Lista 4 - Introdução à Probabilidade e Estatística

Probabilidade Condicional e Independência

1 — Dois dados são lançados.

a) Qual a probabilidade condicional de ter saído 6 dado que os números das faces viradas para cima dos dados foram diferentes?

b) Qual a probabilidade condicional do primeiro dado ter mostrado um 6 dado que a soma é $i, i = 2, \ldots, 12$?

2 — Uma urna contém 6 bolas brancas e 9 bolas negras. Se 4 bolas são escolhidas ao acaso e sem reposição, qual a probabilidade de que as duas primeiras bolas escolhidas sejam brancas e as duas últimas bolas escolhidas sejam negras?

3 — Considere uma urna contendo 12 bolas das quais 8 são brancas. Uma amostra de tamanho 4 é retirada com reposição (sem reposição). Qual a probabilidade condicional (em cada caso) de que a primeira e a terceira bola retirada sejam brancas dado que a amostra retirada tem exatamente 3 bolas brancas?

4 — Um casal tem 2 filhos. Qual a probabilidade de que ambas crianças sejam meninas se a maior for menina?

5 — Considere 3 urnas. A urna A contém 2 bolas brancas e 4 bolas vermelhas; a urna B contém 8 bolas brancas e 4 bolas vermelhas; e a urna C contém 1 bola branca e 3 bolas vermelhas. Uma bola é escolhida aleatoriamente de cada urna. Qual a probabilidade de que bola escolhida da urna A seja branca dado que a amostra retirada possui exatamente 2 bolas brancas?

6 — Três cartas são retiradas aleatoriamente, sem reposição, de um baralho de 52 cartas. Calcule a probabilidade condicional de que a primeira carta retirada seja de espada dado que a segunda e a terceira também o são?

7 — Duas cartas são retiradas, sem reposição, de um baralho de 52 cartas. Seja B o evento em que ambas cartas são ases; seja A_s o evento em que o ás de espadas é escolhido, e seja A o evento em que pelo menos um ás é escolhido. Calcule

a) $\mathbb{P}[B|A_s]$

b) $\mathbb{P}[B|A]$

8 — Suponha que um baralho com 52 cartas é aleatoriamente dividido em 4 mãos de 13 cartas cada. Queremos calcular a probabilidade p de que em cada mão há um ás. Seja E_i o evento em que a $i$ésima mão tem exatamente um ás. Determine $p = \mathbb{P}[E_1 \cap E_2 \cap E_3 \cap E_4]$ utilizando a regra da multiplicação.

9 — Uma urna contém inicialmente 5 bolas brancas e 7 bolas negras. Toda vez que uma bola é retirada, sua cor é registrada e é substituída, na urna, por duas bolas da mesma cor. Calcule a probabilidade de que

a) As primeiras duas bolas retiradas são negras e as outras duas são brancas;

b) Entre as primeiras 4 bolas retiradas há exatamente duas negras.

10 — Em uma certa comunidade, 36% das famílias possuem um cachorro e, 22% dessas famílias, são donas de um gato também. Sabe-se, também, que 30% das famílias possuem um gato. Qual

a) a probabilidade de que uma família escolhida aleatoriamente seja dona de um gato e de um cachorro?

b) a probabilidade condicional de que família escolhida aleatoriamente seja dona de um cachorro dado que é dona de um gato?

11 — Um total de 46% dos eleitores de uma certa cidade se declaram Independentes, enquanto que 30% se declaram Liberais e 24% se declaram conservadores. Em uma eleição recente, 35% dos independentes, 62% dos liberais e 58% dos conservadores votaram. Um eleitor é escolhido aleatoriamente. Dado que esta pessoa votou na eleição local, qual a probabilidade de que seja

a) independente;
b) liberal;
c) conservador;
d) qual a porcentagem de eleitores que participaram da eleição local?

12 — João tem duas moedas idênticas, a não ser pelo fato de terem probabilidades diferentes de sair cara. Uma delas é honesta, ou seja, tem probabilidade $1/2$ de sair cara. A outra é desonesta, e tem probabilidade $1/3$ de sair cara. Uma moeda é escolhida ao acaso e lançada resultando em cara. Qual a probabilidade de ter sido a moeda honesta?

13 — Joana tem três moedas na bolsa; duas honestas e uma terceira desonesta com probabilidade p de sair cara e probabilidade $1-p$ de sair coroa. Uma moeda é escolhida ao acaso e lançada resultando em cara. Qual a probabilidade de ter sido uma das moedas honestas?

14 — Cinquenta e dois por cento dos estudantes de uma universidade são do sexo feminino. Cinco por cento dos estudantes desta universidade são formandos em Ciências da Computação. Dois por cento dos estudantes são mulheres formandas no curso de Ciências da Computação. Se um estudante é escolhido aleatoriamente, calcule a probabilidade de que

a) seja do sexo feminino, dado que o estudante escolhido é formando em Ciências da Computação;
b) este estudante seja formando em Ciências da Computação, dado que o estudante escolhido é do sexo feminino.

15 — Um dado vermelho, um azul e um amarelo são jogados. Queremos calcular a probabilidade de que o número mostrado pelo dado azul seja menor do que o número mostrado pelo dado amarelo e que, por sua vez, este último número seja menor que o número mostrado pelo dado vermelho. Denotemos por B, Y, R os números mostrados pelos dados azul, amarelo e vermelho respectivamente.

a) Qual a probabilidade de que nenhum par de dados mostrem o mesmo número?
b) Dado que nenhum par de dados mostram o mesmo número, qual a probabilidade de que $B < Y < R$?
c) Calcule $\mathbb{P}[B < Y < R]$.

16 — A urna I contém 2 bolas brancas e 4 bolas vermelhas, enquanto que a urna II contém 1 bola branca e 1 bola vermelha. Uma bola é escolhida aleatoriamente da urna I e colocada na urna II. Logo, uma bola é escolhida aleatoriamente da urna II. Qual

a) a probabilidade de que a bola escolhida da urna II seja branca?
b) a probabilidade condicional de que a bola transferida seja branca dado que uma bola branca foi escolhida da urna II?

