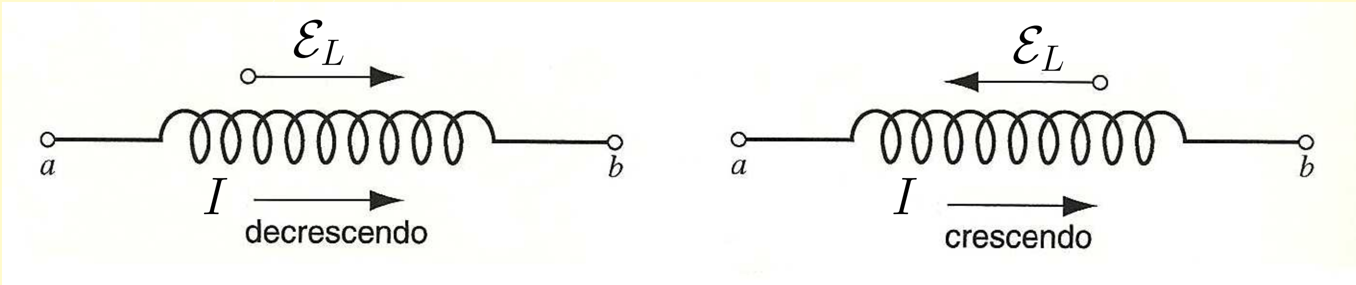
$$\boxed{L = \mu_0 n^2 \mathcal{V}_{\text{solen.}}}$$

Indutor

- Um elemento de circuito que possui a finalidade de fornecer a indutância para o circuito é conhecido como **indutor**, que é caracterizado pela indutância L.

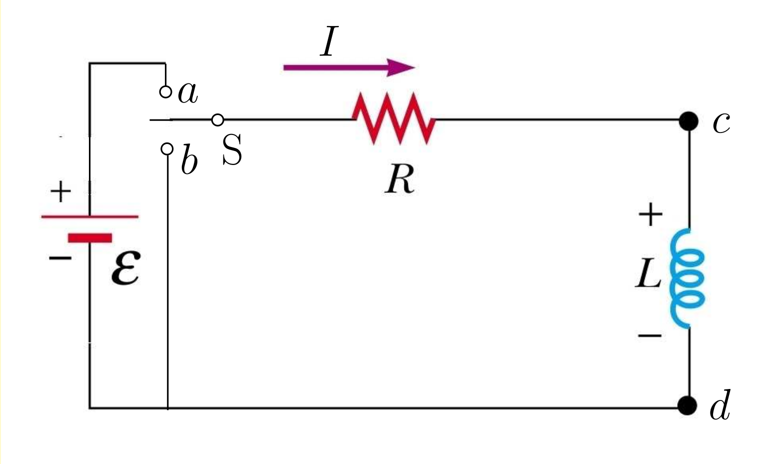
  Num circuito, representamos o indutor através do símbolo 

- Sentido (sinal) da fem induzida: é determinado pelo sinal de $\dfrac{dI}{dt}$.



Circuitos RL

- Considere o circuito da figura ao lado, formado por um resistor, um indutor, uma chave e uma bateria ideal.
  Se a chave S for colocada na posição a em $t = 0$, surge no circuito uma corrente I que começa a aumentar com o tempo.



- A variação da corrente produz uma fem $\mathcal{E}_L$ (às vezes chamada de **força contra-eletromotriz**), que se opõe ao aumento da corrente, dada por

$$\mathcal{E}_L = -L\frac{dI}{dt}$$

Como $\dfrac{dI}{dt}$ é positivo (aumento da corrente elétrica), tem-se que $\mathcal{E}_L$ é negativa, ou seja, uma queda de potencial ocorre do ponto c para o ponto d da figura.

