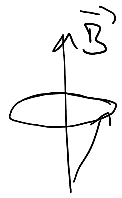
Aula 24 (22/Mar)

Na aula de hoje:

* Revisão da aula anterior.
* Experiência de Stern-Gerlach.
* Precessão de Larmor.
* Sistemas de dois níveis.



—— // ——

Revisão das últimas aulas

* Aula 21:
  - ▲ Propriedades da evolução temporal de sistema quântico.
  - ▲ Revisões para Prova 1.

* Aula 22:
  - ▲ Resolução de exercícios Folha 5

* Aula 23:
  - ▲ Resolução de exercícios para Prova 1.

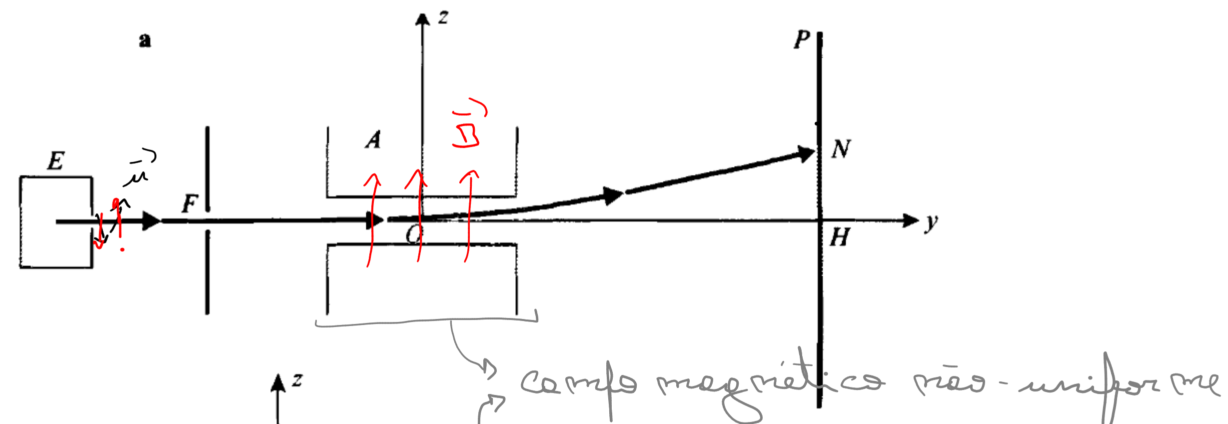
—— // ——

Capítulo 6: Aplicação dos postulados da MQ em sistemas de dois níveis

Neste capítulo vamo-nos centrar no estudo de sistemas quânticos com apenas dois níveis. Estes, por serem muito simples, permitir-nos-ão ressaltar vários aspectos cruciais discutidos no capítulo anterior.

6.1 Experiência de Stern-Gerlach

Átomos de prata (que têm momento magnético) percorrendo região onde existe campo magnético não-uniforme.



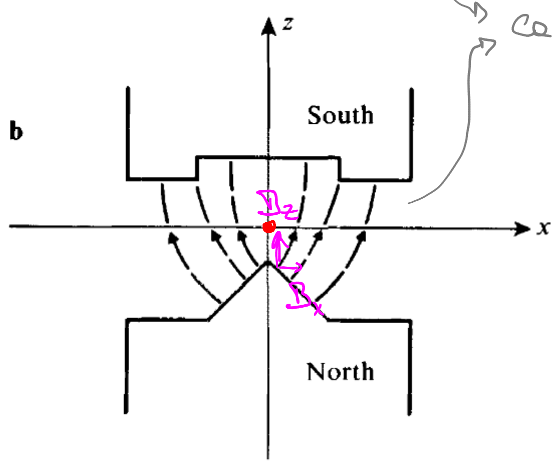


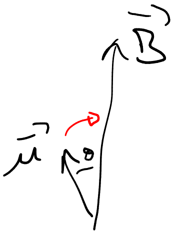
FIGURE 1

Schematic drawing of the Stern-Gerlach experiment. In figure a is shown the trajectory of a silver atom emitted from the high-temperature furnace *E*. This atom is deflected by the gradient of the magnetic field created by the electromagnet *A* and then condenses at *N* on plate *P*.

Figure b shows a cross section in the xOz plane of the electromagnet A; the lines of force of the magnetic field are shown in dashed lines. B_z has been assumed to be positive and $\partial B_z/\partial z$, negative. Consequently, the trajectory of figure a corresponds to a negative component $\mathcal{M}_z$ of the magnetic moment, that is, to a positive component of $\mathcal{S}_z$ (γ is negative for a silver atom).

