BC0209–Fenômenos Eletromagnéticos

Segundo quadrimestre de 2016

Prof. José Kenichi Mizukoshi

Aula 14 (versão 18/07/2015)

A Lei de Biot-Savart. Força magnética entre dois condutores paralelos.

A Lei de Àmpere.

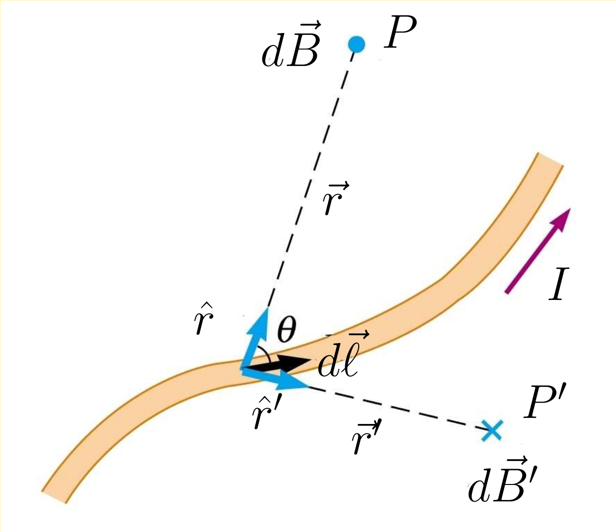
A Lei de Biot-Savart; Força Magnética entre Dois Condutores Paralelos; A Lei de Àmpere

Campo magnético de uma corrente e a lei de Biot-Savart

- Considere um fio conduzindo uma corrente I. O campo magnético num ponto P, gerado por uma carga infinitesimal dq distribuída em um comprimento infinitesimal $d\ell$ do fio é dado por

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{dq\vec{v} \times \hat{r}}{r^2}$$

onde v é a velocidade da carga dq.



- Temos que

$$\vec{v} = \frac{d\vec{\ell}}{dt} \quad \Rightarrow \quad dq\vec{v} = dq\frac{d\vec{\ell}}{dt} = \frac{dq}{dt}d\vec{\ell} \quad \Rightarrow \quad dq\vec{v} = Id\vec{\ell}$$

- Substituindo o resultado acima na expressão do campo magnético, obtemos a **lei de Biot-Savart**:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Id\vec{\ell} \times \hat{r}}{r^2}$$

Campo magnético de uma corrente e a lei de Biot-Savart

- Para se obter o campo magnético total devido a corrente no pedaço de fio finito, é preciso integrar sobre todos os elementos $d\vec{\ell}$. Contudo, numa situação mais geral o termo $\dfrac{Id\vec{\ell} \times \hat{r}}{r^2}$ pode mudar tanto em magnitude como na direção e sentido, portanto para encontrar o campo magnético total deve-se escrever $d\vec{B}$ em termos de suas componentes antes de fazer a integração (lembre-se que integrar é somar e estamos fazendo uma soma vetorial).

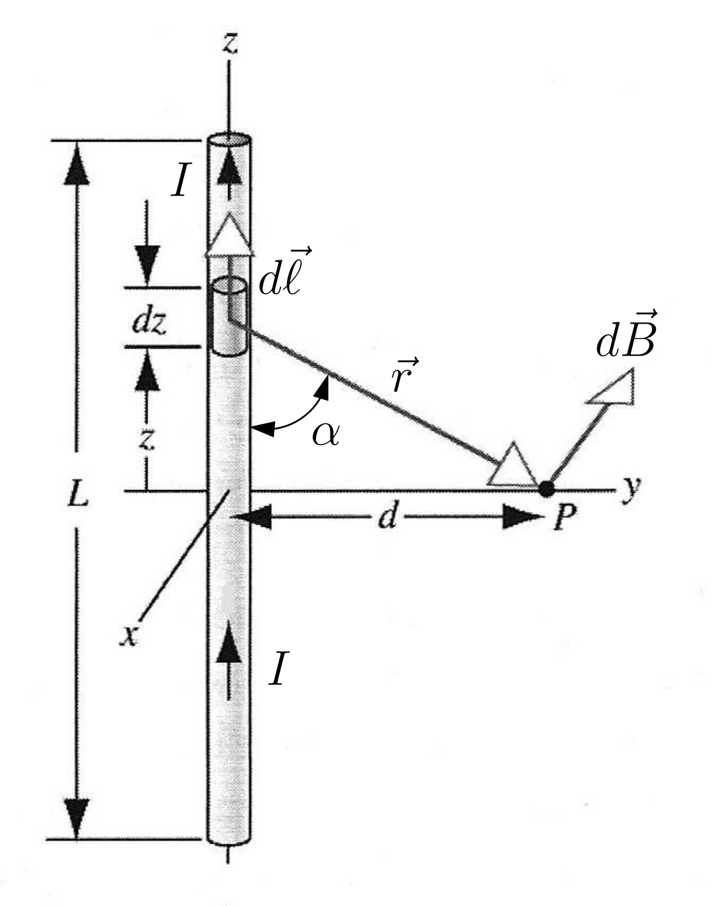
  Em coordenadas cartesianas,

$$\int d\vec{B} = \int dB_x\,\hat{\imath} + \int dB_y\,\hat{\jmath} + \int dB_z\,\hat{k}$$

A lei de Biot-Savart: exemplo

Ex. 1 Calcule o campo magnético em um ponto P (veja figura) devido à uma corrente uniforme num segmento de fio reto, de comprimento L.