Circuitos RL

- Aplicando a regra das malhas de Kirchhoff a esse circuito, obtemos

$$\mathcal{E} - RI - L\frac{dI}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dI}{dt} = -\frac{R}{L}\left(I - \frac{\mathcal{E}}{R}\right)$$

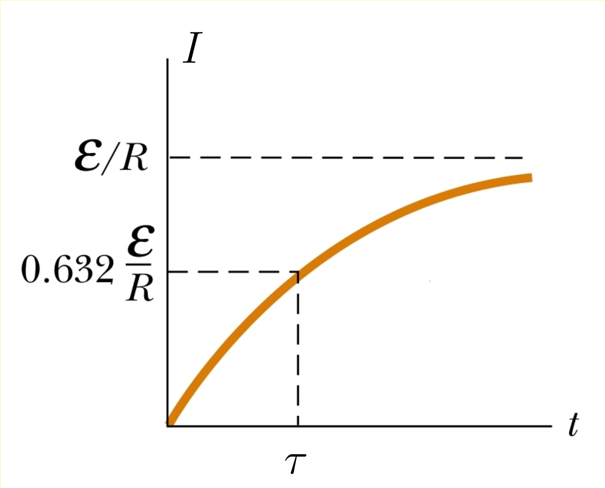
Sabendo-se que em $t = 0$ a corrente é nula, temos que

$$\int_0^I \frac{dI}{I - \mathcal{E}/R} = -\frac{R}{L}\int_0^t dt \quad \Rightarrow \quad \ln\left|I - \frac{\mathcal{E}}{R}\right|\Bigg|_0^I = \ln\left(\frac{\mathcal{E}/R - I}{\mathcal{E}/R}\right) = -\frac{Rt}{L}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\mathcal{E}/R - I}{\mathcal{E}/R} = e^{-\frac{Rt}{L}}$$

Portanto,

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}}{R}(1 - e^{-\frac{Rt}{L}})$$



Circuitos RL

- Similarmente ao circuito RC, podemos definir a **constante de tempo indutiva** do circuito RL como $\tau_L = L/R$.
- A diferença de potencial no resistor é dada por $\Delta V_R = RI$, enquanto no indutor é $\Delta V_L = L\dfrac{dI}{dt}$. Como

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\mathcal{E}}{L} e^{-\frac{Rt}{L}}$$