17 — Um carcereiro comunica a três prisioneiros que um deles foi escolhido aleatoriamente para ser transladado a um presídio de segurança máxima e, que os outros dois serão liberados. O prisioneiro A pede para o carcereiro lhe dizer em privado qual de seus colegas será liberado alegando que não será beneficiado por isto já que ele já sabe que um de seus colegas será, de fato, liberado. O carcereiro se recusa a responder esta pergunta sobre a alegação de que se o prisioneiro A souber esta informação a sua própria probabilidade de ser transferido mudaria de $1/3$ para $1/2$ porque ele seria um dos dois prisioneiros que seria transferido. Comente o raciocínio do carcereiro.

18 — Um modelo simplificado para a variação do preço de uma mercadoria consiste em supor que a cada dia o preço aumenta em uma unidade com probabilidade p e diminui em uma unidade com probabilidade $1-p$. Assuma que as variações correspondentes a diferentes dias são independentes.

a) Qual a probabilidade de que, após 2 dias, o preço seja o mesmo?
b) Qual a probabilidade de que, após 3 dias, o preço tenha aumentado em uma unidade monetária?
c) Dado que, após 3 dias, o preço aumentou em uma unidade monetária, qual a probabilidade de ter aumento no primeiro dia?

19 — a) Sejam A_1, A_2 e A_3 três eventos independentes. Mostre que $A_1^{\complement}, A_2$ e A_3 são independentes.

b) O que pode ser dito sobre $A_1, A_2^{\complement}$ e A_3?

c) O que pode ser dito sobre a independência de B_1, B_2 e B_3 onde $B_i \in \{A_i, A_i^{\complement}\}$.

20 — Considere o experimento que consiste em lançar duas vezes uma moeda honesta. seja A o evento em que sai cara no primeiro lançamento, B o evento em que sai cara no segundo lançamento e C o evento em que o resultado é o mesmo nos dois lançamentos. Mostre que os eventos A, B e C são independentes dois a dois mas não são independentes.

21 — Diga se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas. Em caso de ser verdadeira dê uma prova. Em caso de ser falsa, dê um contraexemplo.

a) Se E é independente de F e F é independente de G, então E é independente de $F \cup G$.

b) Se E é independente de F e E é independente de G e $F \cap G = \emptyset$, então E é independente de $F \cup G$.

c) Se E é independente de F, F é independente de G e E é independente de $F \cap G$, então G é independente de $E \cap F$.

22 — Sejam A e B eventos de probabilidade positiva. Diga quando cada uma das seguintes afirmações for: (i) verdadeira, (ii) falsa e (iii) possivelmente verdadeira. Justifique sua resposta.

a) Se A e B são mutuamente excludentes então A e B são independentes.

b) Se A e B são mutuamente independente então são mutuamente excludentes.

Respostas dos Exercícios

1 1- a) 1/3 b) Para $i = 2, 3, ..., 6$ temos que $P = 0$ e nos outros casos:

$$\begin{array}{rl} i = 7: & P = 1/6 \\ i = 8: & P = 1/5 \\ i = 9: & P = 1/4 \\ i = 10: & P = 1/3 \\ i = 11: & P = 1/2 \\ i = 12: & P = 1 \end{array}$$

2 6/91

3 Sem reposição: $P = 1/2$
Com reposição: $P = 1/2$

4 $1/2$

5 $7/11$

6 $11/50$

7 a) $1/17$
b) $1/33$

8

$$P(E1) = 0,4388$$

$$P(E2|E1) = 0,4623$$

$$P(E3|E1 \text{ e } E2) = 0,5200$$

$$P(E4|E1 \text{ e } E2 \text{ e } E3) = 1$$

$$P(E1 \text{ e } E2 \text{ e } E3 \text{ e } E4) =$$

$$P(E4|E1 \text{ e } E2 \text{ e } E3) \cdot P(E3|E1 \text{ e } E2) \cdot P(E2|E1) \cdot P(E1) = 0,1055$$

9 a)

$$P(1^a N) = 7/12$$

$$P(2^a N|1^a N) = 8/13$$

$$P(3^a B|1^a N \text{ e } 2^a N) = 5/14$$

$$P(4^a B|1^a N \text{ e } 2^a N \text{ e } 3^a B) = 6/15$$

$$P(1^a N \text{ e } 2^a N \text{ e } 3^a B \text{ e } 4^a B) =$$

$$P(4^a B|1^a N \text{ e } 2^a N \text{ e } 3^a .B) \cdot$$

$$P(3^a B|1^a N \text{ e } 2^a N) \cdot$$

$$P(2^a N|1^a N) \cdot P(1^a N) = 2/39$$

b) 12/39

10 a) 0,0792
b) 0,264

11 a) $0,3311$
b) $0,3826$
c) $0,2863$
d) $0,4862$

12 3/5

13 $\frac{1}{1+p}$

14 a) $2/5$
b) $1/26$

15 a) $5/9$ b) $1/6$ c) $5/54$

16 a) 4/9 b) 1/2

17 O carcereiro está confundindo probabilidade de A ser transladado (sem nenhuma restrição) com a Probabilidade Condicional de A ser transladado dado que B (ou C) vai ser liberado:

$$P(A \text{ ser transladado }) = 1/3$$

$$P(A \text{ ser transladado}|B \text{ vai ser liberado}) = (1/3)/(2/3) = 1/2$$

18 a) 2p(1-p) b) 3p2(1-p) c) 2/3

19

20

21 a) Falso b) Verdadeiro c) Verdadeiro

1.

