Universidade Federal do ABC

1ª Avaliação de Cálculo Numérico

Nome: Lucas Moura de Almeida

1) Represente o número $x_1 = 52,3$ no sistema de ponto flutuante $F(9,4,2,3)$. Que números na base decimal não são representados nesse sistema?

Resposta: $x_1 = 52,63 = (0,57263 \times 9^2)_9$. Overflow: $(-\infty\ ,\ -728,8889) \cup (728,8889\ ,\ \infty)$. Underflow: $(-0,0014\ ,\ 0,0014)$.

* 2) Seja a função $f(x) = x\, ln(x) - 1$. Obtenha 2 funções iterativas do Método Iterativo Linear (MIL). Verifique, usando o critério de convergência, se essas funções irão convergir para a raiz de $f(x)$. Obtenha uma aproximação da raiz pelo MIL com erro relativo inferior à $0,1$.

Resposta: $\psi_1(x) = 1/ln(x)$ e $\psi_2(x) = e^{1/x}$. Existe uma raiz $\xi \in (1,2)$. Com $x_0 = 1,5$ e usando $\psi_1(x) = 1/ln(x)$, obtemos $\xi \approx x_2 = 1,7809$.

3) Sejam as funções $f_1(x) = e^x - 1$ e $f_2(x) = ln(x^2) + 3$. Determine, pelo método de Newton-Raphson, um ponto de interseção das duas funções com erro relativo inferior à $0,01$.

Resposta: $x_{n+1} = x_n - \dfrac{e^{x_n} - 1 - ln(x_n^2) - 3}{e^{x_n} - 2/x_n}$. Com $x_0 = 1,5$ obtemos $\xi \approx x_2 = 1,5965$.

4) Resolva o sistema linear abaixo pela decomposição LU.

$$\begin{cases} x & +5y & +2z & = -2 \\ 4x & +2y & -z & = 1 \\ -3x & +2y & -7z & = -12 \end{cases}$$

Resposta: $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ -3 & -17/18 & 1 \end{bmatrix}, U = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 0 & -18 & -9 \\ 0 & 0 & -19/2 \end{bmatrix}$.

Solução: $\{(1\ ;\ -1\ ;\ 1)\}$

5) Resolva novamente o sistema linear do exercício anterior, mas desta vez por um método iterativo, com erro relativo inferior à $0,1$. É necessário permutar linhas ou colunas do sistema para garantir a convergência do método? Justifique.

Resposta: A permutação é necessária. Com duas iterações o método converge para aproximadamente $(x, y, z) = \{(1\ ;\ -1\ ;\ 1)\}$.

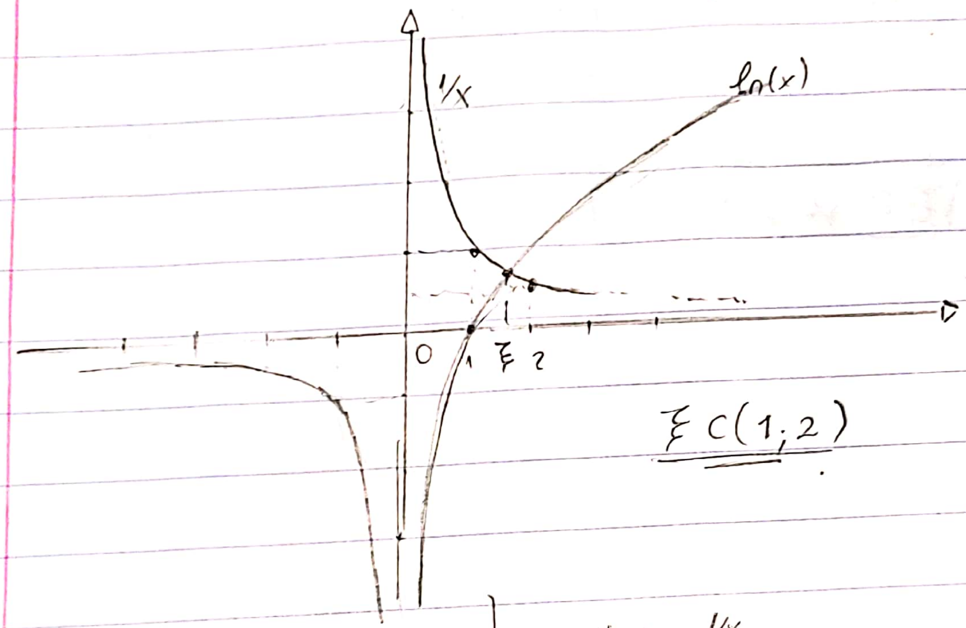
Utilize 4 casas decimais. Todas as contas devem ser justificadas !

