BCM0504

Natureza da Informação

Álgebra Booleana

Prof. Alexandre Donizeti Alves

Universidade Federal do ABC

Bacharelado em Ciência e Tecnologia

Bacharelado em Ciências e Humanidades

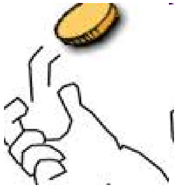
Terceiro Quadrimestre - 2018

Bits e informação

- **Informação** é medida em **bits**
  - Como tamanho em metros e tempo em segundos
  - Atenção: saber quantidade de informação ≠ saber a informação (o que significa ou implica)
- Outras escalas:
  - *Sistemas físicos*: Joules por Kelvin
  - Assim como tamanho tem polegadas

Quantificando informação

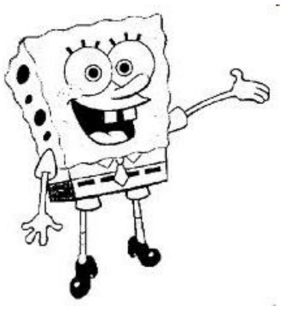
- Supor situação com várias saídas possíveis
  - **<u>Exemplo</u>**: jogar uma moeda
    - 2 saídas possíveis: cara ou coroa




  - **<u>Exemplo</u>**: selecionar uma carta de um baralho
    - 52 possibilidades

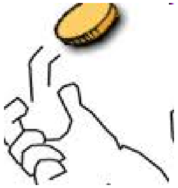
Quantificando informação

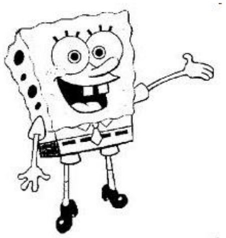
Quão compactamente Alice pode contar a Bob a saída de alguma dessas situações?



Quantificando informação

- Jogando uma moeda

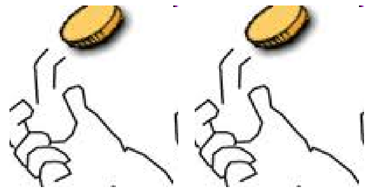


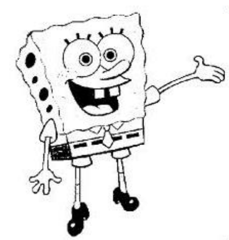


  - Meios para Alice comunicar a Bob o resultado:
    - Todos devem transmitir a mesma quantidade de informação, para falar cara ou coroa (ou 0 ou 1)
      - Informação transmitida é um bit

Quantificando informação

- Jogando duas moedas





  - Para falar uma das quatro possibilidades:
    - Falar 0 ou 1 duas vezes (2 bits)
  - Experimento com oito possibilidades
    - Pode ser transmitido com 3 bits
  - 2^n possibilidades: n bits

Na matemática, **logaritmo binário** ($\log_2 n$) é o logaritmo de base 2. Consequentemente, é o inverso da potência de dois (2^n). O logaritmo binário de n é definido pela seguinte equivalência:[1]

$$x = \log_2 n \quad \Longleftrightarrow \quad 2^x = n.$$

Transmitindo informação

- Transmissão de informação requer duas fases:
  - **Fase *setup***:
    - Alice e Bob concordam sobre o que vão comunicar
    - E o que cada sequência de bits significa
      - **Código**
        - » Exemplo: transmitir naipe de uma carta de um baralho

Transmitindo informação

♥	00	Copas
♦	01	Ouros
♠	10	Espada
♣	11	Paus

Transmitindo informação

- Transmissão de informação requer duas fases:
  - **<u>Fase de comunicação</u>**:
    - Envio das sequências de 0 e 1
      - Dos **<u>dados</u>**

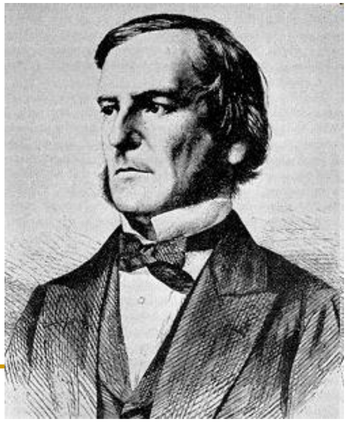
Resumindo

- Informação pode ser perdida
  - Por perda dos dados
  - Por perda do código

- Forma física de informação está localizada no tempo e espaço
  - Informação pode ser enviada de um local para outro
  - Informação pode ser armazenada e recuperada depois