Solução



- O campo magnético infinitesimal devido ao segmento $d\ell$ do fio, no ponto P, é dado por

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I d\vec{\ell} \times \hat{r}}{r^2}$$

Em termos das coordenadas cartesianas adotadas na figura ao lado,

$$d\vec{\ell} = dz\,\hat{k}$$

$$\vec{r} = r[\,\text{sen}\,\alpha\,\hat{\jmath} - \cos\alpha\,\hat{k}]$$

Logo, $d\vec{B} = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{I dz}{r^2}\hat{k} \times [\,\text{sen}\,\alpha\,\hat{\jmath} - \cos\alpha\,\hat{k}]$.

- Fazendo o produto vetorial, segue que

$$d\vec{B} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{\operatorname{sen}\alpha}{r^2}dz\,\hat{\imath} = dB_x\,\hat{\imath}$$

Pela figura da página anterior, $\operatorname{sen}\alpha = \frac{d}{r}$. Como $r = \sqrt{z^2+d^2}$,

$$B_x = \int dB_x = -\frac{\mu_0 I d}{4\pi}\int_{-L/2}^{L/2}\frac{dz}{(z^2+d^2)^{3/2}}$$

- Pode-se mostrar que (veja p. 22)

$$\int_{-L/2}^{L/2}\frac{dz}{(z^2+d^2)^{3/2}} = \left.\frac{z}{d^2\sqrt{z^2+d^2}}\right|_{-L/2}^{L/2} = \frac{L}{d^2\sqrt{(L/2)^2+d^2}}$$

Temos portanto que $$\boxed{B_x = -\frac{\mu_0 I}{4\pi d}\frac{L}{\sqrt{(L/2)^2+d^2}}}$$

Qual o campo magnético no limite em que o fio é infinito ($L \gg d$)?

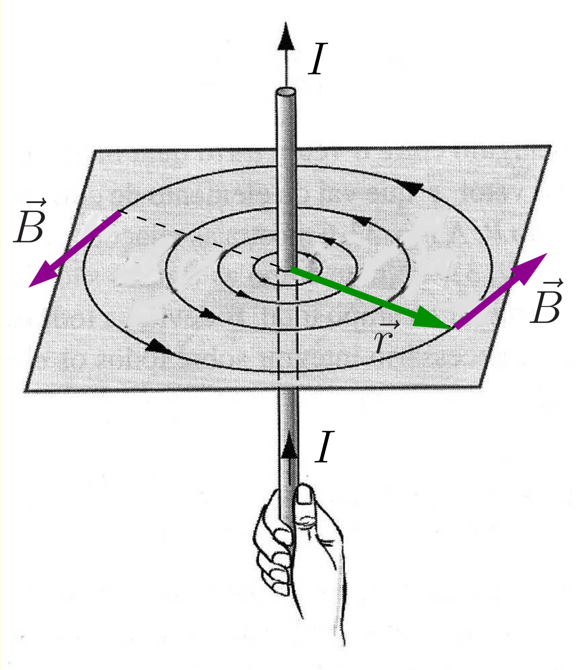
Solução Neste limite, o campo é dado por

$$B_x = -\frac{\mu_0 I}{4\pi d} \overbrace{\frac{L}{(L/2)\sqrt{1+(2d/L)^2}}}^{\approx 2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{B_x \approx -\frac{\mu_0 I}{2\pi d}}$$

- O campo magnético em qualquer ponto, a uma distância r do fio infinito é dado por

  $$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\,\hat{\theta}$$

  onde $\hat{\theta}$ é a direção tangencial ao círculo de raio r, com o sentido estabelecido pela "regra da mão direita".



Ex. 2 Calcule o campo magnético no ponto P (veja a figura) de uma espira de raio R, conduzindo uma corrente I.

