BCM0504

Natureza da Informação

Aritmética Booleana

Prof. Alexandre Donizeti Alves

Universidade Federal do ABC

Bacharelado em Ciência e Tecnologia

Bacharelado em Ciências e Humanidades

Terceiro Quadrimestre - 2018

Aritmética Booleana

Operação de Adição

0 + 0 = 0

0 + 1 = 1

1 + 0 = 1

1 + 1 = 1 0

1 + 1 = 10, que é o número 2 em binário

0 com transporte de 1 para a posição imediatamente seguinte (à esquerda)

Aritmética Booleana

Operação de Adição

Decimal	Binário	Decimal	Binário
5	101	15	1111
+ 6	+ 110	+ 20	+ 10100
11	1011	35	100011

Com o “vai Um” (1 + 1)

Adição

- Exemplo: 1011 + 0011

```
  1 1
1 0 1 1 +
0 0 1 1
-------
1 1 1 0
```

1 + 1 = 0 e vai 1

1 + 1 + 1 = 1 e vai 1

1 + 0 + 0 = 1

1 + 0 = 1

OBS:

$$\begin{array}{r}1011 = (11)_{10}\\ \underline{0011} = \underline{(\ \ 3)_{10}}\\ 1110 = (14)_{10}\end{array}$$

Exercícios

- a) 11 + 11
- b) 100 + 10
- c) 111 + 11
- d) 110 + 100

Respostas

- a) 11 + 11 = **110**
- b) 100 + 10 = **110**
- c) 111 + 11 = **1010**
- d) 110 + 100 = **1010**

Aritmética Booleana

Operação de Subtração

10 – 1 = 1, e não 9

0 – 0 = 0

0 – 1 = 1 1

1 – 0 = 1

1 – 1 = 0

= e subtrai um do seguinte

1 com transporte de 1 para a posição imediatamente seguinte (à esquerda)

Aritmética Booleana

Operação de Subtração

Decimal	Binário	Decimal	Binário
9	1001	16	10000
- 5	- 101	- 3	- 11
4	100	13	1101

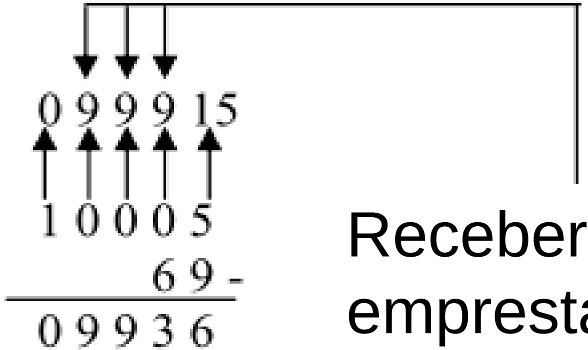
Subtração

- Como na subtração decimal, quando o número que está sendo subtraído for menor do que o que subtrai, teremos que fazer o empréstimo do dígito seguinte
  - Exemplo: subtração decimal:

```
 10005
    69 -
 -----
 09936
```

Como 5 é menor do que 9, ele precisa emprestar 1 do seguinte. Como o seguinte é 0, o processo de emprestar 1 do seguinte continua até atingir um número diferente de 0

