4-1 OPERAÇÕES E EXPRESSÕES BOOLEANAS

A álgebra Booleana é a matemática dos sistemas digitais. Um conhecimento básico da álgebra Booleana é indispensável para o estudo e análise de circuitos lógicos. No capítulo anterior, as operações Booleanas em termos de suas relações com as portas NOT, AND, OR, NAND e NOR foram introduzidas.

Ao final do estudo desta seção você deverá ser capaz de:

■ Definir variável ■ Definir literal ■ Identificar um termo-soma ■ Calcular um termo-soma ■ Identificar um termo-produto ■ Calcular um termo-produto ■ Explicar a adição Booleana ■ Explicar a multiplicação Booleana

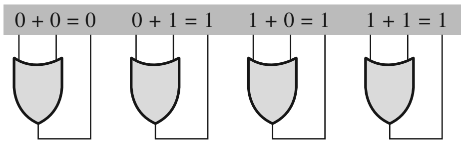
NOTA: COMPUTAÇÃO

Em um microprocessador, a unidade lógica e aritmética (ALU – *arithmetic logic unit*) realiza operações lógicas Booleanas e aritméticas sobre dados digitais conforme determinado pelas instruções do programa. As operações lógicas são equivalentes às operações das portas básicas as quais estamos familiarizados, porém realizadas com um mínimo de 8 bits de cada vez. AND, OR, NOT e EX-OR são exemplos de instruções lógicas Booleanas, as quais são denominadas de mnemônicos. Um programa em linguagem assembly usa mnemônicos para especificar uma operação. Um outro programa denominado de *assembler* traduz os mnemônicos num código binário que pode ser entendido pelo microprocessador.

Os termos *variável*, *complemento* e *literal* são usados em álgebra Booleana. Uma **variável** é um símbolo (geralmente uma letra maiúscula em itálico) usado para representar uma grandeza lógica. Qualquer variável simples pode ter um valor 1 ou 0. O **complemento** é o inverso de uma variável e é indicado por uma barra sobre a variável. Por exemplo, o complemento da variável A é $\overline{A}$. Se $A = 1$, então $\overline{A} = 0$. Se $A = 0$, então $\overline{A} = 1$. O complemento de uma variável A é lido como "A negado" ou "A barrado". Algumas vezes é usado um outro símbolo, em vez de uma barra, para indicar o complemento de uma variável; por exemplo, B' indica o complemento de B. Neste livro, é usado apenas a barra sobre a variável. Uma **literal** é a variável ou o complemento de uma variável.

Adição Booleana

Lembre-se, do Capítulo 3, de que a **adição Booleana** é equivalente à operação OR e as regras básicas são ilustradas com suas relações com a porta OR da seguinte forma:



A porta OR é um somador Booleano.

Na álgebra Booleana, um **termo-soma** é uma soma de literais. Em circuitos lógicos, um termo-soma é produzido por uma operação OR sem o envolvimento de operações AND. Alguns exemplos de termos-soma são $A + B$, $A + \overline{B}$, $A + B + \overline{C}$ e $\overline{A} + B + C + \overline{D}$.

Um termo-soma será igual a 1 quando uma ou mais das literais no termo for 1. Um termo-soma será igual a 0 somente se cada uma das literais for 0.

EXEMPLO 4–1

Determine os valores de A, B, C e D que tornam o termo-soma $A + \overline{B} + C + \overline{D}$ igual a 0.

Solução Para o termo-soma ser 0, cada uma das literais tem que ser 0. Portanto, $A = 0$ e $B = 1$, de forma que, $\overline{B} = 0$, $C = 0$ e $D = 1$, de forma que $\overline{D} = 0$.

$$A + \overline{B} + C + \overline{D} = 0 + \overline{1} + 0 + \overline{1} = 0 + 0 + 0 + 0 = 0$$

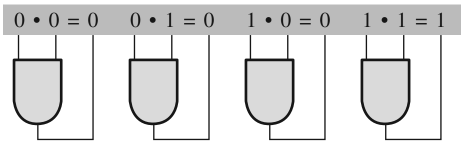
Problema relacionado* Determine os valores de $\overline{A}$ e B que tornam o termo-soma igual a 0.

* As respostas estão no final do capítulo.

Multiplicação Booleana

Lembre-se, também do Capítulo 3, de que a **multiplicação Booleana** é equivalente à operação AND e as regras básicas são ilustradas com as relações com a porta AND a seguir:

A porta AND é um multiplicador Booleano.