6.1.1) Descrição clássica

Energia potencial de momento magnético num campo magnético



$$V = -\vec{\mu}\cdot\vec{B}$$

→ campo magnético

↳ momento magnético

O momento magnético dos átomos prata será $\vec{\mu} = g\,\vec{L}$, onde $\vec{L}$ é momento angular e g é ração giromagnética (para átomos prata $g<0$).

↳ este $\vec{L}$ pode ter duas origens:

- movimento angular orbital orbital;
- momento magnético intrínseco dos electrões (spin).

<u>Nota</u>: Nos átomos de prata, origem é o segundo caso, spin (apenas um electrão desemparelhado no orbital 5s, que tem $l = 0$, momento angular orbital nulo).

A força sentida pelos átomos de prata é obtida da energia potencial,

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} V(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\left(-\vec{\mu}\cdot\vec{B}\right) = \sum_{i,j=1}^{3} + \mu_i \frac{\partial}{\partial x_j} B_i$$

<u>Nota</u>: Os spins vão precessar em torno de $\vec{B}$, mas fá-lo-ão muito rapidamente, e por isso pode ser ignorado.
(em média, no tempo, spins apontam ao longo de $\vec{B}$).

Assumindo estas aproximações podemos escrever

$$\tilde{\vec{F}} = +\vec{\nabla}\left(\mu_z B_z\right) = \mu_z \vec{\nabla} B_z$$

$$= \mu_z \left(\underbrace{\cancel{\frac{\partial B_z}{\partial x}}}_{0}, \underbrace{\cancel{\frac{\partial B_z}{\partial y}}}_{0}, \frac{\partial B_z}{\partial z} \right)$$

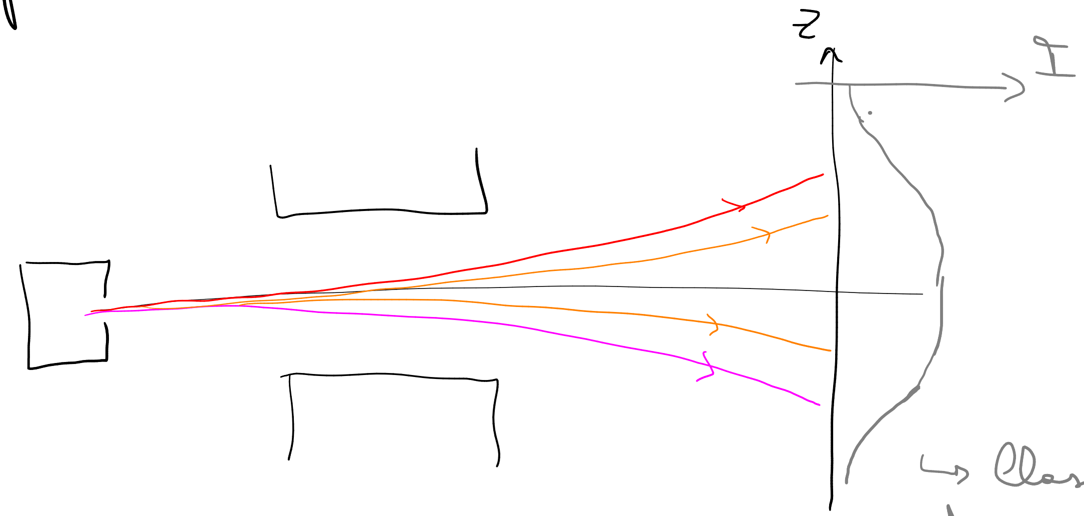
0 pois B_z não depende de y

↳ pois estamos no plano yOz.

$$\Leftrightarrow \tilde{\vec{F}} = \mu_z \cdot \frac{\partial B_z}{\partial z} \cdot \vec{e}_z$$

↳ produz deflexão da trajectória dos átomos de prata ao longo da direcção z, proporcionalmente ao componente μ_z.