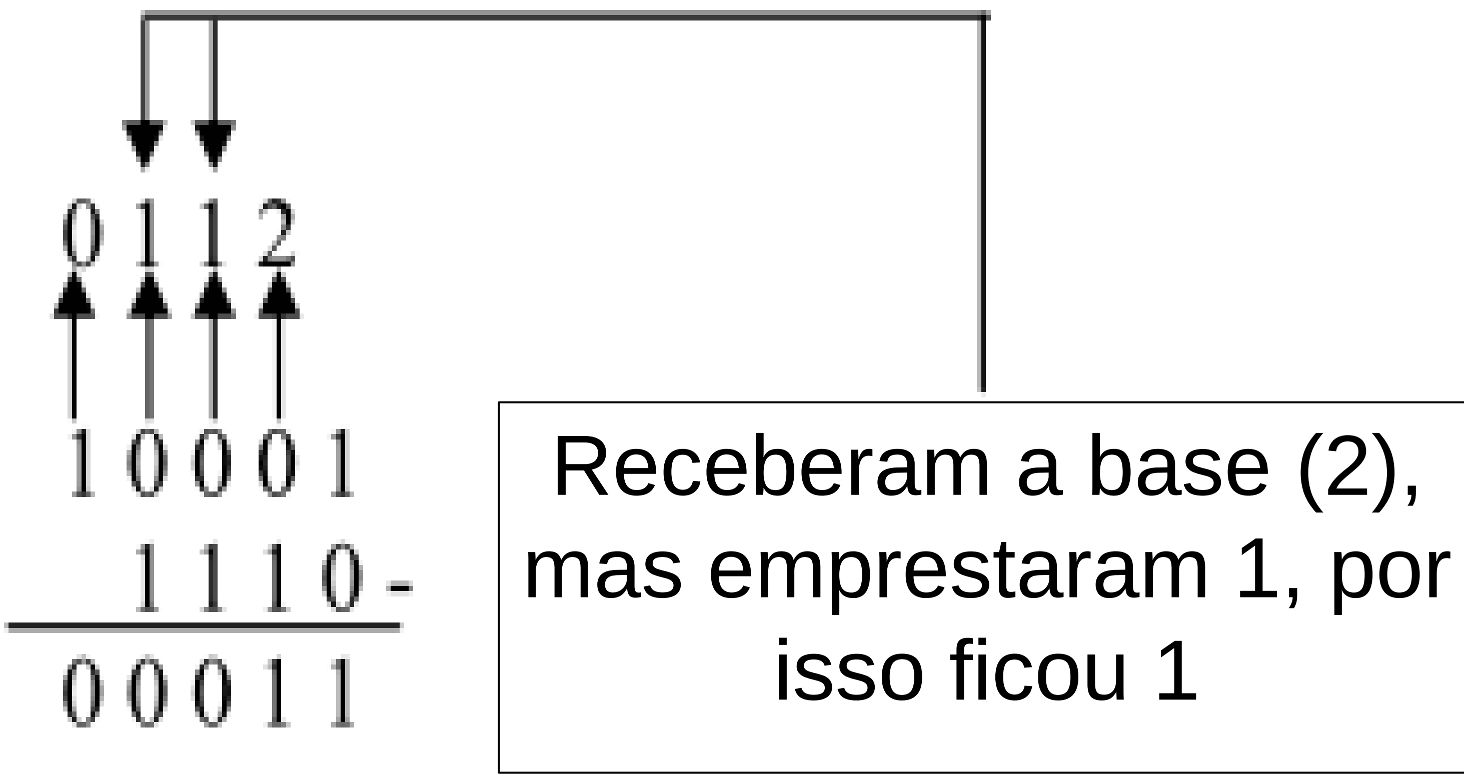
Quando um número diferente de 0 for atingido, este número é diminuído em uma unidade e o número que está recebendo este empréstimo é somado o valor da base (10) O processo continua até atingir o primeiro número que pediu o empréstimo



Receberam a base (10), mas emprestaram 1, por isso ficou 9

Subtração

- O caso Booleano é idêntico ao decimal, mas a base é 2
  - Exemplo: subtrair 1110_2 de 10001_2



Exercícios

- Efetue a subtração de 1011 a partir de 11001
- Efetue a subtração: 101 – 11
- Efetue a subtração: 1010 – 111

Respostas

- Efetue a subtração de 1011 a partir de 11001
  - 11001 – 1011 = **1110**

- Efetue a subtração: 101 – 11 = **10**

- Efetue a subtração: 1010 – 111 = **11**

Aritmética Booleana

Operação de Multiplicação

$0 \cdot 0 = 0$

$0 \cdot 1 = 0$

$1 \cdot 0 = 0$

$1 \cdot 1 = 1$

```
     111       (decimal 7)
   x 110       (decimal 6)
  -------
     000
    111   +
   111
  -------
  101010       (decimal 42)
```