Na álgebra Booleana, um **termo-produto** é o produto de literais. Em circuitos lógicos, um termo-produto é produzido por uma operação AND sem o envolvimento de operações OR. Alguns exemplos de termos-produto são AB, $A\overline{B}$, ABC e $A\overline{B}C\overline{D}$.

Um termo-produto é igual a 1 apenas se cada uma das literais no termo for 1. Um termo-produto é igual a 0 quando uma ou mais das literais for 0.

EXEMPLO 4–2

Determine os valores e A, B, C e D que torna o termo-produto $A\overline{B}C\overline{D}$ igual a 1.

Solução Para o termo-produto ser 1, cada uma das literais no termo tem que ser 1. Portanto, $A = 1$, $B = 0$ de forma que $\overline{B} = 1$, $C = 1$ e $D = 0$ de forma que $\overline{D} = 1$.

$$A\overline{B}C\overline{D} = 1 \cdot \overline{0} \cdot 1 \cdot \overline{0} = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$$

Problema relacionado Determine os valores de A e B que tornam o termo-produto $\overline{A}\,\overline{B}$ igual a 1.

SEÇÃO 4–1 REVISÃO

As respostas estão no final do capítulo.

1. Se $A = 0$, qual é o valor de $\overline{A}$?

2. Determine o valor de A, B e C que tornam o termo-soma $\overline{A} + \overline{B} + C$ igual a 0.

3. Determine o valor de A, B e C que tornam o termo-produto $A\overline{B}C$ igual a 1.

4-2 LEIS E REGRAS DA ÁLGEBRA BOOLEANA

Assim como em outras áreas da matemática, existem certas regras bem-desenvolvidas e leis que têm que ser seguidas para aplicar adequadamente a álgebra Booleana. As mais importantes são apresentadas nesta seção.

Ao final do estudo desta seção você deverá ser capaz de:

- Aplicar as leis comutativas da adição e multiplicação
- Aplicar as leis associativas da adição e multiplicação
- Aplicar a lei distributiva
- Aplicar as doze regras básicas da álgebra Booleana

Leis da Álgebra Booleana

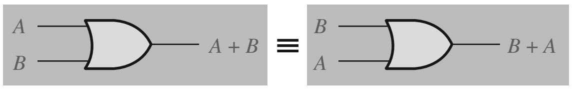
As leis básicas da álgebra Booleana – as **leis comutativas** para a adição e multiplicação, as **leis associativas** para a adição e multiplicação e a **lei distributiva** – são as mesmas que para a álgebra comum. Cada uma das leis está ilustrada com duas ou três variáveis, porém o número de variáveis não é limitado para essas leis.

Lei Comutativa A *lei comutativa da adição* para duas variáveis é escrita da seguinte forma:

Equação 4–1

$$A + B = B + A$$

Essa lei diz que a ordem das variáveis na qual a função OR é aplicada não faz diferença. Lembre-se que, na álgebra Booleana aplicada a circuitos lógicos, a adição e a operação OR são as mesmas. A Figura 4–1 ilustra a lei comutativa aplicada a uma porta OR e mostra que não importa em qual entrada cada variável é aplicada. (O símbolo ≡ significa “equivalente a”).



▶ **FIGURA 4–1**

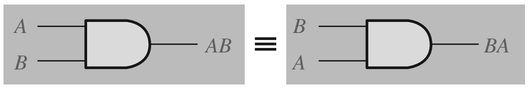
Aplicação da lei comutativa da adição.

A *lei comutativa da multiplicação* para duas variáveis é a seguinte:

Equação 4–2

$$AB = BA$$

Essa lei diz que a ordem das variáveis na qual a operação AND é aplicada não faz diferença. A Figura 4–2 ilustra essa lei aplicada a uma porta AND.



▶ **FIGURA 4–2**

Aplicação da lei comutativa da multiplicação.

Lei Associativa A lei associativa da adição escrita para três variáveis é mostrada a seguir:

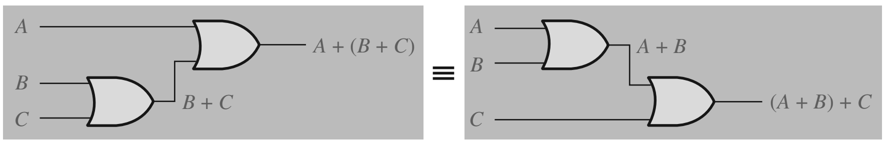
Equação 4–3

$$A + (B + C) = (A + B) + C$$

Essa lei diz que quando é aplicada uma operação OR em mais de duas variáveis, o resultado é o mesmo independente da forma de agrupar as variáveis. A Figura 4–3 ilustra essa lei aplicada em portas OR de 2 entradas.