$Eventos$:

S_i: $\{soma\ dos\ dois\ dados\ dá\ i\}$

F: $\{dados\ caíram\ com\ os\ números\ das\ faces\ diferentes\}$

I: $\{dados\ caíram\ com\ os\ números\ das\ faces\ iguais\}$

$2D_i$: $\{segundo\ dado\ com\ resultado\ i\}$

a) $\mathbb{P}(S_6|F) =$

$$= \frac{\mathbb{P}(S_6 \cap F)}{\mathbb{P}(F)}$$

$$= \frac{\mathbb{P}(S_6 \cap F)}{1 - \mathbb{P}(I)}$$

$$= \frac{\left(\frac{2!\binom{1}{1}\binom{5}{1}}{6^2}\right)}{1 - \left(\frac{6}{6^2}\right)}$$

$$= \boxed{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}}$$

b) $\mathbb{P}(2D_6|S_2) = \boxed{\mathbf{0}}$

$\mathbb{P}(2D_6|S_3) = \boxed{\mathbf{0}}$

$\mathbb{P}(2D_6|S_4) = \boxed{\mathbf{0}}$

$\mathbb{P}(2D_6|S_5) = \boxed{\mathbf{0}}$

$\mathbb{P}(2D_6|S_6) = \boxed{\mathbf{0}}$

$\mathbb{P}(2D_6|S_7) = \boxed{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{6}}}$

$\mathbb{P}(2D_6|S_8) = \boxed{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{5}}}$

$\mathbb{P}(2D_6|S_9) = \boxed{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}}$

$\mathbb{P}(2D_6|S_{10}) = \boxed{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}}$

$\mathbb{P}(2D_6|S_{11}) = \boxed{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}}$

$\mathbb{P}(2D_6|S_{12}) = \boxed{\mathbf{1}}$

2.

$Eventos$:

B: {$bolas\ branca$}

N: {$bola\ negra$}

i_B: $quantidade\ de\ bolas\ brancas\ tiradas\ até\ i$

i_N: $quantidade\ de\ bolas\ negras\ tiradas\ até\ i$

$Premissas$:

$$\mathbb{P}(B_i) = \frac{6-(i_B-1)}{6+9-(i-1)} = \frac{6}{15}$$

$$\mathbb{P}(N_i) = \frac{9-(i_N-1)}{6+9-(i-1)} = \frac{9}{15}$$

$\mathbb{P}(\{B, B, N, N\}) =$

$$= \mathbb{P}(B_1 \cap B_2 \cap N_3 \cap N_4)$$

$$= \left(\frac{6}{15}\right)\left(\frac{6-1}{15-1}\right)\left(\frac{9}{15-2}\right)\left(\frac{9-1}{15-3}\right)$$

$$= \boxed{\mathbf{\frac{6}{91}}}$$

3.

$Eventos$:

3_B: {$3\ bolas\ brancas$}

B_i: {$iésima\ bola\ branca$}

$\overline{B}_i$: {$iésima\ bola\ não\ branca$}

$Premissas$:

- $Com\ reposição$:

$$\mathbb{P}(B_i) = \mathbb{P}(B) = \frac{8}{12}$$

$$\mathbb{P}(\bar{B_i}) = \mathbb{P}(\bar{B}) = \frac{12-8}{12} = \frac{4}{12}$$

- *Sem reposição:*

$$\mathbb{P}\left(B_i \mid \bigcap_j^n B_j \bigcap_k^m \overline{B_k}\right) = \frac{8-n}{12-(i-1)} \quad ; \quad n+m=i-1$$

$$\mathbb{P}\left(\overline{B_i} \mid \bigcap_j^n B_j \bigcap_k^m \overline{B_k}\right) = \frac{(12-8)-m}{12-(i-1)} = \frac{4-m}{12-(i-1)} \quad ; \quad n+m=i-1$$

$$\mathbb{P}(B_1 \cap B_3 | 3_b) =$$

$$= \frac{\mathbb{P}(B_1 \cap B_3 \cap 3_b)}{\mathbb{P}(3_b)}$$

$$= \frac{\mathbb{P}\left(B_1 \cap B_3 \cap \left((B_1 \cap B_2 \cap B_3 \cap \overline{B_4}) \cup (B_1 \cap B_2 \cap \overline{B_3} \cap B_4) \cup (B_1 \cap \overline{B_2} \cap B_3 \cap B_4) \cup (\overline{B_1} \cap B_2 \cap B_3 \cap B_4)\right)\right)}{\mathbb{P}\left((B_1 \cap B_2 \cap B_3 \cap \overline{B_4}) \cup (B_1 \cap B_2 \cap \overline{B_3} \cap B_4) \cup (B_1 \cap \overline{B_2} \cap B_3 \cap B_4) \cup (\overline{B_1} \cap B_2 \cap B_3 \cap B_4)\right)}$$

$$= \frac{\mathbb{P}\left((B_1 \cap B_2 \cap B_3 \cap \overline{B_4}) \cup (B_1 \cap \overline{B_2} \cap B_3 \cap B_4)\right)}{\mathbb{P}\left((B_1 \cap B_2 \cap B_3 \cap \overline{B_4}) \cup (B_1 \cap B_2 \cap \overline{B_3} \cap B_4) \cup (B_1 \cap \overline{B_2} \cap B_3 \cap B_4) \cup (\overline{B_1} \cap B_2 \cap B_3 \cap B_4)\right)}$$

$$= \frac{\mathbb{P}(B_1 \cap B_2 \cap B_3 \cap \overline{B_4}) + \mathbb{P}(B_1 \cap \overline{B_2} \cap B_3 \cap B_4)}{\mathbb{P}(B_1 \cap B_2 \cap B_3 \cap \overline{B_4}) + \mathbb{P}(B_1 \cap B_2 \cap \overline{B_3} \cap B_4) + \mathbb{P}(B_1 \cap \overline{B_2} \cap B_3 \cap B_4) + \mathbb{P}(\overline{B_1} \cap B_2 \cap B_3 \cap B_4)}$$

$$= \frac{1}{1 + \frac{\mathbb{P}(B_1 \cap B_2 \cap \overline{B_3} \cap B_4) + \mathbb{P}(\overline{B_1} \cap B_2 \cap B_3 \cap B_4)}{\mathbb{P}(B_1 \cap B_2 \cap B_3 \cap \overline{B_4}) + \mathbb{P}(B_1 \cap \overline{B_2} \cap B_3 \cap B_4)}}$$