Pode ser realizada da mesma forma que multiplicação decimal

Exercícios

- a) 11 x 11

- b) 101 x 111

Respostas

- a) 11 x 11 = **1001**
  - 3 x 3 = 9
- b) 101 x 111 = **100011**
  - 7 x 5 = 35

Aritmética Booleana

Operação de Divisão

$0 \div 1 = 0$

$1 \div 1 = 1$

$0 \div 0 = x$

$1 \div 0 = x$

$$
\begin{array}{l|l}
100100\cancel{0} & 11\cancel{0} \\ \hline
\underline{11} & 1100 \\
011 & \\
\quad 000 &
\end{array}
$$

Também pode ser feita de maneira similar a decimal;
se fosse menor do que o divisor colocava um "0" no quociente e baixava o seguinte

Exercícios

- a) $110 \div 11$
- b) $110 \div 10$
- c) $11001 \div 10$
- d) $110111 \div 101$

Respostas

- a) 110 ÷ 11 = **10, resto 0**
- b) 110 ÷ 10 = **11, resto 0**
- c) 11001 ÷ 10 = **1100, resto 1**
- d) 110111 ÷ 101 = **1011, resto 0**

Aritmética Booleana

- Complemento de 1: simplesmente inverte os bits
  - Exemplo: complemento de 1 de 11010 é 00101
- Complemento de 2: soma 1 ao complemento de 1
  - Exemplo: complemento de 2 de 11010 é 00101 + 00001

$$
\begin{array}{lr}
11010 \rightarrow \text{complemento de } 1 = & 00101 \\
 & +\quad\quad 1 \\
\hline
\text{Complemento de } 2 = & 00110
\end{array}
$$

Exercícios

- Determine o **complemento de 1** de cada número binário a seguir:
  - a) 00011010
  - b) 11110111

- Determine o **complemento de 2** de cada número binário a seguir:
  - a) 00010110
  - b) 11111100

Números sinalizados

- Os sistemas digitais, como o computador, têm que ser capazes de operar com números positivos e negativos

- Um número **binário sinalizado** é constituído de duas informações: **sinal** e **magnitude**

- O **sinal** indica se um número é positivo ou negativo e a **magnitude** é o valor do número

Números sinalizados

- Existem três formas por meio das quais os números inteiros podem ser representados em binário:
  - **sinal-magnitude**
  - complemento de 1
  - **complemento de 2**

Forma Sinal-Magnitude

- Quando um número binário sinalizado é representado na forma sinal-magnitude, o bit mais à esquerda é o bit de sinal e os bits restantes são os bits de magnitude

- Os bits de magnitude estão na forma de binário verdadeiro (não-complementado) tanto para números positivos quanto para negativos

Exemplo

- Por exemplo, o número decimal **+25** é expresso como um número binário sinalizado de 8 bits usando a forma **sinal-magnitude** como a seguir:

$$0\underbrace{0011001}$$

Bit de sinal — Bits de magnitude

O número decimal –25 é expresso como

10011001

Forma do Complemento de 1

- Números **positivos** na forma do **complemento de 1** são representados da mesma forma que números positivos expressos como sinal-magnitude

- Entretanto, os números **negativos** estão na forma do complemento de 1 do número positivo correspondente

Exemplo

- Por exemplo, usando oito bits, o número decimal −25 é expresso como o complemento de 1 de +25 (00011001) como a seguir:

  11100110

- Na forma do complemento de 1, um número negativo é o complemento de 1 do número positivo correspondente

Forma do Complemento de 2

- Os números **positivos** na forma do complemento de 2 são expressos da mesma forma que as representações sinal-magnitude e complemento de 1

- Os números **negativos** são expressos em complemento de 2 dos números positivos correspondentes

Exemplo

- Exemplificando novamente, usando 8 bits, vamos tomar o número decimal −25 e expressá-lo como complemento de 2 de +25 (00011001)

11100111

- Na forma do complemento de 2, um número negativo é o complemento de 2 do correspondente número positivo

Exercício

- Expresse o número decimal –39 como um número de 8 bits nas formas sinal-magnitude, complemento de 1 e complemento de 2

Resposta

Expresse o número decimal –39 como um número de 8 bits nas formas sinal-magnitude, complemento de 1 e complemento de 2.