▶ **FIGURA 4–3**

Aplicação da lei associativa da adição. Abra o arquivo F04-03 para verificar.



A *lei associativa da multiplicação* escrita para três variáveis é mostrada a seguir:

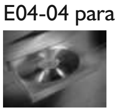
Equação 4–4

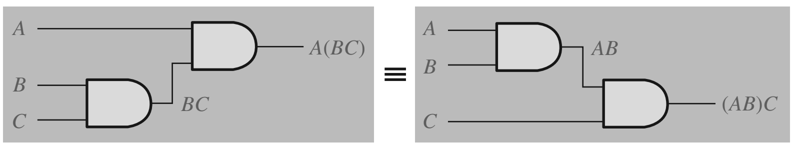
$$A(BC) = (AB)C$$

Essa lei diz que a ordem em que as variáveis são agrupadas não faz diferença quando é aplicada uma operação AND em mais de duas variáveis. A Figura 4–4 ilustra essa lei aplicada a portas AND de 2 entradas.

▶ **FIGURA 4–4**

Aplicação da lei associativa da multiplicação. Abra o arquivo E04-04 para verificar.



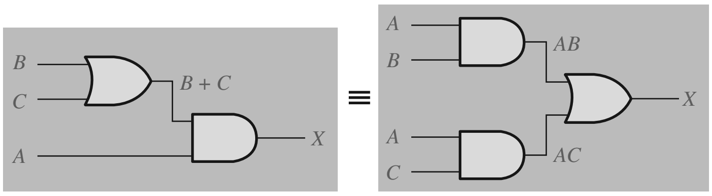


Lei Distributiva A lei distributiva escrita para três variáveis é mostrada a seguir:

Equação 4–5

$$A(B + C) = AB + AC$$

Essa lei diz que a operação AND de uma única variável com o resultado de uma operação OR aplicada em duas ou mais variáveis é equivalente a uma operação OR entre os resultados das operações AND entre uma única variável e cada uma das duas ou mais variáveis. A lei distributiva também expressa o processo de *fatoração* no qual a variável comum A é fatorada em termos-produto, por exemplo, $AB + AC = A(B + C)$. A Figura 4–5 ilustra a lei distributiva em termos de implementação com portas.



$X = A(B + C)$ $X = AB + AC$

FIGURA 4–5

Aplicação da lei distributiva. Abra o arquivo F04-05 para verificar.

Regras da Álgebra Booleana

A Tabela 4–1 apresenta uma lista de 12 regras básicas úteis na manipulação e simplificação de expressões Booleanas. As regras de 1 a 9 serão analisadas em termos de suas aplicações em portas lógicas. As regras de 10 a 12 serão obtidas em termos de regras mais simples e das leis discutidas anteriormente.

TABELA 4–1

Regras básicas da álgebra Booleana

1. $A + 0 = A$	**7.** $A \cdot A = A$
2. $A + 1 = 1$	**8.** $A \cdot \overline{A} = 0$
3. $A \cdot 0 = 0$	**9.** $\overline{\overline{A}} = A$
4. $A \cdot 1 = A$	**10.** $A + AB = A$
5. $A + A = A$	**11.** $A + \overline{A}B = A + B$
6. $A + \overline{A} = 1$	**12.** $(A + B)(A + C) = A + BC$

A, *B* ou *C* podem representar uma única variável ou uma combinação de variáveis.

Regra 1. $A + 0 = A$ A operação OR de uma variável com 0 é sempre igual a variável. Se a variável de entrada A for 1, a variável X de saída será 1, que é igual a A. Se A for 0, a saída será 0, que também é igual a A. Essa regra é ilustrada na Figura 4–6, na qual a entrada inferior da porta está fixa em 0.

