Comunicação e Redes – Resumo 1

Versão 0 de 15 de junho de 2011, por Luis Andrade Neto (luis.neto@aluno.ufabc.edu.br), baseado nos slides do professor Rogério P. de O. Neves

Aula 1: Sistemas Complexos

Definição

Não existe uma definição "cimentada" do que é um sistema complexo, mas há alguns pontos de sobreposição entre as mais comuns:

- Grande número de agentes;
- Inter-relação e interação entre componentes;
- Comportamentos não-lineares;
- Apresenta características que não são deduzíveis a partir da observação de suas partes.

Características

- As ligações são dinâmicas;
- Possibilidade de aninhamento (i.e. uma rede complexa dentro da outra);
- Produção de fenômenos emergentes (i.e. que só aparecem quando você analisa a rede como um todo, *in loco*, por serem resultado da interação entre os componentes);
- Relacionamentos não-lineares (i.e. o efeito pode não ser proporcional à causa);
- Possibilidade de retroalimentação ou *feedback* (i.e. a saída de um sistema é direcionada para sua entrada).

As redes são estudadas por um campo da ciência chamado Teoria dos Grafos.

- Exemplos de redes: Internet, redes sociais, redes neurais, redes metabólicas, teias alimentares, redes de distribuição e redes de citações entre artigos.

Aula 2: Introdução aos Grafos

As Sete Pontes de Königsberg

Leonhard Euler foi desafiado a encontrar uma solução para o seguinte problema:

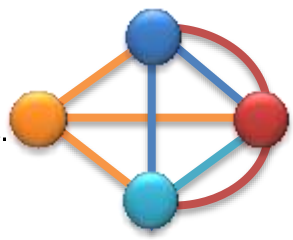
"Duas ilhas e duas partes do continente são ligados por sete pontes. Saindo de uma das ilhas (ou do continente), percorra todas as pontes apenas uma vez e retorne ao seu ponto de origem."

Euler determinou que este problema é insolúvel, pois para cada ponte "de ida", tem que haver uma "de volta". Como o número de pontes de Königsberg era ímpar, seria impossível não deixar de passar por uma das pontes ou não repetir ponte.

Para chegar a essa conclusão, Euler simplificou o problema de forma que as ilhas e o continente fossem representados por 4 pontos e as pontes, por ligações entre esses pontos.

Isto é um grafo!

- Os pontos são chamados vértices;
- As ligações entre eles são as arestas.



Definições de grafos

- Cada grafo pode ser expresso por um par ordenado G=(Vértices, Arestas);
- Pseudografo ou multigrafo: pode conter loops (i.e. uma conexão que volta para o mesmo lugar de onde partiu) e múltiplas arestas entre dois vértices;
    - Grafo simples: não contém nenhum desses dois elementos;
- Grafo direcionado: leva em conta a direção do “movimento” entre as arestas;
    - Grafo não-direcionado: não leva isso em conta;
- Grafo ponderado: leva em conta diferentes valores (“pesos”) para as arestas;
    - Grafo ponderado: todas as arestas têm um mesmo valor;

Propriedades de um grafo

- Ordem: número de vértices;
- Tamanho: número de arestas;
- Diâmetro: o maior entre os caminhos mais curtos entre um par de vértices;
- Conectividade:
    - Dos vértices: número mínimo de vértices que devem ser removidos para “quebrar o grafo em 2”;
    - Das arestas: número mínimo de arestas que devem ser removidas para desconectar o grafo;
- Grafo planar: a representação de um grafo onde não há sobreposições de arestas;

Modelagem usando grafos

- Número de rotas possíveis envolvendo x cidades: $r(x) = (x - 1)!$
- “Fluxo máximo” em um grafo direcional ponderado (problema da tubulação de esgoto):
    1. Um tubo de baixa capacidade (i.e. uma aresta com baixo valor) é um “gargalo”;
    2. Quando um vértice “recebe mais água” do que o “cano” que leva até o próximo vértice pode carregar, a água poderá fluir por outros dutos até chegar ao seu destino.
- Organização de arquivos em um computador
    - Estrutura em árvore (i.e. uma aresta pode ter várias “filhas”, porém apenas uma aresta “mãe”);

Listas de Adjacências, Matrizes de Adjacências e Matrizes de Incidência

Lista de Adjacências

1. Listar cada um dos vértices do grafo;
2. Listar cada conexão de cada um desses vértices.

Exemplo:

Adj[1] = {2, 5, 7}

Adj[2] = {1, 3, 6}

Adj[3] = {2, 4, 6}

Adj[4] = {3, 5, 7}

Adj[5] = {1, 4, 7}

Adj[6] = {2, 3, 7}

Adj[7] = {1, 4, 5, 6}

Matriz de Adjacências

Cada vértice é representado por uma linha e uma coluna. A matriz de adjacências A, portanto, é quadrada. Se, por exemplo, em um grafo direcional há conexão do vértice 4 para o 7, então a “célula” $A_{(4,7)}$ da matriz recebe o valor “1”.