Solução Primeiro escreva o número de 8 bits para +39.

00100111

Na *forma sinal-magnitude*, –39 é gerado alterando o bit de sinal para 1 e deixando os bits de magnitude como estavam. O número é

10100111

Na *forma do complemento de 1*, –39 é gerado tomando o complemento de 1 de +39 (00100111).

11011000

Na *forma do complemento de 2*, –39 é gerado tomando o complemento de 2 de +39 (00100111) como a seguir:

11011000	Complemento de 1
+ 1	
11011001	Complemento de 2

Exercício

- Expresse **+19** e **−19** nas formas sinal-magnitude, complemento de 1 e complemento de 2

O valor decimal de números sinalizados

- **Sinal-magnitude**
  - Os valores decimais de números positivos e negativos na forma sinal-magnitude são determinados somando os pesos de todos os bits de magnitude que são 1s e ignorando aqueles que são zeros
  - O sinal é determinado pela análise do bit de sinal

Exemplo

- Determine o valor decimal do número binário que vem a seguir expresso na forma sinal-magnitude:10010101

Os sete bits de magnitude e os pesos em potências de dois são:

2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
0	0	1	0	1	0	1

- Somando os pesos dos bits que são 1s temos:

$$16 + 4 + 1 = 21$$

- O bit de sinal é 1; portanto, o número decimal é –21

Exercício

- Determine o valor decimal do número **01110111** dado na forma sinal-magnitude

Complemento de 1

- Valores decimais de números positivos na forma do complemento de 1 são determinados somando os pesos de todos os bits 1s e ignorando os pesos relativos aos zeros
- Os valores decimais de números negativos são determinados atribuindo um valor negativo ao peso do bit de sinal, somando os pesos relativos aos bits 1s e somando 1 ao resultado

Exemplo

- Determine os valores decimais dos números binários sinalizados expressos em complemento de 1:

  a) 00010111

  b) 11101000

Exemplo

(a) Os bits e os respectivos pesos em potências de dois são:

-2^7	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
0	0	0	1	0	1	1	1

Somando os pesos correspondentes aos bits 1, temos:

$$16 + 4 + 2 + 1 = \mathbf{+23}$$

(b) Os bits e os respectivos pesos em potências de dois para o número negativo são mostrados a seguir. Observe que o bit de sinal negativo tem um peso de -2^7 ou -128.

-2^7	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
1	1	1	0	1	0	0	0

Somando os pesos em que os bits são 1s, temos:

$$-128 + 64 + 32 + 8 = -24$$

Somando 1 ao resultado, o número decimal final é

$$-24 + 1 = \mathbf{-23}$$

Exercício

- Determine o valor decimal do número **11101011** dado na forma do complemento de 1

Complemento de 2

- Valores decimais de números positivos e negativos na forma do complemento de 2 são determinados somando os pesos das posições de todos os bits 1s e ignorando as posições em que os bits são zeros

- O peso do bit de sinal em números negativos é dado com um valor negativo

Exemplo

- Determine os valores decimais dos números binários sinalizados a seguir expressos na forma do complemento de 2:

  a) 01010110

  b) 10101010

Exemplo

(a) Os bits e seus respectivos pesos em potências de dois para números positivos são:

-2^7	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
0	1	0	1	0	1	1	0

Somando-se os pesos relativos aos bits 1s, temos:

$$64 + 16 + 4 + 2 = \mathbf{+86}$$

(b) Os bits e seus respectivos pesos em potências de dois para números positivos são os seguintes. Observe que o bit de sinal negativo tem um peso de -2^7 ou -128.