$X = A + 0 = A$

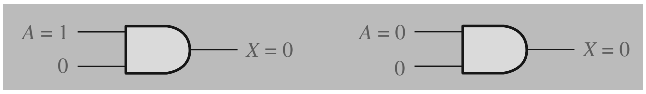
FIGURA 4–6

Regra 2. $A + 1 = 1$ A operação OR da variável com 1 é igual a 1. Um 1 numa entrada de uma porta OR produz um 1 na saída, independente do valor da variável na outra entrada. Essa regra é ilustrada na Figura 4–7, na qual a entrada inferior da porta está fixa em 1.

$X = A + 1 = 1$

FIGURA 4–7

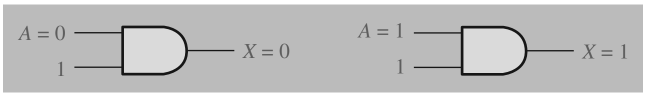
Regra 3. $A \cdot 0 = 0$ A operação AND da variável com 0 sempre é igual a 0. Todas as vezes que uma entrada de uma porta AND for 0, a saída será 0, independente do valor da variável na outra entrada. Essa regra está ilustrada na Figura 4–8, na qual a entrada inferior está fixa em 0.



▶ **FIGURA 4–8**

$X = A \bullet 0 = 0$

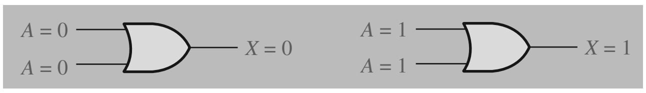
Regra 4. $A \cdot 1 = A$ A operação AND da variável com 1 é sempre igual a variável. Se A for 0 a saída da porta AND será 0. Se A for 1, a saída da porta AND será 1 porque ambas as entradas agora são 1s. Essa regra é mostrada na Figura 4–9, onde a entrada inferior está fixa em 1.



▶ **FIGURA 4–9**

$X = A \bullet 1 = A$

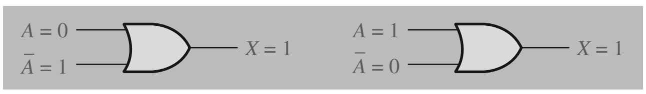
Regra 5. $A + A = A$ A operação OR da variável com ela mesma é sempre igual a variável. Se A for 0, então $0 + 0 = 0$; e se A for 1, então $1 + 1 = 1$. Isso é mostrado na Figura 4–10, onde as duas entradas são a mesma variável.



▶ **FIGURA 4–10**

$X = A + A = A$

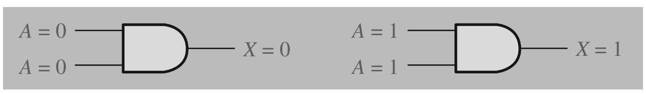
Regra 6. $A + \bar{A} = 1$ A operação OR da variável com o seu complemento é sempre igual a 1. Se A for 0, então $0 + \bar{0} = 0 + 1 = 1$. Se A for 1, então $1 + \bar{1} = 1 + 0 = 1$. Veja a Figura 4–11, onde uma entrada é o complemento da outra.



▶ **FIGURA 4–11**

$X = A + \bar{A} = 1$

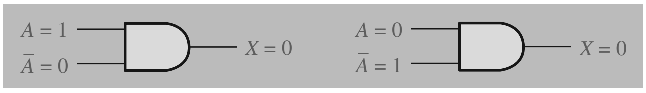
Regra 7. $A \cdot A = A$ A operação AND de uma variável com ela mesma é sempre igual a variável. Se $A = 0$, então $0 \cdot 0 = 0$; e se $A = 1$, então $1 \cdot 1 = 1$. A Figura 4–12 ilustra essa regra.



▶ **FIGURA 4–12**

$X = A \bullet A = A$

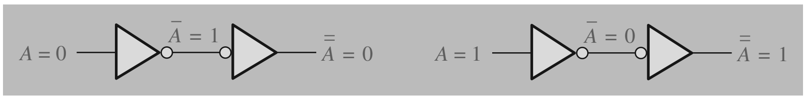
Regra 8. $A \cdot \overline{A} = 0$ A operação AND de uma variável e o seu complemento é sempre igual a 0. Nesse caso, ou $\overline{A}$ ou sempre será 0; e quando um 0 é aplicado na entrada de uma porta AND, a saída também será 0. A Figura 4–13 ilustra essa regra.



$X = A \bullet \overline{A} = 0$

◄ **FIGURA 4–13**

Regra 9. $\overline{\overline{A}} = A$ O complemento duplo de uma variável é sempre igual a variável. Se complementarmos (invertermos) a variável A uma vez, obtemos $\overline{A}$. Então se complementarmos (invertemos) $\overline{A}$, obtemos A, que é a variável original. Essa regra é mostrada na Figura 4–14 usando inversores.