Solução

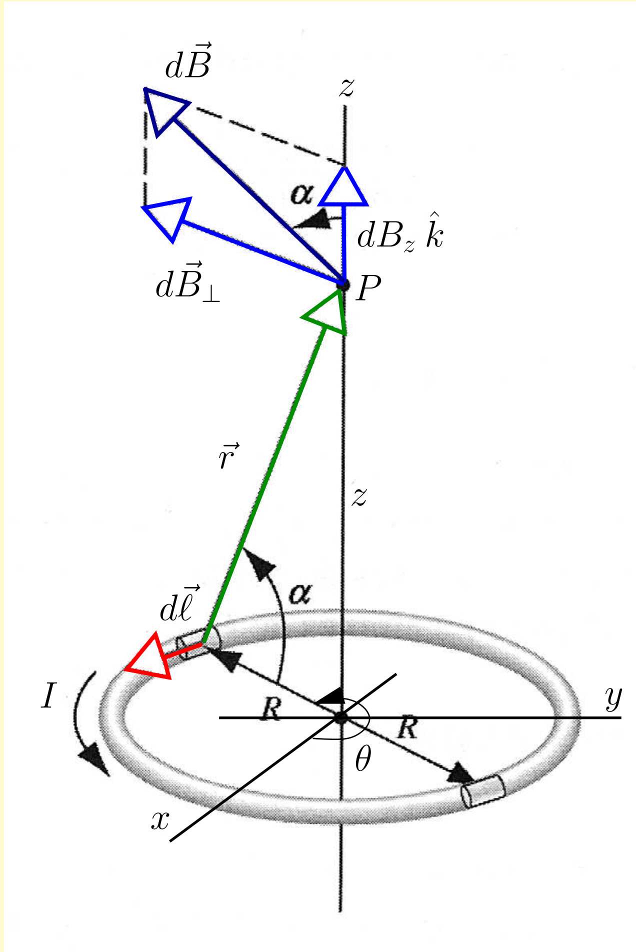
- O campo magnético no ponto P sobre o eixo z, que passa pelo centro da espira, devido ao elemento $d\vec{\ell}$ é

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I d\vec{\ell} \times \vec{r}}{r^3}$$

- Observa-se que, por simetria, a integração na componente $d\vec{B}_\perp$ se anula. Logo, o campo magnético total em P é a integração da componente z, dada por

$$B_z = \int |d\vec{B}| \cos\alpha; \qquad \cos\alpha = \frac{R}{r}$$

onde $r = \sqrt{R^2 + z^2}$.



A lei de Biot-Savart: exemplo

Como $\vec{r} \perp d\vec{\ell}$, temos que $|d\vec{\ell} \times \vec{r}| = r d\ell$, onde $d\ell = R d\theta$. Portanto,

$$B_z = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{IR^2}{(z^2+R^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} d\theta \quad \Rightarrow \quad \boxed{B_z = \frac{\mu_0 I R^2}{2(z^2+R^2)^{3/2}}}$$

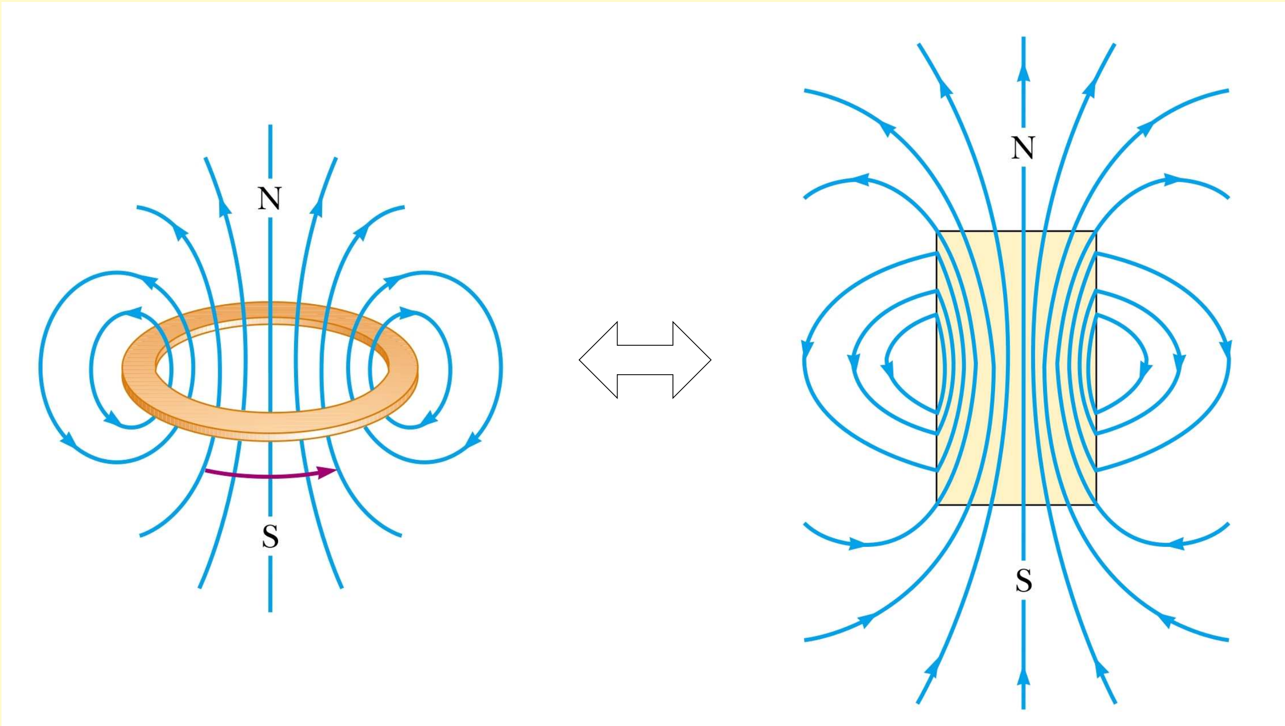
- Temos os seguintes resultados particulares:
  - Campo magnético no centro da espira ($z = 0$): $\boxed{B_z = \frac{\mu_0 I}{2R}}$.
  - Campo magnético longe da espira ($z \gg R$). Como

