Resumo P2 - IEDO

Gisele Ducati

26/abr/2012

EDO's com coeficientes constantes (ordem 2)

$$ax'' + bx' + cx = g(t) \ , a, b, c \in \mathbb{R}$$

1) Resolver a equação homogênea associada ($g(t) = 0$):

$$ax'' + bx' + cx = 0$$

cuja solução é

$$x_h(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t)$$

onde $\{x_1, x_2\}$ é linearmente independente (isto é, $W \neq 0$).

EDO's com coeficientes constantes (ordem 2)

$$ax'' + bx' + cx = g(t)\ , a, b, c \in \mathbb{R}$$

1) Resolver a equação homogênea associada ($g(t) = 0$):

$$ax'' + bx' + cx = 0$$

cuja solução é

$$x_h(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t)$$

onde $\{x_1, x_2\}$ é linearmente independente (isto é, $W \neq 0$).
2) Encontrar uma solução da equação não-homogênea: $x_p(t)$

EDO's com coeficientes constantes (ordem 2)

$$ax'' + bx' + cx = g(t) \ , a, b, c \in \mathbb{R}$$

1) Resolver a equação homogênea associada ($g(t) = 0$):

$$ax'' + bx' + cx = 0$$

cuja solução é

$$x_h(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t)$$

onde $\{x_1, x_2\}$ é linearmente independente (isto é, $W \neq 0$).
2) Encontrar uma solução da equação não-homogênea: $x_p(t)$
3) Escrever solução geral da equação dada

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) + x_p(t)$$

Equações Diferenciais Homogêneas

$$ax'' + bx' + cx = 0$$

Solução: e^{rt} $\Rightarrow$ Equação característica: $ar^2 + br + c = 0.$
Três casos possíveis:

1. $\Delta > 0$: $r_1 \neq r_2$, $r_{1,2} \in \mathbb{R}$

$$x(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}$$

2. $\Delta = 0$: $r_1 = r_2 = r$, $r \in \mathbb{R}$

$$x(t) = c_1 e^{rt} + c_2 t e^{rt} = (c_1 + c_2 t)e^{rt}$$

3. $\Delta < 0$: $r_1 = \lambda + i\mu$, $r_2 = r_1^* = \lambda - i\mu$, $r_{1,2} \in \mathbb{C}$

$$x(t) = e^{\lambda t}[c_1 \cos(\mu t) + c_2 \sin(\mu t)]$$

Equações Diferenciais Homogêneas

$$ax'' + bx' + cx = 0$$

Solução: e^{rt} $\Rightarrow$ Equação característica: $ar^2 + br + c = 0$.
Três casos possíveis:

1. $\Delta > 0$: $r_1 \neq r_2$, $r_{1,2} \in \mathbb{R}$

$$x(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}$$

2. $\Delta = 0$: $r_1 = r_2 = r$, $r \in \mathbb{R}$ **REDUÇÃO DA ORDEM**

$$x(t) = c_1 e^{rt} + c_2 t e^{rt} = (c_1 + c_2 t) e^{rt}$$

3. $\Delta < 0$: $r_1 = \lambda + i\mu$, $r_2 = r_1^* = \lambda - i\mu$, $r_{1,2} \in \mathbb{C}$

$$x(t) = e^{\lambda t}[c_1 \cos(\mu t) + c_2 \sin(\mu t)]$$

Redução da ordem

Dada uma equação diferencial de segunda ordem, homogênea:

$$a(t)x'' + b(t)x' + c(t)x = 0 \; , \tag{1}$$

tal que $x_1(t)$ seja uma solução conhecida da equação dada. A segunda solução $x_2(t)$ é obtida através do método de redução da ordem que consiste em supor que

$$x_2(t) = x_1(t)v(t)$$

que, introduzida em (1) resulta em uma EDO de primeira ordem em $v(t)$.

Equações Diferenciais Não-Homogêneas

- Variação dos parâmetros:

$$x'' + b(t)x' + c(t)x = g(t)$$

Sabemos que a solução da equação homogênea é

$$x_h(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t)$$

O método da variação dos parâmetros consiste em supor que a solução particular é dada por:

$$x_p(t) = c_1(t)x_1(t) + c_2(t)x_2(t)$$

A fim de encontrar c_1 e c_2 resolvemos o sistema:

$$\begin{cases} c_1' x_1 + c_2' x_2 & = & 0 \\ c_1' x_1' + c_2' x_2' & = & g(t) \end{cases}$$