Boa Prova !

P1. Exercício 2.

$f(x) = x\ln(x) - 1$; $ER_x < 0{,}1$

$$x\ln(x) = 1 \Rightarrow \ln(x) = \frac{1}{x}$$



$\underline{\xi \subset (1;2)}$

① $\varphi_1(x) = 1/\ln(x)$

$$|\varphi_1'(x)| < 1$$

$u = \ln(x) \rightarrow \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$

$$\Rightarrow \left| \frac{-1}{u^2} \cdot \frac{1}{x} \right| < 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{|x\ln^2(x)|} < 1 \Rightarrow |x\ln^2(x)| > 1$$

Ⓘ

$\boxed{x\ln^2(x) > 1}$ ou $\cancel{x\ln^2(x) < -1}$

C.E: $\underline{x > 0}$

Nada podemos afirmar.

② $\varphi_2(x) = e^{1/x}$

$$|\varphi_2'(x)| < 1$$

$$\left| \frac{-1 \cdot e^{1/x}}{x^2} \right| < 1 \Rightarrow \boxed{\frac{e^{1/x}}{x^2} < 1}$$

Ⓘⓘ converge

- Considerando $x > 0$, podemos testar valores de modo a obter um intervalo aproximado:

I

$x = 1 \rightarrow 0$
$x = 1{,}5 \rightarrow 0{,}2465$
$x = 2 \rightarrow 0{,}9609$
$x = 2{,}5 \rightarrow 2{,}098$
$\therefore x > 2$ aproximadamente

II

$x = 1 \rightarrow 2$
$x = 1{,}2 \rightarrow 1{,}5$
$x = 1{,}5 \rightarrow 0{,}8657$
$x = 2 \rightarrow 0{,}4121$
$\therefore x > 1{,}4$ aproximadamente

chutando $x_0 = 1{,}5$; $\varphi_2(x) = e^{1/x}$; $ER_x < 0{,}1$

$x_1 = 1{,}9477$ $ER_x \cong 0{,}23$

$x_2 = 1{,}6709$ $ER_x \cong 0{,}17$

$x_3 = 1{,}8193$ $ER_x \cong 0{,}082$

$x_4 = 1{,}7326$ $ER_x \cong 0{,}05$

$x_5 = 1{,}7809$ $ER_x \cong 0{,}03$

$\boxed{\xi \cong x_5 = 1{,}7809}$

P1. Exercício 1.

Base m M

$X_1 = 52,3$; $F(9,4,2,3)$; overflow ; underflow.

mantissa

$-2 \leq e \leq 3$

$52 \,\lfloor 9$ → 7, 5 ;

$0,3 \times 9 = 2,7$; $0,7 \times 9 = 6,3$; $0,3 \times 9 = 2,7$

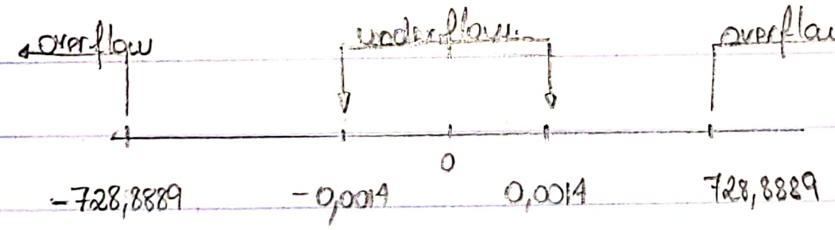
$\therefore (52,3)_{10} = (0,5726 \times 9^2)_9$

