

Física Quântica (BCK0103-15)

aula 04 - 2019



Luciano Cruz

Sala 609 – Torre 3 – Bloco A

luciano.cruz@ufabc.edu.br

Na última aula (03/10/19)

- Modelos atômicos;
- Modelo quântico de Bohr;
- Experimento de Franck-Hertz;
- Hipótese de de Broglie.

Na aula de hoje (08/10/19)

- Ondas de Matéria;
- Revisitando ondas;
- Interferência (fótons e elétrons) e interferômetros;
- Dualidade onda-partícula e princípio de complementaridade;
- Princípio de incerteza de Heisenberg.

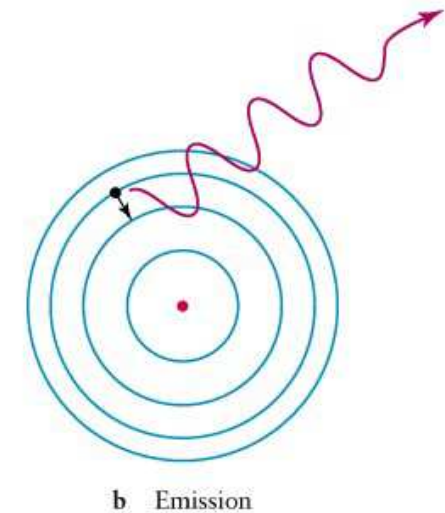
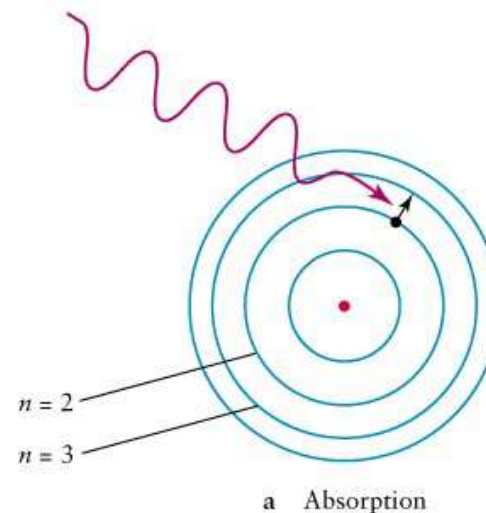
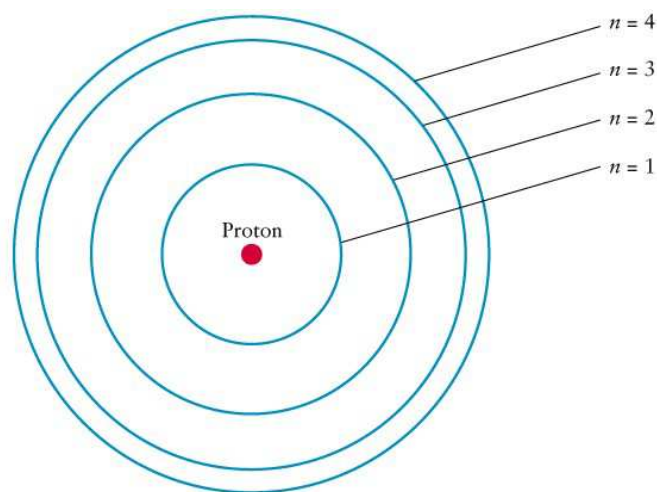
O modelo de Bohr

Os três postulados de Bohr:

1 - Os elétrons se movem em certas órbitas sem irradiar energia (**violação da eletrodinâmica clássica**);

2 - Os átomos irradiam quando um elétron sofre uma transição de um estado estacionário para outro segundo a equação: $hf = E_f - E_i$ (**quantização do momento angular**);

3 - Os resultados de processos envolvendo grandes números quânticos devem recobrir aqueles que se obtém utilizando a física clássica (**princípio de correspondência**);



Grandeza física quantizada:

$$L = mvr = \frac{nh}{2\pi} = n\hbar \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Combinando equações clássicas e a **quantização de momento angular**, podemos obter diversas características do átomo de Hidrogênio:

Raio:

$$r_n = \frac{n^2 \hbar^2}{mkZe^2} = \frac{n^2 a_0}{Z}$$

$$a_0 = \frac{\hbar^2}{mke^2} = 0.529 \text{ \AA} = 0.0529 \text{ nm}$$

Energia:

$$E_n = -\frac{mk^2e^4}{2\hbar^2n^2} = -\frac{E_0}{n^2}$$

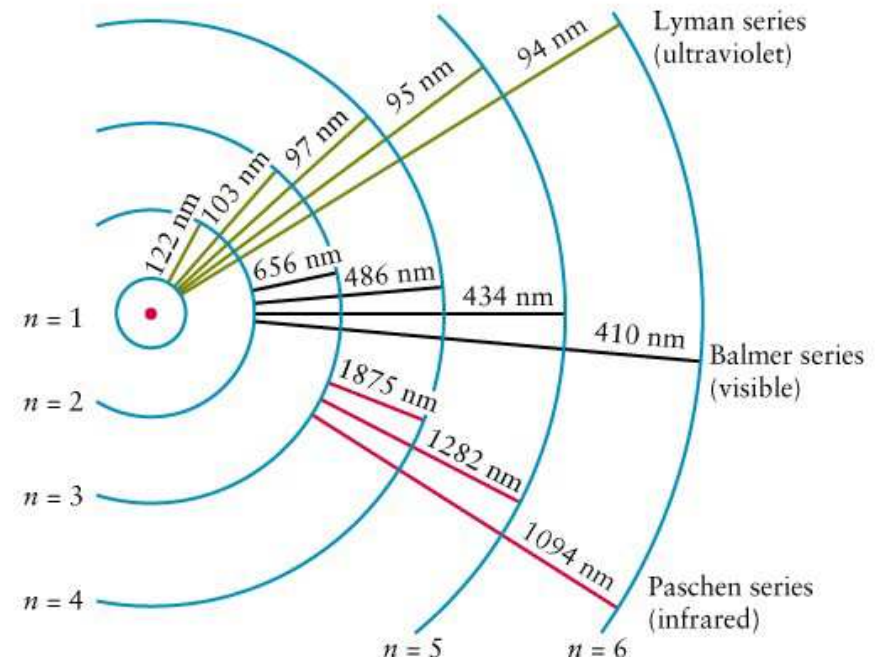
$$E_0 = \frac{mk^2e^4}{2\hbar^2} = 2.18 \times 10^{-18} \text{ J} = 13.6 \text{ eV}$$

Espectro:

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{E_0 Z^2}{hc} \left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right)$$

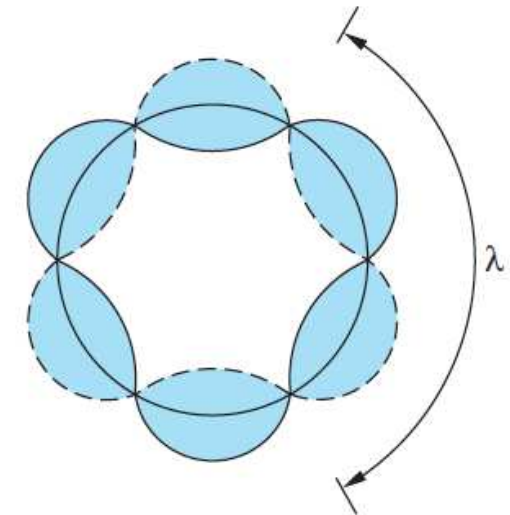
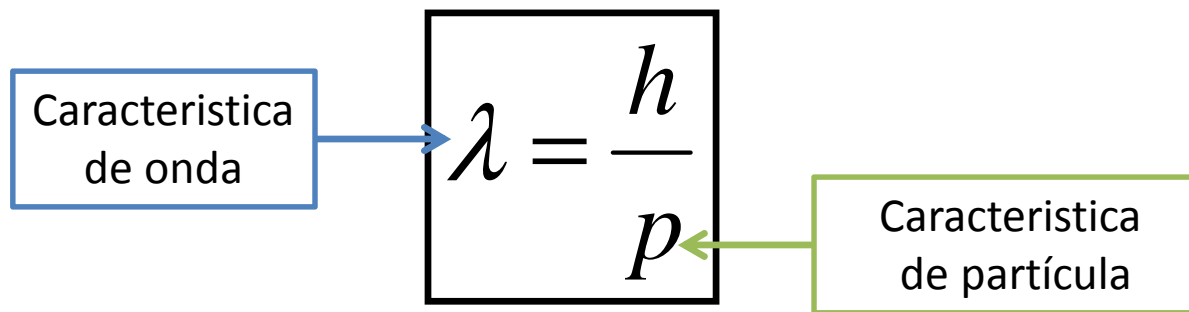
$$\frac{1}{\lambda} = Z^2 R \left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right)$$

$$R = \frac{\mu k^2 e^4}{4\pi c \hbar^3} = \frac{mk^2 e^4}{4\pi c \hbar^3} \left(\frac{1}{1 + m/M} \right) = R_\infty \left(\frac{1}{1 + m/M} \right)$$



Hipótese de de Broglie

Em 1924, o físico francês Louis De Broglie lançou a hipótese de que, se a luz apresenta natureza dual, uma partícula também apresentaria características ondulatórias. De Broglie procurou associar a natureza dual da luz com o comportamento do elétron e afirmou que **“a todo elétron em movimento está associada uma onda característica”**, postulado que princípio da dualidade ou princípio de De Broglie.



Lembrando ainda que:

$$E = pc = hf = \frac{hc}{\lambda}$$

$$2\pi r = n\lambda$$

Medida do comprimento de onda de Ondas de Matéria

Caso de partículas não relativísticas ($v \ll c$):

$$E = \frac{p^2}{2m} = eV_0$$

Podemos escrever ainda:

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{hc}{pc} = \frac{hc}{(2mc^2 eV_0)^{1/2}}$$

Se usarmos que $hc = 1.24 \times 10^3 \text{ eV} \cdot \text{nm}$ e para o caso de elétrons

$$mc^2 = 0.511 \times 10^6 \text{ eV},$$

Obtemos a expressão para elétrons não relativísticos

$$\boxed{\lambda = \frac{1.226}{V_0^{1/2}} \text{ nm}} \quad \text{Para} \quad eV_0 \ll mc^2$$

Qual o comprimento de onda de um elétron com uma energia cinética de 10 eV?

Sabemos que a energia cinética é dada por $E_k = \frac{p^2}{2m}$

$$\begin{aligned} p &= \sqrt{2mE_k} \\ &= \sqrt{(2)(9.11 \times 10^{-31} \text{ kg})(10 \text{ eV})(1.60 \times 10^{-19} \text{ J/eV})} \\ &= 1.71 \times 10^{-24} \text{ kg} \cdot \text{m/s} \end{aligned}$$

Portanto:

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{6.63 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}}{1.71 \times 10^{-24} \text{ kg} \cdot \text{m/s}} \\ &= 3.88 \times 10^{-10} \text{ m} = 0.39 \text{ nm} \end{aligned}$$

Medida do comprimento de onda de Ondas de Matéria

Caso de partículas relativísticas ($E_k > E_0$):

Vamos considerar a equação relativística que relaciona a energia total ao momento:

$$E^2 = (pc)^2 + (mc^2)^2$$

Como a energia de repouso E_0 é mc^2 podemos escrever:

$$(E_0 + E_k)^2 = (pc)^2 + E_0^2$$

Portanto, o momento é dado por:

$$p = \frac{(2E_0E_k + E_k^2)^{1/2}}{c}$$

O comprimento de onda fica:

$$\lambda = \frac{hc}{(2E_0E_k + E_k^2)^{1/2}}$$

Podemos escrever ainda como:

Comprimento de onda de Compton

$$\lambda = \frac{hc/mc^2}{(2E_0E_k + E_k^2)^{1/2}/E_0} = \frac{h/mc}{[2(E_k/E_0) + (E_k/E_0)^2]^{1/2}}$$

$$\lambda/\lambda_c = \frac{1}{[2(E_k/E_0) + (E_k/E_0)^2]^{1/2}}$$

Um detector a bordo de um satélite observa um próton proveniente do espaço com uma energia cinética de 150 GeV. Qual é o comprimento de onda do prrótton?

A energia de repouso do próton é $mc^2 = 0.938 \text{ GeV}$ e a massa é $1.67 \times 10^{-27} \text{ kg}$

A relação entre a energia de cinética e a de repouso:

$$\frac{E_k}{E_0} = \frac{150 \text{ GeV}}{0.938 \text{ GeV}} = 160$$

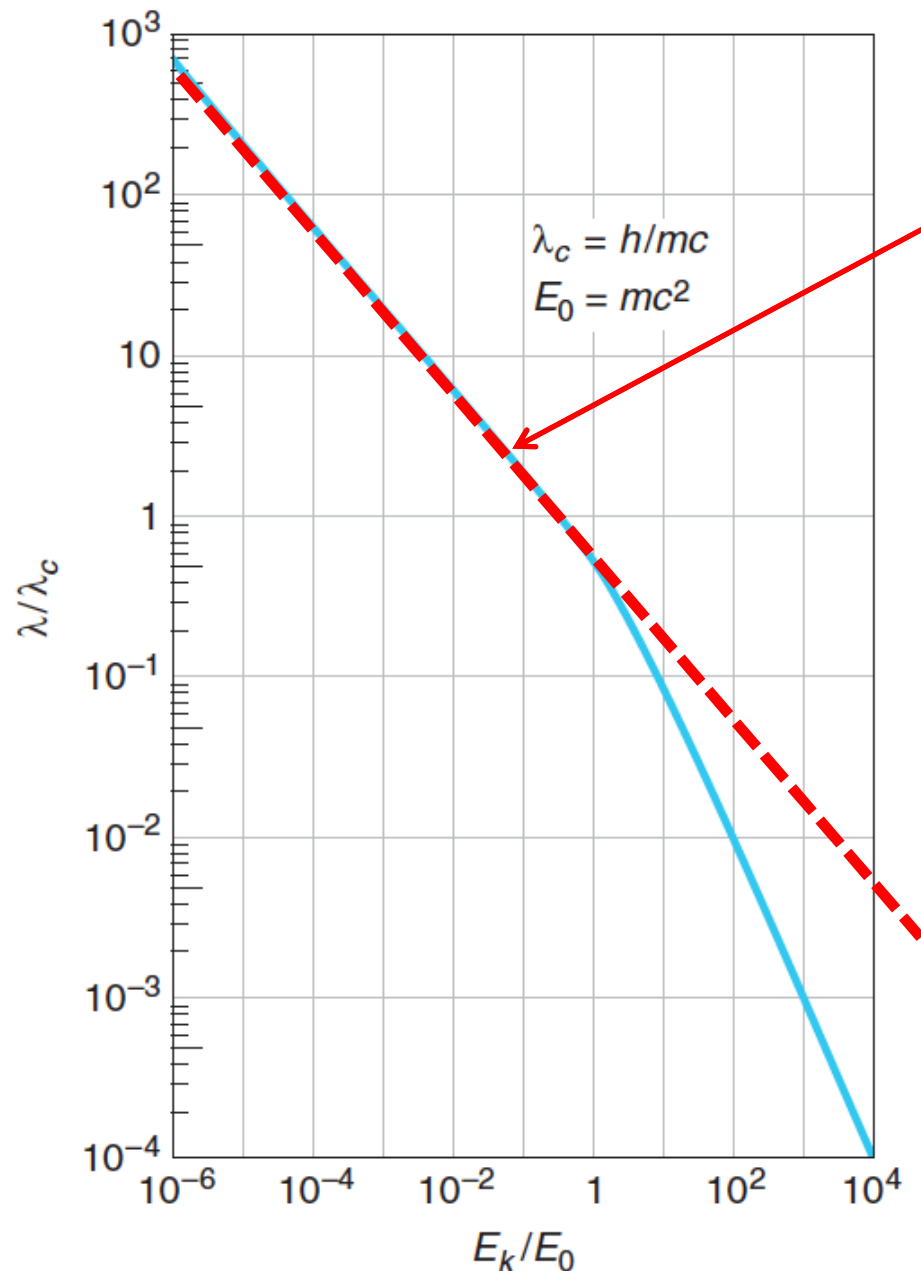
Podemos calcular o comprimento de onda de compton correspondente

$$\lambda_c = \frac{h}{mc} = \frac{6.63 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}}{(1.67 \times 10^{-27} \text{ kg})(3 \times 10^8 \text{ m/s})} = 1.32 \times 10^{-15} \text{ m}$$

$$\lambda = \lambda_c \frac{1}{[2(E_k / E_0) + (E_k / E_0)^2]^{1/2}} = \frac{1.32 \times 10^{-15}}{161} = 8.2 \times 10^{-18} \text{ m} = 8.2 \times 10^{-3} \text{ fm}$$

Faça os exercícios 22 a 25 da lista de exercícios 1.