- *Com reposição:*

$$= \frac{1}{1 + \frac{\mathbb{P}(B_1)\cdot\mathbb{P}(B_2)\cdot\mathbb{P}(\overline{B_3})\cdot\mathbb{P}(B_4) + \mathbb{P}(\overline{B_1})\cdot\mathbb{P}(B_2)\cdot\mathbb{P}(B_3)\cdot\mathbb{P}(B_4)}{\mathbb{P}(B_1)\cdot\mathbb{P}(B_2)\cdot\mathbb{P}(B_3)\cdot\mathbb{P}(\overline{B_4}) + \mathbb{P}(B_1)\cdot\mathbb{P}(\overline{B_2})\cdot\mathbb{P}(B_3)\cdot\mathbb{P}(B_4)}}$$

$$= \frac{1}{1 + \frac{\left(\frac{\mathbb{P}(\overline{B_3})}{\mathbb{P}(B_3)} + \frac{\mathbb{P}(\overline{B_1})}{\mathbb{P}(B_1)}\right)}{\left(\frac{\mathbb{P}(\overline{B_4})}{\mathbb{P}(B_4)} + \frac{\mathbb{P}(\overline{B_2})}{\mathbb{P}(B_2)}\right)}}$$

$$= \frac{1}{1 + \frac{\left(\frac{\mathbb{P}(\bar{B})}{\mathbb{P}(B)} + \frac{\mathbb{P}(\bar{B})}{\mathbb{P}(B)}\right)}{\left(\frac{\mathbb{P}(\bar{B})}{\mathbb{P}(B)} + \frac{\mathbb{P}(\bar{B})}{\mathbb{P}(B)}\right)}}$$

$$= \boxed{\mathbf{\frac{1}{2}}}$$

- *Sem reposição*:

$$= \frac{1}{1 + \frac{\mathbb{P}(B_1 \cap B_2 \cap \overline{B_3} \cap B_4) + \mathbb{P}(\overline{B_1} \cap B_2 \cap B_3 \cap B_4)}{\mathbb{P}(B_1 \cap B_2 \cap B_3 \cap \overline{B_4}) + \mathbb{P}(B_1 \cap \overline{B_2} \cap B_3 \cap B_4)}}$$

$$= \frac{1}{1 + \frac{\mathbb{P}(B_1)\mathbb{P}(B_2|B_1)\mathbb{P}(\overline{B_3}|B_1 \cap B_2)\mathbb{P}(B_4|B_1 \cap B_2 \cap \overline{B_3}) + \mathbb{P}(\overline{B_1})\mathbb{P}(B_2|\overline{B_1})\mathbb{P}(B_3|\overline{B_1} \cap B_2)\mathbb{P}(B_4|\overline{B_1} \cap B_2 \cap B_3)}{\mathbb{P}(B_1)\mathbb{P}(B_2|B_1)\mathbb{P}(B_3|B_1 \cap B_2)\mathbb{P}(\overline{B_4}|B_1 \cap B_2 \cap B_3) + \mathbb{P}(B_1)\mathbb{P}(\overline{B_2}|B_1)\mathbb{P}(B_3|B_1 \cap \overline{B_2})\mathbb{P}(B_4|B_1 \cap \overline{B_2} \cap B_3)}}$$

$$= \frac{1}{1 + \frac{\left(\frac{8}{12} \times \frac{8-1}{12-1} \times \frac{4}{12-2} \times \frac{8-2}{12-3}\right) + \left(\frac{4}{12} \times \frac{8}{12-1} \times \frac{8-1}{12-2} \times \frac{8-2}{12-3}\right)}{\left(\frac{8}{12} \times \frac{8-1}{12-1} \times \frac{8-2}{12-2} \times \frac{4}{12-3}\right) + \left(\frac{8}{12} \times \frac{4}{12-1} \times \frac{8-1}{12-2} \times \frac{8-2}{12-3}\right)}}$$

$$= \frac{1}{1 + \frac{(8 \times 7 \times 4 \times 6) + (4 \times 8 \times 7 \times 6)}{(8 \times 7 \times 6 \times 4) + (8 \times 4 \times 7 \times 6)}}$$

$$= \boxed{\frac{1}{2}}$$

4.

Eventos:

2_f: {2 *meninas*}

M_f: {*mais velhas menina*}

m_f: {*mais nova menina*}

Premissas:

$$P(M_f) = P(m_f) = \frac{1}{2}$$

$$P(2_f) = P(M_f \cap m_f) = P(M_f) \cdot P(m_f) = \frac{1}{4}$$

$$\mathbb{P}(2_f|M_f) =$$

$$= \frac{\mathbb{P}(2_f \cap M_f)}{\mathbb{P}(M_f)}$$

$$= \frac{\mathbb{P}\left((M_f \cap m_f) \cap M_f\right)}{\mathbb{P}(M_f)}$$

$$= \frac{\mathbb{P}(M_f \cap m_f)}{\mathbb{P}(M_f)}$$

$$= \frac{\mathbb{P}(2_f)}{\mathbb{P}(M_f)}$$

$$= \frac{1/4}{1/2}$$

$$= \boxed{\mathbf{\frac{1}{2}}}$$

5.

$Eventos$:

$2_b: \{2\ bolas\ brancas\}$

$X_b: \{bola\ branca\ na\ urna\ X\}$

$X_v: \{bola\ vermelha\ na\ urna\ X\}$

$Premissas$:

$$\mathbb{P}(A_b) = \frac{2}{2+4} = \frac{1}{3}$$

$$\mathbb{P}(B_b) = \frac{8}{8+4} = \frac{2}{3}$$

$$\mathbb{P}(C_b) = \frac{1}{1+3} = \frac{1}{4}$$

$$\mathbb{P}(A_v) = \frac{4}{2+4} = \frac{2}{3}$$

$$\mathbb{P}(B_v) = \frac{4}{8+4} = \frac{1}{3}$$

$$\mathbb{P}(C_v) = \frac{3}{1+3} = \frac{3}{4}$$

$\mathbb{P}(A_b|2_b) =$

$$= \frac{\mathbb{P}(A_b \cap 2_b)}{\mathbb{P}(2_b)}$$

$$= \frac{\mathbb{P}\Big(A_b \cap \big((A_b \cap B_b \cap C_v) \cup (A_b \cap B_v \cap C_b) \cup (A_v \cap B_b \cap C_b)\big)\Big)}{\mathbb{P}\big((A_b \cap B_b \cap C_v) \cup (A_b \cap B_v \cap C_b) \cup (A_v \cap B_b \cap C_b)\big)}$$

