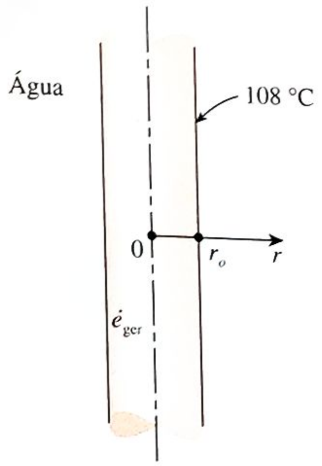

FIGURA 2–58 Esquema para o Exemplo 2–17.

EXEMPLO 2–17 Variação de temperatura em um aquecedor

Um aquecedor formado por um fio resistor longo e homogêneo de raio $r_o = 0{,}5$ cm e condutividade térmica $k = 13{,}5$ W/m·°C é usado para ferver água em pressão atmosférica pela passagem de corrente elétrica, como mostra a Fig. 2–58. O calor é gerado uniformemente no fio como resultado do aquecimento devido à resistência, a uma taxa de $\varepsilon_{ger} = 4{,}3 \times 10^7$ W/m³. Considerando que a temperatura da superfície externa do fio vale $T_s = 108$ °C, obtenha a relação para a distribuição da temperatura e determine a temperatura no eixo central do fio sob condições de operação permanente.

SOLUÇÃO Esse problema de transferência de calor é similar ao problema descrito no Exemplo 2–16, mas agora precisamos obter a relação para a variação da temperatura no fio em função de r. Equações diferenciais são apropriadas para essa finalidade.

Suposições **1** A transferência de calor é permanente, não varia com o tempo. **2** A transferência de calor é unidimensional, há simetria térmica em relação ao eixo central e não há variação na direção axial. **3** A condutividade térmica é constante. **4** A geração de calor no aquecedor é uniforme.

Propriedades A condutividade térmica é $k = 13{,}5$ W/m·°C.

Análise A equação diferencial que rege a variação de temperatura no fio é a Eq. 2–27,

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dT}{dr}\right) + \frac{\dot{e}_{ger}}{k} = 0$$

Esta é uma equação diferencial linear de segunda ordem, portanto a solução geral contém duas constantes arbitrárias. Para determinar essas constantes, é necessário especificar duas condições de contorno, que podem ser

$$T(r_o) = T_s = 108\ °C$$

e

$$\frac{dT(0)}{dr} = 0$$

A primeira condição de contorno afirma que a temperatura da superfície externa do fio é 108 °C. A segunda condição de contorno é a simetria em relação ao eixo central e afirma que a temperatura máxima no fio está no eixo central. Portanto, a inclinação da curva de temperatura em $r = 0$ deve ser zero (Fig. 2–59). As duas condições completam a formulação matemática do problema.

Embora não seja óbvio à primeira vista, a equação diferencial está em uma forma que pode ser resolvida por integração direta. Multiplicando ambos os lados da equação por r e rearranjando seus termos, obtemos

$$\frac{d}{dr}\left(r\frac{dT}{dr}\right) = -\frac{\dot{e}_{ger}}{k}r$$

Integrando em relação a r, temos

$$r\frac{dT}{dr} = -\frac{\dot{e}_{ger}}{k}\frac{r^2}{2} + C_1 \qquad (a)$$

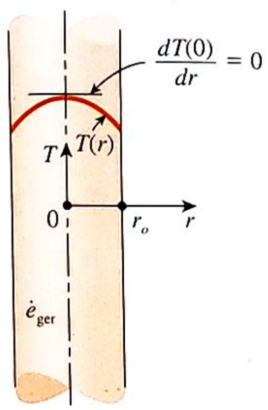

FIGURA 2–59 Simetria térmica no eixo central de um fio no qual há geração uniforme de calor.

a geração de calor é constante e a integral da derivada de uma função é a própria função. Isto é, a integração remove a derivada. Neste ponto, é conveniente aplicar a segunda condição de contorno, já que ela está relacionada à primeira derivada da temperatura, substituindo todas as ocorrências de r e dT/dr na Eq. (a) por zero. Assim, temos

$$0 \times \frac{dT(0)}{dr} = -\frac{\dot{e}_{\text{ger}}}{2k} \times 0 + C_1 \quad \rightarrow \quad C_1 = 0$$

Logo, C_1 é cancelada. Dividindo a Eq. (a) por r para que ela fique em uma forma prontamente integrável,

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{\dot{e}_{\text{ger}}}{2k} r$$

Integrando novamente em relação a r, obtemos

$$T(r) = -\frac{\dot{e}_{\text{ger}}}{4k} r^2 + C_2 \tag{b}$$

Aplicando agora a primeira condição de contorno e substituindo todas as ocorrências de r por r_0 e T por T_s, obtemos

$$T_s = -\frac{\dot{e}_{\text{ger}}}{4k} r_o^2 + C_2 \quad \rightarrow \quad C_2 = T_s + \frac{\dot{e}_{\text{ger}}}{4k} r_o^2$$

Substituindo essa relação de C_2 na Eq. (b) e reordenando os termos, temos

$$T(r) = T_s + \frac{\dot{e}_{\text{ger}}}{4k} (r_o^2 - r^2) \tag{c}$$

que é a solução desejada para a distribuição de temperatura no fio em função de r. A temperatura no eixo central ($r = 0$) é obtida substituindo r na Eq. (c) por zero e substituindo os valores conhecidos:

$$T(0) = T_s + \frac{\dot{e}_{\text{ger}}}{4k} r_o^2 = 108\ °\text{C} + \frac{4{,}3 \times 10^7\ \text{W/m}^3}{4 \times (13{,}5\ \text{W/m}\cdot°\text{C})} (0{,}005\ \text{m})^2 = \mathbf{128\ °C}$$

Discussão A temperatura do eixo central é 20 °C acima da temperatura na superfície externa do fio. Observe que a expressão acima para a temperatura do eixo central é idêntica à Eq. 2–71, que foi obtida usando o balanço de energia em um volume de controle.