Gráfico do comprimento de onda de de Broglie em função de E_k/E_0



Usando a
mecânica
Newtoniana

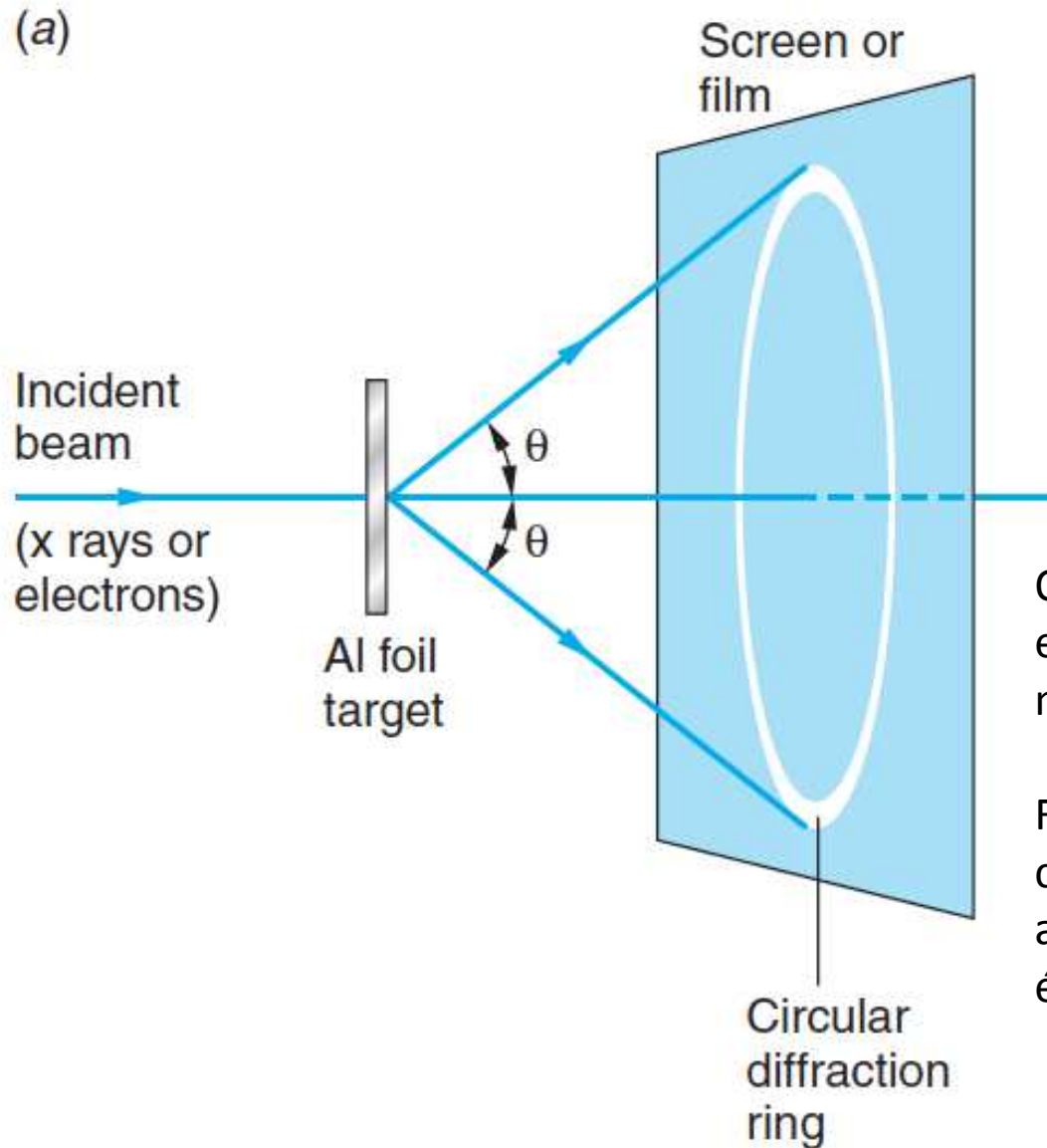
Para calcular: Mostre que a expressão:

$$\lambda/\lambda_c = \frac{1}{[2(E_k/E_0) + (E_k/E_0)^2]^{1/2}}$$

Se reduz para a expressão não relativística quando $E_k \ll mc^2$

O Experimento de G.P. Thomson

Aparato experimental similar ao do Laue para raios X.

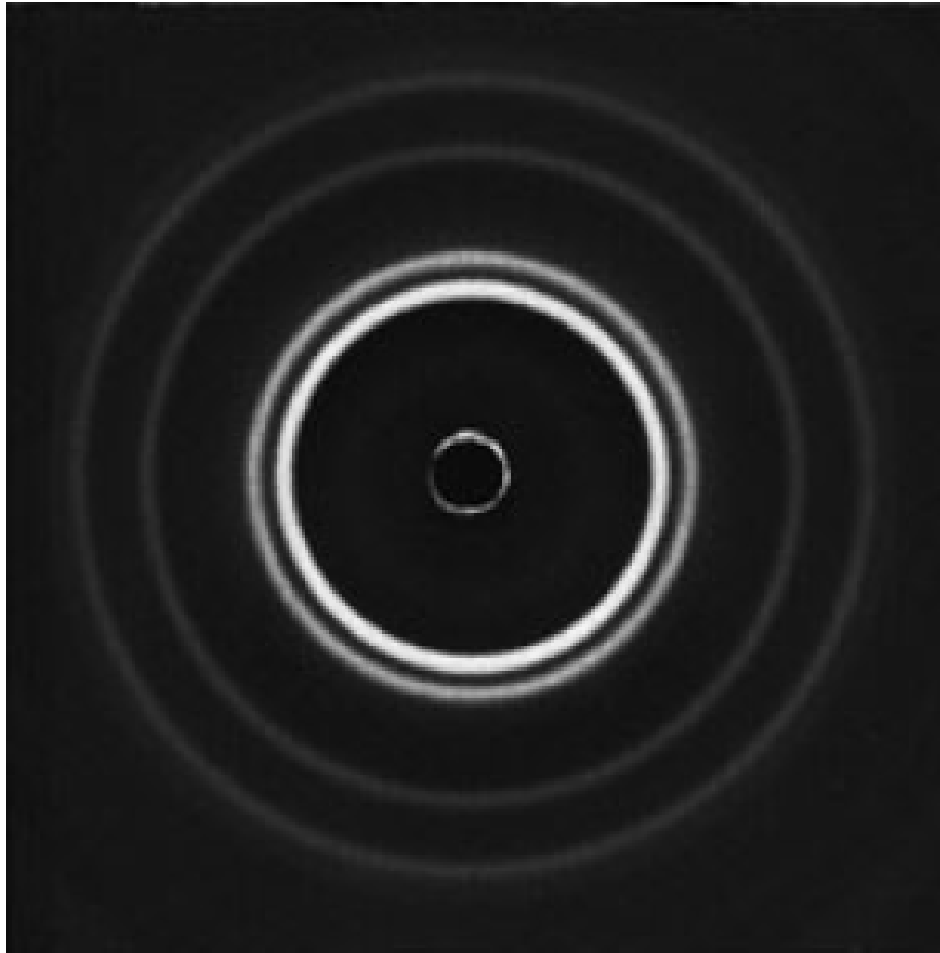


George P. Thomson
1892 - 1975

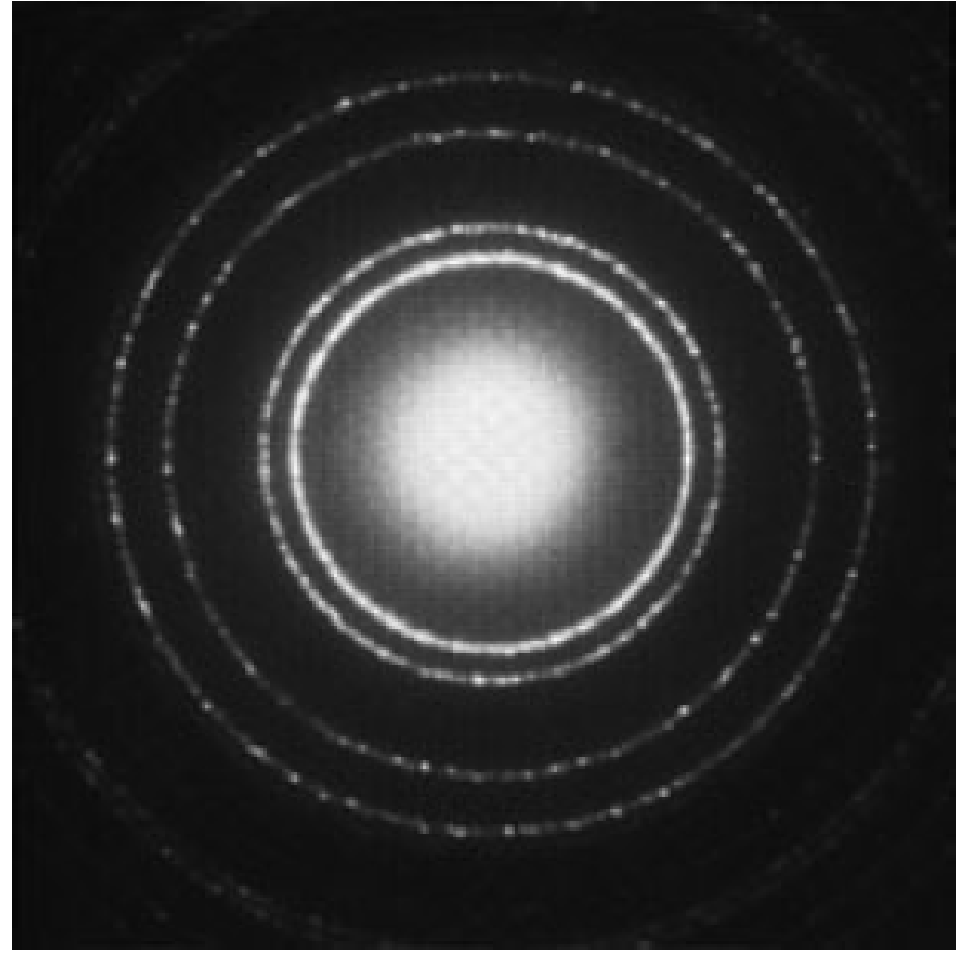
Observou a passagem de elétrons de energia de 10 a 40 keV por folhas metálicas delgadas.

Folha de metal possui muitos cristalitos (monocristais orientados aleatoriamente), a figura de difração é formada por anéis concêntricos.

Padrões de difração ao passar por folhas metálicas



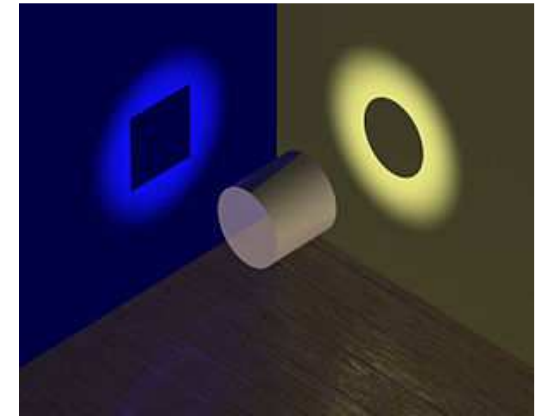
Raios X com $\lambda = 0,071\text{nm}$



Elétrons de energia 600 eV ($\lambda = 0,05\text{nm}$)

Qual o limite do comportamento dual?

Tanto a luz quanto partículas, como os elétrons, parecem apresentar um comportamento que, as vezes, é corpuscular e, as vezes, ondulatório. Todos os objetos quânticos obedecem esta **dualidade onda-partícula**: em alguns experimentos, se comportam como ondas, em outros como partícu



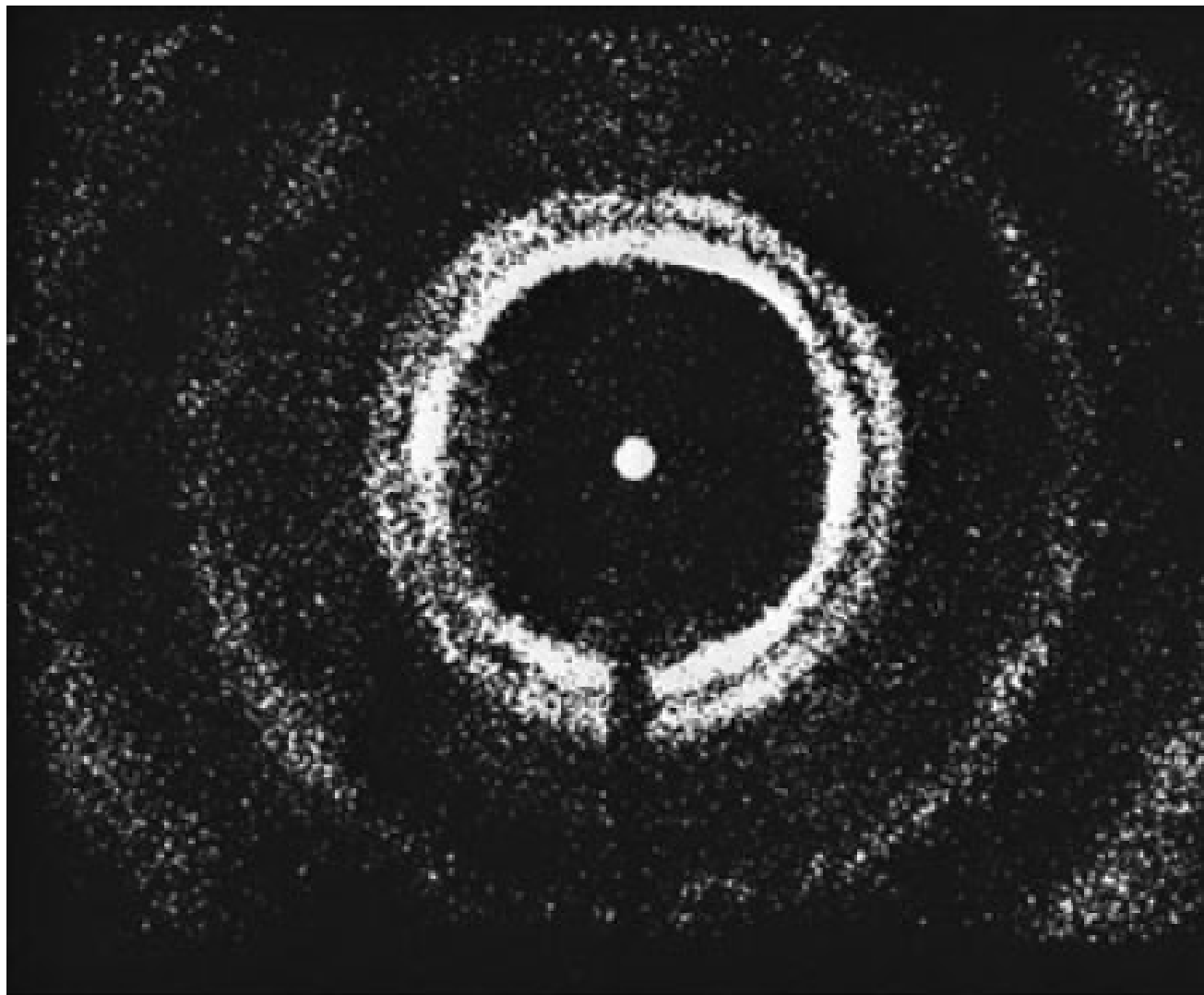
Mas qual é o limite para se observar um efeito de interferência em objetos quânticos?

Quando não somos mais capazes de observar interferência quântica?



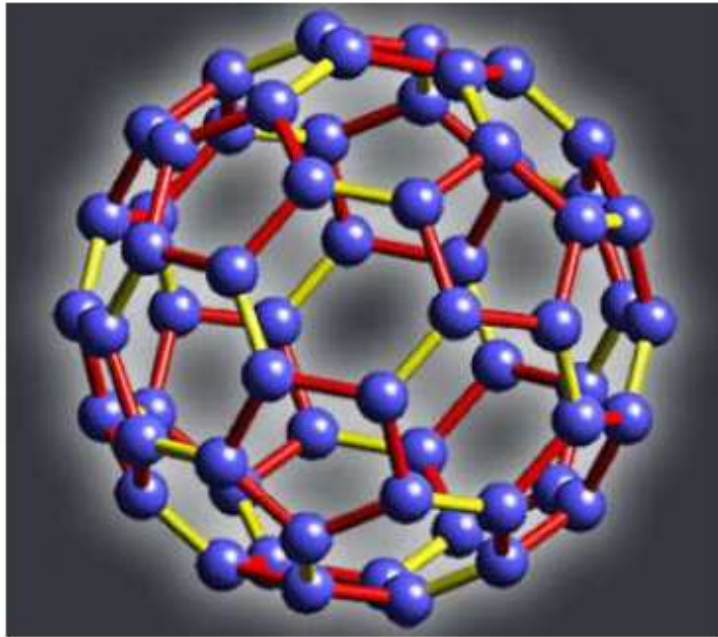
"Once and for all I want to know what I'm paying for. When the electric company tells me whether light is a wave or a particle I'll write my check."

Difração de Neutrons



Energia de 0,0568 eV (comprimento de onda de 0,120 nm)

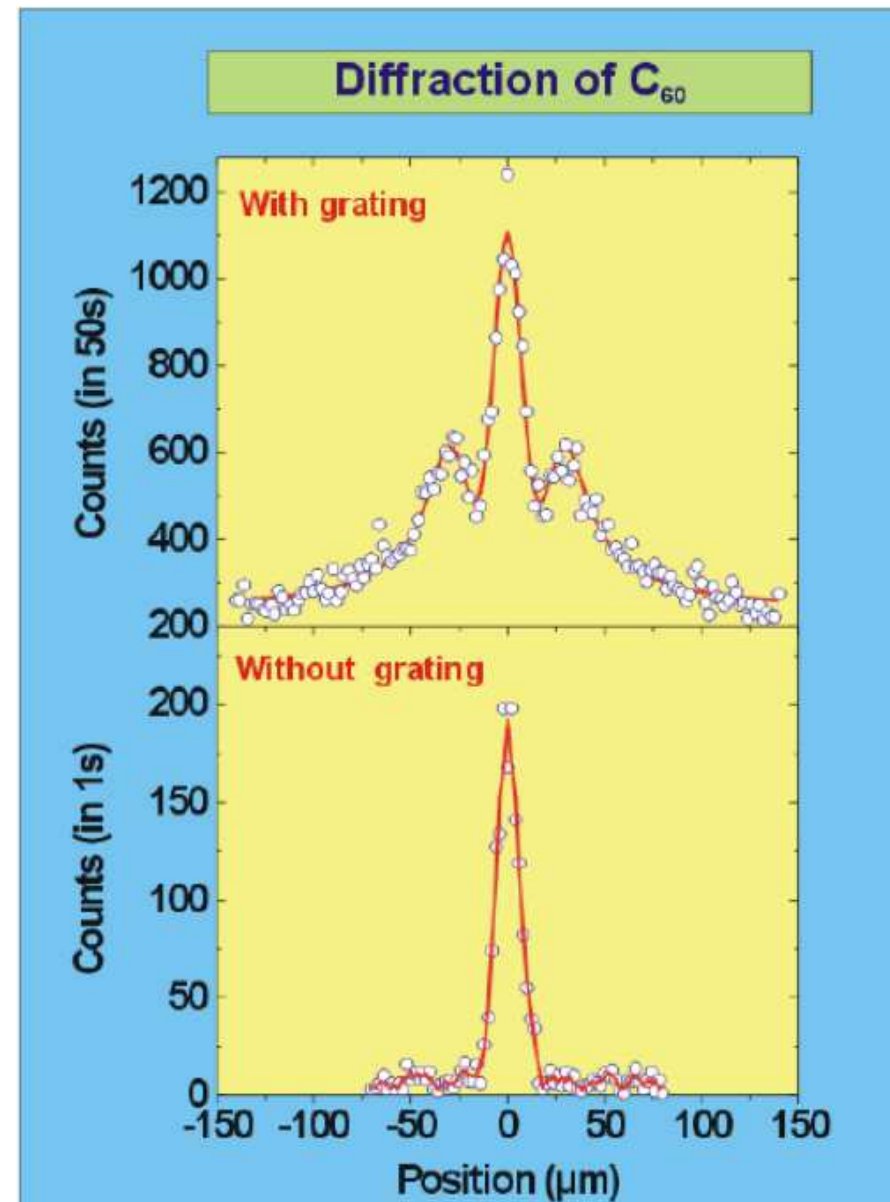
Medido o padrão de interferência do Fulereno (composto de 60 átomos de carbono) [Zeilingier – Nature, 461, 609 (1999)]



$$\lambda_{C_{60}} = 2.5 \times 10^{-3} nm$$

As fendas tinham largura de 50 nm
é a velocidade das moléculas era
de 220 m/s

Seria possível medir interferência com
objetos maiores, tais como vírus ou
bactérias?!?