$$\frac{1}{(z^2+R^2)^{3/2}} = \frac{1}{z^3} \frac{1}{(1+(R/z)^2)^{3/2}} \approx \frac{1}{z^3}$$

tem-se que $\boxed{B_z \approx \frac{\mu_0 I R^2}{2z^3}}$.

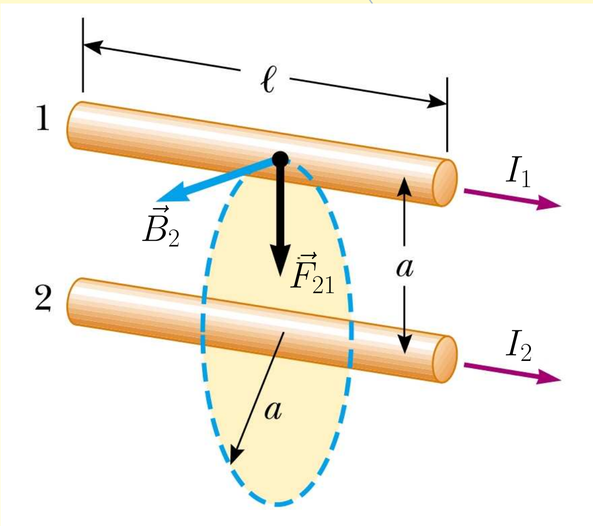
A lei de Biot-Savart: exemplo

- Para distâncias grandes, a espira pode ser aproximada como um **dipolo magnético**.



Força magnética entre duas correntes paralelas/anti-paralelas

- Considere dois fio infinitamente longos, retos e paralelos, separados por uma distância a e conduzindo correntes elétricas I_1 e I_2, nos sentidos mostrados na figura ao lado.



- A corrente no fio 2 produz um campo magnético $\vec{B}_2$ na região do fio 1. Devido à corrente no fio 1, este sente uma força $\vec{F}_{21}$ para baixo.

- Para um fio de comprimento ℓ, tem-se que o módulo da força é

$$F_{21} = I_1 \ell B_2$$

Como para o fio "infinito" $B_2 = \dfrac{\mu_0 I_2}{2\pi a}$, tem-se que a força por unidade de comprimento é

$$\frac{F_{21}}{\ell} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi a}$$

Força magnética entre duas correntes paralelas/anti-paralelas

- Similarmente à força $\vec{F}_{21}$ sentida pelo fio 1, o fio 2 irá sentir a força $\vec{F}_{12}$ para cima, de mesmo módulo, tal que

$$\vec{F}_{21} + \vec{F}_{12} = 0$$

  ou seja, as duas forças formam um par ação-reação e serão atrativas.

- Por definição, a corrente $I = I_1 = I_2 = 1$ A, se $F_{21}/\ell = 2 \times 10^{-7}$ N/m para $a = 1$ m.

- Caso se inverta o sentido de uma das correntes, haverá inversão no sentido das duas forças, portanto elas se tornam mutuamente repulsivas.

  Temos portanto que

  - Se as correntes são paralelas, os fios se atraem;
  - Se as correntes são anti-paralelas, os fios se repelem.

A lei de Ampère

- Embora se possa utilizar a lei de Biot-Savart para calcular o campo magnético devido à uma dada distribuição de corrente, existe uma lei mais fundamental – conhecida como **a lei de Ampère**, que pode ser útil quando a distribuição apresenta uma simetria.