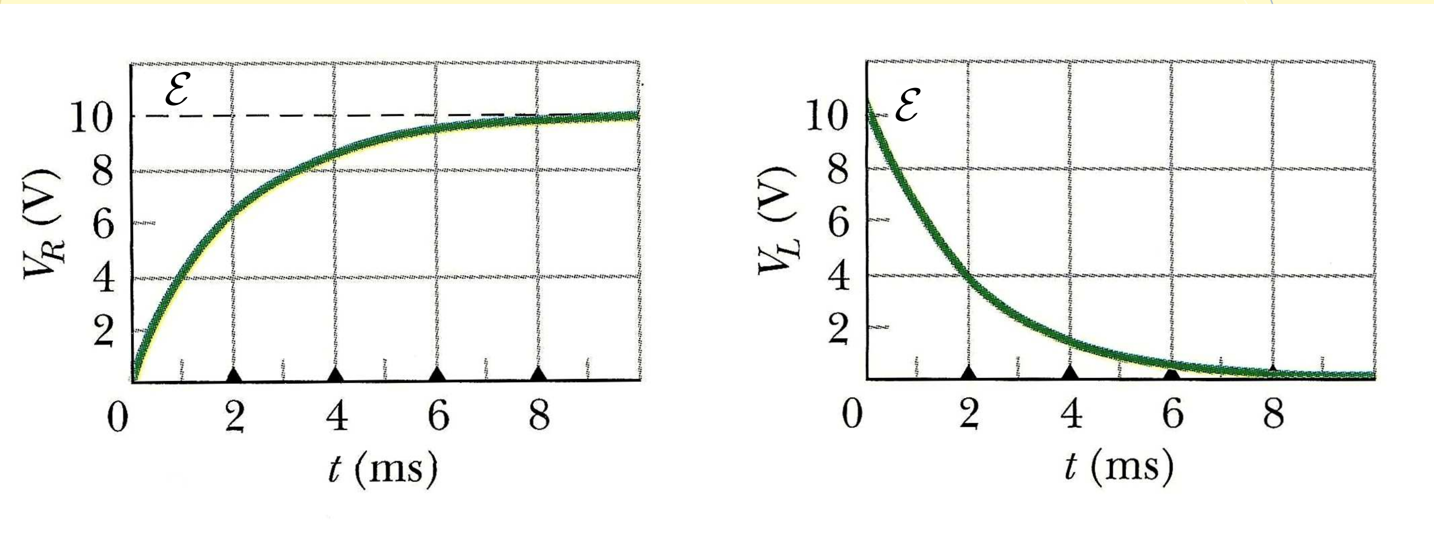
tem-se que

$$\Delta V_R = \mathcal{E}(1 - e^{-\frac{Rt}{L}}) \quad \text{e} \quad \Delta V_L = \mathcal{E} e^{-\frac{Rt}{L}}$$

Conformo esperado, verifica-se que $\Delta V_R + \Delta V_L = \mathcal{E}$.

Circuitos RL

- Gráficos de ΔV_R e ΔV_L para $R = 2000\ \Omega$, $L = 4{,}0$ H e $\mathcal{E} = 10$ V.



Circuitos RL

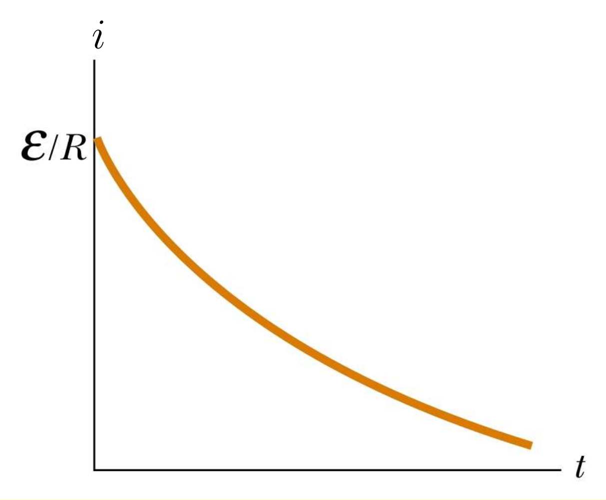
- Vamos supor agora que a chave tenha ficado muito tempo na posição a (veja Fig. da p. 14), tal que a corrente no circuito tenha alcançado o valor máximo $\mathcal{E}/R$. Nessa situação, zera-se o cronômetro e a chave é colocada na posição b no instante $t = 0$, obtendo-se um circuito RL sem a bateria.

- Aplicando a regra das malhas de Kirchhoff para esse circuito, obtemos a equação diferencial

$$RI + L\frac{dI}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dI}{dt} = -\frac{R}{L}I$$

Resolvemos a equação de forma análoga ao caso anterior, lembrando que a condição inicial agora é $I(0) = \mathcal{E}/R$:

$$\int_{\mathcal{E}/R}^{I} \frac{dI}{I} = -\frac{R}{L}\int_0^t dt \quad \Rightarrow \quad \ln I\Big|_{\mathcal{E}/R}^{I} = -\frac{Rt}{L}$$



Segue que

$$\ln\left(\frac{I}{\mathcal{E}/R}\right) = -\frac{Rt}{L} \quad \Rightarrow \quad I(t) = \frac{\mathcal{E}}{R}e^{-\frac{Rt}{L}}$$

$$\therefore \quad I(t) = \frac{\mathcal{E}}{R}e^{-\frac{t}{\tau_L}}$$

- Diferenças de potencial no resistor e no indutor:

$$\Delta V_R = \mathcal{E}e^{-\frac{Rt}{L}} \quad \text{e} \quad \Delta V_L = -\mathcal{E}e^{-\frac{Rt}{L}} \quad \Rightarrow \quad \Delta V_R + \Delta V_L = 0$$

Energia armazenada em um campo magnético

- Conforme visto na p. 15, a equação de um circuito RL com a bateria conectada é dada por

$$\mathcal{E} - RI - L\frac{dI}{dt} = 0$$

Isolando $\mathcal{E}$ e multiplicando toda a equação pela corrente, obtemos

$$\mathcal{E}I = RI^2 + LI\frac{dI}{dt}$$

Temos que:

- o lado esquerdo da equação acima é a potência (energia por unidade de tempo) fornecida pela bateria;
- o primeiro termo do lado direito é a energia dissipada por unidade de tempo no resistor (efeito Joule);
- Identificamos o segundo termo como sendo a **energia fornecida ao indutor por unidade de tempo**.