Interferências de Moléculas com 2000 átomos

nature
physics

LETTERS

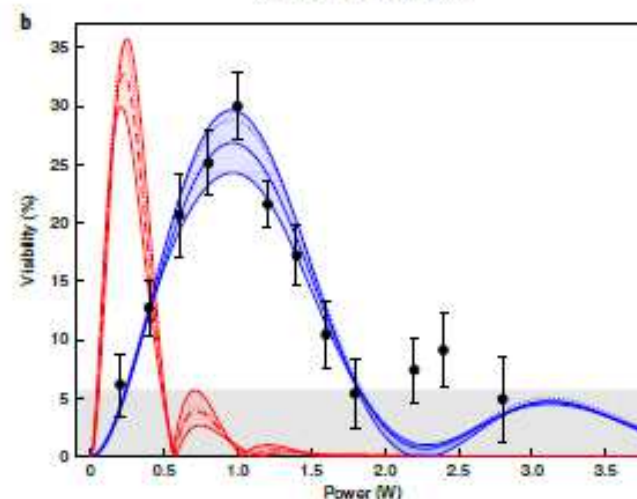
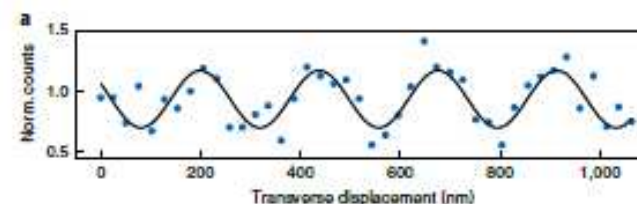
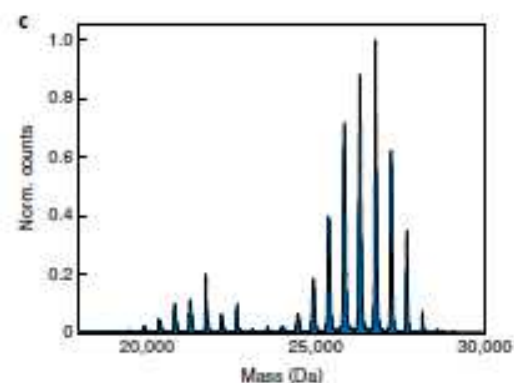
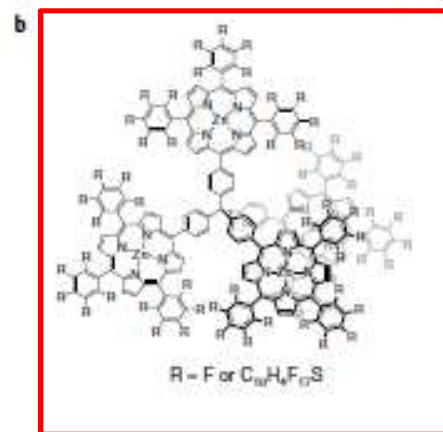
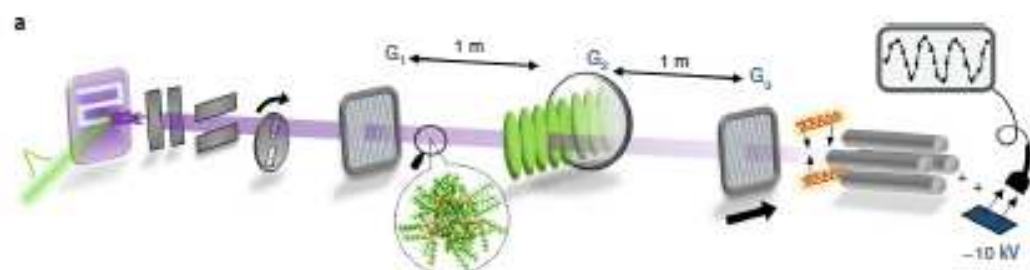
<https://doi.org/10.1038/s41567-019-0663-9>

Received: 10 May 2019; Accepted: 9 August 2019;

Published online: 23 September 2019

Quantum superposition of molecules beyond 25 kDa

Yaakov Y. Fein¹, Philipp Geyer¹, Patrick Zwick², Filip Kialka¹, Sebastian Pedalino¹, Marcel Mayor^{2,3,4}, Stefan Gerlich¹ and Markus Arndt^{1*}



The Nobel Prize in Physics 1937

Clinton Davisson, George Paget Thomson



The Nobel Prize in Physics 1937 was awarded jointly to Clinton Joseph Davisson and George Paget Thomson "for their experimental discovery of the diffraction of electrons by crystals."

Curiosas ironías históricas.... ;-)

The Nobel Prize in Physics 1906

J.J. Thomson

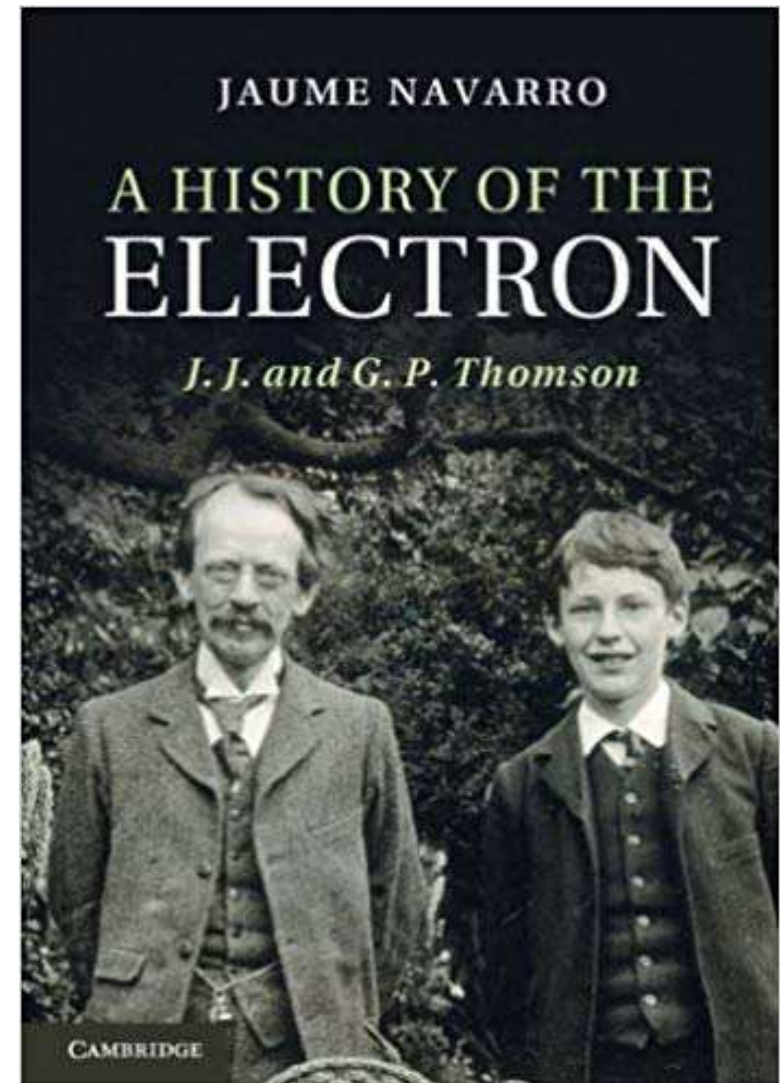


The Nobel Prize in Physics 1906 was awarded to J.J. Thomson "in recognition of the great merits of his theoretical and experimental investigations on the conduction of electricity by gases".

O Pai foi premiado por descobrir a partícula Elétron;
O Filho por mostrar que o Elétron “poderia” se
comportar como onda.

Filhos tende a se opor aos pais.... ;-)

Two landmarks in the history of physics are the discovery of the particulate nature of cathode rays (the electron) by J. J. Thomson in 1897 and the experimental demonstration by his son G. P. Thomson in 1927 that the electron exhibits the properties of a wave. Together, the Thomsons are two of the most significant figures in modern physics, both winning Nobel prizes for their work. This book presents the intellectual biographies of the father-and-son physicists, shedding new light on their combined understanding of the nature of electrons and, by extension, of the continuous nature of matter. It is the first text to explore J. J. Thomson's early and later work, as well as the role he played in G. P. Thomson's education as a physicist and how he reacted to his son's discovery of electron diffraction. This fresh perspective will interest academics and graduate students working in the history of early twentieth-century physics.



Uma das descobertas mais surpreendentes na mecânica quântica é o surgimento do conceito da **dualidade onda-partícula** dos sistemas físicos.

Obviamente, para a apreciação adequada desta “revelação” é preciso um conhecimento básico do que é uma **partícula** e o que é uma **onda**.



O que é uma onda?

Elevação e depressão da camada superficial de uma massa líquida, com sucessão rítmica; (ondas no mar...)



[FÍSICA] Perturbação, contínua ou transitória, que se propaga com transporte de energia através de um meio, quer em virtude das propriedades elásticas desse meio material, quer em virtude das propriedades elétricas ou magnéticas do espaço (onda eletromagnética)



*Tudo passa, tudo sempre
passará
A vida vem em ondas,
como um mar
Num indo e vindo
infinito*

Lulu Santos

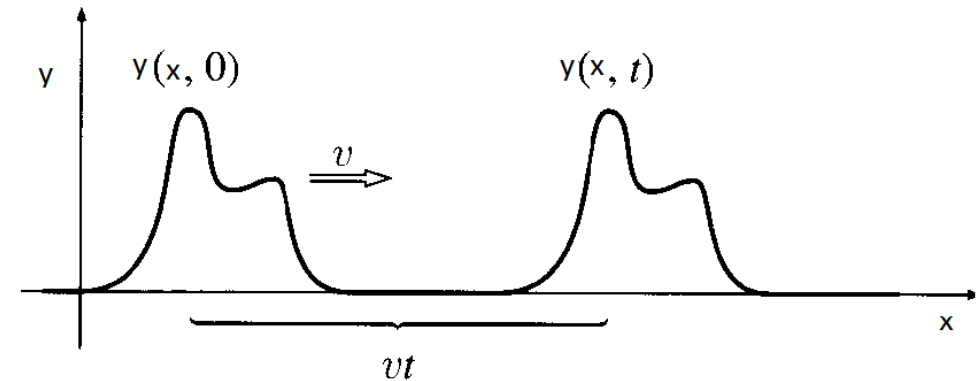


Conceito de onda

$y \equiv y(x, t)$ é a **função de onda**

No instante $t=0$, podemos escrever a condição

$$y(x, t) = y(x - vt, 0) = g(x - vt)$$



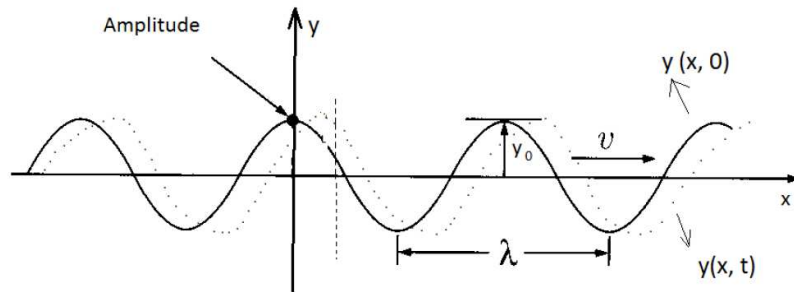
Usando a mecânica Newtoniana é possível mostrar que:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

Onde: $v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$ T é a tensão na corda e μ é a densidade linear da corda.

Ondas mecânicas necessitam de um meio material para se propagar.

“Anatomia de uma onda”



$$y(x, t) = y_0 \cos [k(x - vt)] = y_0 \cos \left[\frac{2\pi}{\lambda} (x - vt) \right]$$

Comprimento de onda: Distância necessária para que um ciclo completo da onda se repita.

λ

Período: Intervalo de tempo para que um ciclo da onda se repita.

$$T = \frac{\lambda}{v}$$

Frequência: Inverso do Período (número de ciclos por segundo).

$$f = \frac{1}{T} = \frac{v}{\lambda}$$

Frequência angular: frequência mensurada em radianos

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

Número de onda: grandeza inversa ao comprimento de onda

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

Amplitude: valor máximo alcançado pela onda.

Das expressões acima, podemos ver que:

$$v = \lambda f$$

Uma constatação interessante é que essa equação admite soluções da forma:

$$y_+(x, t) = g(x - vt)$$

e

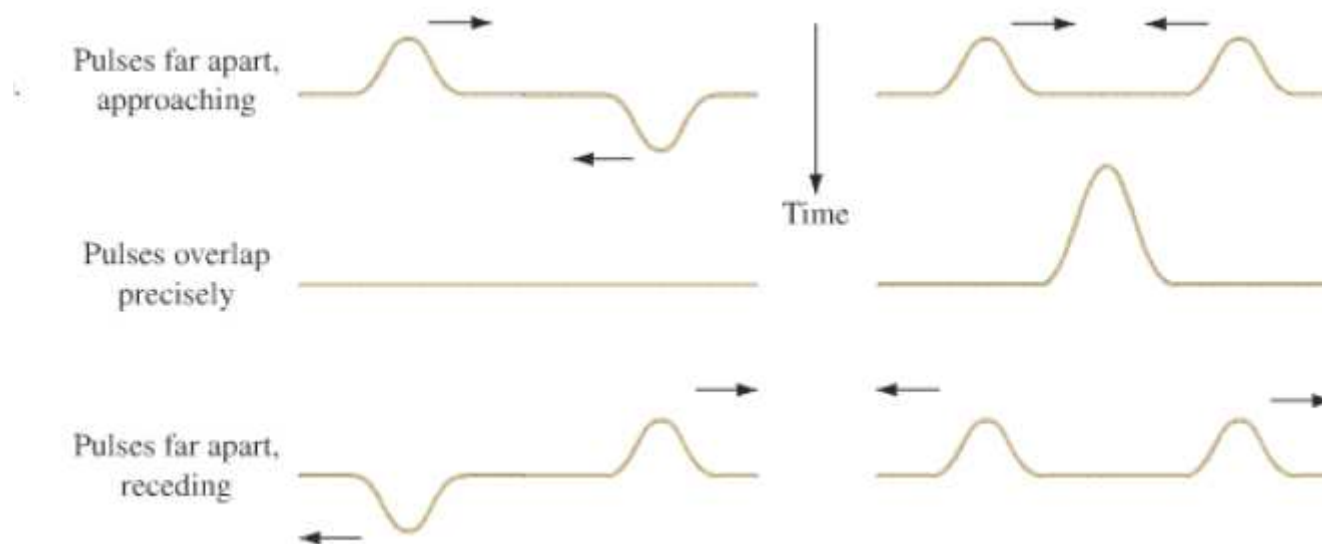
$$y_-(x, t) = h(x + vt)$$

(Onda se propagando para a direita)

(Onda se propagando para a esquerda)

Uma propriedade importante destas equações é que a superposição de duas soluções, também é uma solução.

$$y_s(x, t) = g(x - vt) + h(x + vt)$$



Observe que colocamos apenas uma restrição no argumento da função e não em sua forma. Portanto, qualquer função de $x+vt$ ou $x-vt$, deve ser solução da equação de onda.

Superposição de duas ondas

Duas ondas com mesma frequência, mas fases distintas:

$$y(t) = A\cos(\omega t + \phi_1) + A\cos(\omega t + \phi_2) = A[\cos(\omega t + \phi_1) + \cos(\omega t + \phi_2)]$$

Com o uso de transformações trigonométricas adequadas:

$$y(t) = 2A \cos\left(\frac{\phi_1 - \phi_2}{2}\right) \cos\left(\omega t + \frac{\phi_1 + \phi_2}{2}\right)$$

$$\text{Nova amplitude: } A_{\text{soma}} = 2A \cos\left(\frac{\phi_1 - \phi_2}{2}\right) \quad \text{Nova fase: } \phi_{\text{soma}} = \frac{\phi_1 + \phi_2}{2}$$

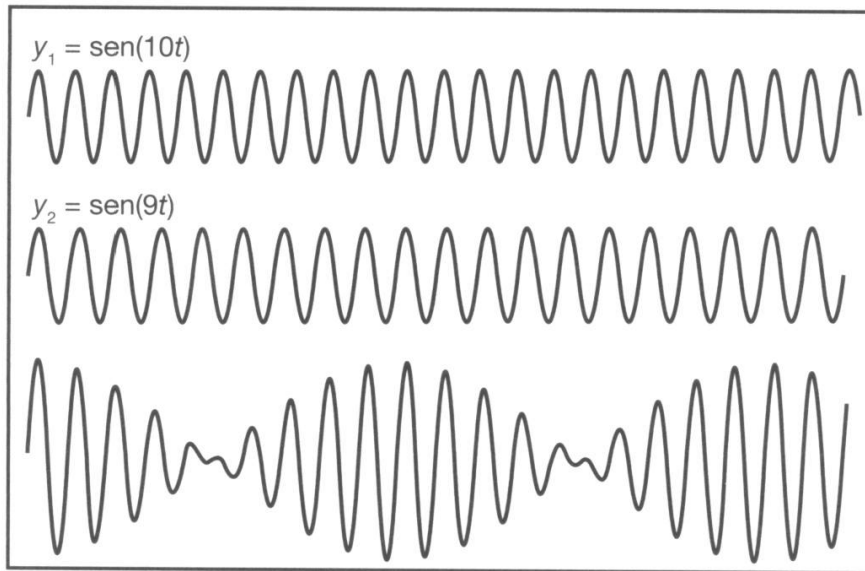
Duas ondas com frequência diferentes.

$$y(t) = A\cos(\omega_1 t) + A\cos(\omega_2 t)$$

$$y(t) = 2A \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t\right) \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t\right)$$

$$\text{Nova amplitude: } A_{\text{envelope}} = \pm 2A \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t\right)$$

Exemplos de superposição de duas ondas



O resultado da soma de duas ou mais ondas é uma nova onda, que pode ser determinada pela soma das ondas ponto a ponto.