- A lei de Ampère é dada por

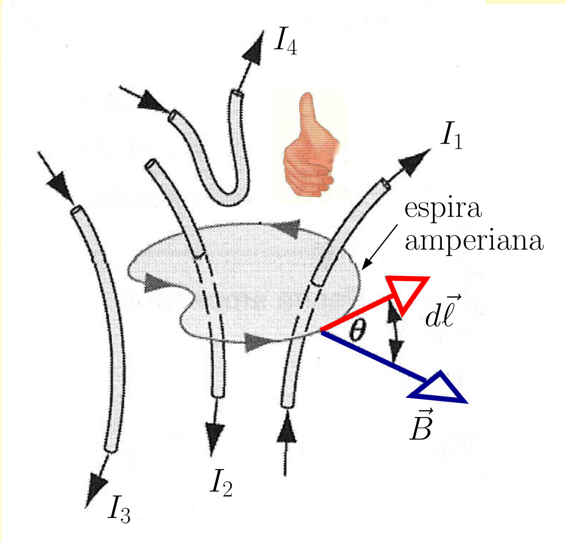
$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I$$

onde o símbolo $\oint$ é uma <u>integral de linha de um circuito fechado</u>, conhecido como **espira amperiana**, e I é a <u>corrente total constante</u> que atravessa qualquer superfície limitada por essa espira.

  - A espira amperiana é um "circuito abstrato" fechado e não tem nenhuma relação com uma espira física.
  - O sinal da corrente é determinado pela "regra da mão-direita", conforme o exemplo ilustrativo a seguir.

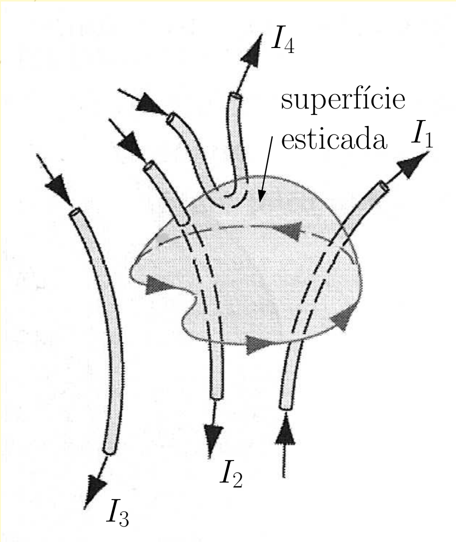
- Considere a superfície plana limitada pela espira amperiana, mostrada na figura ao lado. A corrente total é $I = I_1 - I_2$. Logo,

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0(I_1 - I_2)$$



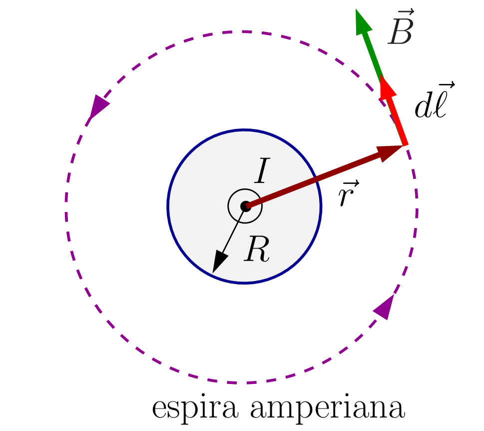
- Para a mesma espira amperiana, se tomarmos a superfície esticada, a corrente total será $I' = I_1 - I_2 + I_4 - I_4 = I$.

  ➡ Resultado independe da escolha da superfície, desde que esta esteja limitada pela mesma espira amperiana.



Ex. 3 Considere um fio cilíndrico de raio R, conduzindo uma corrente I uniformemente distribuída ao longo da seção transversal (densidade de corrente j uniforme). Calcule o campo magnético dentro e fora do cilindro.

Solução



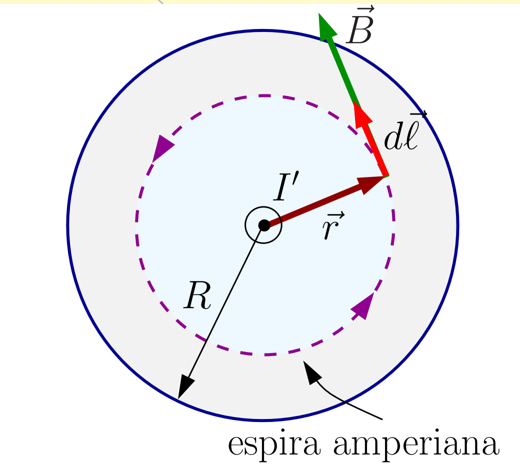
- O campo magnético fora do cilindro, a uma distância r do seu centro, pode ser obtida pela lei de Ampère,

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I$$

Por simetria, as linhas de campo são circulares, concêntricas ao eixo do cilindro. Logo, escolhemos como espira amperiana um círculo de raio r, concêntrico ao cilindro. Nesta espira, $\vec{B} \parallel d\vec{\ell}$ e $|\vec{B}|$ é constante. Logo,

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \oint B d\ell = B \oint d\ell = B 2\pi r = \mu_0 I \quad \Rightarrow \quad \boxed{B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}} \quad (r > R)$$

- Campo magnético dentro do cilindro, a uma distância r do seu centro. Pela lei de Ampère,



$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I'$$

onde a integração se dá pela espira amperiana de raio $r < R$ e I' é a corrente que passa pela superfície delimitada por essa espira.