Energia armazenada em um campo magnético

- Se U_B **é a energia armazenada no indutor** para um dado instante, temos que a energia transferida por unidade de tempo ao indutor é dada por

$$\frac{dU_B}{dt} = LI\frac{dI}{dt} \quad \Rightarrow \quad dU_B = LIdI$$

Integrando ambos os lados, obtemos

$$\int_0^{U_B} dU_B = L\int_0^I IdI \quad \Rightarrow \quad U_B = \frac{1}{2}LI^2$$

- Observa-se uma similaridade com a energia armazenada num capacitor de capacitância C, carregado com carga q: $U_E = \dfrac{1}{2}\dfrac{q^2}{C}$.

- No caso do capacitor, associamos U_E à energia armazenada no campo elétrico. No caso do indutor, **identificamos** U_B **como sendo a energia armazenada no campo magnético**.

- No intuito de se obter a densidade de energia magnética, vamos calcular a energia armazenada num solenóide ideal.

  Conforme calculado na p. 12, a indutância é $L = \mu_0 n^2 \mathcal{V}_{\text{solen.}}$, enquanto que o campo magnético em seu interior é $B = \mu_0 n I$. Segue que

$$U_B = \frac{1}{2} L I^2 = \frac{1}{2} \mu_0 n^2 \mathcal{V}_{\text{solen.}} \left(\frac{B}{\mu_0 n} \right)^2 \quad \Rightarrow \quad U_B = \frac{B^2 \mathcal{V}_{\text{solen.}}}{2\mu_0}$$

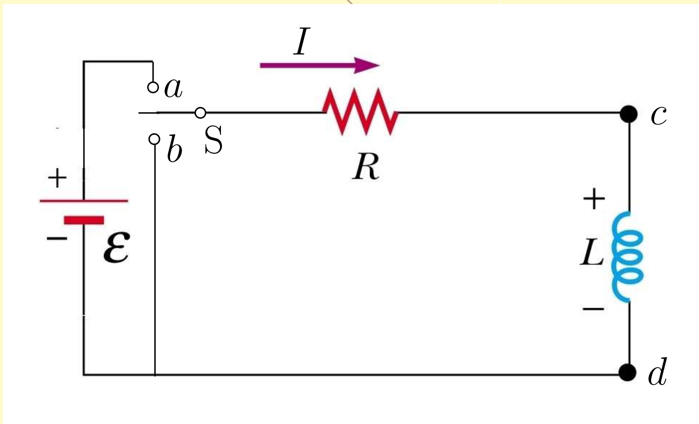
  Logo, a densidade de energia (energia por volume) é

$$u_B = \frac{U_B}{\mathcal{V}_{\text{solen.}}} \quad \Rightarrow \quad u_B = \frac{B^2}{2\mu_0}$$

  ➠ Embora a expressão acima tenha sido deduzida para um solenóide ideal, o resultado é geral. Se existe um campo magnético numa região do espaço, há uma energia magnética acumulada por unidade de volume associada a ele, dada pela expressão acima.

Energia magnética armazenada num indutor – exemplo

Ex. 3 Considere novamente o circuito RL mostrado na figura ao lado, com a chave colocada na posição b em $t = 0$, após ter ficado muito tempo na posição a. Mostre que a energia total transferida ao resistor é igual à energia total inicialmente armazenada no indutor.



Solução

- Para um dado instante t, a corrente no circuito é (veja p. 18)

$$I(t) = I_0 e^{-\frac{t}{\tau_L}}$$

onde $I_0 = \mathcal{E}/R$ e $\tau_L = L/R$.