**Efeito de Batimento
(vamos “ouvir” um exemplo)**

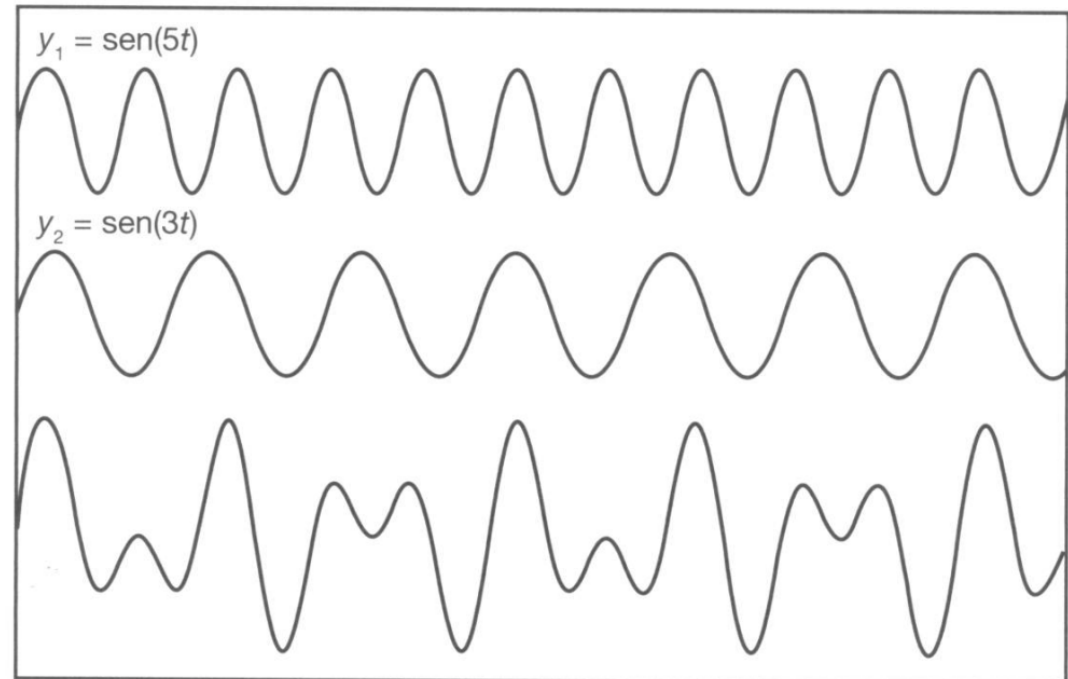
O cálculo, em geral, é realizado utilizando as relações trigonométricas adequadas:

$$\text{sen}(A \pm B) = \text{sen}A \cos B \pm \text{sen}B \cos A$$

$$\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \text{sen}A \text{sen}B$$

$$\tan(A \pm B) = \frac{\tan A \pm \tan B}{1 \mp \tan A \tan B}$$

$$\cot(A \pm B) = \frac{\cot A \cot B \mp 1}{\cot B \pm \cot A}$$



Uma identidade matemática importante: a relação de Euler

$$y(x, t) = y_0 \cos \left[\frac{2\pi}{\lambda} (x - vt) \right] = y_0 \cos (kx - \omega t)$$

Sabemos que:

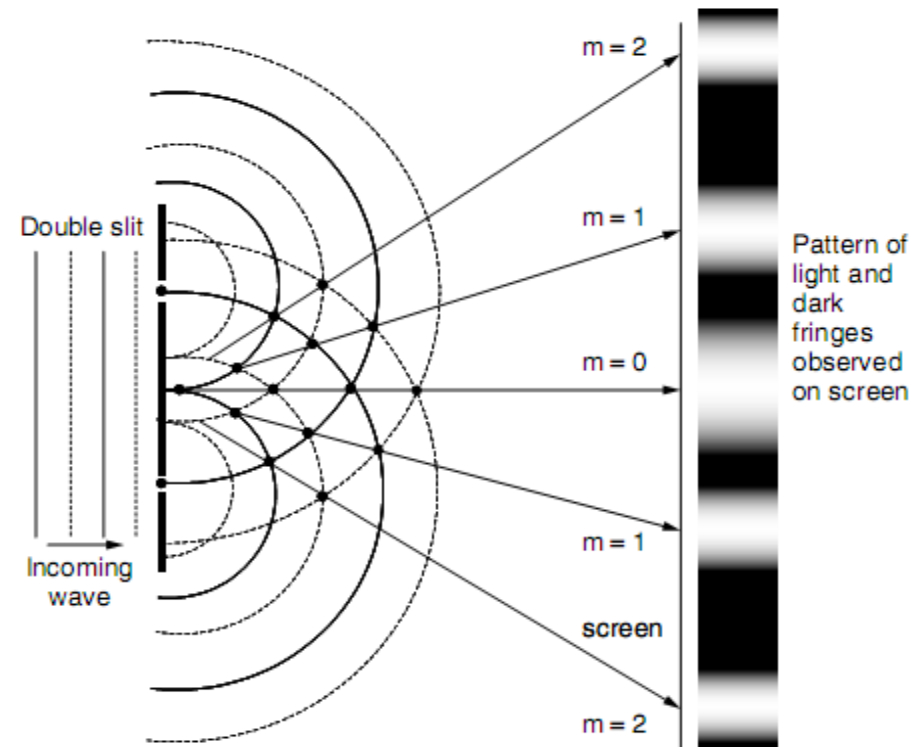
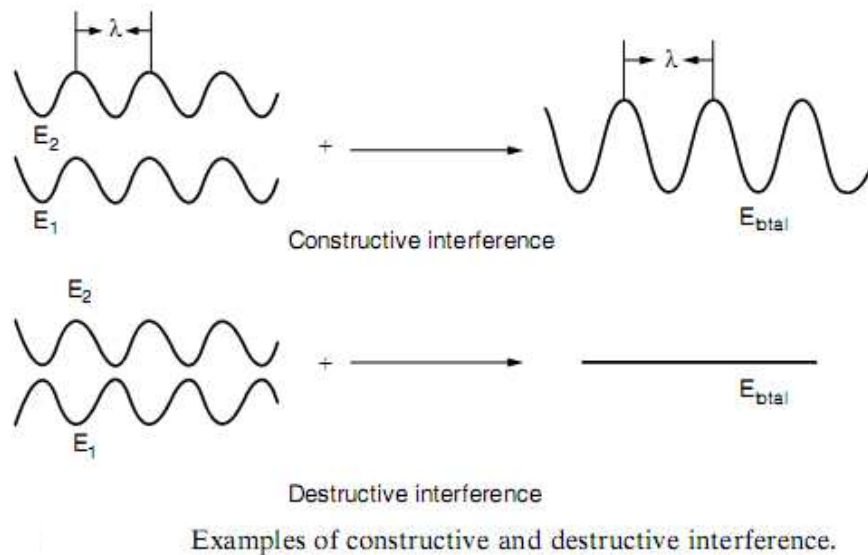
$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta \quad (\text{relação de Euler})$$

Assim, podemos escrever:

$$y(x, t) = y_0 \operatorname{Re} \left[e^{i(kx - \omega t)} \right]$$

Esta última forma da solução da equação de onda é bastante prática para realizar cálculos. Esta solução será bastante usada na segunda parte da disciplina.

O experimento de Fenda Dupla



Visibilidade:

$$\mathcal{V} = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} = \frac{4\sqrt{I_1 I_2} \cos \alpha}{2(I_1 + I_2)}$$

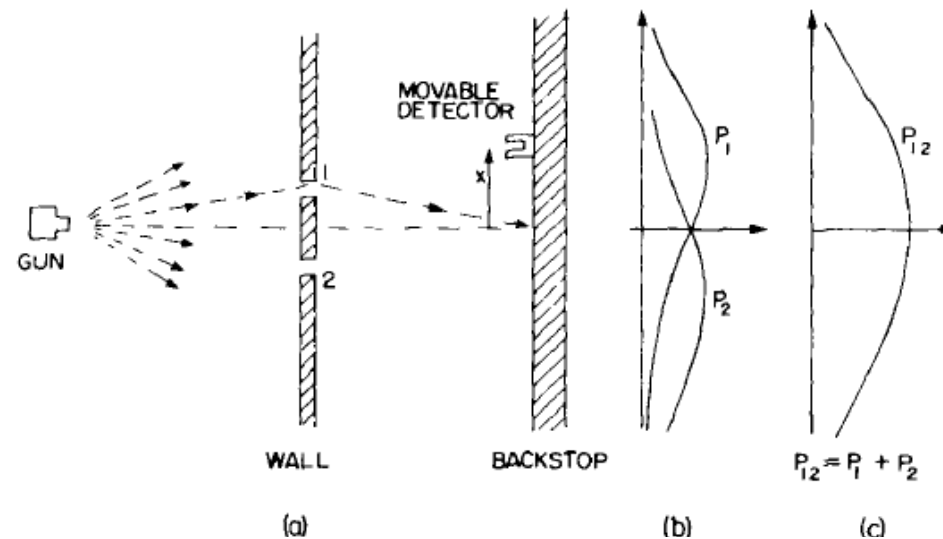
Veja no fim dessa aula os detalhes do cálculo da determinação da visibilidade.

$$m\lambda = d \sin \theta, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \text{ etc.}$$

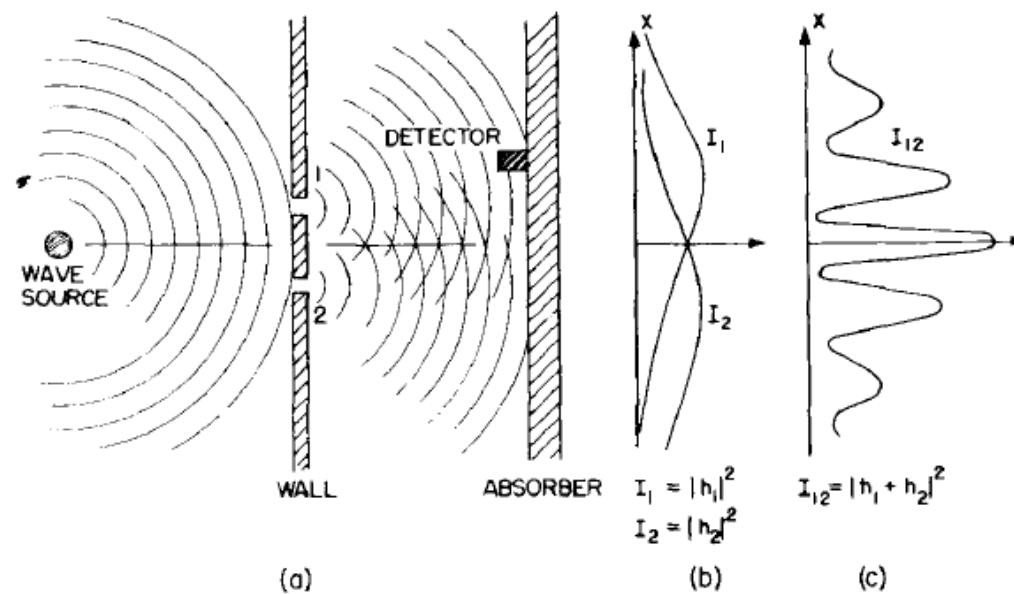
Interferência é um método muito eficiente de evidenciar o caráter ondulatório de um ente físico. Também permite discutir a “coerência” da fonte que emite a onda.

O Experimento da FENDA DUPLA

Partículas

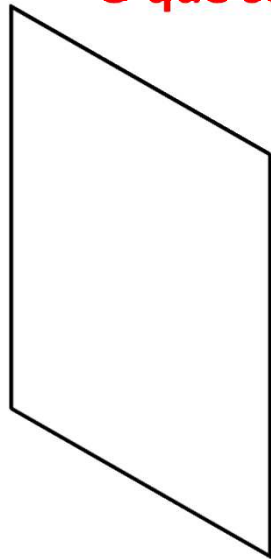


Ondas

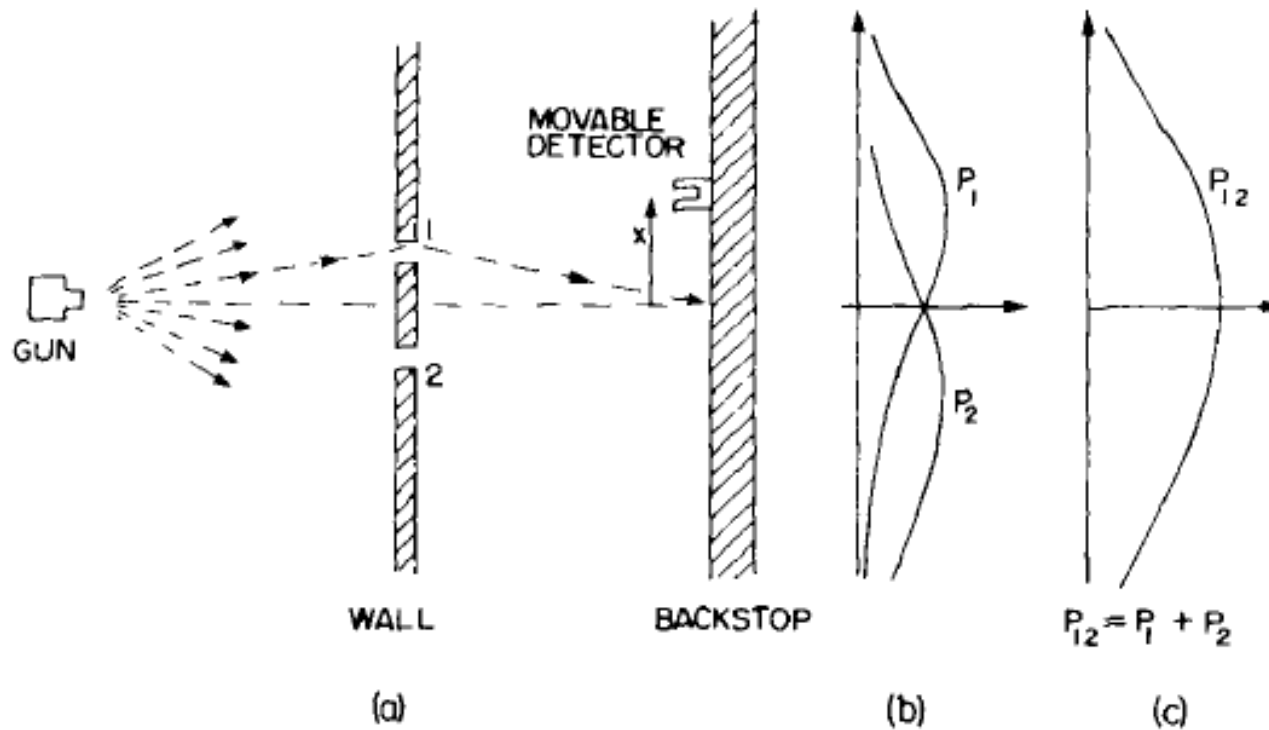


Experimento de interferência permite discriminar se o ente físico é formado por ondas ou partículas.

O que se espera observar quando se passam partículas (como elétrons) por Fendas Duplas?



O que
apareceria neste
anteparo?



Elétrons passando por um aparato de fenda dupla.



<https://www.youtube.com/watch?v=jvO0P5-SMxk>

O experimento de fenda dupla com elétrons

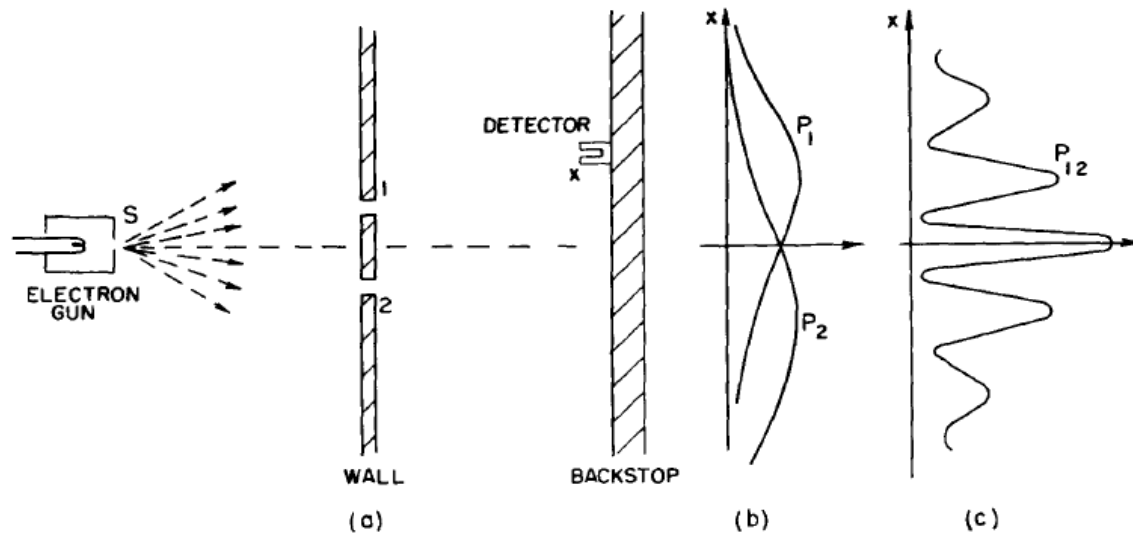
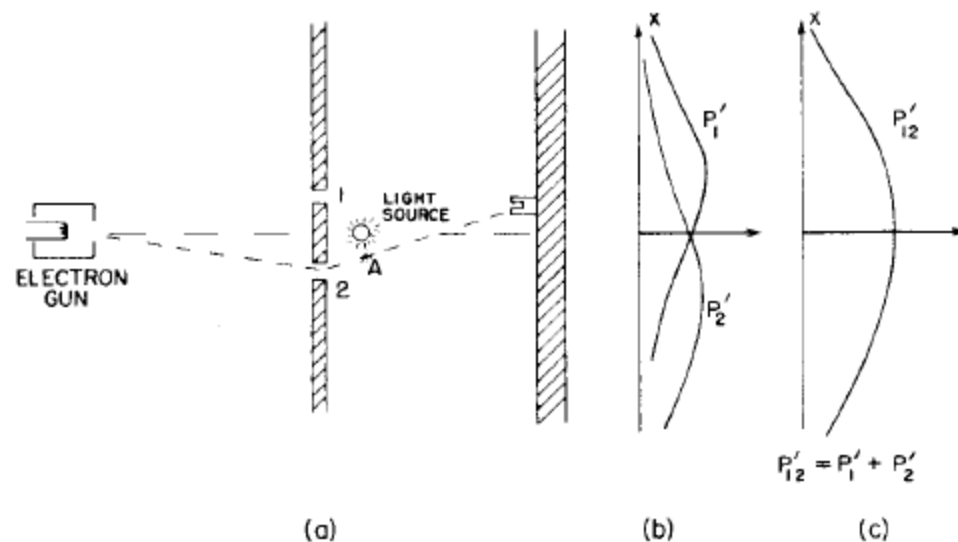


Fig 3-1. Interference experiment with electrons.