Equações Diferenciais Não-Homogêneas

- Variação dos parâmetros:

$$a(t) \cdot x'' + b(t)x' + c(t)x = g(t)$$

Sabemos que a solução da equação homogênea é

$$x_h(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t)$$

O método da variação dos parâmetros consiste em supor que a solução particular é dada por:

$$x_p(t) = c_1(t)x_1(t) + c_2(t)x_2(t)$$

A fim de encontrar c_1 e c_2 resolvemos o sistema:

$$\begin{cases} c_1' x_1 + c_2' x_2 & = & 0 \\ c_1' x_1' + c_2' x_2' & = & g(t)/a(t) \end{cases}$$

• Coeficientes Indeterminados: método utilizado para equações não-homogêneas mas com **coeficientes constantes**!

$$ax'' + bx' + cx = f(t)$$

A função $f(t)$ deve ser do tipo:

$$e^{\alpha^t} \;, P_n(t), \cos\beta t \;, \sin\beta t$$

e somas ou multiplicações entre elas.
A idéia do método é supor que a solução particular da equação diferencial dada é do mesmo tipo que função $f(t)$ presente na equação original. Assim, se $f(t)$ é uma função exponencial: $e^{\alpha t}$, supomos que a solução particular é $x_p(t) = Ae^{\alpha t}$ e determinamos qual o valor de A a fim de que x_p seja de fato uma solução particular da equação.

$f(x)$	$x_p(t)$
2	
$2x-1$	
x^4-3x+5	
$\cos 3x$	
$\sin x$	
e^{3x}	
$e^x \cos 4x$	
$x^2 e^{-x}$	
$xe^x \cos x$	

$f(x)$	$x_p(t)$
2	A
$2x-1$	
x^4-3x+5	
$\cos 3x$	
$\sin x$	
e^{3x}	
$e^x\cos 4x$	
x^2e^{-x}	
$xe^x\cos x$	

$f(x)$	$x_p(t)$
2	A
$2x-1$	$Ax+B$
x^4-3x+5	
$\cos 3x$	
$\sin x$	
e^{3x}	
$e^x \cos 4x$	
$x^2 e^{-x}$	
$xe^x \cos x$	

$f(x)$	$x_p(t)$
2	A
$2x-1$	$Ax+B$
x^4-3x+5	$Ax^4+Bx^3+Cx^2+Dx+E$
$\cos 3x$	
$\sin x$	
e^{3x}	
$e^x \cos 4x$	
$x^2 e^{-x}$	
$xe^x \cos x$	

$f(x)$	$x_p(t)$
2	A
$2x-1$	$Ax+B$
x^4-3x+5	$Ax^4+Bx^3+Cx^2+Dx+E$
$\cos 3x$	$A\cos 3x + B\sin 3x$
$\sin x$	
e^{3x}	
$e^x\cos 4x$	
x^2e^{-x}	
$xe^x\cos x$	

$f(x)$	$x_p(t)$
2	A
$2x-1$	$Ax+B$
x^4-3x+5	$Ax^4+Bx^3+Cx^2+Dx+E$
$\cos 3x$	$A\cos 3x+B\sin 3x$
$\sin x$	$A\cos x+B\sin x$
e^{3x}	
$e^x\cos 4x$	
x^2e^{-x}	
$xe^x\cos x$	

$f(x)$	$x_p(t)$
2	A
$2x-1$	$Ax+B$
x^4-3x+5	$Ax^4+Bx^3+Cx^2+Dx+E$
$\cos 3x$	$A\cos 3x+B\sin 3x$
$\sin x$	$A\cos x+B\sin x$
e^{3x}	Ae^{3x}
$e^x\cos 4x$	
x^2e^{-x}	
$xe^x\cos x$	

$f(x)$	$x_p(t)$
2	A
$2x-1$	$Ax+B$
x^4-3x+5	$Ax^4+Bx^3+Cx^2+Dx+E$
$\cos 3x$	$A\cos 3x + B\sin 3x$
$\sin x$	$A\cos x + B\sin x$
e^{3x}	Ae^{3x}
$e^x\cos 4x$	$e^x(A\cos 4x + B\sin 4x)$
x^2e^{-x}	
$xe^x\cos x$	

$f(x)$	$x_p(t)$
2	A
$2x-1$	$Ax+B$
x^4-3x+5	$Ax^4+Bx^3+Cx^2+Dx+E$
$\cos 3x$	$A\cos 3x+B\sin 3x$
$\sin x$	$A\cos x+B\sin x$
e^{3x}	Ae^{3x}
$e^x\cos 4x$	$e^x(A\cos 4x+B\sin 4x)$
x^2e^{-x}	$(Ax^2+Bx+C)e^{-x}$
$xe^x\cos x$	

$f(x)$	$x_p(t)$
2	A
$2x-1$	$Ax+B$
x^4-3x+5	$Ax^4+Bx^3+Cx^2+Dx+E$
$\cos 3x$	$A\cos 3x+B\sin 3x$
$\sin x$	$A\cos x+B\sin x$
e^{3x}	Ae^{3x}
$e^x\cos 4x$	$e^x(A\cos 4x+B\sin 4x)$
x^2e^{-x}	$(Ax^2+Bx+C)e^{-x}$
$xe^x\cos x$	$e^x\left[(Ax+B)\cos x+(Cx+D)\sin x\right]$