-2^7	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
1	0	1	0	1	0	1	0

Somando-se os pesos relativos aos bits 1s, temos:

$$-128 + 32 + 8 + 2 = \mathbf{-86}$$

Exercício

- Determine o valor decimal do número **11010111** dado na forma do complemento de 2

Considerações

- A partir desses exemplos, podemos ver por que a **forma do complemento de 2** é a preferida para representar números inteiros sinalizados: para converter para decimal, é necessário simplesmente somar os pesos independente se o número é positivo ou negativo

Considerações

- O **sistema do complemento de 1** requer somar 1 ao resultado da soma dos pesos para números negativos, porém não para números positivos

- Além disso, a **forma do complemento de 1** não é muito usada porque existem duas representações possíveis para o zero (00000000 ou 11111111)

Adição (Complemento de 2)

- Os dois números de uma adição são **1ª parcela** e **2ª parcela**. O resultado é a **soma**. Existem quatro casos que podem ocorrer quando dois números binários sinalizados são somados.

1. Os dois números são positivos
2. O número positivo com magnitude maior que o número negativo
3. O número negativo com magnitude maior que o número positivo
4. Os dois números são negativos

Adição (Complemento de 2)

- **1. Ambos os números são positivos**

$$\begin{array}{r} 00000111 \\ +\ 00000100 \\ \hline 00001011 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} 7 \\ +\ 4 \\ \hline 11 \end{array}$$

- A soma é positiva estando portanto em binário verdadeiro (não complementado)
- A adição de dois números positivos resulta em um número positivo

Adição (Complemento de 2)

- **2. Número positivo com magnitude maior que a do número negativo**

		00001111	15
		+ 11111010	+ –6
Carry descartado →	1	00001001	9

- O bit de carry (transporte) final é descartado. A soma é positiva e portanto é um binário verdadeiro (não complementado)

Adição (Complemento de 2)

- **3. Número negativo com magnitude maior que a do número positivo**

$$\begin{array}{r} 00010000 \\ +\ 11101000 \\ \hline 11111000 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 16 \\ +\ -24 \\ \hline -8 \end{array}$$

- A soma é negativa e portanto na forma de complemento de 2

Adição (Complemento de 2)

- **4. Ambos os números são negativos**

$$
\begin{array}{lrr}
 & 11111011 & -5 \\
 & +\ 11110111 & +\,-9 \\
\hline
\text{Carry descartado} \longrightarrow & \boxed{1}\ \ 11110010 & -14
\end{array}
$$

- O bit de carry (transporte) final é descartado. A soma é negativa e portanto na forma do complemento de 2

Considerações

- Em um computador, os **números negativos** são armazenados na **forma do complemento de 2**
- Assim, o processo de adição é muito simples: **somar os dois números e descartar o bit de carry (transporte) final**

Condição de Overflow

- Quando dois números são somados e o número de bits necessário para representar a soma excede o número de bits nos dois números, resulta em um **overflow** (transbordamento de capacidade) conforme indicado por um bit de sinal incorreto

Exemplo

- Um overflow pode ocorrer apenas quando os dois números são positivos ou ambos negativos
- O exemplo a seguir com números de 8 bits ilustra essa condição
  - 125 + 58 = 183

	0	1	1	1	1	1	0	1		125
+	0	0	1	1	1	0	1	0	+	58
	1	**0**	**1**	**1**	**0**	**1**	**1**	**1**		183

Sinal incorreto **Magnitude incorreta**

Exemplo

- Nesse exemplo a soma de **183** requer **oito bits de magnitude**
- Como existem sete bits de magnitude nos números (um bit é o sinal), existe um bit de carry (transporte) no lugar do bit de sinal que produz a indicação de overflow

Subtração (Complemento de 2)

- A subtração é um caso especial da adição
- Por exemplo, a subtração de +6 (o **subtraendo**) de +9 (o **minuendo**) é equivalente à soma de −6 com +9