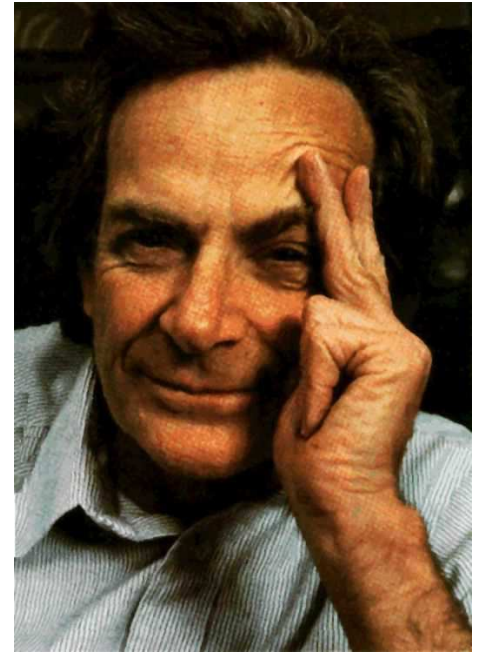
Em um experimento de fenda dupla com elétrons se observou um padrão de interferência, o que evidenciaria que elétrons são ondas.

Como conciliar os resultados deste experimentos com o que se conhecia da física clássica?

Quais seriam as consequências desse resultado para a física atômica?

“the double slit experiment is a phenomenon which is impossible, *absolutely* impossible, to explain in any classical way, and which has in it **the heart of quantum mechanics**. In reality it contains the *only* mystery.”

[Richard Feynman]



Considere um experimento onde o fluxo de fótons é tão baixo que eles podem ser registrados na tela um a um: Fótons passando por um aparato de fenda dupla.



<https://www.youtube.com/watch?v=MbLzh1Y9POQ>

Princípio de complementaridade

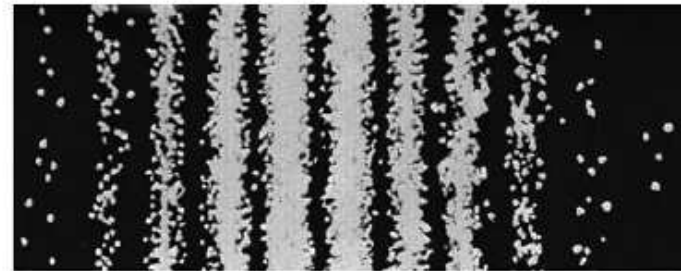
Não se pode afirmar qual o ponto da tela cada fóton emitido em direção às fendas irá atingir. Contudo, após muitos fótons podemos observar um padrão muito bem definido descrito pelo fenômeno de interferência.

Isto está associado à dualidade onda-partícula:

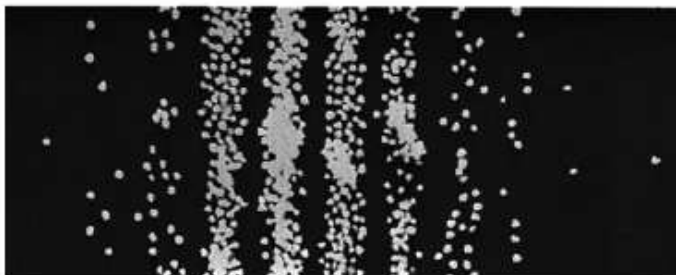
- O aspecto corpuscular do fóton é evidenciado quando se registra o fóton em um filme como um ponto de interação.
- O aspecto ondulatório do fóton é evidenciado quando se observa a distribuição dos fótons na tela, como o padrão de interferência.



(a)



(c)



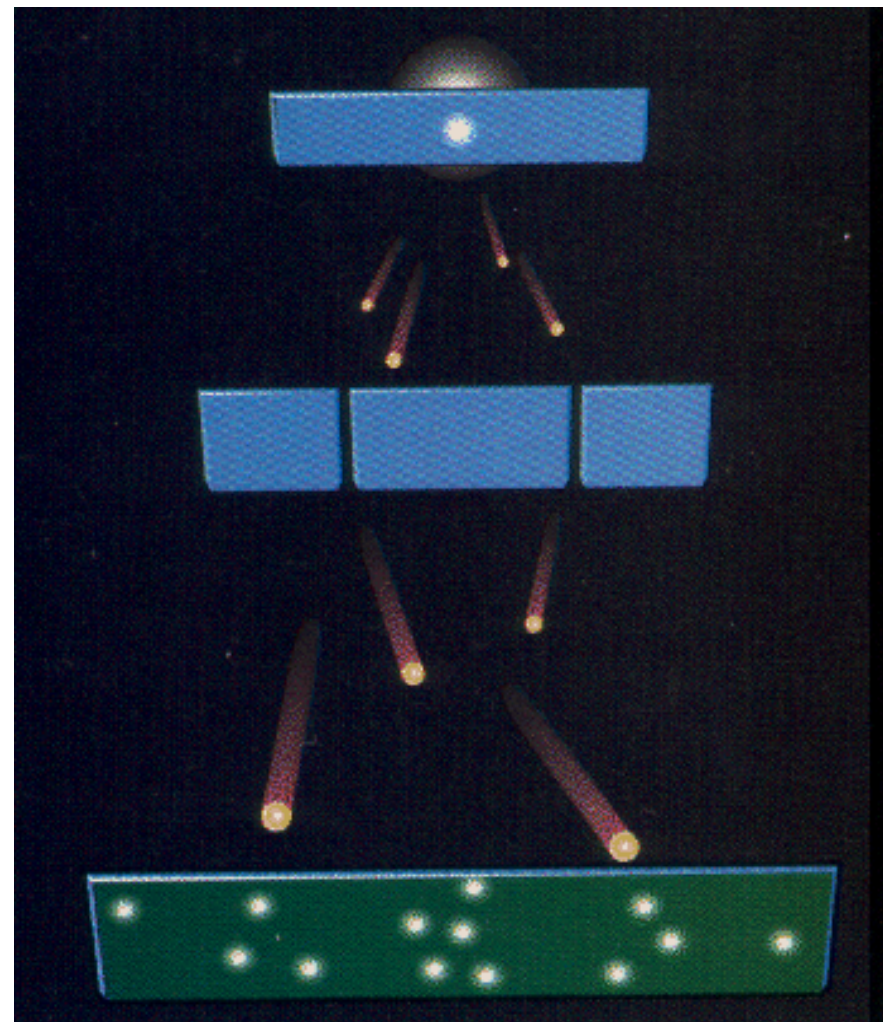
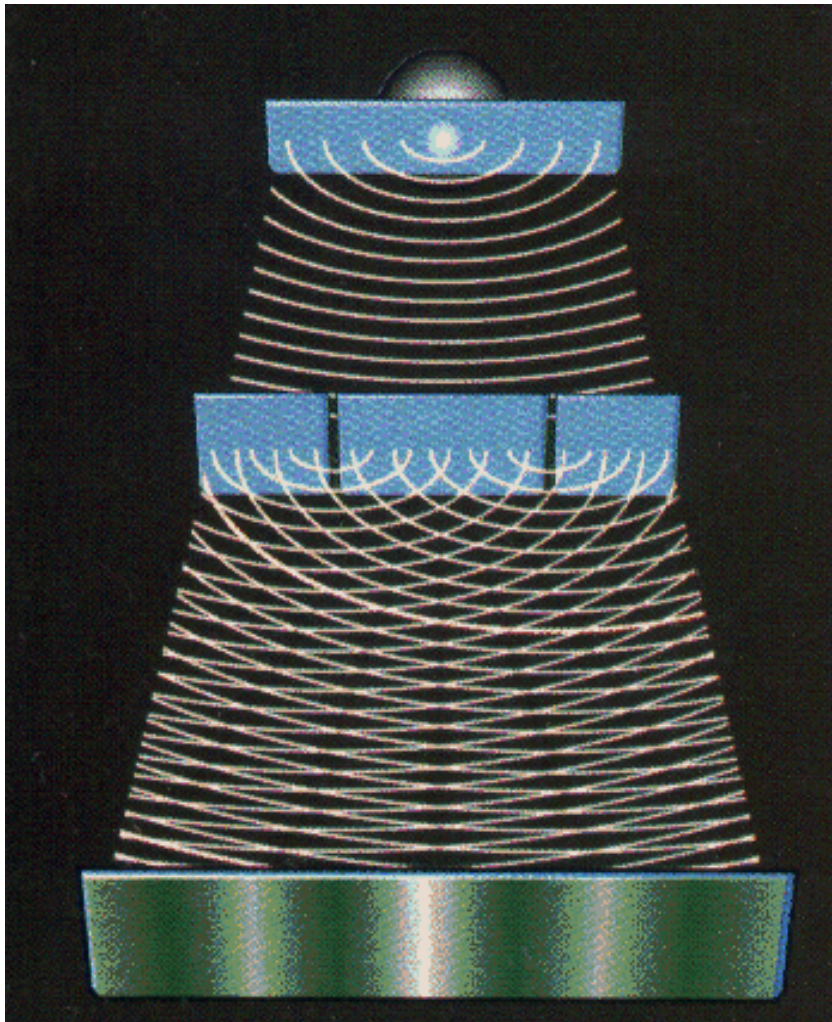
(b)



(d)

O comportamento é dual

Dependendo das condições experimentais são observados aspectos de onda ou de partícula do sistema quântico, mas nunca ambos ao mesmo tempo. A natureza da matéria e energia é dual e os aspectos ondulatório e corpuscular não são contraditórios, mas complementares. (Princípio de Complementariedade – Bohr)



Alguns comentários sobre a dualidade onda-partícula...

Todos os fenômenos naturais possuem aspectos corpusculares e aspectos ondulatórios.

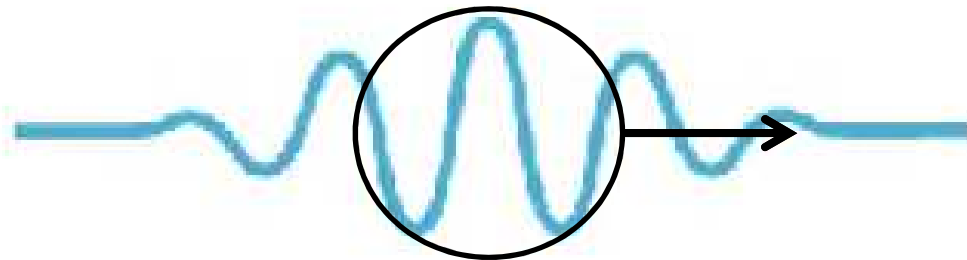
Quando o comprimento de onda é muito menor que qualquer objeto ou abertura, os resultados obtidos usando a teoria ondulatória são iguais ao obtido usando a teoria corpuscular, pois os efeitos de difração e interferência são muito pequenos para serem observados.

**“Truth and clarity are
complementary.”**

Niels Bohr

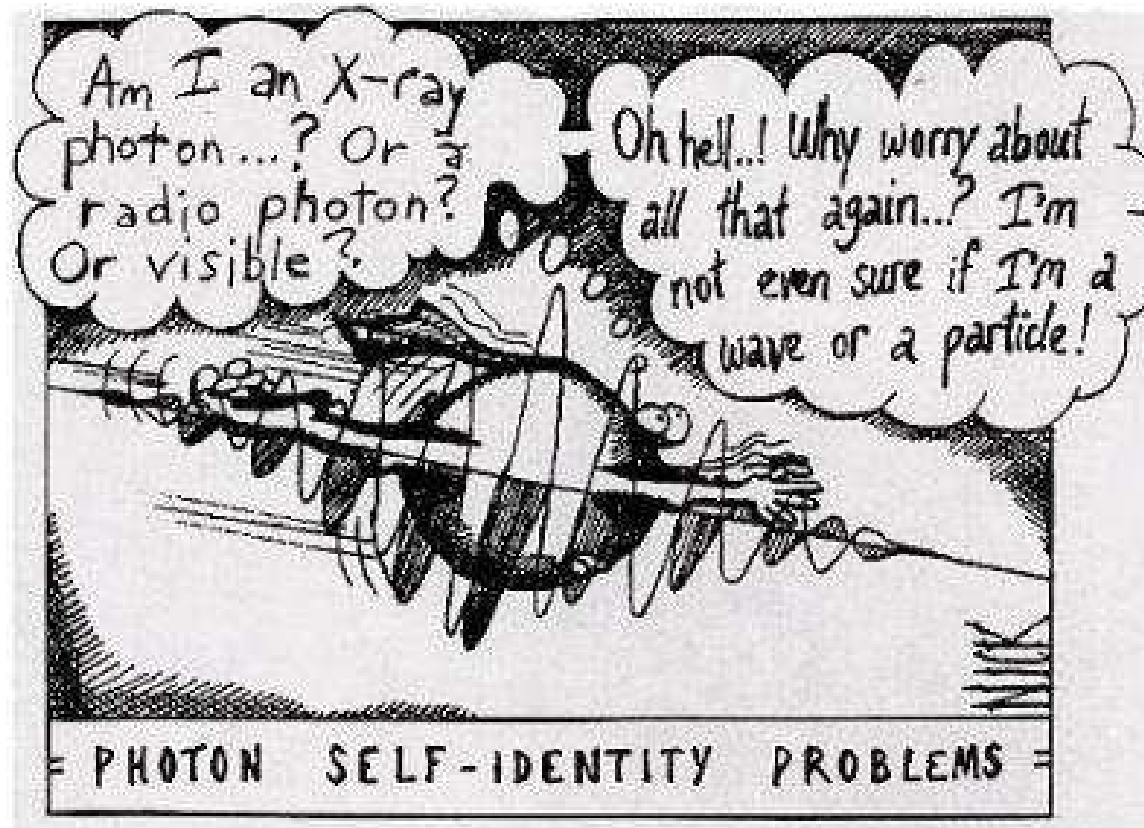


Para a descrição adequada de uma onda de matéria, esperamos que esta onda seja localizada no espaço, ou seja, a função de onda deve ser descrita por um pacote de onda formado pela superposição de várias frequências e números de onda.



Interpretação probabilística

A extensão do pacote de onda define a região onde é mais *provável* encontrar a partícula.



http://abyss.uoregon.edu/~js/images/wave_particle.gif

Vamos considerar um experimento de fenda duplas com fótons como já discutido antes no curso.

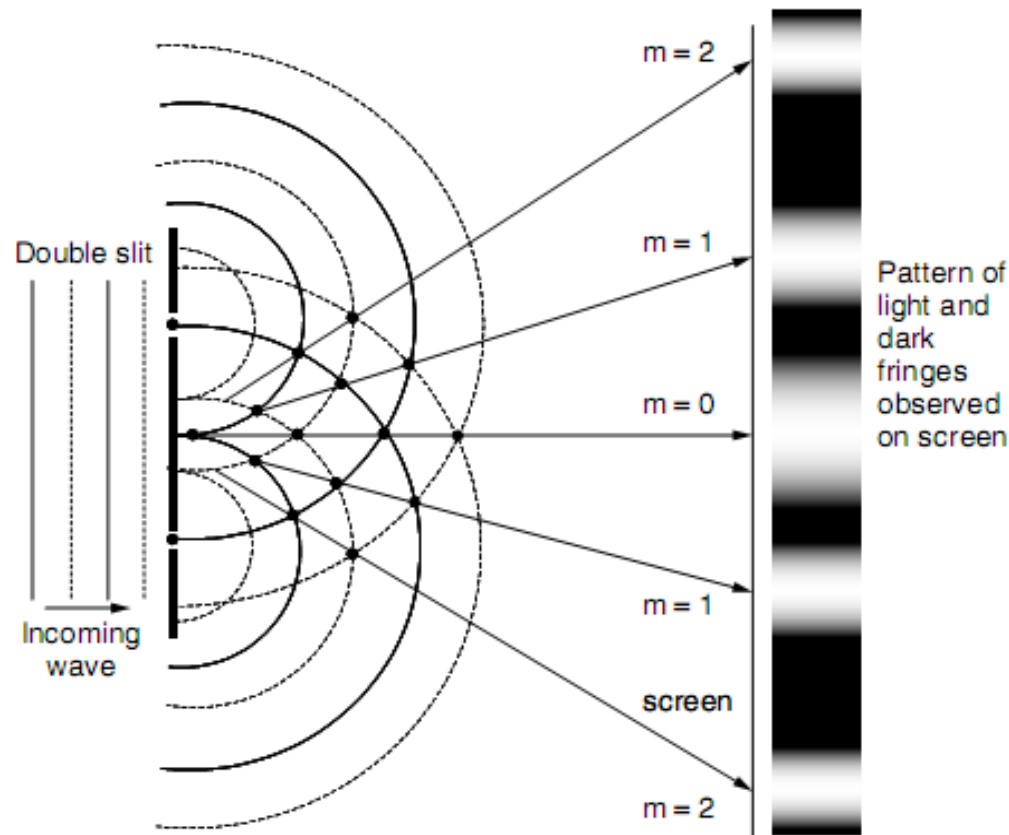


Figure 2.6. Diffraction pattern of light passing through two slits.

$$m\lambda = d \sin \theta, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \text{ etc.}$$

As franjas claras representam os locais com maior propabilidade do fóton atingir no anteparo , enquanto as escuras devem representar as regiões de probabilidade baixa (ou nula).