Atenção: No caso de algum dos termos da solução proposta (segunda coluna da tabela anterior) for também solução da equação homogênea associada, tal solução deverá ser multiplicada por x ou x^2 até que nenhum termo da solução proposta seja solução da equação homogênea associada.
Exemplo:

$$y'' - 2y' + y = 3e^x$$

Solução complementar: $y_h(x) = c_1 e^x + c_2 x e^x$
Solução particular: $y_p(x) = A \ \ e^x$

Atenção: No caso de algum dos termos da solução proposta (segunda coluna da tabela anterior) for também solução da equação homogênea associada, tal solução deverá ser multiplicada por x ou x^2 até que nenhum termo da solução proposta seja solução da equação homogênea associada.
Exemplo:

$$y'' - 2y' + y = 3e^x$$

Solução complementar: $y_h(x) = c_1 e^x + c_2 x e^x$
Solução particular: $y_p(x) = Axe^x$

Atenção: No caso de algum dos termos da solução proposta (segunda coluna da tabela anterior) for também solução da equação homogênea associada, tal solução deverá ser multiplicada por x ou x^2 até que nenhum termo da solução proposta seja solução da equação homogênea associada.
Exemplo:

$$y'' - 2y' + y = 3e^x$$

Solução complementar: $y_h(x) = c_1e^x + c_2xe^x$
Solução particular: $y_p(x) = Axe^x$ Ainda é solução da homogênea!

Atenção: No caso de algum dos termos da solução proposta (segunda coluna da tabela anterior) for também solução da equação homogênea associada, tal solução deverá ser multiplicada por x ou x^2 até que nenhum termo da solução proposta seja solução da equação homogênea associada.
Exemplo:

$$y'' - 2y' + y = 3e^x$$

Solução complementar: $y_h(x) = c_1 e^x + c_2 x e^x$
Solução particular: $y_p(x) = Axe^x$ Ainda é solução da homogênea!

$$y_p(x) = Ax^2 e^x \quad \Rightarrow \quad A = 3/2$$

Oscilador harmônico

$$m\ddot{x} + \gamma\dot{x} + kx = F(t)$$

• Oscilador harmônico simples: $\gamma = 0$ e $F(t) = 0$

$$m\ddot{x} + kx = 0 \Rightarrow \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0\ , \quad \omega_0^2 = k/m$$

$$x(t) = Acos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t = R\cos(\omega_0 t - \delta)$$

onde $R^2 = A^2 + B^2$ e $\tan\delta = B/A$.

R - amplitude $\quad \delta$ - fase $\quad \omega_0$ - frequência $\quad T = 2\pi/\omega_0$ - período

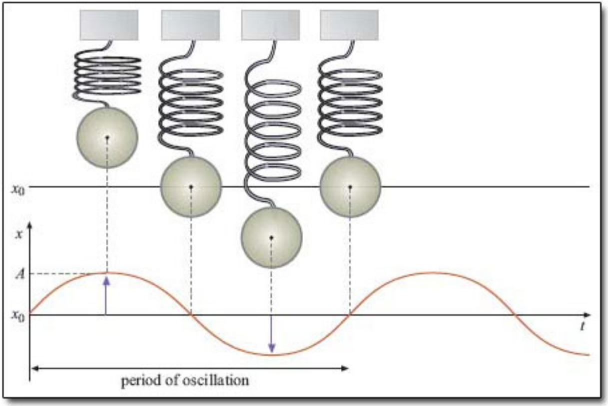

Figura: Movimento harmônico simples (http://openlearn.open.ac.uk)

- Oscilador harmônico amortecido:

$$m\ddot{x} + \gamma\dot{x} + kx = 0$$

1. Movimento superamortecido: $\Delta = \gamma^2 - 4mk > 0$

$$x(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$$

2. Movimento criticamente amortecido : $\Delta = \gamma^2 - 4mk = 0$

$$x(t) = Ae^{rt} + Bte^{rt} = (A + Bt)e^{rt}$$

3. Movimento subamortecido: $\Delta = \gamma^2 - 4mk < 0$

$$x(t) = e^{\alpha t}[A\cos\beta t + B\sin\beta t]$$

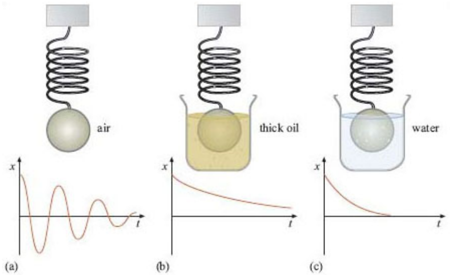

Figura: Movimento harmônico simples (http://openlearn.open.ac.uk)