Base 9 : 0 1 2 3 4 5 6 7 8

maior valor positivo : $0,8888 \cdot 9^3 = (888,8)_9 = 8 \cdot 9^2 + 8 \cdot 9^1 + 8 \cdot 9^0 + 8 \cdot 9^{-1}$
$= (728,8889)_{10}$

menor valor positivo : $0,1000 \cdot 9^{-2} = (0,0010)_9 = 1 \cdot 9^{-3} = (0,0014)_{10}$

Portanto, temos :



UNDERFLOW : $(-0,0014 \, ; \, 0,0014)$

OVERFLOW : $(-\infty \, ; \, -728,8889) \cup (728,8889 \, ; \, +\infty)$

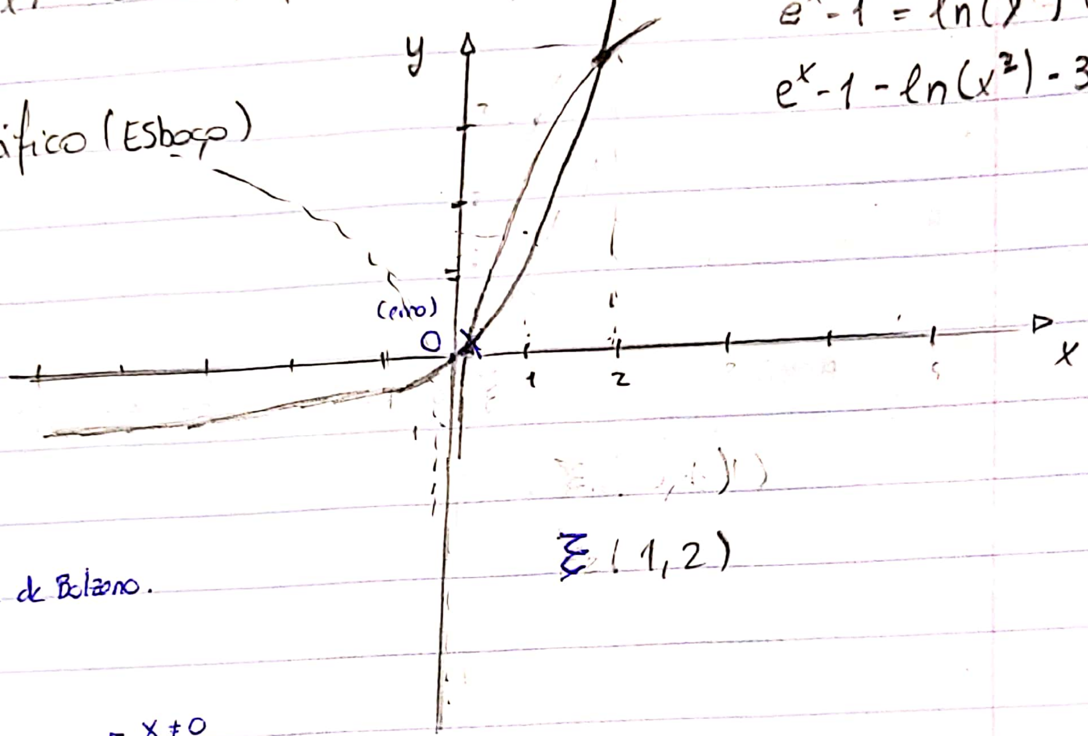
P1. Exercício 3.

$f_1(x) = e^x - 1$; $f_2(x) = \ln(x^2) + 3$

$e^x - 1 = \ln(x^2) + 3$

$e^x - 1 - \ln(x^2) - 3 = 0$

Gráfico (Esboço)



$\xi \in (1,2)$

*teorema de Bolzano.

$x \neq 0$

$f(x) = e^x - \ln(x^2) - 4$; $ER_x < 0{,}01$.

$f'(x) = e^x - \dfrac{2}{x}$; $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

$$x_{n+1} = x_n - \left[\frac{e^x - \ln(x^2) - 4}{e^x - 2/x}\right]$$

Chute $x_0 = 1{,}5$

$x_1 = 1{,}6045$ $\quad ER_{x1} = 0{,}065$

$\boxed{x_2 = 1{,}5965}$ $\quad ER_{x2} = 0{,}005$

$\boxed{\xi \cong x_2 = 1{,}5965}$