$$= \frac{\mathbb{P}\big((A_b \cap B_b \cap C_v) \cup (A_b \cap B_v \cap C_b)\big)}{\mathbb{P}\big((A_b \cap B_b \cap C_v) \cup (A_b \cap B_v \cap C_b) \cup (A_v \cap B_b \cap C_b)\big)}$$

$$= \frac{\mathbb{P}(A_b \cap B_b \cap C_v) + \mathbb{P}(A_b \cap B_v \cap C_b)}{\mathbb{P}(A_b \cap B_b \cap C_v) + \mathbb{P}(A_b \cap B_v \cap C_b) + \mathbb{P}(A_v \cap B_b \cap C_b)}$$

$$= \frac{1}{1 + \frac{\mathbb{P}(A_v \cap B_b \cap C_b)}{\mathbb{P}(A_b \cap B_b \cap C_v) + \mathbb{P}(A_b \cap B_v \cap C_b)}}$$

$$= \frac{1}{1 + \frac{\mathbb{P}(A_v) \cdot \mathbb{P}(B_b) \cdot \mathbb{P}(C_b)}{\mathbb{P}(A_b) \cdot \mathbb{P}(B_b) \cdot \mathbb{P}(C_v) + \mathbb{P}(A_b) \cdot \mathbb{P}(B_v) \cdot \mathbb{P}(C_b)}}$$

$$= \frac{1}{1 + \frac{\frac{\mathbb{P}(A_v)}{\mathbb{P}(A_b)}}{\frac{\mathbb{P}(C_v)}{\mathbb{P}(C_b)} + \frac{\mathbb{P}(B_v)}{\mathbb{P}(B_b)}}}$$

$$= \frac{1}{1 + \frac{\frac{2/3}{1/3}}{\frac{3/4}{1/4} + \frac{1/3}{2/3}}}$$

$$= \frac{1}{1 + \frac{2}{3 + \frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{1}{1 + \frac{4}{7}}$$

$$= \boxed{\frac{\mathbf{7}}{\mathbf{11}}}$$

6.

$Eventos$:

S: $\{iésima\ carta\ retirada\ é\ de\ espadas\}$

$Premissas$:

$$\mathbb{P}(S_i) = \frac{\binom{13}{1}}{\binom{52}{1}}$$

$$\mathbb{P}\left(S_i \middle| \cup_j^n S_j\right) = \frac{\binom{13 - (n - j + 1)}{1}}{\binom{52 - (n - j + 1)}{1}}$$

$\mathbb{P}(S_1|S_2 \cap S_3) =$

$$= \frac{\mathbb{P}(S_1 \cap S_2 \cap S_3)}{\mathbb{P}(S_3 \cap S_2)}$$

$$= \frac{\mathbb{P}(S_1) \cdot \mathbb{P}(S_2|S_1) \cdot \mathbb{P}(S_3|S_1 \cap S_2)}{\mathbb{P}(S_3|S_2) \cdot \mathbb{P}(S_2)}$$

$$= \frac{\mathbb{P}(S_2|S_1) \cdot \mathbb{P}(S_3|S_1 \cap S_2)}{\mathbb{P}(S_3|S_2)}$$

$$= \frac{\dfrac{\binom{13-(1-1+1)}{1}}{\binom{52-(1-1+1)}{1}} \cdot \dfrac{\binom{13-(2-1+1)}{1}}{\binom{52-(2-1+1)}{1}}}{\dfrac{\binom{13-(1-1+1)}{1}}{\binom{52-(1-1+1)}{1}}}$$

$$= \boxed{\mathbf{\frac{11}{50}}}$$

7.

Eventos:

$B: \{2\ ases\}$

$A_S: \{1\ \text{ás}\ de\ espadas\}$

$A: \{1\ \text{ás}\}$

Premissas:

$$\mathbb{P}(A_S) = \frac{1}{52}$$

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\binom{4}{1}}{52} = \frac{1}{13}$$

a) $\mathbb{P}(B|A_S) =$

$$= \frac{\mathbb{P}(B \cap A_S)}{\mathbb{P}(A_S)}$$

$$= \frac{\left(\frac{\binom{1}{1}}{52}\frac{\binom{4-1}{1}}{52-1}\right)}{\left(\frac{\binom{1}{1}}{52}\right)}$$

$$= \boxed{\mathbf{\frac{1}{17}}}$$

b) $\mathbb{P}(B|A) =$

$$= \frac{\mathbb{P}(B \cap A)}{\mathbb{P}(A)}$$

$$= \frac{\left(\frac{\binom{4}{1}}{52}\frac{\binom{4-1}{1}}{52-1}\right)}{\left(\frac{\binom{4}{1}}{52}\frac{\binom{4-1}{1}}{52-1} + \binom{2}{1}\frac{\binom{4}{1}}{52}\frac{\binom{52-4}{1}}{52-1}\right)}$$

$$= \frac{1}{1 + \frac{\left(\binom{2}{1}\frac{\binom{4}{1}}{52}\frac{\binom{52-4}{1}}{52-1}\right)}{\left(\frac{\binom{4}{1}}{52}\frac{\binom{4-1}{1}}{52-1}\right)}}$$

$$= \frac{1}{1 + \frac{2 \cdot 48}{3}}$$

$$= \boxed{\mathbf{\frac{1}{33}}}$$

8.

$Eventos$:

E_i: {$iésima\ mão\ tem\ apenas$ 1 ás}

$Premissas$:

$$\mathbb{P}(E_1) = \frac{\binom{4}{1}\binom{52-4}{13-1}}{\binom{52}{13}}$$

$$\mathbb{P}(E_i|E_{i-1}) = \frac{\binom{4-(i-1)}{1}\binom{52-(i-1)\times 13-(4-(i-1))}{13-1}}{\binom{52-(i+1)\times 13}{13}}$$

a) $p = \mathbb{P}(E_1 \cap E_2 \cap E_3 \cap E_4)$

$$= \mathbb{P}(E_1)\cdot\mathbb{P}(E_2|E_1)\cdot\mathbb{P}(E_3|E_1\cap E_2)\cdot\mathbb{P}(E_4|E_1\cap E_2\cap E_3)$$

$$= \frac{\binom{4}{1}\binom{52-4}{13-1}}{\binom{52}{13}} \cdot \frac{\binom{4-1}{1}\binom{52-1\times 13-(4-1)}{13-1}}{\binom{52-1\times 13}{13}} \cdot \frac{\binom{4-2}{1}\binom{52-2\times 13-(4-2)}{13-1}}{\binom{52-2\times 13}{13}} \cdot \frac{\binom{4-3}{1}\binom{52-3\times 13-(4-3)}{13-1}}{\binom{52-3\times 13}{13}}$$

$$= \frac{2197}{20835}$$

$$= \boxed{\mathbf{0,1055}}$$

9.

Eventos:

B: {*uma bola branca é retirada da urna*}

N: {*uma bola negra é retirada da urna*}

Premissas:

$$P(B) = \frac{5}{5+7} = \frac{5}{12}$$

$$P(N) = \frac{7}{5+7} = \frac{7}{12}$$

a) $\mathbb{P}(N_1 \cap N_2 \cap B_3 \cap B_4) =$

$$= \mathbb{P}(N_1)\cdot\mathbb{P}(N_2|N_1)\cdot\mathbb{P}(B_3|N_1\cap N_2)\cdot\mathbb{P}(B_4|N_1\cap N_2\cap B_3)$$

$$= \frac{7}{12} \cdot \left(\frac{7+1}{12+1}\right) \cdot \left(\frac{5}{12+2}\right) \cdot \left(\frac{5+1}{12+3}\right)$$

$$= \boxed{\mathbf{\frac{2}{39}}}$$

b) $P(\{N, N, B, B\}) =$

$$= \binom{4}{2} \mathbb{P}(N_1 \cap N_2 \cap B_3 \cap B_4)$$

$$= \frac{4!}{2!\,2!} \times \frac{2}{39}$$

$$= \boxed{\mathbf{\frac{12}{39}}}$$

10.

$Eventos$:

$C: \{famílias\ que\ possuem\ cachorros\}$

$G: \{famílias\ que\ possuem\ gatos\}$

$Premissas$:

$\mathbb{P}(C) = 0{,}36$

$\mathbb{P}(C \cap G) = 0{,}22 \cdot \mathbb{P}(C) = 0{,}22 \cdot 0{,}36 = 0{,}0792$

$\mathbb{P}(G) = 0{,}30$

a) $\mathbb{P}(G \cap C) =$

$$= \mathbb{P}(C \cap G)$$

$$= \boxed{\mathbf{0,0792}}$$

b) $\mathbb{P}(C|G) =$

$$= \frac{\mathbb{P}(C \cap G)}{\mathbb{P}(G)}$$

$$= \frac{0{,}0792}{0{,}30}$$

$$= \boxed{\mathbf{0,264}}$$

11.

$Eventos$:

I: $\{eleitores\ Independentes\ que\ votaram\}$

L: $\{eleitores\ Liberais\ que\ votaram\}$

C: $\{eleitores\ conservadores\ que\ votaram\}$

$Premissas$:

$\mathbb{P}(I) = 0{,}46$

$\mathbb{P}(L) = 0{,}30$

$\mathbb{P}(C) = 0{,}24$

$\mathbb{P}(I \cap V) = 0{,}35 \cdot \mathbb{P}(I) = 0{,}35 \cdot 0{,}46 = 0{,}161$

$\mathbb{P}(L \cap V) = 0{,}62 \cdot \mathbb{P}(L) = 0{,}62 \cdot 0{,}30 = 0{,}186$

$\mathbb{P}(C \cap V) = 0{,}58 \cdot \mathbb{P}(C) = 0{,}58 \cdot 0{,}24 = 0{,}1392$

a) $\mathbb{P}(I|V) =$

$$= \frac{\mathbb{P}(I \cap V)}{\mathbb{P}(V)}$$

$$= \frac{\mathbb{P}(I \cap V)}{\mathbb{P}\big((V \cap I) \cup (V \cap L) \cup (V \cap C)\big)}$$

$$= \frac{\mathbb{P}(I \cap V)}{\mathbb{P}(V \cap I) + \mathbb{P}(V \cap L) + \mathbb{P}(V \cap C)}$$

$$= \frac{1}{1 + \frac{\mathbb{P}(L \cap V) + \mathbb{P}(C \cap V)}{\mathbb{P}(I \cap V)}}$$

$$= \frac{1}{1 + \frac{0{,}186 + 0{,}1392}{0{,}161}}$$

$$= \boxed{\mathbf{0{,}3311}}$$

b) $\mathbb{P}(L|V) =$

$$= \frac{1}{1 + \frac{\mathbb{P}(I \cap V) + \mathbb{P}(C \cap V)}{\mathbb{P}(L \cap V)}}$$

$$= \frac{1}{1 + \frac{0{,}161 + 0{,}1392}{0{,}186}}$$

$$= \boxed{\mathbf{0,3826}}$$

c) $\mathbb{P}(C|V) =$

$$= \frac{1}{1 + \frac{\mathbb{P}(I \cap V) + \mathbb{P}(L \cap V)}{\mathbb{P}(C \cap V)}}$$

$$= \frac{1}{1 + \frac{0{,}161 + 0{,}186}{0{,}1392}}$$

$$= \boxed{\mathbf{0,2863}}$$

d) $\mathbb{P}(V) =$

$$= \mathbb{P}(I \cap V) + \mathbb{P}(L \cap V) + \mathbb{P}(C \cap V)$$

$$= 0{,}161 + 0{,}186 + 0{,}1392$$

$$= \boxed{\mathbf{0,4862}}$$

12.

$Eventos$:

$K: \{face\ cara\ da\ moeda\}$

$H: \{moeda\ honesta\}$

$D: \{moeda\ desonesta\}$

$Premissas$:

$$\mathbb{P}(K|H) = \frac{1}{2}$$

$$\mathbb{P}(K|D) = \frac{1}{3}$$

$$\mathbb{P}(H) = \mathbb{P}(D) = \frac{1}{2}$$

$\mathbb{P}(H|K) =$

$$= \frac{\mathbb{P}(H \cap K)}{\mathbb{P}(K)}$$

$$= \frac{\mathbb{P}(K \cap H)}{\mathbb{P}\big((K \cap H) \cup (K \cap D)\big)}$$

$$= \frac{\mathbb{P}(K \cap H)}{\mathbb{P}(K \cap H) + \mathbb{P}(K \cap D)}$$

$$= \frac{\mathbb{P}(K|H)\mathbb{P}(H)}{\mathbb{P}(K|H)\mathbb{P}(H) + \mathbb{P}(K|D)\mathbb{P}(D)}$$

$$= \frac{1}{1 + \frac{\mathbb{P}(K|D)\mathbb{P}(D)}{\mathbb{P}(K|H)\mathbb{P}(H)}}$$

$$= \frac{1}{1 + \frac{\left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\right)}}$$

$$= \boxed{\mathbf{\frac{3}{5}}}$$

13.

$Eventos$:

H: {$moeda\ honesta$}

K: {$face\ cara\ da\ moeda$}

$$\mathbb{P}(H|K) =$$

$$= \frac{\mathbb{P}(H \cap K)}{\mathbb{P}(K)}$$

$$= \frac{2\left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}\right)}{2\left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3} \cdot p}$$

$$= \boxed{\mathbf{\frac{1}{1 + p}}}$$

14.

$\mathbb{P}(F) = 0{,}52$

$\mathbb{P}(CC) = 0{,}05$

$\mathbb{P}(F \cap CC) = 0{,}02$

a) $\mathbb{P}(F|CC) =$

$= \dfrac{\mathbb{P}(F \cap CC)}{\mathbb{P}(CC)}$

$= \dfrac{0{,}02}{0{,}05}$

$= \boxed{\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{5}}}$

b) $\mathbb{P}(CC|F) =$

$= \dfrac{\mathbb{P}(CC \cap F)}{F(F)}$

$= \dfrac{\mathbb{P}(F \cap CC)}{F(F)}$

$= \dfrac{0{,}02}{0{,}52}$

$= \dfrac{1}{26}$

$= \boxed{\mathbf{0{,}04}}$

15.

Eventos:

$D: \{B \neq Y\} \cup \{B \neq R\} \cup \{Y \neq R\}$

$I: \{B = Y\} \cup \{B = R\} \cup \{Y = R\}$

$M: \{B < Y < R\}$

a) $\mathbb{P}(D) =$

$= 1 - P(I)$

$= 1 - \dfrac{\binom{3}{2}\left(\binom{6}{1}\binom{1}{1}\binom{5}{1}\right) + \left(\binom{6}{1}\binom{1}{1}\binom{1}{1}\right)}{6^3}$

$= 1 - \dfrac{96}{216}$

$$= \boxed{\mathbf{\frac{5}{9}}}$$

b) $\mathbb{N}(M \cap D)$ *é a cardinalidade de* $M \cap D$ *e pode ser observada na tabela abaixo*:

D_1 \ D_2	1	2	3	4	5	6	**Σ**
1	-	-	-	-	-	-	**-**
2	-	-	1	1	1	1	***4***
3	-	-	-	2	2	2	***6***
4	-	-	-	-	3	3	***6***
5	-	-	-	-	-	4	***4***
6	-	-	-	-	-	-	**-**
					Total		***20***

$$\mathbb{P}(M|D) =$$

$$= \frac{\mathbb{P}(M \cap D)}{\mathbb{P}(D)}$$

$$= \frac{\frac{\sum_{i=1}^{n=6-1}(n-i)\cdot i}{6^3}}{\frac{5}{9}}$$

$$= \frac{\frac{20}{216}}{\frac{5}{9}}$$

$$= \boxed{\mathbf{\frac{1}{6}}}$$

c) $\mathbb{P}(M) =$

$$= \mathbb{P}(D \cap M)\mathbb{P}(D|M)$$

$$= \mathbb{P}(M \cap D)\mathbb{P}(D|M)$$

$$= \mathbb{P}(M|D) \cdot \mathbb{P}(D) \cdot \mathbb{P}(D|M)$$

$$= \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{9} \cdot 1$$

$$= \boxed{\mathbf{\frac{5}{54}}}$$

16.

a) $\mathbb{P}(B_{II}) =$

$$= \mathbb{P}\big((B_{II} \cap B_I) \cup (B_{II} \cap V_I)\big)$$

$$= \mathbb{P}(B_{II} \cap B_I) + \mathbb{P}(B_{II} \cap V_I)$$

$$= \mathbb{P}(B_{II}|B_I)P(B_I) + \mathbb{P}(B_{II}|V_I)P(V_I)$$

$$= \left(\frac{2}{2+4}\right)\left(\frac{1+1}{2+1}\right) + \left(\frac{4}{2+4}\right)\left(\frac{1}{2+1}\right)$$

$$= \frac{4}{9}$$

b) $\mathbb{P}(B_I|B_{II}) =$

$$= \frac{\mathbb{P}(B_I \cap B_{II})}{\mathbb{P}(B_{II})}$$

$$= \frac{\left(\frac{2}{2+4}\right)\left(\frac{1+1}{2+1}\right)}{\frac{4}{9}}$$

$$= \frac{1}{2}$$

17.

Quando o prisioneiro A sabe que outro vai ser solto, ele reduz o espaço amostral da probabilidade dele mesmo ser solto, devido à definição de probabilidade condicional.