- Basicamente, **<u>a operação de subtração troca o sinal do subtraendo e o soma ao minuendo</u>**. O resultado da subtração é denominado de **diferença**

Exemplo

	$+9$	minuendo
$-$	$+6$	subtraendo
	3	diferença

A **subtração** é uma **soma** com o **sinal do subtraendo trocado**

	$+9$	1ª parcela
$+$	-6	2ª parcela
	3	soma

Subtração (Complemento de 2)

- Como a subtração é simples, uma adição com o subtraendo de sinal trocado, o processo é descrito da seguinte forma:

Para subtrair dois números sinalizados, tome o complemento de 2 do subtraendo e faça uma soma. Descarte qualquer bit de carry (transporte) final

Exemplo

- Realize cada uma das seguintes subtrações de números sinalizados:

  a) 00001000 – 00000011

  b) 00001100 – 11110111

  c) 11100111 – 00010011

  d) 10001000 – 11100010

Exemplo

(a) Neste caso, 8 – 3 = 8 + (–3) = 5.

		00001000	Minuendo (+8)
		+ 11111101	Complemento de 2 do subtraendo (–3)
Carry descartado →	**1**	**00000101**	Diferença (+5)

(b) Neste caso, 12 – (–9) = 12 + 9 = 21

00001100	Minuendo (+12)
+ 00001001	Complemento de 2 do subtraendo (+9)
00010101	Diferença (+21)

Exemplo

(c) Neste caso, –25 – (+19) = –25 + (–19) = – 44

	11100111	Minuendo (–25)
	+ 11101101	Complemento de 2 do subtraendo (–19)
Carry descartado →	**1 11010100**	Diferença (–44)

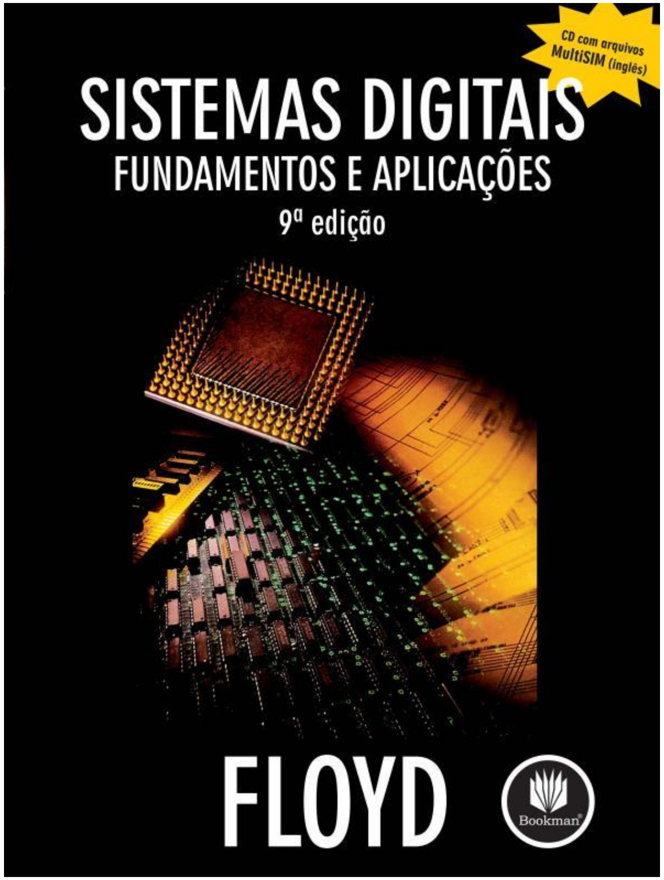
(d) Neste caso, –120 – (–30) = –120 + 30 = –90

10001000	Minuendo (–120)
+ 00011110	Complemento de 2 do subtraendo (+30)
10100110	Diferença (–90)

Exercício

- Subtraia **01000111** de **01011000**

Bibliografia



Capítulo 2