Como a densidade de corrente é constante,

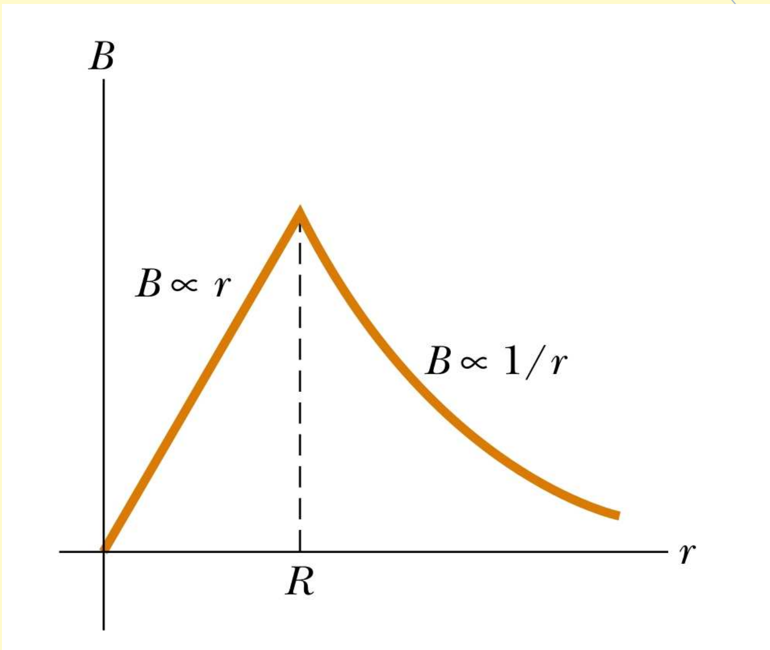
$$j = \frac{I}{\pi R^2} = \frac{I'}{\pi r^2} \quad \Rightarrow \quad I' = I\left(\frac{r}{R}\right)^2$$

O cálculo da integral acima é similar ao caso $r > R$, portanto segue que

$$\boxed{B(r) = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2}} \quad (r < R)$$

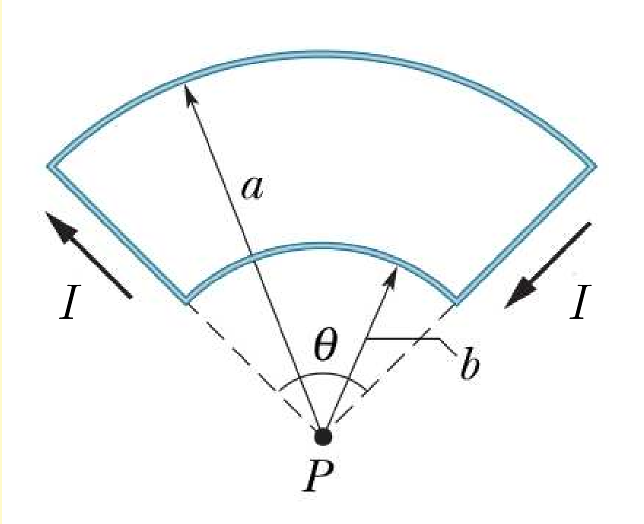
A lei de Ampère: exemplo

- Gráfico da intensidade do campo magnético em função da distância



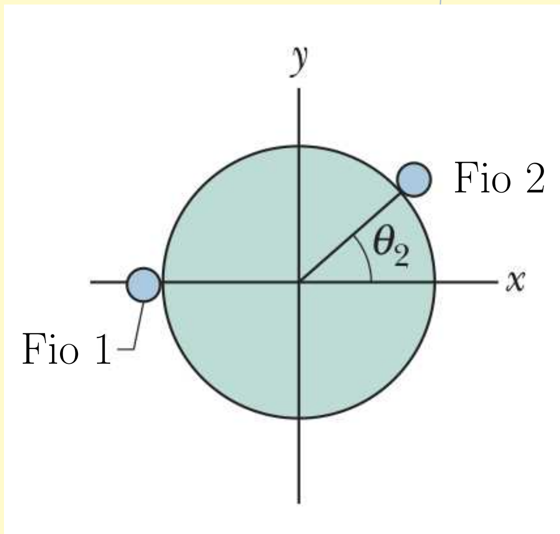
Problemas Propostos

P1 Na Fig. ao lado, dois arcos circulares possuem raios a e b, subtendem um ângulo θ, conduzem uma corrente I e compartilham o mesmo centro de curvatura P. Qual é a magnitude, direção e sentido do campo magnético resultante no ponto P?