Quando a exposição é curta e a fonte luminosa é de baixa intensidade, flutuações aleatórias em relação aos resultados teóricos são claramente visíveis.

Quando a exposição é suficientemente longa para que muitos fótons atinjam a tela, as flutuações se cancelam e a natureza quântica da luz não é mais observada.

Mesmo quando a intensidade da fonte é tão baixa que não existe mais do que um fóton se propagando em um dado instante de tempo, a figura de interferência está de acordo com as previsões da teoria ondulatória.

Portanto, após longa exposição podemos definir uma função de probabilidade do fóton atingir a tela que será dada por:

$$P(x) \sim |E|^2$$

No caso de partículas, como elétrons, também são observados os padrões de interferência. Então, podemos sugerir que o padrão descrito pelos elétrons deveria ter uma função de probabilidade similar a dos fótons.

$$P(x) \equiv |\Psi|^2 = \Psi^* \Psi$$

Podemos interpretar o quadrado da função de onda como a distribuição de probabilidade da localização da partícula:

$$P(x) dx = \Psi^* \Psi dx$$

Dizemos que $P(x)dx$ nos dá a probabilidade de encontrar a partícula na região entre x e $x+dx$

A física quântica tem na sua essência esse aspecto probabilístico, que surge do aspecto dual da natureza quântica dos objetos (dualidade onda-partícula)

$P(x)$ É denominado **observável** e o que é obtido por meio de medida.

$\Psi(x, t)$ É a função de onda e “normalmente” não é acessível nos experimentos. Até mesmo há discussões se a função de onda é um “ente físico real” ou uma abstração matemática.

Iremos estudar com bastante detalhe estas funções de ondas para diferentes casos, suas consequências e aplicações.

**There is no quantum world.
There is only an abstract
physical description. It is
wrong to think that the
task of physics is to find out
how nature is. Physics
concerns what we can say
about nature...**

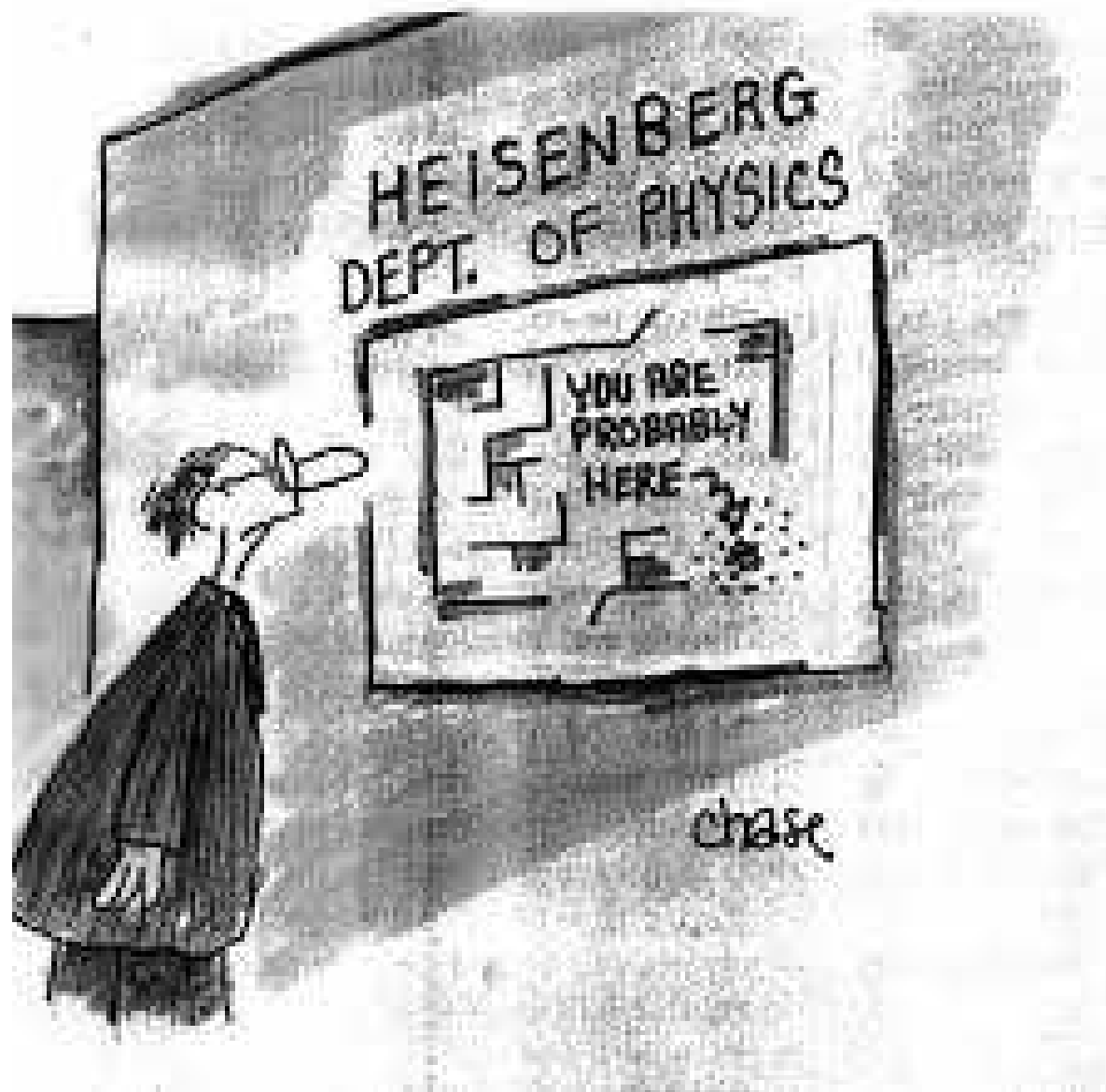
Niels Bohr



“Everything we call real is made of things that cannot be regarded as real. “

Niels Bohr

Antes de avançar na descrição das ondas de matéria, vamos falar do princípio de incerteza de Heisenberg.



Equivalência entre a Dualidade onda-partícula e o princípio de incerteza

NATURE COMMUNICATIONS | ARTICLE

Equivalence of wave–particle duality to entropic uncertainty

Patrick J. Coles, Jędrzej Kaniewski & Stephanie Wehner

Nature Communications **5**, Article number: 5814 doi:10.1038/ncomms6814

Received 14 May 2014 Accepted 11 November 2014 Published 19 December 2014

Abstract

Interferometers capture a basic mystery of quantum mechanics: a single particle can exhibit wave behaviour, yet that wave behaviour disappears when one tries to determine the particle's path inside the interferometer. This idea has been formulated quantitatively as an inequality, for example, by Englert and Jaeger, Shimony and Vaidman, which upper bounds the sum of the interference visibility and the path distinguishability. Such wave–particle duality relations (WPDRs) are often thought to be conceptually inequivalent to Heisenberg's uncertainty principle, although this has been debated. Here we show that WPDRs correspond precisely to a modern formulation of the uncertainty principle in terms of entropies, namely, the min- and max-entropies. This observation unifies two fundamental concepts in quantum mechanics. Furthermore, it leads to a robust framework for deriving novel WPDRs by applying entropic uncertainty relations to interferometric models. As an illustration, we derive a novel relation that captures the coherence in a quantum beam splitter.

“The quantum uncertainty principle is the idea that it's impossible to know certain pairs of things about a quantum particle at once. For example, the more precisely you know the position of an atom, the less precisely you can know the speed with which it's moving. It's a limit on the fundamental knowability of nature, not a statement on measurement skill. The new work shows that how much you can learn about the wave versus the particle behaviour of a system is constrained in exactly the same way.

Wave-particle duality and uncertainty have been fundamental concepts in quantum physics since the early 1900s. “We were guided by a gut feeling, and only a gut feeling, that there should be a connection,” says Coles, who is now a Postdoctoral Fellow at the Institute for Quantum Computing in Waterloo, Canada.

It's possible to write equations that capture how much can be learned about pairs of properties that are affected by the uncertainty principle. Coles, Kaniewski and Wehner are experts in a form of such equations known as 'entropic uncertainty relations', and they discovered that all the maths previously used to describe wave-particle duality could be reformulated in terms of these relations.”

Um resultado
publicado em
Dezembro de 2014.

http://www.quantumlab.org/highlight/141220_wave_particle.php

O princípio da incerteza de Heisenberg

“É impossível determinar ao mesmo tempo, e com certeza, o momento linear (produto da massa pela velocidade) e a posição de uma partícula.”

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$$

De forma similar, podemos enunciar também:

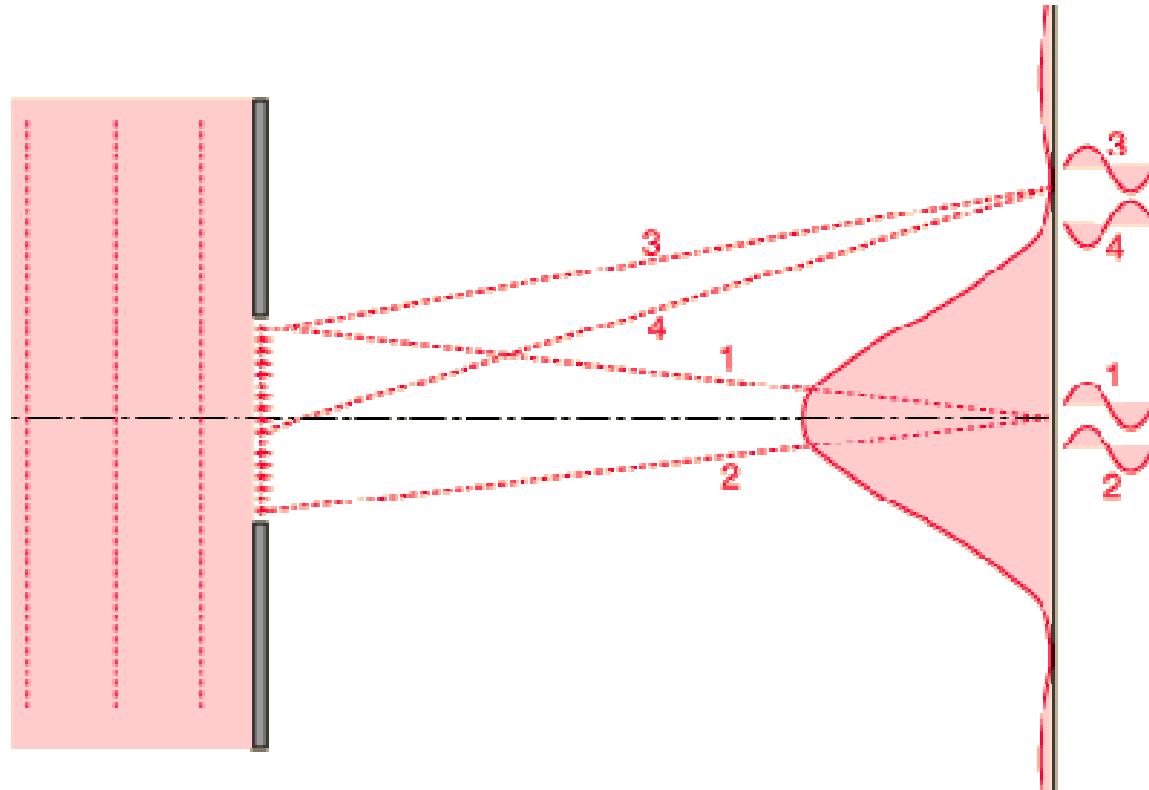
$$\Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$$



Werner Heisenberg
(1901 – 1976)

Vamos visualizar este conceito através de um exemplo mais concreto...

Vamos utilizar a luz atravessando uma fenda ($a \approx \lambda$)

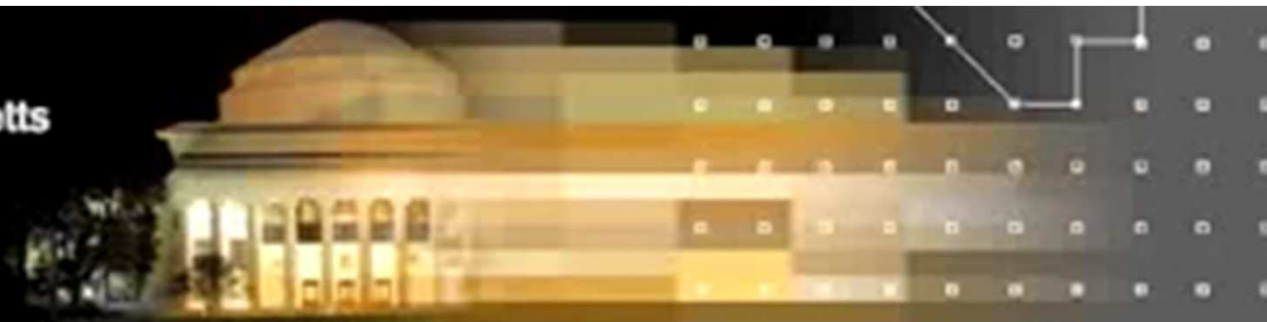


Para ilustrar a ideia do principio de incerteza de Heisenberg.

<https://www.youtube.com/watch?v=PgW7qaOZD0U>



Massachusetts
Institute of
Technology



Video Demonstrations in Lasers and Optics

Optics: Fraunhofer and Fresnel Diffraction

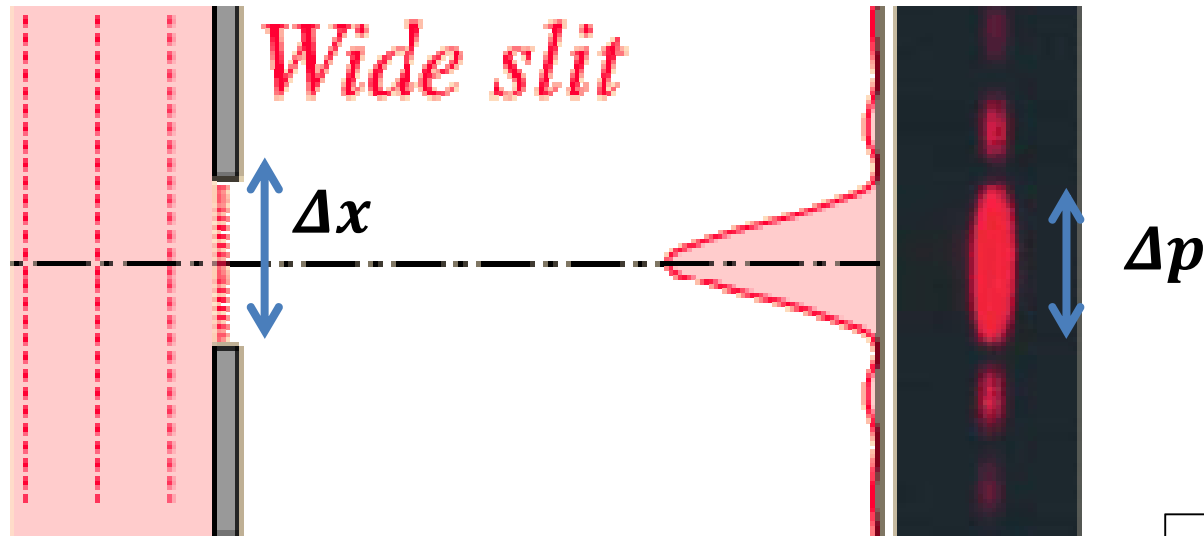
Fraunhofer diffraction — adjustable slit

Professor Shaoul Ezekiel

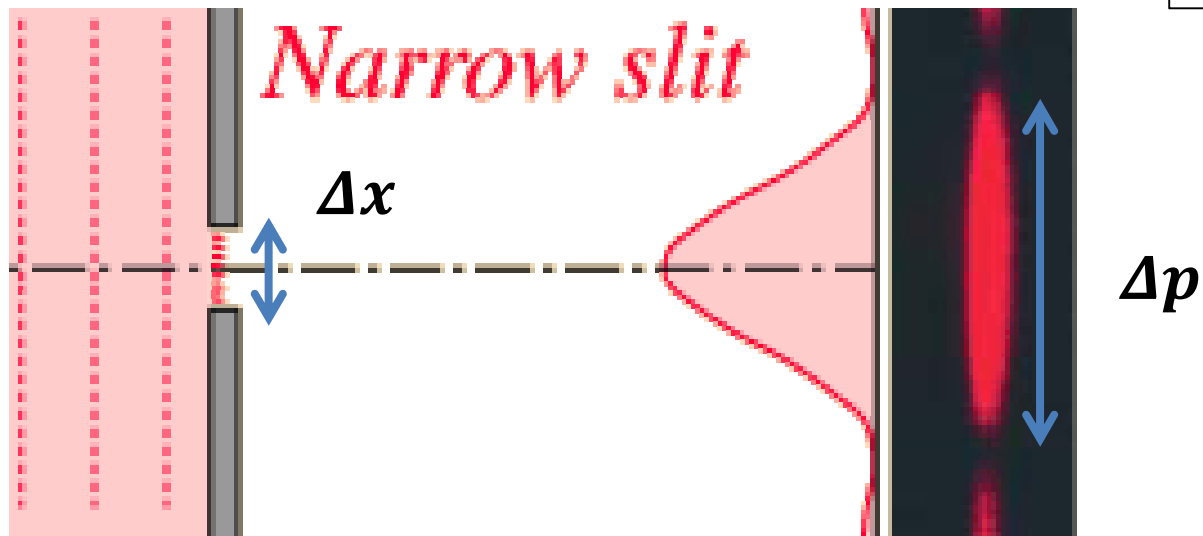
MITOPENCOURSEWARE
MASSACHUSETTS INSTITUTE OF TECHNOLOGY



O que acontece quando mudamos o tamanho da fenda?



$$\Delta x \cdot \Delta p = cte$$



Relação entre posição e momento para uma onda plana

Vamos considerar agora o caso da onda plana, ou seja, uma onda com um único número de onda.