Quando o grafo é não-direcional, o valor “1” também é aplicado em $A_{(7,4)}$.

Exemplos:

1	0	0	1	0
0	1	0	0	1
0	0	1	1	1
1	0	1	1	0
0	1	1	0	1

1	0	1	1	0
1	1	0	0	1
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
0	1	0	1	1

À esquerda, um grafo não-direcional. À direita, um grafo direcional. Repare que a matriz da esquerda é simétrica, enquanto a da direita não é.

Matriz de Incidência

As linhas da matriz representam vértices e as colunas, as arestas. Em um grafo direcional, a aresta número 5, indo do vértice 3 para o vértice 2, seria representada na matriz de incidência assim:

	Aresta 1	Aresta 2	Aresta 3	Aresta 4	**Aresta 5**	Aresta 6	Aresta 7
Vértice 1	0	+1	0	-1	**0**	0	0
Vértice 2	-1	0	0	0	**+1**	0	0
Vértice 3	0	0	0	+1	**-1**	0	0
Vértice 4	0	0	0	0	**0**	-1	+1
Vértice 5	+1	0	-1	0	**0**	0	0
Vértice 6	0	-1	0	0	**0**	+1	-1

O vértice aonde a aresta “chega” recebe o valor +1, o vértice de onde ela “parte” recebe -1, e o resto da coluna recebe zeros.

Aula 3: Algoritmos

Caminho

- Um caminho pode ser descrito como “do vértice 6 (origem), vá para o vértice 4, depois para o vértice 1 e chegue no vértice 2 (término)”.
- Caminho mínimo é o menor entre dois vértices (em grafos ponderados, considere o valor do vértice).
- Passeio é o caminho onde os vértices podem ser repetidos.
- Comprimento é o número de termos da sequência menos 1. No caminho do exemplo acima, o comprimento é 3.
- Distância entre vértices é o comprimento do caminho mínimo entre eles.

Busca em grafos

Um algoritmo que examina todos os vértices e arestas de um grafo.

Busca em profundidade (in-depth)

1. O algoritmo pesquisa o primeiro vértice (origem);
2. A primeira aresta que parte deste vértice é explorada, levando a outro vértice;
3. O passo 2 é repetido até que é alcançado um “beco sem saída” no grafo;
4. Quando isso acontece, o algoritmo “volta” para o último vértice e tenta descobrir uma nova aresta;
5. Quando há uma nova aresta, os passos 2 e 3 são repetidos. Quando não há, o passo 4 é repetido...
6. ...até que não restem mais vértices a explorar.

Busca em largura (in-width)

1. O algoritmo coloca o primeiro vértice (origem) na fila de pesquisa;
2. Ele faz a lista de adjacências do vértice que está sendo atualmente pesquisado, colocando os vizinhos que não foram já varridos na fila de pesquisa;
3. Todos os vértices adjacentes são pesquisados de acordo com a ordem da fila;
4. Os passos 2 e 3 são repetidos até que todos os nós do grafo tenham sido pesquisados.

Algoritmos de caminhos mínimos

Algoritmo de Dijkstra

1. O algoritmo calcula todas as distâncias entre o vértice atual e seus adjacentes não visitados;
2. Quando todos os vértices adjacentes tiverem suas distâncias determinadas, marque o atual como visitado;
3. Passe para o vértice não visitado com menor distância e repita o processo.

Algoritmo de Floyd-Warshall

Um algoritmo que modifica a matriz de adjacências do grafo, mas funciona de forma parecida com Dijkstra. É mais aconselhável quando é necessária uma matriz de caminhos mínimos (em vez de um vetor, como no algoritmo de Dijkstra).

Aula 3: Leis de Potência

- Princípio de Pareto (lei do 80/20) – nem sempre é seguida à risca, mas costuma-se ter algo próximo;
- Lei de potência: duas variáveis onde uma varia de acordo com a potência da outra;
- Formato das leis de potência: $f(x) = ak^x + o(x^k)$.
- a e k são constantes, o(x^k) é uma função assintoticamente pequena, k é chamado de expoente da escala;
- Leis de potência são invariáveis à escala (i.e. um escalonamento de x produz um escalonamento proporcional da função);
- As leis de potência deram origem a teorias da física como a Teoria do Caos.

Distribuições de probabilidade

- Variável aleatória: mapeamento de um evento aleatório em um número;
- Variável discreta: o número de resultados possíveis é finito ou pode ser contado;
- Variável contínua: pode assumir qualquer valor dentro de um dado intervalo;
- Eventos independentes: a ocorrência de um não afeta a probabilidade do outro;
- Distribuição de probabilidade: descreve a chance que uma variável pode assumir ao longo de um espaço de valores.