O bit matemático

- Informação pode ser comunicada por sequências de valores 0 e 1
  - Abstração permite ignorar detalhes de sistemas de processamento e transmissão específicos
- Bits são simples e matemática para manipulá-los não é difícil
  - Álgebra Booleana
    - George Boole (1815-1864)



Benefícios codificação binária

- Favorece a transmissão e armazenagem da informação em forma de níveis de voltagem
- Existem códigos corretores de erro que evitam perdas da informação (exemplo: código de controle dos cartões VISA)
- Permite conversão A-D e D-A
- A codificação binária permite facilmente as operações aritméticas e as operações booleanas (lógicas)

Álgebra Booleana

- Alguns comandos de programação estão estreitamente relacionados com um sistema de álgebra, chamado **álgebra de Boole**, desenvolvido por George Boole
- Neste tipo de álgebra podemos operar sobre proposições (todo o enunciado do qual se pode afirmar que é verdadeiro ou falso - Sim ou Não) que podem ser verdadeiras ou falsas, resultando em um resultado que também é verdadeiro ou falso

Álgebra Booleana

- Em 1930, Turing mostrou que 3 funções lógicas (**AND**, **OR** e **NOT**) são suficientes para representar estas proposições lógicas
- Uma das principais vantagens deste tipo de álgebra é que ela pode ser implementada eficientemente através de componentes eletrônicos

Álgebra

- **Álgebra** é ramo que estuda as generalizações dos conceitos e operações de aritmética
  - **Aritmética** é o ramo que lida com números e com as operações possíveis entre eles

Álgebra

- Lida com:
  - Variáveis que possuem certos valores possíveis
  - Funções que, recebendo uma ou mais variáveis, retornam um resultado
    - Que novamente possui certos valores possíveis

Álgebra Booleana: valores possíveis são 0 e 1

Álgebra Booleana

- Funções de uma variável:
  - Identidade (IDENTITY): retorna o argumento
  - Negação (NOT): inverso, complemento
  - Zero (ZERO): retorna 0, independente do argumento
  - Um (ONE): retorna 1, independente do argumento

Álgebra Booleana

x	*f*(*x*)			
Argumento	IDENTITY	NOT	ZERO	ONE
0	0	1	0	1
1	1	0	0	1

Mais simples que álgebra de inteiros ou reais, que possui muitas mais funções de uma variável

Álgebra Booleana

Operação NOT

A operação NOT (cujo operador pode ser uma barra horizontal sobre o símbolo da variável), é aplicável a uma única variável

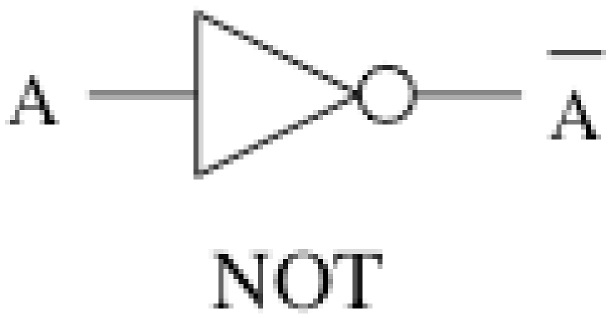
Ela é expressa por:

NOT A = $\overline{A}$

Álgebra Booleana

- A operação NOT inverte o valor da variável
- Ela resulta “Verdadeiro” se a variável assume o valor “Falso” e resulta “Falso” se a variável assume o valor “Verdadeiro”

A	NOT A
1	0
0	1



Representação de circuito lógico

Álgebra Booleana

- **Operação AND**
  - Operação AND, cujo operador é representado por “ · ”, pode ser aplicada a duas ou mais variáveis (que podem assumir apenas os valores “Verdadeiro” ou “Falso” / “1” ou “0”)
  - A operação AND aplicada às variáveis A e B é expressa por:
  - $A \text{ AND } B = A \cdot B$

Álgebra Booleana

- **Operação AND**
  - A operação AND resulta "Verdadeiro" se e apenas se os valores de ambas as variáveis A e B assumirem o valor "Verdadeiro"

A	B	A AND B
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Representação de circuito lógico

