Universidade Federal do ABC - Prof. André Fonseca
$1^{\underline{a}}$ Avaliação de Introdução às Equações Diferenciais Ordinárias

Nome: ______________________________

1) Considere o PVI:

$$\begin{cases} xy' - y = x^2 ln(x) \\ y(e) = 1 \end{cases} \quad ; \quad x > 0.$$

(a) Verifique as hipóteses do teorema de existência e unicidade. Qual a sua conclusão ?

Solução: $f(x,y) = \frac{1}{x}(y + x^2 ln(x))$ é descontínua para $x = 0$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{x}$ é descontínua para $x = 0$.

(b) Encontre a solução do PVI.

Solução : $y(x) = x^2 ln(x) - x^2 + e^{-1}x$

2) Suponha que um automóvel sofre depreciação continuamente numa taxa que é proporcional ao seu valor num instante t. Este automóvel novo custa R$ 30.000,00. Após um ano de uso o seu valor é R$ 20.000,00. Determine:

(a) O valor do automóvel como função do tempo.

Solução : $P(t) = 30000 e^{ln\left(\frac{2}{3}\right)t} = 30000\left(\frac{2}{3}\right)^t$.

(b) O tempo necessário para que o automóvel tenha uma depreciação de 50% do seu valor inicial.

Solução : $t = \frac{ln(1/2)}{ln(2/3)} = -\frac{ln(2)}{ln(2) - ln(3)} \approx 1,71$ ano.

3) Encontre a solução geral da equação diferencial $y' = \dfrac{xy^2}{x^2y + y^3}$.

Solução : $\frac{x^2}{2y^2} - ln\left|\frac{y}{x}\right| = ln|x| + c$.

4) Considere a equação de Ricatti

$$y' + \frac{1}{x}y - \frac{1}{x^2}y^2 = 1.$$

Mostre que $y_1(x) = x$ é uma solução particular da equação acima. Mostre que a mudança de variável $y(x) = y_1(x) + \dfrac{1}{z(x)}$ transforma a equação de Ricatti em uma equação linear na variável z. Encontre, por esse método, a solução $y(x)$.

Solução : $z' + \frac{z}{x} = -\frac{1}{x^2} \Rightarrow z = -\frac{1}{x} ln(x) + \frac{c}{x} \Rightarrow y = x + \frac{x}{c - ln(x)}$.

5) Verifique se $y_1(x) = x$ e $y_2(x) = xe^x$ formam um conjunto fundamental de soluções da EDO:

$$x^2 y'' - x(x+2)y' + (x+2)y = 0 \quad ; \quad x > 0.$$

Solução: Mostrar que y_1 e y_2 são soluções e $W(y_1, y_2) = x^2 e^x \neq 0$ se $x > 0$.

Boa prova !