Função acumulada e densidade

- Função acumulada: no caso de variáveis contínuas, determina a probabilidade da variável assumir um valor menor ou igual a um determinado valor x:

$$F_x(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_x(u)du$$

- Densidade do valor x = *Fx(x)*.

Distribuição Uniforme

- Parâmetros: a (limite inferior) e b (limite superior)

$$f_x(x) = \frac{1}{b-a}, a \leq x \leq b; para\ outros\ casos, 0.$$

Distribuição Exponencial

- Parâmetro: λ (média)

$$f_x(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \lambda > 0, x \geq 0; para\ outros\ casos, 0.$$

Distribuição Normal (Gaussiana)

- Parâmetros: μ (média) e σ (desvio-padrão)

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \sigma > 0$$

Média, valor esperado, variância e desvio padrão

Média distribucional

$$\mu = E(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_x(x) dx$$

Média amostral (estimador)

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

Variância

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$$

Desvio padrão

Raiz quadrada da variância.

Teorema central do limite

- Temos um grande número de eventos aleatórios independentes, com mesmo valor esperado e desvio padrão;
- O conjunto de suas contribuições se aproxima da distribuição normal.

Escalonamento de funções de lei de potência

- A constante de proporcionalidade é alterada, mas a forma geral da função permanece parecida com $\log f(x) = k \times \log x + \log a$.
- Esta reta é chamada de assinatura da lei, e tem relação linear com a inclinação k.
- Alteração da variável *x* só desloca a função pra cima ou pra baixo.

Grau da rede

O grau da rede é definido como o número de arestas conectadas a um vértice.

- *In-degree* (grau de entradas): número de arestas entrando;
- *Out-degree* (grau de saídas): número de arestas saindo.

Uma boa maneira de apresentar os graus de vértices é num gráfico de frequência acumulada: $P_k = \sum_{k'=k}^{\infty} P_{k'}$

Aula 4: Grafos aleatórios e redes de mundo pequeno (small world)

Grafos aleatórios

Dado um número *v* de vértices, o número máximo *a* de arestas é dado pela equação *a = (v – 1) / 2* e o número mínimo *m* de arestas é dado por *m = v – 1*.

Conceito de grafos aleatórios

Dado um grafo de *v* vértices, iniciar a colocação aleatória de arestas entre pares de vértices de forma aleatória, sem repetição. Serão formados subgrafos. Quando todos os vértices se conectam a um único grafo, o arranjo passa a ter um conjunto de propriedades:

- Quando o número de conexões aumenta, os subgrafos são ligados, criando grupos cada vez menores;
- Quando a média de conexões por vértice supera 1, surge um único grafo que liga todos os vértices.

Experimento de Milgram: “Small World Experiment”

- Dois “alvos”, pessoas normais, foram escolhidos e dois locais foram eleitos como origens;
- 42 cartas foram liberadas pelo professor;
- Instruções: “repasse essa carta a alguém que você conheça pessoalmente e que talvez conheça essa pessoa ou alguém que possa saber como fazer esta carta chegar ao seu destino”;
- Menor caminho = 2 pessoas, maior = 12, média = 5,5. Daí vem a frase dos “seis graus de separação”;
- Este experimento foi o ponto de partida das teorias de redes de mundo pequeno;
- Em 2001, o professor Watts repetiu o experimento em escala mundial, com média = 6.

Efeito Mundo Pequeno

$$\ell = \frac{1}{\frac{1}{2}n(n+1)} \sum_{i \geq j} d_{ij}$$

Onde:

- l = distância média entre todos os pares de vértices do grafo não-direcionado;
- d_{ij} = menor caminho entre os vértices i e j;
- [n * (n – 1)] /2 = número total de arestas (máximo de todas as combinações) do grafo.

Se o número de vértices dentro de uma distância r de um vértice cresce exponencialmente com r, então o valor de l crescerá de acordo com log n.

A rede é considerada como tendo efeito mundo pequeno se o valor de l escala logaritmicamente (ou menos) com o tamanho da rede.

Todas as redes que seguem lei de potência têm o valor de l crescendo no máximo a [log n / log (log n)].