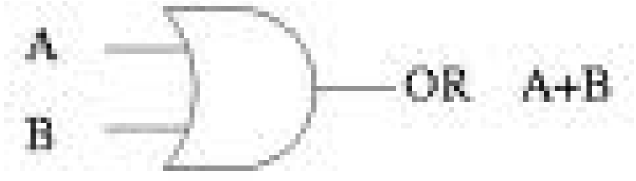
Álgebra Booleana

- **Operação OR**
  - Operação OR, cujo operador é “+” (sinal gráfico da adição), também pode ser aplicada a duas ou mais variáveis (que podem assumir apenas os valores “Verdadeiro” ou “Falso”)
  - A operação OR aplicada às variáveis A e B é expressa por:
  - A OR B = A + B

Álgebra Booleana

- **Operação OR**
  - A operação OR resulta “Verdadeiro” se o valor de qualquer uma das variáveis A ou B assumir o valor “Verdadeiro”

A	B	A OR B
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0



Representação de circuito lógico

Álgebra Booleana

- De três operações fundamentais (AND, OR e NOT) podem ser derivadas mais três operações adicionais, as operações **NAND**, **NOR** e **XOR** (ou OR exclusivo)
- A operação **NAND** é obtida a partir da combinação das operações NOT e AND, negando resultados do AND
- A operação NAND resulta “Falso” se e apenas se os valores de ambas as variáveis A e B assumirem o valor “Verdadeiro

Álgebra Booleana

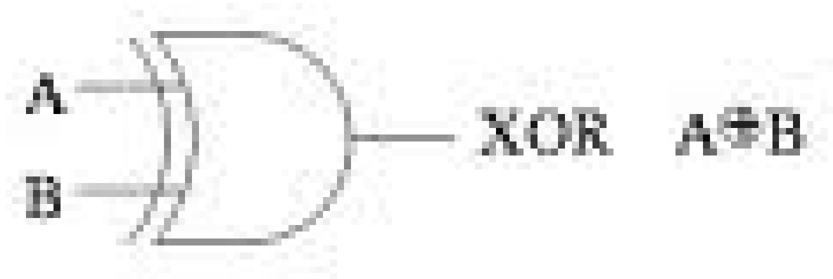
- A operação **NOR** é obtida a partir da combinação das operações NOT e OR, negando resultados do OR
- A operação **NOR** resulta “Verdadeiro” se e apenas se os valores de ambas as variáveis A e B assumirem o valor “Falso”

Álgebra Booleana

- A operação, **XOR** ou "Ou exclusivo" é um caso particular da função OR. Ela é expressa por:
- A XOR B
- A operação XOR resulta “Verdadeiro” se e apenas se exclusivamente uma das variáveis A ou B assumir o valor “Verdadeiro”

Álgebra Booleana

- Uma outra forma, talvez mais simples, de exprimir a mesma ideia é: a operação XOR resulta “Verdadeiro” quando os valores da variáveis A e B forem diferentes entre si e resulta “Falso” quando forem iguais

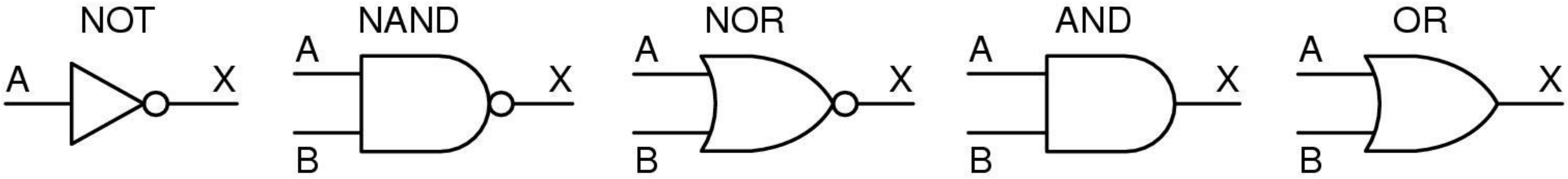


Representação de circuito lógico

Álgebra Booleana

Resumo das tabelas-verdade

A	B	NOT A	A OR B	A AND B	A NOR B	A NAND B	A XOR B
1	1	0	1	1	0	0	0
1	0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	1	0	0	1	1
0	0	1	0	0	1	1	0