Resp. $B = \dfrac{\mu_0 I\theta}{4}\left(\dfrac{1}{b} - \dfrac{1}{a}\right)$, com direção perpendicular ao plano da espira, apontando para fora da página.

P2 A Fig. ao lado mostra, em seção transversal, dois fios retos e muito longos mantidos junto a um cilindro de plástico de raio 20,0 cm. O fio 1 conduz uma corrente $I_1 = 60{,}0$ mA no sentido para fora da página e é mantido fixo à esquerda do cilindro. O fio 2 conduz uma corrente $I_2 = 40{,}0$ mA, também para fora da página e pode ser movido em torno do cilindro. Em que ângulo θ_2 (positivo) deveria ser posicionado o fio 2 tal que, na origem, o campo magnético líquido devido às duas correntes possua magnitude de 80,0 nT?



Resp. $\theta_2 = 104°$.

Material suplementar

Integral do cálculo do campo magnético do fio finito

- O objetivo é calcular a seguinte integral (r constante):

$$A = \int_{-L/2}^{L/2} \frac{dz}{(z^2 + r^2)^{3/2}}$$

- Vamos fazer a substituição trigonométrica $z = r\,\mathrm{tg}\,\theta$. Com isto,

$$dz = r\,d\,\mathrm{tg}\,\theta = r\left(1 + \frac{\mathrm{sen}^2\theta}{\cos^2\theta}\right)d\theta = \frac{r}{\cos^2\theta}d\theta$$

Os limites da integração ficam

$$\theta_{\max,\min} = \mathrm{arctg}\left(\pm\frac{L}{2r}\right)$$

- Segue que

$$A = \int_{\theta_{\min}}^{\theta_{\max}} \frac{1}{r^3\left(\operatorname{tg}^2\theta + 1\right)^{3/2}} \frac{r}{\cos^2\theta} d\theta = \frac{1}{r^2}\int_{\theta_{\min}}^{\theta_{\max}} \cos\theta d\theta$$

$$= \frac{1}{r^2}\left(\operatorname{sen}\theta_{\max} - \operatorname{sen}\theta_{\min}\right)$$

- Para $\theta = \theta_{\min}$, temos que

$$\operatorname{tg}\theta_{\min} = -\frac{L}{2r} = \frac{\operatorname{sen}\theta_{\min}}{\cos\theta_{\min}} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{sen}^2\theta_{\min} = \left(\frac{L}{2r}\right)^2 \cos^2\theta_{\min}$$

Fazendo $\cos^2\theta_{\min} = 1 - \operatorname{sen}^2\theta_{\min}$ e resolvendo para seno, lembrando que $\operatorname{sen}\theta_{\min} < 0$ (Por quê?)

$$\operatorname{sen}\theta_{\min} = \frac{-L/2r}{\left[1 + \left(\frac{L}{2r}\right)^2\right]^{1/2}}$$

Integral do cálculo do campo magnético do fio finito

- Analogamente,

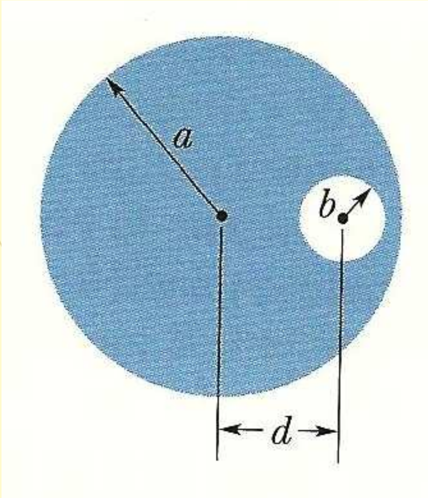
$$\operatorname{sen}\theta_{\max} = \frac{+L/2r}{\left[1+\left(\frac{L}{2r}\right)^2\right]^{1/2}}$$

de forma que

$$A = \frac{1}{r^2} 2 \frac{L/2r}{\left[1+\left(\frac{L}{2r}\right)^2\right]^{1/2}} \quad \Rightarrow \quad A = \int_{-L/2}^{L/2} \frac{dz}{(z^2+r^2)^{3/2}} = \frac{L}{r^2\sqrt{(L/2)^2+r^2}}$$

- Observa-se que neste caso θ pode ser associado a um ângulo físico, ao invés de ser somente uma variável de integração. Observa-se pela Fig. da p. 5, que ele é oposto ao α. Temos que $\theta = \pi/2 - \alpha$.