Geração de redes de mundo pequeno

- A maioria dos vértices não é vizinho dos outros vértices;
- A maioria dos vértices pode ser alcançada de qualquer outro vértice através de poucas arestas.
- Experimento de Granovetter: a maioria das pessoas conseguiu emprego através de “um conhecido” (em vez de “um amigo”);
- As ligações fortes (“amigos”) fecham sobre si mesmas (i.e. sempre o mesmo grupo de conhecidos), enquanto laços fracos (“conhecidos”) participam de círculos diferentes de amizades, o que propicia maior disseminação de informações;

Clusterização (Agrupamento)

- Um *cluster* é um grupo de arestas num grafo que, entre si, tem muitas ligações, mas possui poucos vértices indo para outros grupos.
- O coeficiente de clusterização C é definido pela fórmula:

$$C = \frac{3 \times \textit{número de triângulos na rede}}{\textit{número de triplas de vértices conectados}}$$

- Um triângulo é um grupo de vértices { 1, 2, 3 } que tem ligações entre si, i.e. 1-2, 2-3, 3-1.
- Uma tripla conectada é um grupo de vértices { 4, 5, 6 } que tem arestas ligadas aos pares, i.e. 1-2, 2-3.

- O coeficiente pode ser entendido como a probabilidade média de dois vértices que são vizinhos de um mesmo outro vértice, também serão vizinhos (i.e. você tem 3 vértices, dois deles são vizinhos; esta é a probabilidade de algum desses dois ser vizinho do terceiro vértice).
- O coeficiente varia entre 0 e 1.

Paul Erdös – Rede de Colaboração de Artigos Científicos

Erdös foi o segundo matemático mais prolífico da história, só perdendo para Euler, tendo 507 coautores em seus *papers*. O número de Erdös do próprio Paul Erdös é zero, por ele ser o vértice de partida. Alguém que colaborou com ele recebe o índice 1, alguém que trabalhou com outra pessoa com índice 1 recebe o índice 2, e assim vai.

Aula 5: Redes sem escala ("scale-free")

- Poucos *hubs* têm muitas conexões, enquanto muitos nós têm poucas conexões (para os *hubs*, na maioria das vezes).
- A probabilidade de um grafo já densamente ligado absorver um novo músico na Orquestra Sinfônica do Estado de São Paulo (OSESP) é maior do que tipo, a probabilidade deste nó solitário se conectar as "amizades e inimizades".
- Todos os nós são equivalentes (i.e. não tem tratamento especial para certos nós).
- Alguns nós (especialmente *hubs*) serão mais requisitados que outros;

Modelo A (Albert-Lázló Barabási)

- Cada nó possui duas arestas;
- Os nós aos quais o novo nó se conecta são também aleatórios;
- Os primeiros nós serão os mais bem conectados.

Modelo B

- Número fixo de nós, nenhuma aresta;
- A cada instante, um nó é selecionado aleatoriamente e conectado com probabilidade dada pela função:

$$P_{(k_i)} = \frac{k_i}{\sum k_j}$$

- Elimina o processo de crescimento;
- O número de nós é constante durante a evolução da rede (i.e. este modelo apenas analisa as conexões entre os nós).

Características gerais das redes sem escala

Crescimento

- Para cada período, adiciona-se um novo nó à rede;
- Essa etapa enfatiza que as redes se compõem de um nó por vez.

Conexão preferencial

- Pressupõe-se que cada novo nó se conecte aos existentes com dois enlaces;
- A probabilidade de que se escolha um dado nó é proporcional ao número de *links* que o nó escolhido possui.

Hubs e leis de potência no modelo sem escala

- Nós mais antigos têm mais tempo para adquirir enlaces;
- Novos nós preferem se conectar aos que têm mais conexões, levando à máxima "ricos ficam mais ricos";
- Na ausência de crescimento, volta-se aos modelos estáticos, incapazes de gerar leis de potência.

Problemas do modelo sem escala

- Novos *links* podem surgir "do nada" quando se cria um *link* interno entre dois nós antigos;
- Assim como *links* podem desaparecer, desconectando toda uma rede de ligações.

Fator idade

- Alguns trabalhos acrescentaram o fator idade ao modelo sem escala, p. ex., quando atores se aposentam, param de conseguir novos *links* (filmes), o que torna *hubs* grandes menos frequentes;
- Outras pesquisas abordaram a possibilidade de, com a idade, os vértices perdiam progressivamente a capacidade de atrair novas arestas, o que não destruía a lei de potência, apenas a alterava;
- Outros *papers* descobriram que a conexão a um nó não é simplesmente proporcional ao número de links que ele possui, mas obedeceria a alguma função mais complicada. Tais efeitos poderiam destruir a lei de potência que caracteriza a rede.

Teoria de redes em expansão

- Valoriza os mecanismos que moldam a evolução da rede;
- O modelo sem escala teria sido abandonado se várias redes complexas importantes segue tal modelo.

Robustez

- Redes sem escala são muito resistentes a falhas, porque os *hubs* são poucos e a chance de qualquer nó ser atingido é a mesma (i.e. na maior parte das vezes, as falhas ocorrerão em nós "pouco importantes");
- Até 80% dos nós podem ser removidos aleatoriamente sem desconectar a rede;
- Esta característica deixa a rede muito vulnerável a falhas em nós específicos (*hubs*).