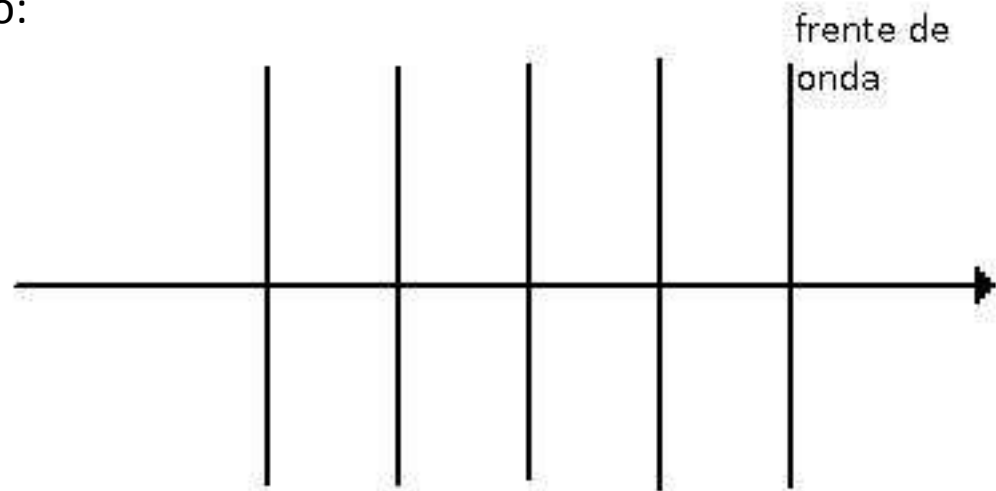
$$\Psi(x, t) = A e^{i(kx - \omega t)} \quad (\text{Lembre-se da relação de Euler})$$

Neste caso, não temos uma localização definida (a onda se estende por todo o espaço)

$$\Delta x \text{ infinito} \longrightarrow \Delta k \text{ é zero}$$

Portanto, podemos definir uma relação:

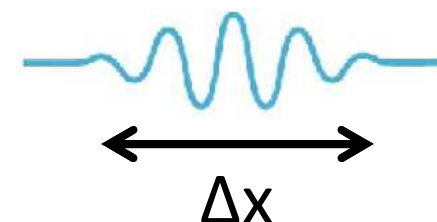
$$\Delta x \sim \frac{1}{\Delta k}$$



Relação entre localização e momento em um pacote de onda.

Vamos considerar um pacote de onda com uma extensão Δx

Vemos que este pacote dá uma certa “localização” para a partícula. Porém, não se pode afirmar que a partícula esteja em um dado ponto específico. Existem pontos que são mais prováveis que outros para se encontrar as partículas.



A localização de um pacote de onda é dada pela superposição de diversas ondas com diferentes números de onda (k), que também está associado ao momento da onda.

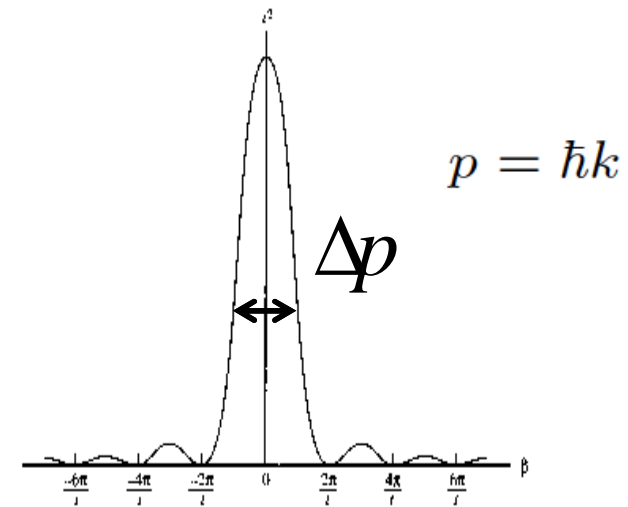
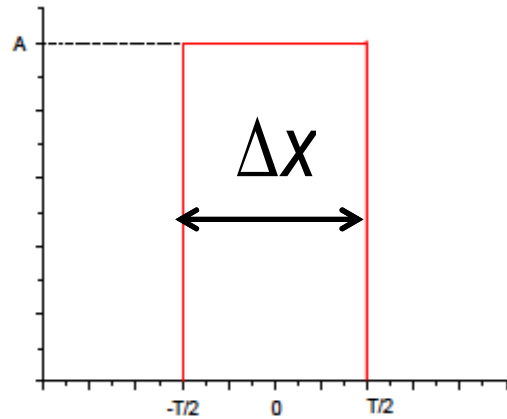
localização do pacote \longrightarrow composição de ondas com diferentes k .

$k \longrightarrow$ relacionado com o momento p

$$p = \hbar k = \frac{h}{\lambda}$$

Uma observação interessante é que quanto mais localizado o pacote de onda, ou seja, menor o Δx , maior é o número de k s necessários para compor o pacote, então maior é a “deslocalização” do momento p .

Relação entre posição e momento em um pacote de onda quadrado



$$\begin{aligned}\Psi(x, 0) &= \int_{-\infty}^{+\infty} A(k) e^{ikx} dk \\ &= \int_{\bar{k}-\delta}^{\bar{k}+\delta} e^{ikx} dk \\ &= 2e^{i\bar{k}x} \frac{\sin \delta x}{x}\end{aligned}$$

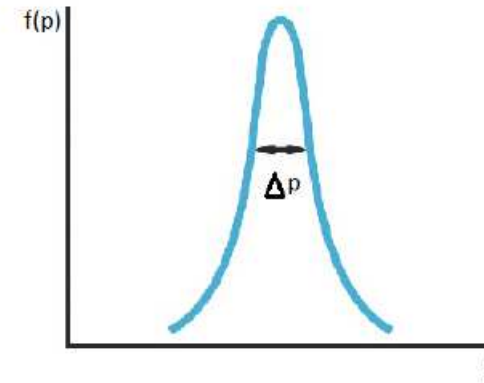
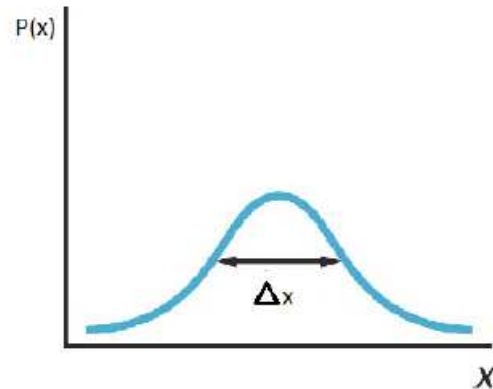
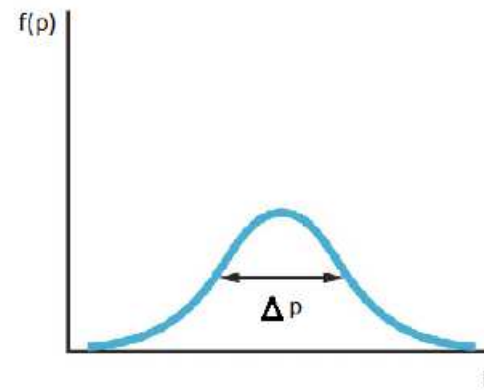
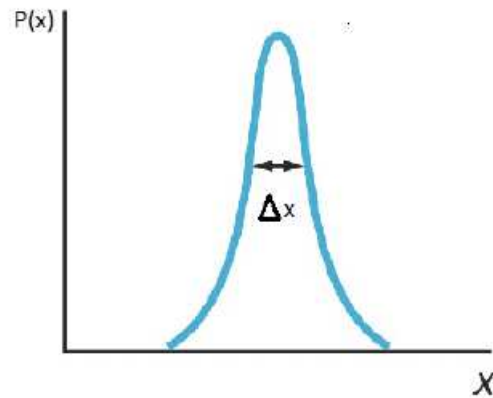
$$P(x, 0) = |\Psi(x, 0)|^2 = 4 \frac{\sin^2 \delta x}{x^2}$$

(veremos o porquê desta matemática no próximo tópico).

$$\Delta x \Delta p \approx 2\pi\hbar$$

Relação entre posição e momento

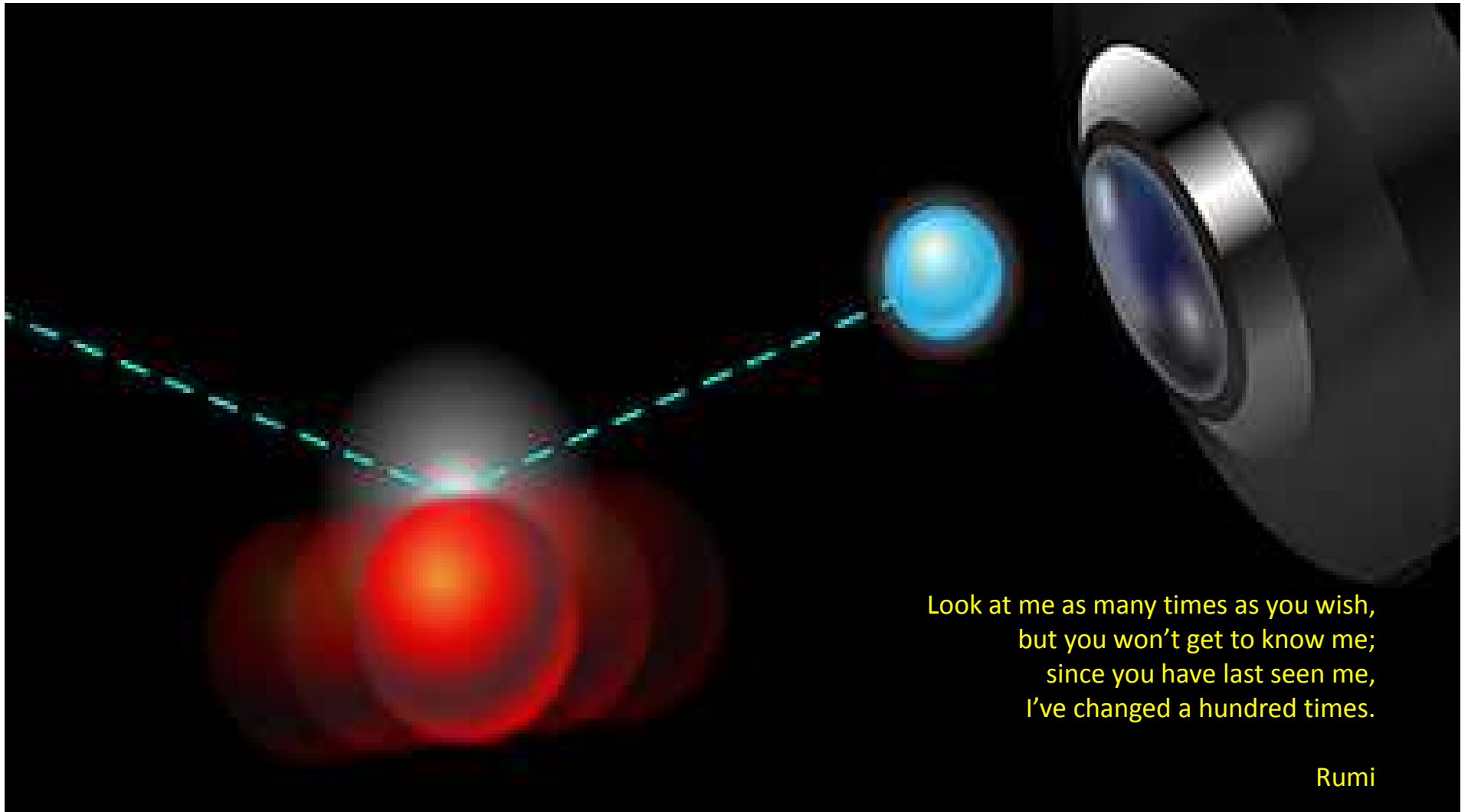
O aspecto ondulatório dos corpúsculos é que impõe estes limites na precisão da determinação destes pares: posição e momento; tempo e energia.



$$\begin{aligned}\Delta x &= \sigma_x = \sqrt{(x - \bar{x})^2} \\ &= \sqrt{\overline{x^2} - \bar{x}^2}\end{aligned}$$

$$\Delta p = \sigma_p = \sqrt{\overline{p^2} - \bar{p}^2}$$

O Microscópio de Heisenberg



As bases do princípio de incerteza e as suas implicações ainda são um tema de constante pesquisa.

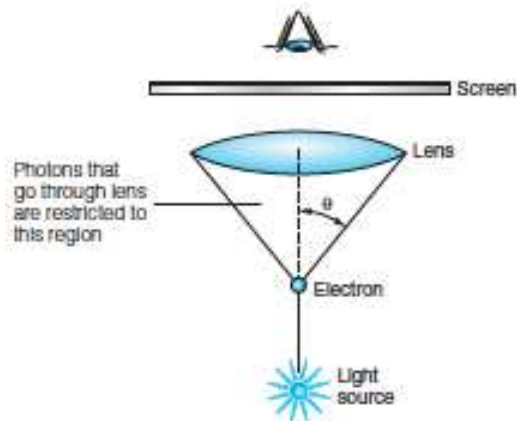
[Proof of Heisenberg's Error-Disturbance Relation](#)

Paul Busch, Pekka Lahti, and Reinhard F. Werner

[Phys. Rev. Lett. 111, 160405 \(2013\)](#)

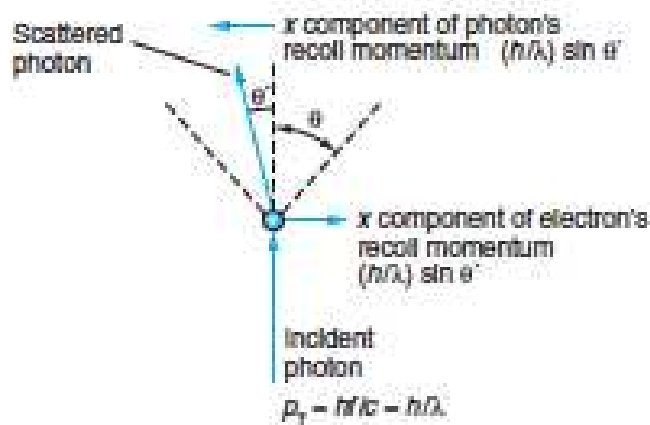
Published October 17, 2013

É importante perceber que o limite inferior não se deve a uma deficiência de equipamentos de medida, algo que possa ser resolvido com o progresso da tecnologia; trata-se de um limite intrínseco, associado à dualidade onda-partícula. Vamos considerar um experimento de “pensamento” no qual estamos tentando observar um elétron com um microscópio.



$$\Delta x = \frac{\lambda}{2 \sin \theta} \quad \Delta p_x \geq p \sin \theta = \frac{h}{\lambda} \sin \theta$$

$$\Delta x \Delta p_x \geq \frac{\lambda}{2 \sin \theta} \frac{h \sin \theta}{\lambda} = \frac{1}{2} h$$



“Every experiment destroys some of the knowledge of the system which was obtained by previous experiments.”

W. Heisenberg



"What we observe is not nature itself, but nature exposed to our method of questioning."

Werner Heisenberg

Emissão de um fóton

Vamos ver algumas consequências da relação: $\Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$

A energia de um sistema não pode ser medida exatamente a menos que a medida seja realizada durante um tempo infinito.

Quando um átomo está no estado excitado, não permanece neste estado indefinidamente mas decai para estados de menor energia até alcançar o estado fundamental.

O tempo de vida médio de um estado é $\tau = 10^{-8}$ s. Portanto, a indeterminação na energia é de:

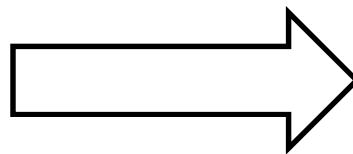
$$\Delta E \geq \frac{\hbar}{\tau} = \frac{6.58 \times 10^{-16} \text{ eV} \cdot \text{s}}{10^{-8} \text{ s}} \approx 10^{-7} \text{ eV}$$

Este valor de ΔE define uma “largura” do estado de energia eletrônico, que pode ser associado ao comprimento de onda de transição.

$$E - E_0 = \frac{hc}{\lambda}$$

$$dE = -hc \frac{d\lambda}{\lambda^2}$$

$$|\Delta E| \approx hc \frac{|\Delta \lambda|}{\lambda^2}$$



$$\frac{\Delta \lambda}{\lambda} \approx \frac{\Delta E}{E - E_0}$$

Esta incerteza na energia de emissão é denominada **largura de linha natural** (Γ_0).

Quase todos os átomos excitados decaem, isto é, emitem um fóton, após um tempo da ordem de 10^{-8} s. Qual é a incerteza mínima da energia e da frequência do fóton emitido?