A	X
0	1
1	0

(a)

A	B	X
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

(b)

A	B	X
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

(c)

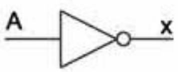
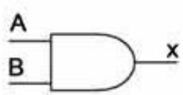
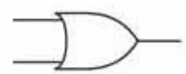
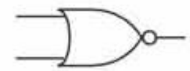
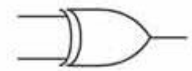
A	B	X
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

(d)

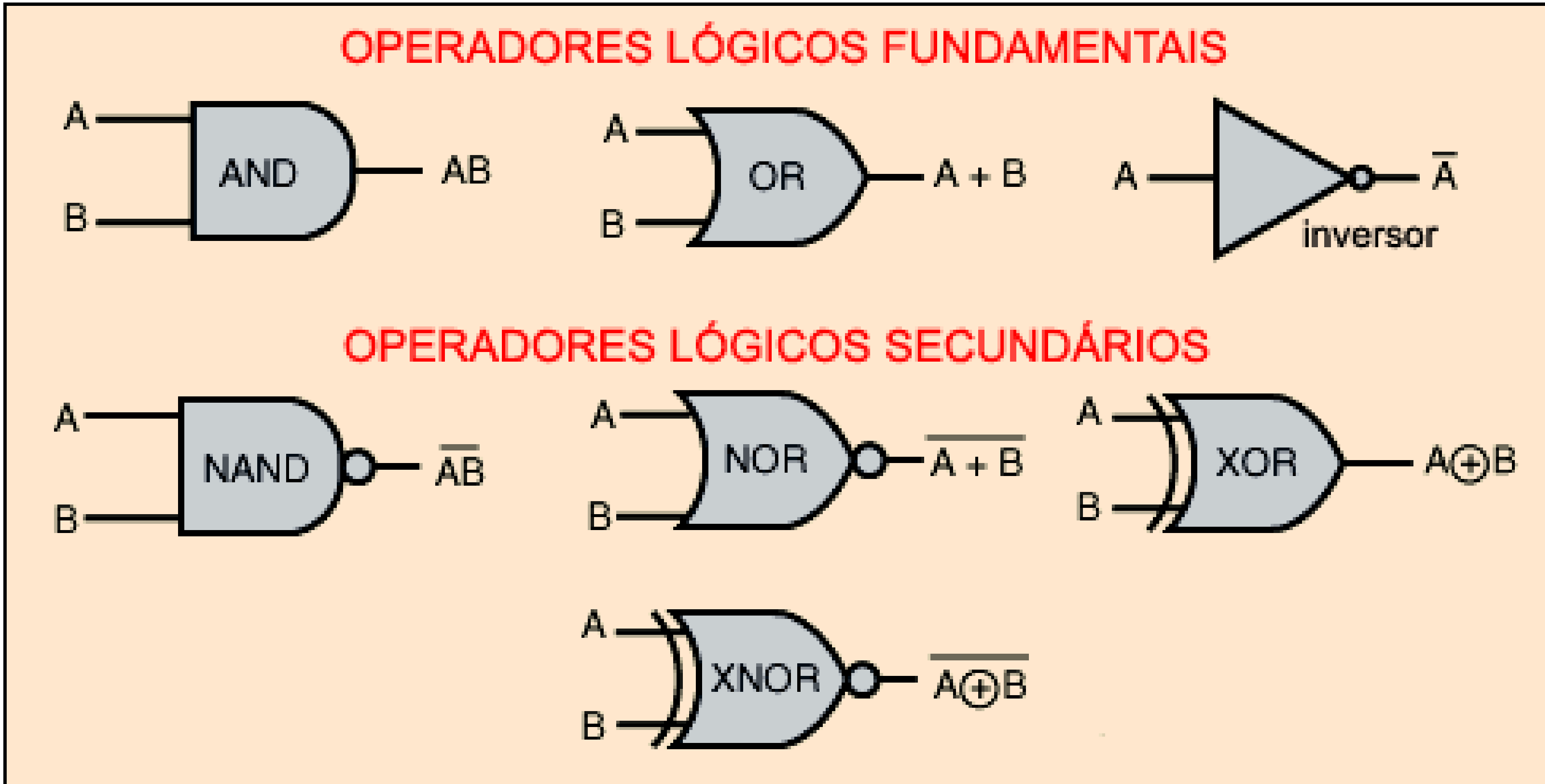
A	B	X
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