O resultado desse pensamento dado pelo carcereiro pode ser explicado pela prova matemática abaixo:

Eventos:

$$X_L = \{prisioneiro\ X\ \text{é}\ liberado\}$$

$$X_T = \{prisioneiro\ X\ \text{é}\ transferido\}$$

$$X_S = \{prisioneiro\ X\ sabe\ que\ outro\ vai\ ser\ liberado\}$$

Premissas:

$$\mathbb{P}(X_L) = \frac{1}{3}$$

$\mathbb{P}(A_T|A_S) =$

$= 1 - \mathbb{P}(A_L|A_S)$

$= 1 - \mathbb{P}(A_L|A_L \cup O_L)$

$$= 1 - \frac{\mathbb{P}\big(A_L \cap (A_L \cup O_L)\big)}{\mathbb{P}(A_L \cup O_L)}$$

$$= 1 - \frac{\mathbb{P}\big(A_L \cup (A_L \cap O_L)\big)}{\mathbb{P}(A_L \cup O_L)}$$

$$= 1 - \frac{\mathbb{P}(A_L) + \mathbb{P}(A_L \cap O_L)}{\mathbb{P}(A_L) + \mathbb{P}(O_L)}$$

$$= 1 - \frac{1/3 + 0}{1/3 + 1/3}$$

$$= \boxed{\mathbf{\frac{1}{2}}}$$

18.

Eventos:

$P_i^n = \{o\ preço\ aumentou\ em\ i\ unidades\ após\ n\ dias\}$

Premissas:

$$\mathbb{P}(P_i^n) = \binom{n}{i+1} p^{n-(i+1)} (1-p)^{i+1}$$

a) $\mathbb{P}(P_0^2) =$

$$= \binom{2}{0+1} p^{0+1} (1-p)^{2-(0+1)}$$

$$= \binom{2}{1} p(1-p)$$

$$= \boxed{\boldsymbol{2p(1-p)}}$$

b) $\mathbb{P}(P_1^3) =$

$$= \binom{3}{1+1} p^{1+1} (1-p)^{3-(1+1)}$$

$$= \binom{3}{2} p^2(1-p)$$

$$= \boxed{\boldsymbol{3p^2(1-p)}}$$

c) $\mathbb{P}(P_1^1 | P_1^3) =$

$$= \frac{\mathbb{P}(P_1^1 \cap P_1^3)}{\mathbb{P}(P_1^3)}$$

$$= \frac{\mathbb{P}(P_0^2)}{\mathbb{P}(P_1^3)}$$

$$= \frac{\binom{2}{1} p^2(1-p)}{\binom{3}{2} p^2(1-p)}$$

$$= \boxed{\mathbf{\frac{2}{3}}}$$

19.

a) A_1, A_2, A_3 *independentes*

Por um lado:

$\mathbb{P}(A_2 \cap A_3) =$

$= \mathbb{P}(A_2) \cdot \mathbb{P}(A_3 | A_2)$

$= \mathbb{P}(A_2) \cdot \mathbb{P}(A_3)$

Por outro:

$\mathbb{P}(A_2 \cap A_3) =$

$= \mathbb{P}\big(S \cap (A_2 \cap A_3)\big)$; S: *espaço amostral*

$= \mathbb{P}\Big(\big(A_1 \cup A_1^C\big) \cap (A_2 \cap A_3)\Big)$

$= \mathbb{P}\Big((A_1 \cap A_2 \cap A_3) \cup \big(A_1^C \cap A_2 \cap A_3\big)\Big)$

$= \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) + \mathbb{P}\big(A_1^C \cap A_2 \cap A_3\big)$; *pois* A_1 *e* A_1^C *são disjuntos*

$= \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(A_2 | A_1) \cdot \mathbb{P}(A_3 | A_1 \cap A_2) + \mathbb{P}\big(A_1^C \cap A_2 \cap A_3\big)$

$= \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(A_2) \cdot \mathbb{P}(A_3) + \mathbb{P}\big(A_1^C \cap A_2 \cap A_3\big)$

Portanto:

$\mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(A_2) \cdot \mathbb{P}(A_3) + \mathbb{P}\big(A_1^C \cap A_2 \cap A_3\big) = \mathbb{P}(A_2) \cdot \mathbb{P}(A_3)$

$\Rightarrow \mathbb{P}\big(A_1^C \cap A_2 \cap A_3\big) = \mathbb{P}(A_2) \cdot \mathbb{P}(A_3) - \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(A_2) \cdot \mathbb{P}(A_3)$

$\Rightarrow \mathbb{P}(A_1^C \cap A_2 \cap A_3) = (1 - \mathbb{P}(A_1)) \cdot \mathbb{P}(A_2) \cdot \mathbb{P}(A_3)$

$\Rightarrow \mathbb{P}(A_1^C \cap A_2 \cap A_3) = \mathbb{P}(A_1^C) \cdot \mathbb{P}(A_2) \cdot \mathbb{P}(A_3)$

$\Rightarrow A_1^C, A_2, A_3$ *independentes* ■

b) *Analogamente ao item a,* A_1, A_2^C, A_3 *também são independentes.*

c) $B_1 \in \{A_1, A_1^C\} \Rightarrow (B_1 \in A_1) \cup (B_1 \in A_1 \cap A_1^C) \cup (B_1 \in A_1^C)$

$B_2 \in \{A_2, A_2^C\} \Rightarrow (B_2 \in A_2) \cup (B_2 \in A_2 \cap A_2^C) \cup (B_2 \in A_2^C)$

$B_3 \in \{A_3, A_3^C\} \Rightarrow (B_3 \in A_3) \cup (B_3 \in A_3 \cap A_3^C) \cup (B_3 \in A_3^C)$

$B_1 \cap B_2 \cap B_3 \in$ *em alguma de todas as combinações possíveis do grupos acima*

Como A_1, A_2 *e* A_3 *são independentes, qualquer combinação dos grupos acima também será um conjunto independente.*

Logo, B_1, B_2 *e* B_3 *são independentes.* ■

20.

21.

22.