- A potência no resistor é dada por

$$\mathcal{P}_R = RI^2 = R\left(I_0 e^{-\frac{t}{\tau_L}}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{P}_R = RI_0^2 e^{-\frac{2t}{\tau_L}}$$

Energia magnética armazenada num indutor – exemplo

- Como a potência é a taxa de variação da energia, tem-se que

$$\mathcal{P}_R = \frac{dE_R}{dt} \quad \Rightarrow \quad dE_R = \mathcal{P}_R dt$$

Para encontrar a energia total E_R transferida para o resistor, integra-se a expressão acima de $t = 0$ até $t \to \infty$:

$$\int_0^{E_R} dE_R = \int_0^{\infty} \mathcal{P}_R dt = R I_0^2 \underbrace{\int_0^{\infty} e^{-\frac{2t}{\tau_L}} dt}_{= -\frac{\tau_L}{2} e^{-\frac{2t}{\tau_L}} \Big|_0^{\infty}} \quad \Rightarrow \quad E_R = \frac{1}{2} R I_0^2 \tau_L$$

Como $\tau_L = L/R$, segue que

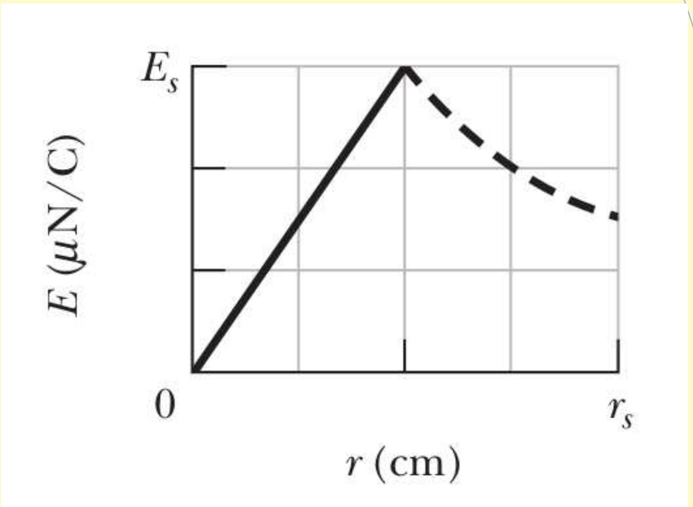
$$E_R = \frac{1}{2} L I_0^2$$

que é exatamente a energia magnética armazenada no indutor no instante $t = 0$.

Problemas Propostos

Campo elétrico induzido

P1 Em uma região circular em um plano xy há um campo magnético uniforme no sentido positivo do eixo z. A magnitude de B (em teslas) aumenta com o tempo (em segundos), de acordo com $B = at$, onde a é uma constante. A magnitude do campo elétrico E estabelecido pelo aumento no campo magnético, em função da distância radial r, é dada pelo gráfico da Fig. ao lado; a escala do eixo vertical é definida por $E_s = 300$ μN/C e a escala do eixo horizontal é definida por $r_s = 4{,}00$ cm. Encontre o raio da região circular e o valor de a.



Resp. $R = 2{,}00$ cm; $a = 0{,}030$ T/s.

P2 (a) Indutores em série. Dois indutores L_1 e L_2 estão conectados em série e separados por uma grande distância, tal que o campo magnético de um não possa afetar o outro. Mostre que a indutância equivalente é dada por

$$L_{\text{eq}} = L_1 + L_2$$

(b) Indutores em paralelo. Se desta vez os indutores L_1 e L_2 são conectados em paralelo, mostre que a indutância equivalente é dada por

$$\frac{1}{L_{\text{eq}}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}$$

Dica: Reveja as derivações dos resistores e capacitores em série e em paralelo. Qual deles é similar aqui?

Referências

- R. A. Serway, e J. W. Jewett Jr., *Princípios de Física, Vol. 3*, Cengage Learning;
- D. Halliday, R. Resnick e K. S. Krane, *Física, Vol. 3*, LTC.