$\overline{\overline{A}} = A$

◄ **FIGURA 4–14**

Regra 10. $A + AB = A$ Essa regra pode ser provada aplicando a lei distributiva, Regra 2, e a Regra 4 como a seguir:

$$
\begin{aligned}
A + B &= A(1 + B) && \text{Fatorando (lei distribuitiva)}\\
&= A \cdot 1 && \text{Regra 2: } (1 + B) = 1\\
&= A && \text{Regra 4: } A \cdot 1 = A
\end{aligned}
$$

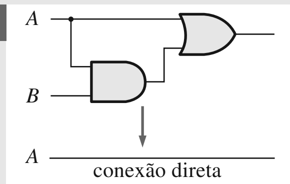
A prova é mostrada na Tabela 4–2, onde temos a tabela-verdade e a conseqüente simplificação do circuito lógico.

◄ **TABELA 4–2**

Regra 10: $A + AB = A$. Abra o arquivo T04-02 para verificar

A	B	AB	$A + AB$
0	0	0	0
0	1	0	0
1	0	0	1
1	1	1	1

igual



Regra 11. $A + \overline{A}B = A + B$ Essa regra pode ser provada da seguinte forma:

$$
\begin{aligned}
A + \overline{A}B &= (A + AB) + \overline{A}B && \text{Regra 10: } A = A + AB\\
&= (AA + AB) + \overline{A}B && \text{Regra 7: } A = AA\\
&= AA + AB + A\overline{A} + \overline{A}B && \text{Regra 8: adicionando } A\overline{A} = 0\\
&= (A + \overline{A})(A + B) && \text{Fatorando}\\
&= 1 \cdot (A + B) && \text{Regra 6: } A + \overline{A} = 1\\
&= A + B && \text{Regra 4: simplifica o 1}
\end{aligned}
$$

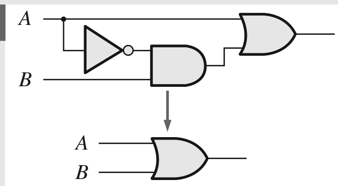
A prova é mostrada na Tabela 4–3, onde temos a tabela-verdade e a conseqüente simplificação do circuito lógico.

▶ **TABELA 4–3**

Regra 11: $A + \overline{A}B = A + B$. Abra o arquivo T04-03 para verificar

A	B	$\overline{A}B$	$A + \overline{A}B$	$A + B$
0	0	0	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	1	1
1	1	0	1	1

igual



Regra 12. $(A + B)(A + C) = A + BC$ Essa regra pode ser provada da seguinte forma:

$$
\begin{aligned}
(A + B)(A + C) &= AA + AC + AB + BC && \text{Lei distributiva} \\
&= A + AC + AB + BC && \text{Regra 7: } AA = A \\
&= A(1 + C) + AB + BC && \text{Fatorando (lei distributiva)} \\
&= A \cdot 1 + AB + BC && \text{Regra 2: } 1 + C = 1 \\
&= A(1 + B) + BC && \text{Fatorando (lei distributiva)} \\
&= A \cdot 1 + BC && \text{Regra 2: } 1 + B = 1 \\
&= A + BC && \text{Regra 4: } A \cdot 1 = A
\end{aligned}
$$

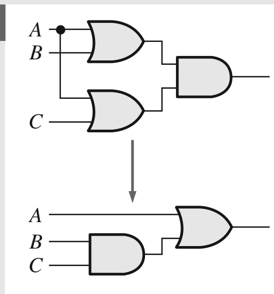
A prova é mostrada na Tabela 4–4, onde temos a tabela-verdade e a conseqüente simplificação do circuito lógico.

▼ **TABELA 4–4**

Regra 12: $(A + B)(A + C) = A + BC$. Abra o arquivo T04-04 para verificar

A	B	C	$A + B$	$A + C$	$(A + B)(A + C)$	BC	$A + BC$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1	0	1
1	0	1	1	1	1	0	1
1	1	0	1	1	1	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1

igual



SEÇÃO 4–2 REVISÃO

1. Aplique a lei associativa da adição na expressão $A + (B + C + D)$.

2. Aplique a lei distributiva na expressão $A(B + C + D)$.