(a) Subamortecido - movimento no ar
(b) Superamortecido - movimento no óleo
(c) Criticamente amortecido - movimento na água

- Oscilador harmônico forçado (sem amortecimento):

$$m\ddot{x} + kx = F_0 \cos \omega t$$

Batimento: $|\omega_0 - \omega| << 1$ e $\gamma = 0$

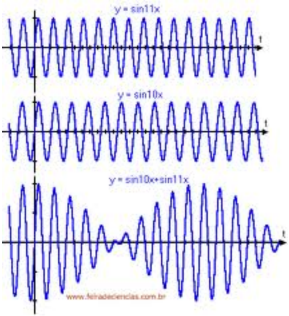

Figura: Movimento harmônico forçado - batimentos

Batimento: $\omega_0 = \omega$ e $\gamma = 0$

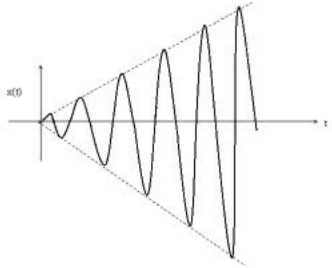

Figura: Movimento harmônico forçado - ressonância

- Vibrações forçadas amortecidas:

$$m\ddot{x} + \gamma\dot{x} + kx = F_0 \cos \omega t$$

$$\gamma \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{t \to \infty} x_h(t) = 0$$

Assim, quando $t \to \infty$, $x(t) \to x_p(t)$ e, por esta razão $x_h(t)$ é chamada solução transiente e $x_p(t)$ é chamada solução de estado estácionário.

Sistemas lineares

$$\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \mathbf{x}(t)\ , \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

Autovalores:

$$P(\lambda) = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$= \lambda^2 - \operatorname{tr} A\, \lambda + \det A = 0$$

Autovetores:

$$A\mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}$$

Três casos possíveis:
(i) $\lambda_1 \neq \lambda_2, \lambda_{1,2} \in \mathbb{R}$

$$\mathbf{x}(t) = c_1 \mathbf{v}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \mathbf{v}_2 e^{\lambda_2 t}$$

(ii) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda, \lambda \in \mathbb{R}$

$$\mathbf{x}(t) = c_1 \mathbf{v}_1 e^{\lambda t} + c_2 \left(t\mathbf{v} + \mathbf{w}\right) e^{\lambda t}$$

onde $(A - \lambda)\mathbf{w} = \mathbf{v}$.
(iii) $\lambda_1 = \lambda_2^* = \alpha \pm i\beta, \lambda_{1,2} \in \mathbb{C}$

$$\mathbf{x}(t) = c_1 \mathbf{v}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \mathbf{v}^*{}_1 e^{\lambda_1^* t}$$

Neste ponto, é conveniente escrevermos a solução do caso (iii) em termos de funções reais.

$$\mathbf{v}_1 e^{\lambda_1 t} = \begin{pmatrix} v_1^{(1)} \\ v_1^{(2)} \end{pmatrix} e^{\lambda_1 t} = \left[\begin{pmatrix} a^{(1)} \\ a^{(2)} \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} b^{(1)} \\ b^{(2)} \end{pmatrix} \right] e^{\lambda_1 t} = \mathbf{a} + i\mathbf{b}$$

$$x(t) = c_1 \mathbf{u}(t) + c_2 \mathbf{w}(t)$$

onde

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(t) &= e^{\alpha t} \left[\mathbf{a} \cos \beta t - \mathbf{b} \sin \beta t \right] \\ \mathbf{v}(t) &= e^{\alpha t} \left[\mathbf{a} \cos \beta t + \mathbf{b} \sin \beta t \right] \end{aligned}$$

- Análise qualitativa:

Encontrar o ponto crítico: $\mathbf{p}$ tal que $A\mathbf{p} = 0$ e avaliar o comportamento da solução quando $t \to \infty$.

Classificação:

Autovalores	Tipo de ponto crítico	Estabilidade
$\lambda_2 > \lambda_1 > 0$	Fonte	Instável
$\lambda_2 < \lambda_1 < 0$	Atrator ou sorvedouro	Assint. estável
$\lambda_2 < 0 < \lambda_1$	Ponto de sela	Instável
$\lambda_1 = \lambda_2 > 0$	Nó impróprio	Instável
$\lambda_1 = \lambda_2 < 0$	Nó impróprio	Assint. estável
$\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$		
$\alpha > 0$	Fonte espiral	Instável
$\alpha < 0$	Sorvedouro espiral	Assint. estável
$\alpha = 0$	Centro	Estável