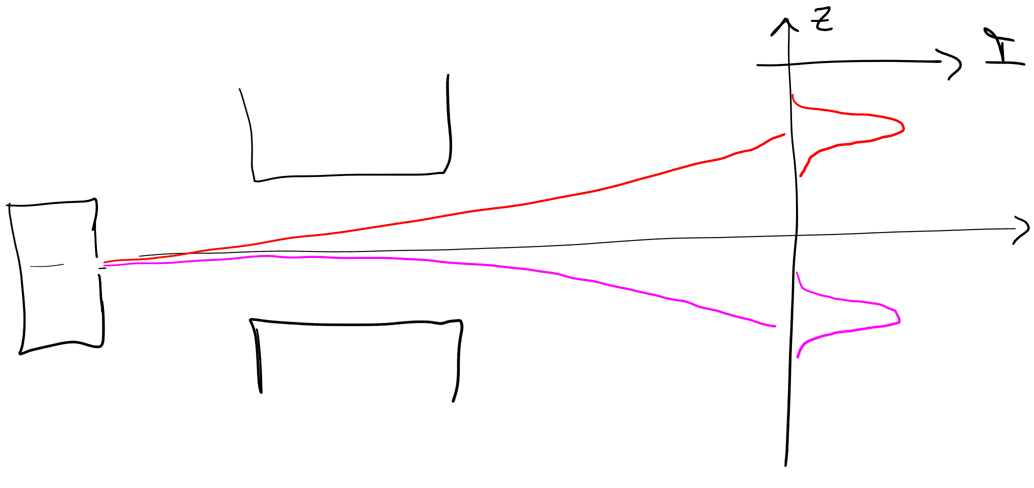
Como átomos saem do forno a altas temperaturas, esperamos distribuição aleatória de $\vec{\mu}$, logo esperamos $\mu_z \in [-|\vec{\mu}|, |\vec{\mu}|]$, e esperamos observar



↳ Classicamente esperamos detectar impactos de átomos de prata nesta grande região.

6.1.2) Resultados experimentais

Mas não foi isto que Stern e Gerlach observaram. Eles observaram dois picos em torno dos valores $\mu_z \simeq +|\vec{\mu}|$ e $\mu_z \simeq -|\vec{\mu}|$



A conclusão é que átomos de prata só admitem duas direcções de momento magnético (que resulta do spin do último electrão valência):

$$\vec{\mu} = \pm |\vec{\mu}| \, \vec{e}_z$$

↳ ou momento magnético ao longo da direcção $+\vec{e}_z$ ou $-\vec{e}_z$ com magnitude $|\vec{\mu}|$.

6.1.3) Descrição quântica

O espaço de estados será produto tensorial de $\mathcal{E}_{\vec{r}}$ e $\mathcal{E}_S$,

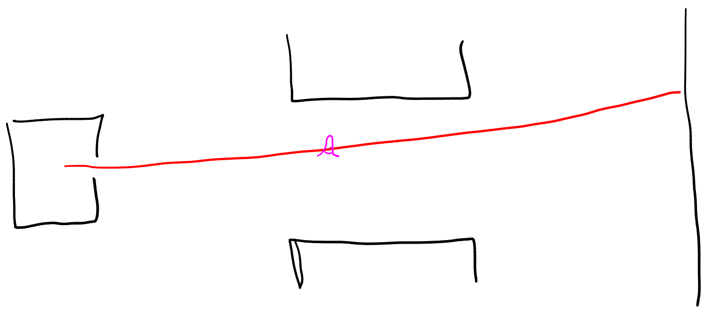
$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\vec{r}} \otimes \mathcal{E}_S$$

→ espaço estados de graus de liberdade internos (spin).

↳ espaço de estados de graus liberdade de externos (posição).

<u>Nota:</u> Podemos ignorar graus liberdade externos (massa, $\vec{r}$, ...) pois o tamanho do pacote de ondas descrevendo posição dos átomos são muito pequenos relativ// a todas as outras escalas de comprimento do sistema

↳ sistema quântico bem descrito pelo valor esperado (pacote de ondas concentrado), cujas eqçs de evolução são iguais às clássicas (T. Ehrenfest).



Vamos então fazer o tratamento quântico apenas dos graus de liberdade de spin.

Como $\vec{\mu} = \pm|\vec{\mu}|\,\vec{e}_z$, então vamos assumir que $\mathcal{E}_S$ tem dimensão 2. Vamos associar a $\mathcal{L}_z$ (momento angular dos átomos de prata ao longo $\vec{e}_z$) o observável $\hat{S}_z$, com dois auto-estados não degenerados, $|+\rangle$ e $|-\rangle$

$$\hat{S}_z|+\rangle = +\frac{\hbar}{2}|+\rangle \quad ,$$

$$\hat{S}_z|-\rangle = -\frac{\hbar}{2}|-\rangle \quad ,$$

que $\langle +|+\rangle = \langle -|-\rangle = 1$ e $\langle +|-\rangle = 0$, logo é base ortonormal, $\{|+\rangle, |-\rangle\}$, de $\mathcal{E}_S$, com relação fecho $|+\rangle\langle +| + |-\rangle\langle -| = \hat{\mathbb{1}}$.

Podemos escrever $\hat{S}_z$ matricialmente nesta base, $\{|+\rangle, |-\rangle\}$, como

$\langle +|\hat{S}_z|-\rangle$

$$\hat{S}_z = \frac{\hbar}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$\langle -|\hat{S}_z|-\rangle$

Temos duas outras observáveis associadas a $\mathcal{L}_x$ e $\mathcal{L}_y$,

$$\hat{S}_x = \frac{\hbar}{2}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\hat{S}_y = \frac{\hbar}{2}\begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}.$$

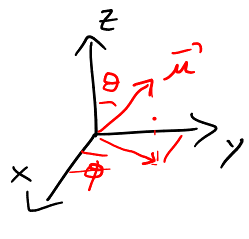
Estes são escritos em termos das matrizes de Pauli,

$$\sigma_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}$$

e $\sigma_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

<u>Nota</u>: As relações comutação de $\hat{S}_x, \hat{S}_y, \hat{S}_z$ são as mesmas do momento angular orbital (Folha 4): $[\hat{S}_i, \hat{S}_j] = i\hbar\, \varepsilon_{ijk} \hat{S}_k$.

Para momento magnético com direcção arbitrária $\vec{\mu} = |\vec{\mu}|.(\operatorname{sen}\theta\cos\phi, \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi, \cos\theta)$ e podemos escrever



$$\mathcal{L}_{\vec{\mu}} = \vec{\mathcal{L}} \cdot \vec{\mu} = \mathcal{L}_x \operatorname{sen}\theta\cos\phi +$$
$$+ \mathcal{L}_y \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi + \mathcal{L}_z \cos\theta,$$

podemos associar observável $\hat{S}_{\vec{\mu}}$ dada por

$$\hat{S}_{\vec{u}} = \frac{\hbar}{2}\begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta\, e^{-i\phi} \\ \operatorname{sen}\theta\, e^{i\phi} & -\cos\theta \end{bmatrix}$$

$$= \hat{S}_x \operatorname{sen}\theta \cos\phi + \hat{S}_y \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi + $$

$$+ \hat{S}_z \cdot \cos\theta$$

Os auto-vals. de $\hat{S}_x, \hat{S}_y, \hat{S}_z$ são $\pm\frac{\hbar}{2}$. Os auto-vecs. são

$*\ \hat{S}_z : \quad |\pm\rangle$

$*\ \hat{S}_x : \quad |\pm\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle \pm |-\rangle\right)$

$*\ \hat{S}_y : \quad |\pm\rangle_y = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle \pm i|-\rangle\right)$

sendo os auto-vecs de $\hat{S}_u$:

$$|+\rangle_u = \cos\frac{\theta}{2}\, e^{-i\phi/2}|+\rangle + \operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\, e^{i\phi/2}|-\rangle .$$

$$|-\rangle_u = -\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\, e^{-i\phi/2}|+\rangle + \cos\frac{\theta}{2}\, e^{i\phi/2}|-\rangle .$$

O estado mais geral neste espaço de estados $\mathcal{E}_s$

$$|\psi\rangle = \alpha|+\rangle + \beta|-\rangle$$

com $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$.

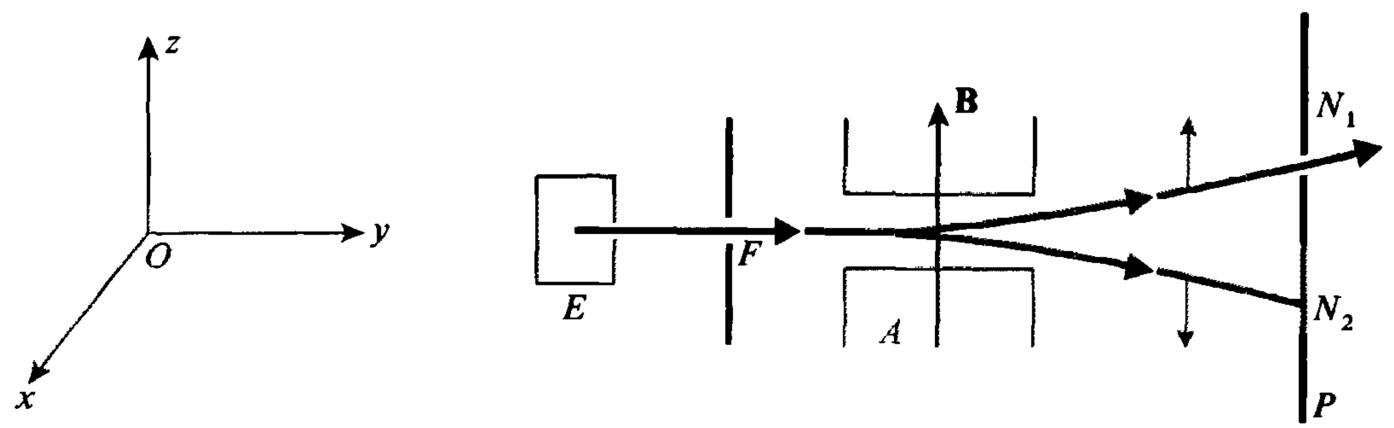
6.1.4) Medição spin

Antes de nos debruçarmos sobre algumas "experiências de pensamento" envolvendo este sistema, temos que ver como podemos preparar estados específicos.

6.1.4.1) Preparação de estado inicial

Preparação estados $|+\rangle$ ou $|-\rangle$

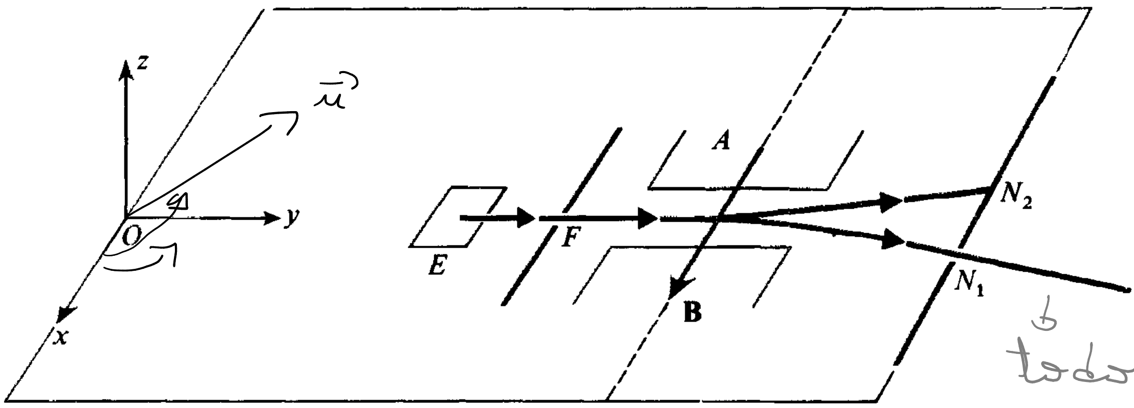
Podemos usar aparato anterior com furo na região onde colidem átomos



Todos os que atravessam P estão no estado $|\psi\rangle = |+\rangle$ $\Longleftrightarrow$ actua como um "polarizador de spin atómico"

Preparação estados $|\pm\rangle_x, |\pm\rangle_y, |\pm\rangle_u$:

Vamos usar aparato semelhante, rodando apenas para direcção de interesse.



↳ rodado para a direcção $\vec{e_x}$

todos no estado $|+\rangle_x$

Preparação estado geral $|\psi\rangle$

$$|\psi\rangle = \alpha|+\rangle + \beta|-\rangle, \quad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1,$$

Vamos ver que existe vector $\vec{u}$ tal que $|+\rangle_u = |\psi\rangle$

↳ Para vermos isto escrevemos

$$\alpha = |\alpha| . e^{ia}$$

$$\beta = |\beta| . e^{ib} ,$$

onde $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$. Como sabemos que $\text{sen}^2 + \cos^2 = 1$, escolhemos

$$|\alpha| = \cos \frac{\theta}{2} ,$$

$$|\beta| = \text{sen} \frac{\theta}{2} ,$$

que, como queremos $|\psi\rangle = |+\rangle_u$, podemos escolhemos $0 \leq \theta \leq \pi$.