Ex. 4 A figura ao lado mostra uma seção reta de um condutor cilíndrico longo de raio $a = 4{,}00$ cm que contém um furo cilíndrico de raio $b = 1{,}50$ cm. Os eixos centrais do cilindro e do furo são paralelos e estão separados por uma distância $d = 2{,}00$ cm; uma corrente $I = 5{,}25$ A está distribuída uniformemente na região sombreada. Determine o módulo do campo magnético no centro do furo.



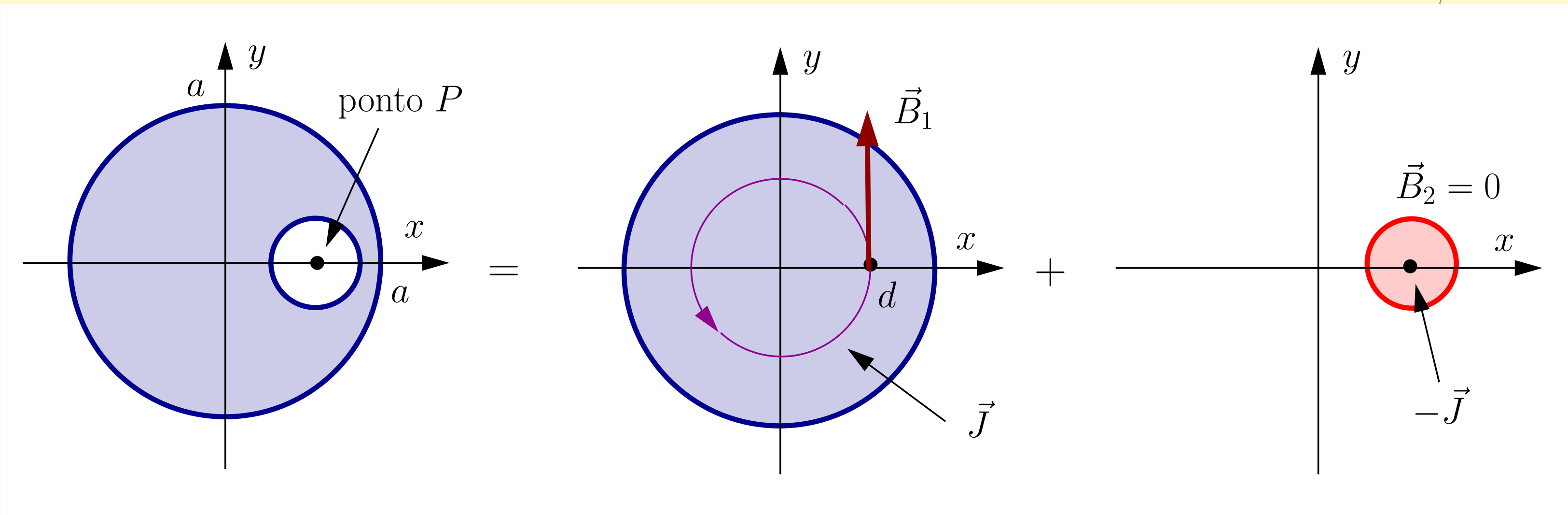
Solução

- Como a corrente está distribuída uniformemente, a densidade de corrente j é dada por

$$J = \frac{I}{\pi(a^2 - b^2)}$$

A lei de Ampère: exemplo

- O condutor com furo pode ser modelado como uma superposição de um cilindro maciço de raio a e densidade de corrente $\vec{J}$, com um cilindro maciço de raio b e densidade de corrente $-\vec{J}$, cujos eixos estão separados por uma distância d:



- O campo magnético no ponto B é dado por

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2$$

A lei de Ampère: exemplo

Podemos utilizar a lei de Ampère para calcular os campos $\vec{B}_1$ e $\vec{B}_2$.

- Para o campo $\vec{B}_1$,

$$\oint \vec{B}_1 \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I',$$

onde $I' = J\pi d^2 = \dfrac{Id^2}{a^2 - b^2}$. Segue que $B_1 = \dfrac{\mu_0 I d}{2\pi(a^2 - b^2)}$.

- Como o ponto P está localizado no eixo do cilindro de raio b, $B_2 = 0$.

Portanto,

$$B = \frac{\mu_0 I d}{2\pi(a^2 - b^2)} = \frac{4\pi \times 10^{-7}\ \text{T} \cdot \text{m/A} \times 5{,}25\ \text{A} \times 2{,}00 \times 10^{-2}\ \text{m}}{2\pi(4{,}00^2 - 1{,}50^2) \times 10^{-4}\ \text{m}^2}$$

$$\therefore \quad \boxed{B = 15{,}3\ \mu\text{T}}$$

Referências

- R. A. Serway, e J. W. Jewett Jr., *Princípios de Física, Vol. 3*, Cengage Learning;
- D. Halliday, R. Resnick e K. S. Krane, *Física, Vol. 3*, LTC;