A incerteza mínima da energia é a largura de linha natural:

$$\Gamma_0 = \frac{6.63 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}}{2\pi \times 10^{-8} \text{ s}} = \frac{4.14 \times 10^{-15} \text{ eV} \cdot \text{s}}{2\pi \times 10^{-8} \text{ s}} = 6.6 \times 10^{-8} \text{ eV}$$

Para a frequência temos:

$$\Delta E = \hbar \Delta \omega = \hbar (2\pi \Delta f) = h \Delta f$$

$$\Delta E \Delta t = h \Delta f \Delta t \geq \hbar$$

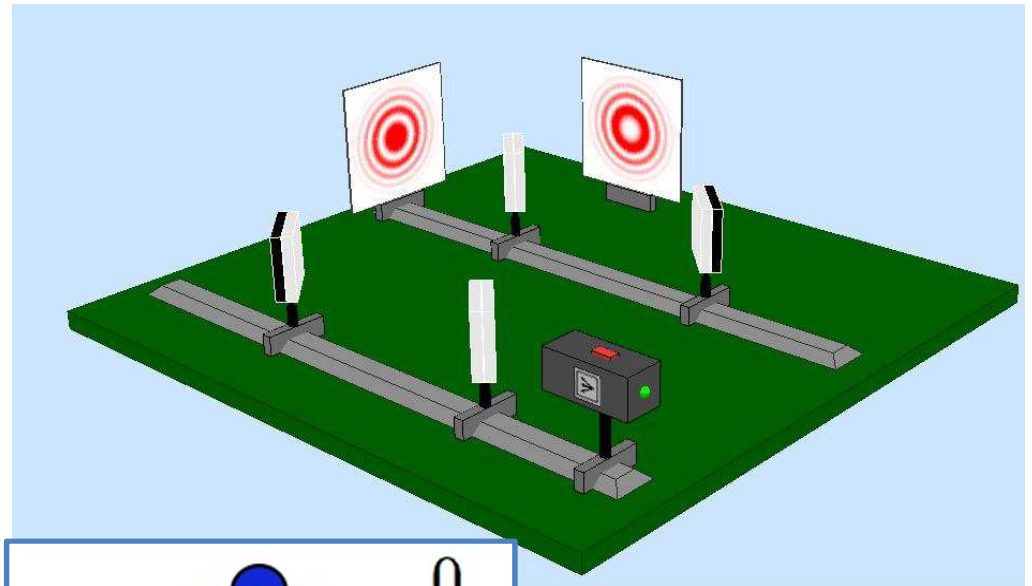
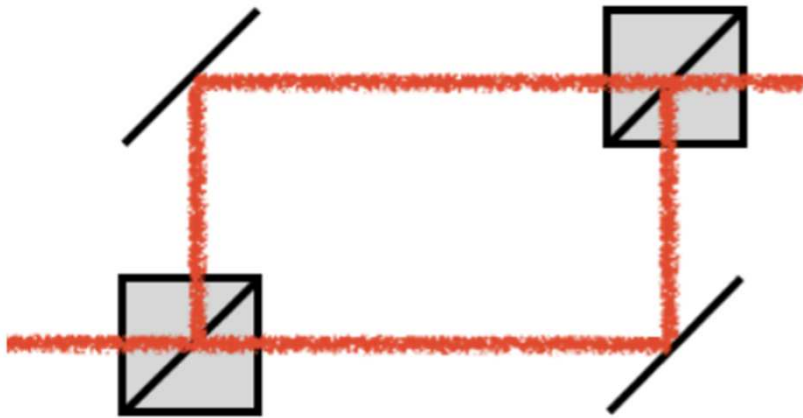
$$\Delta f \geq \frac{1}{2\pi \Delta t} = \frac{1}{2\pi \times 10^{-8}}$$

$$\Delta f \geq 1.6 \times 10^7 \text{ Hz}$$

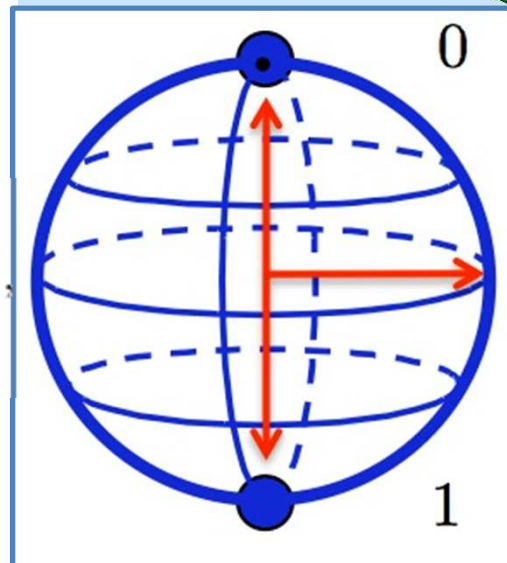
Lembramos que a frequência de fótons na região do visível é da ordem de 10^{14} Hz

Faça as questões 26, 27 e 28 da lista 1

Na aula de hoje, discutimos aspectos da dualidade onda-partícula. Na próxima aula, discutiremos os sistemas de dois níveis, exemplificando os postulados da física quântica..



$$\begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix},$$



Na aula de hoje (08/10/19)

- Ondas de Matéria;
- Revisitando ondas;
- Interferência (fótons e elétrons) e interferômetros;
- Dualidade onda-partícula e princípio de complementaridade;
- Princípio de incerteza de Heisenberg.

Na próxima aula (15/10/19)

- Interferômetros;
- Sistemas de dois níveis;
- Polarização da luz;
- Postulados da física quântica;
- Notação de Dirac.



Perguntas, dúvidas, comentários, aflições?

Cronograma e conteúdo programático da disciplina (parte 1)

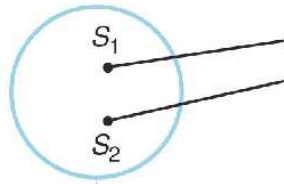
Semana	Dia	Aula	Conteúdo
1	24/09 (Ter)	1	Apresentação a disciplina; Evidências experimentais da teoria quântica : radiação do Corpo Negro.
	---	---	-----
2	01/10 (Ter)	2	Evidências experimentais da teoria quântica: efeito foto-elétrico, efeito Compton, espectros atômicos
	03/10 (Qui)	3	Modelos atômicos, Modelo quântico de Bohr, Experimento de Franck-Hertz, Hipótese de de Broglie e ondas de matéria.
3	08/10 (Ter)	4	Revisitando ondas; interferência (fótons e elétrons) e interferômetros; dualidade onda-partícula e princípio de complementaridade; Princípio de incerteza de Heisenberg.
	---	---	-----
4	15/10 (Ter)	5	Interferômetros e fótons únicos, polarização da luz, postulados da física quântica e notação de Dirac
	17/10 (Qui)	6	Relação entre estados quânticos e funções de onda. Espaços discretos e contínuos na física quântica. Probabilidade e interpretações em Física Quântica.
5	22/10 (Ter)	7	Mecânica Quântica Ondulatória, Determinação eurística da Equação de Schrodinger, propriedades da equação de Schrodinger e funções de ondas.
	---	---	-----
6	29/10 (Ter)	P1	Primeira Avaliação
	31/10 (Qui)	8	Potenciais simples: poço de potencial, Espaço de estados e transições entre estados de energia; Elétrons em currais quânticos e o gato de Schrodinger.

Cronograma e conteúdo programático da disciplina (parte 2)

Semana	Dia	Aula	Conteúdo
7	05/11 (Ter)	9	Potenciais simples: poço quadrado finito; operadores e valores médios de observáveis, pontos quânticos e suas aplicações.
	---	---	-----
8	12/11 (Ter)	10	Potenciais simples: Oscilador Harmônico Quântico. Armadilhas de íons e princípios de informação quântica. Requisitos essenciais de um computador quântico, Emaranhamento Quântico.
	14/11 (Qui)	11	Potenciais simples: potenciais degraus, reflexão, Transmissão de Ondas, Tunelamento. Tempo de tunelamento em uma barreira (revisitando o princípio de incerteza de Heisenberg). Microscópios de tunelamento e mapeamento de átomos e moléculas.
9	19/11 (Ter)	12	Equação de Schrodinger em três dimensões: O cubo quântico (coordenadas cartesianas), O átomo de Hidrogênio (coordenadas esféricas), Separação de variáveis e a quantização de Momento Angular e Energia.
	---	---	-----
10	26/11 (Ter)	13	Funções de ondas do átomo de Hidrogênio; Orbitais; Significado físico dos números quânticos atômicos. Imagens, Abstrações e Interpretações.
	28/11 (Qui)	14	Introdução (noções gerais) aos Átomos de muitos elétrons, spin (quarto número quântico atômico) e tabela periódica. O fim de um começo.
11	03/12 (Ter)	P2	Segunda Avaliação da Disciplina
	---	---	-----
12	10/12 (Ter)	Psub\REC	Avaliação Substitutiva ou Avaliação de Recuperação
13			
	14 a 21/9		Lançamento de conceitos e faltas

Interferência entre ondas

Considere duas fontes de luz S_1 e S_2 separadas de uma distância d e que emitem ondas de mesma amplitude e com diferença de fase constante entre elas.



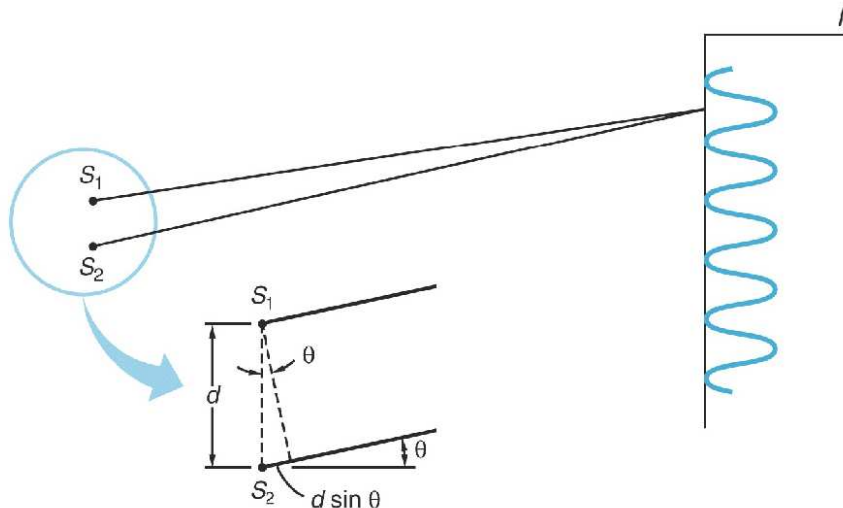
$$y_{S1} = y_0 \cos(kx_1 - \omega t)$$

$$y_{S2} = y_0 \cos(kx_2 - \omega t)$$

Podemos definir a intensidade (I) como: $I = \rho v$

Onde ρ é a densidade de energia e v é a velocidade com a qual as ondas se propagam.

Em um anteparo distante, $L \gg d$, a intensidade da onda resultante é dada em função do ângulo θ



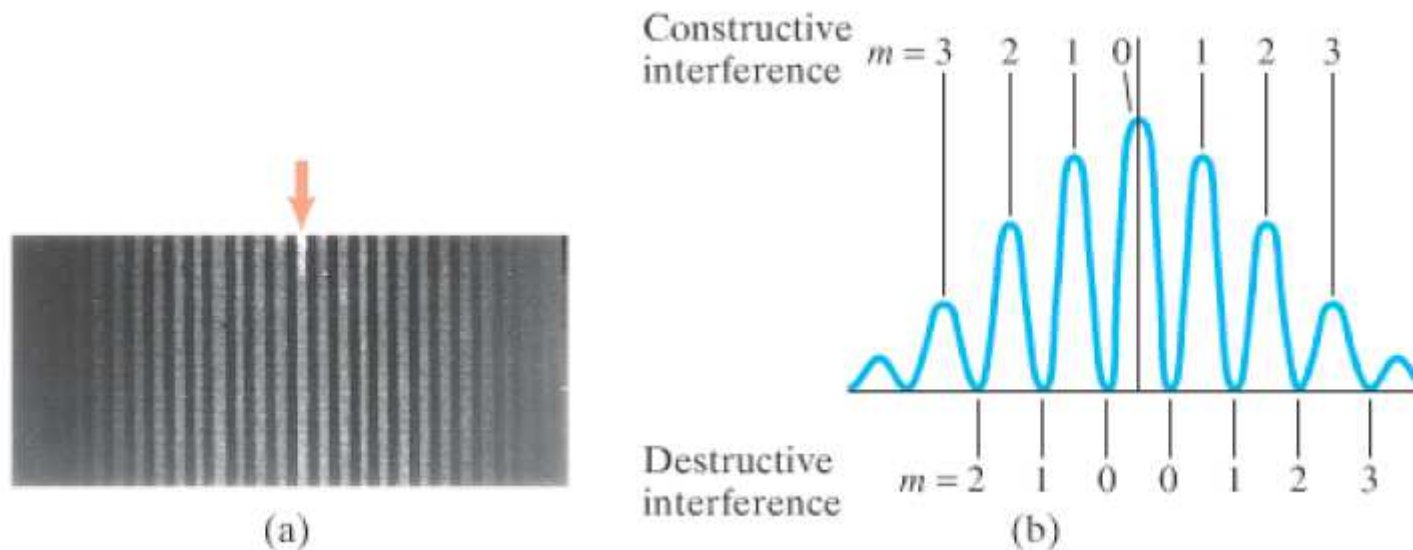
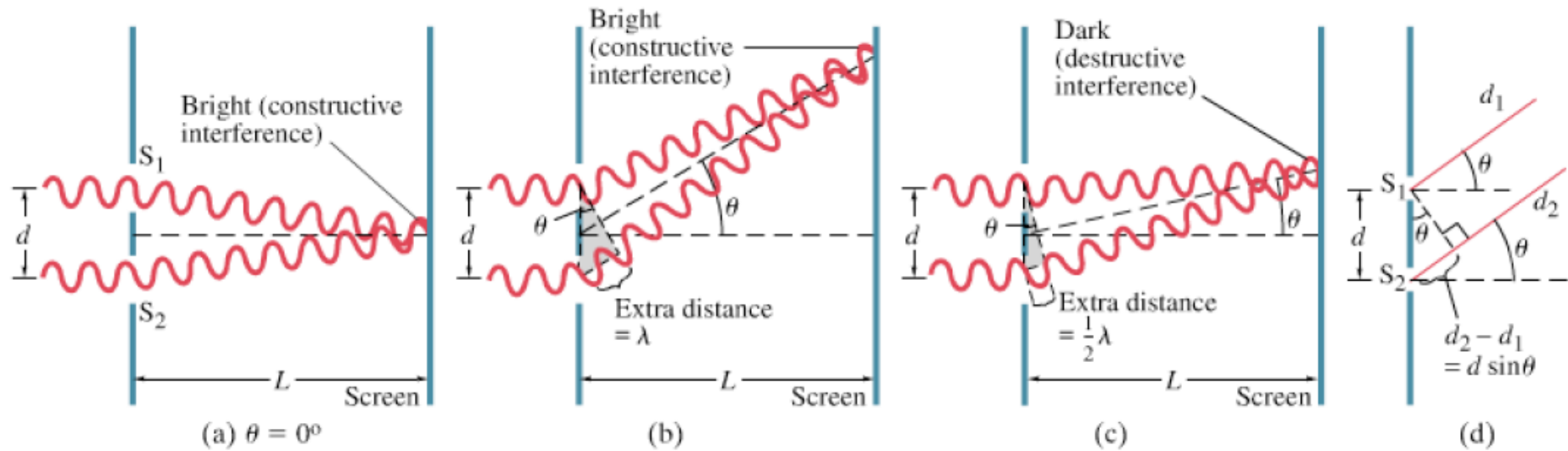
$$x_2 - x_1 = \Delta x$$

Para que num ponto P, dado por um ângulo θ , tenhamos uma soma que seja construtiva máxima, a diferença de percurso deve ser um múltiplo inteiro do comprimento de onda.

$$\Delta x = d \sin \theta_{max} = n\lambda \quad n = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$$

Duas ondas que ocupam o mesmo lugar do espaço
interferem entre si.

Podemos, resumir o que foi apresentado sobre interferência, com a seguinte figura:



Cálculo Matemático da Interferência de Duas Ondas

Considere duas ondas planas:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$$

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_{01} e^{i(\vec{K}_1 \cdot \vec{r}_1 - \omega_1 t + \phi_1)}$$

$$\vec{E}_2 = \vec{E}_{02} e^{i(\vec{K}_2 \cdot \vec{r}_{21} - \omega_2 t + \phi_2)}$$

A intensidade da onda resultante:

$$I = \left| \langle \vec{S} \rangle \right| = \frac{1}{2} \frac{n |E|^2}{Z_0} = c \vec{E} \cdot \vec{E}^* = c (\vec{E}_1 + \vec{E}_2) \cdot (\vec{E}^* + \vec{E}_2^*)$$

Se $\omega_1 = \omega_2$, as ondas de mesma frequência $\rightarrow |\vec{K}_1| = |\vec{K}_2|$

$$\vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2^* = \vec{E}_{01} \cdot \vec{E}_{02}^* e^{i(\vec{K}_1 \cdot \vec{r} - \vec{K}_2 \cdot \vec{r} + \phi_1 - \phi_2)}$$

$$\vec{E}_2 \cdot \vec{E}_1^* = \vec{E}_{02} \cdot \vec{E}_{01}^* e^{i(\vec{K}_2 \cdot \vec{r} - \vec{K}_1 \cdot \vec{r} + \phi_2 - \phi_1)}$$

A parte temporal $i\omega t$ e $-i\omega t$ se cancelam se as ondas têm a mesma frequência.

* Se $\phi_2 - \phi_1 = \text{cte}$, os produtos cruzados podem ser escritos como $\rightarrow \vec{E}_{01} \cdot \vec{E}_{02}^* \underbrace{(e^{i\Delta} + e^{-i\Delta})}_{2 \cos \Delta}$

$$\vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2^* + \vec{E}_2 \cdot \vec{E}_1^* = \vec{E}_{01} \cdot \vec{E}_{02}^* 2 \cos(\vec{K}_2 \cdot \vec{r} - \vec{K}_1 \cdot \vec{r} + \phi_2 - \phi_1)$$

$$I = I_1 + I_2 + 2c \vec{E}_{01} \cdot \vec{E}_{02}^* \cos(\vec{K}_2 \cdot \vec{r} - \vec{K}_1 \cdot \vec{r} + \phi_2 - \phi_1)$$

Diferença de fase entre \vec{E}_1 e \vec{E}_2

* Se $\omega_1 \neq \omega_2$ fase varia com o tempo e $\langle I \rangle = I_1 + I_2 \rightarrow \text{coseno} \rightarrow 0$.

* Se $\phi_1 - \phi_2$ depender do tempo o mesmo ocorrerá.

* Por outro lado se $\vec{E}_{01} \perp \vec{E}_{02}^*$ (polarizações ortogonais) $\langle I \rangle = I_1 + I_2 \rightarrow$ termo de interferência $\rightarrow 0$.

Visibilidade:

$$\mathcal{V} = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} = \frac{4\sqrt{I_1 I_2} \cos \alpha}{2(I_1 + I_2)}$$