(e)

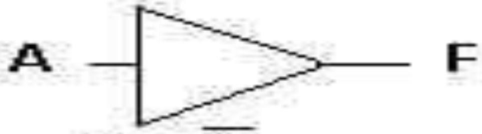
Álgebra Booleana

Name	NOT	AND	NAND	OR	NOR	XOR	XNOR
Alg. Expr.	$\overline{A}$	AB	$\overline{AB}$	$A+B$	$\overline{A+B}$	$A \oplus B$	$\overline{A \oplus B}$
Symbol							
Truth Table	A X 0 1 1 0	B A X 0 0 0 0 1 0 1 0 0 1 1 1	B A X 0 0 1 0 1 1 1 0 1 1 1 0	B A X 0 0 0 0 1 1 1 0 1 1 1 1	B A X 0 0 1 0 1 0 1 0 0 1 1 0	B A X 0 0 0 0 1 1 1 0 1 1 1 0	B A X 0 0 1 0 1 0 1 0 0 1 1 1

Álgebra Booleana



Álgebra Booleana

Nome	Símbolo	Entradas A	Entradas B	Saídas F
E (AND)	 $F = A . B$	0 0 1 1	0 1 0 1	0 0 0 1
OU (OR)	 $F = A + B$	0 0 1 1	0 1 0 1	0 1 1 1
INVERSORA (NOT)	 $F = \overline{A}$	0 1		1 0
NÃO E (NAND)	 $F = \overline{A . B}$	0 0 1 1	0 1 0 1	1 1 1 0
NÃO OU (NOR)	 $F = \overline{A + B}$	0 0 1 1	0 1 0 1	1 0 0 0
OU EXCLUSIVO (XOR)	 $F = A \oplus B = \overline{A}B + A\overline{B}$	0 0 1 1	0 1 0 1	0 1 1 0

Álgebra Booleana

- Propriedades de funções:
  - *Reversibilidade*: sabendo saída, pode encontrar entrada
    - NOT, IDENTITY
    - Nenhuma das de duas variáveis
  - Para duas variáveis:
    - *Idempotência, Absorção, Complementariedade, Associativa, Mínimo/Máximo,Comutativa, De Morgan, Distributiva*

Idempotência	$A \cdot A = A$	$A + A = A$
Absorção	$A \cdot (A + B) = A$	$A + (A \cdot B) = A$
Complementariedade	$A \cdot \overline{A} = 0$ $A + \overline{A} = 1$	$A \oplus A = 0$ $A \oplus \overline{A} = 1$
Associativa	$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$ $A + (B + C) = (A + B) + C$	$A \oplus (B \oplus C) = (A \oplus B) \oplus C$
Mínimo	$A \cdot 1 = A$	$A \cdot 0 = 0$
Máximo	$A + 0 = A$	$A + 1 = 1$
De Morgan	$\overline{A} \cdot \overline{B} = \overline{A + B}$	$\overline{A} + \overline{B} = \overline{A \cdot B}$
Comutativa	$A \cdot B = B \cdot A$ $A + B = B + A$	$A \oplus B = B \oplus A$ $\overline{A \cdot B} = \overline{B \cdot A}$ $\overline{A + B} = \overline{B + A}$
Distributiva	$A \cdot (B + C) = (A \cdot B) + (A \cdot C)$	$A + (B \cdot C) = (A + B) \cdot (A + C)$

Provando as equivalências lógicas

Lei da Absorção

- $A + (A \cdot B) = A$

A	B	$A \cdot B$	$A + (A \cdot B)$
0	0	0	0
0	1	0	0
1	0	0	1
1	1	1	1

A expressão
$A + (A \cdot B)$
é verdadeira
quando A é
verdadeira.
Portanto,
equivale a A

Álgebra Booleana

- Outras notações:
  - **AND**:
    - $A \cdot B$
    - AND(A,B)
    - $A \wedge B$
  - **OR**:
    - $A + B$
    - OR(A,B)
    - $A \vee B$
  - **NOT**:
    - $\overline{A}$
    - NOT(A)
    - ~A
    - $\neg A$

Exercícios

Qual a equação booleana equivalente aos circuitos lógicos abaixo: