BC0209–Fenômenos Eletromagnéticos

Segundo quadrimestre de 2016

Prof. José Kenichi Mizukoshi

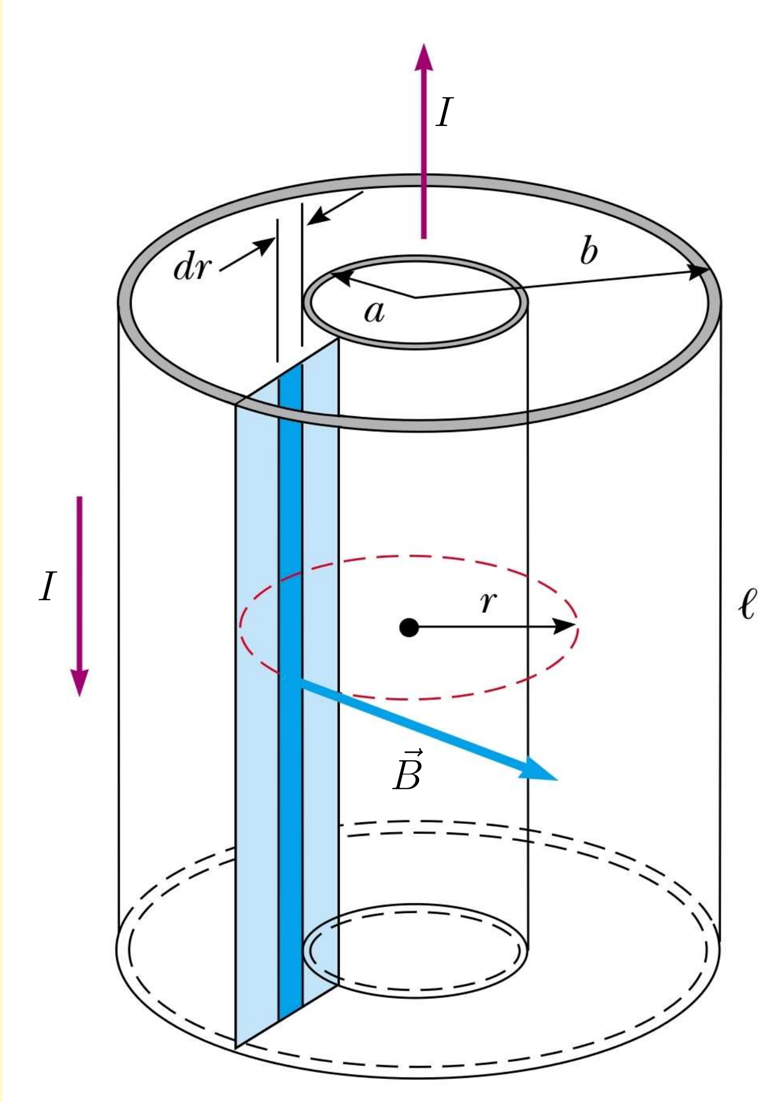
Aula 18 (versão 04/08/2015)

Energia magnética. Circuito LC. Corrente de deslocamento e a Lei de Àmpere generalizada.

Energia Magnética; Circuito LC; Corrente de Deslocamento e a Lei de Àmpere Generalizada

Energia magnética – exemplo

Ex. 1 A figura ao lado mostra um cabo coaxial longo, formado por dois condutores concêntricos, de raios a e b e comprimento ℓ. Supõe-se que os condutores são cascas cilíndrica finas, percorridos por uma corrente I em sentidos opostos.



Obtenha a indutância do cabo e a energia total armazenada no campo magnético do cabo.

Solução

- Como $\ell \gg a, b$ podemos usar a lei de Ampère para calcular o campo magnético em todo o espaço.
  - Para $a < r < b$, temos que

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I \quad \Rightarrow \quad B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

Exemplo: energia magnética armazenada num cabo coaxial

- Para $r < a$ ou $r > b$, o campo magnético é nulo:

$$\oint \underbrace{\vec{B} \cdot d\vec{\ell}}_{= B d\ell} = 0 \quad \Rightarrow \quad B \oint d\ell = 0 \quad \Rightarrow \quad B = 0$$

- A densidade de energia magnética é dada por

$$u_B = \frac{1}{2\mu_0} B^2 = \frac{1}{2\mu_0} \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi r} \right)^2 \quad \Rightarrow \quad u_B = \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 r^2}$$

Para o elemento de volume $d\mathcal{V}$ de uma casca cilíndrica de raios r e $r + dr$, a energia é

$$dU_B = u_B d\mathcal{V} = u_B[(2\pi r \ell)(dr)] \quad \Rightarrow \quad dU_B = \frac{\mu_0 I^2 \ell}{4\pi} \frac{dr}{r}$$

Exemplo: energia magnética armazenada num cabo coaxial

- Integrando sobre toda o volume ocupado pelo campo magnético, temos

$$U_B = \int dU_B = \frac{\mu_0 I^2 \ell}{4\pi} \underbrace{\int_a^b \frac{dr}{r}}_{= \ln r \big|_a^b} \quad \Rightarrow \quad \boxed{U_B = \frac{\mu_0 I^2 \ell}{4\pi} \ln \frac{b}{a}}$$

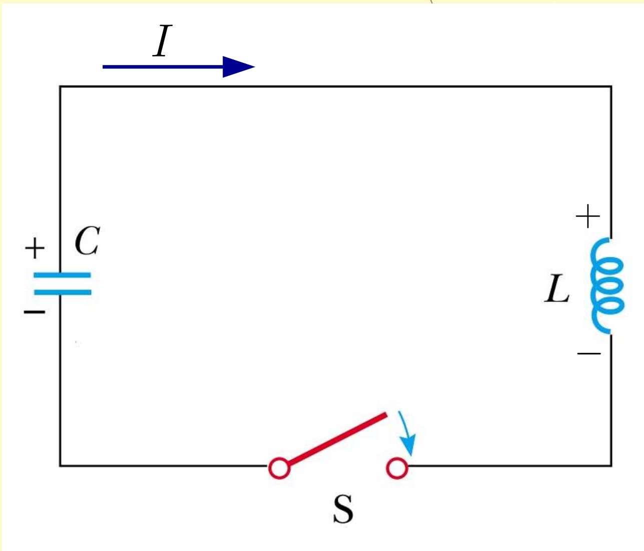
- Como $U_B = \frac{1}{2} L I^2$, temos que

$$\boxed{L = \frac{\mu_0 \ell}{2\pi} \ln \frac{b}{a}}$$

➠ Obs.: neste exemplo, é mais fácil encontrarmos primeiro a energia magnética armazenada no sistema para depois obtermos a indutância.

O circuito LC

- Considere o circuito da figura ao lado, formado por um indutor de indutância L e um capacitor de capacitância C. Na situação real, haverá uma resistência R, a qual será desprezível na nossa análise.



- Vamos supor que inicialmente o capacitor esteja completamente carregado com carga q_0, quando no instante $t = 0$ se conecta a chave S.

- Para um dado instante t logo após o circuito ser fechado, temos que pela lei das malhas de Kirchhoff

$$\frac{q}{C} - L\frac{dI}{dt} = 0$$

A carga q no capacitor <u>está diminuindo</u>, logo

$$I = -\frac{dq}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{dI}{dt} = -\frac{d^2q}{dt^2}$$

O circuito LC

Segue que

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{LC}q = 0$$

- A equação diferencial acima é similar à **equação de um oscilador harmônico** e a solução geral é dada por

$$q(t) = A\cos(\omega t + \phi)$$

onde A e ϕ são constantes a serem determinadas pelas **condições iniciais** e $\omega = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$.

- Na situação em que em $t = 0$, a carga no capacitor é q_0, portanto tem-se que $A = q_0$ e $\phi = 0$. Logo,

$$q(t) = q_0 \cos \omega t$$

Portanto,

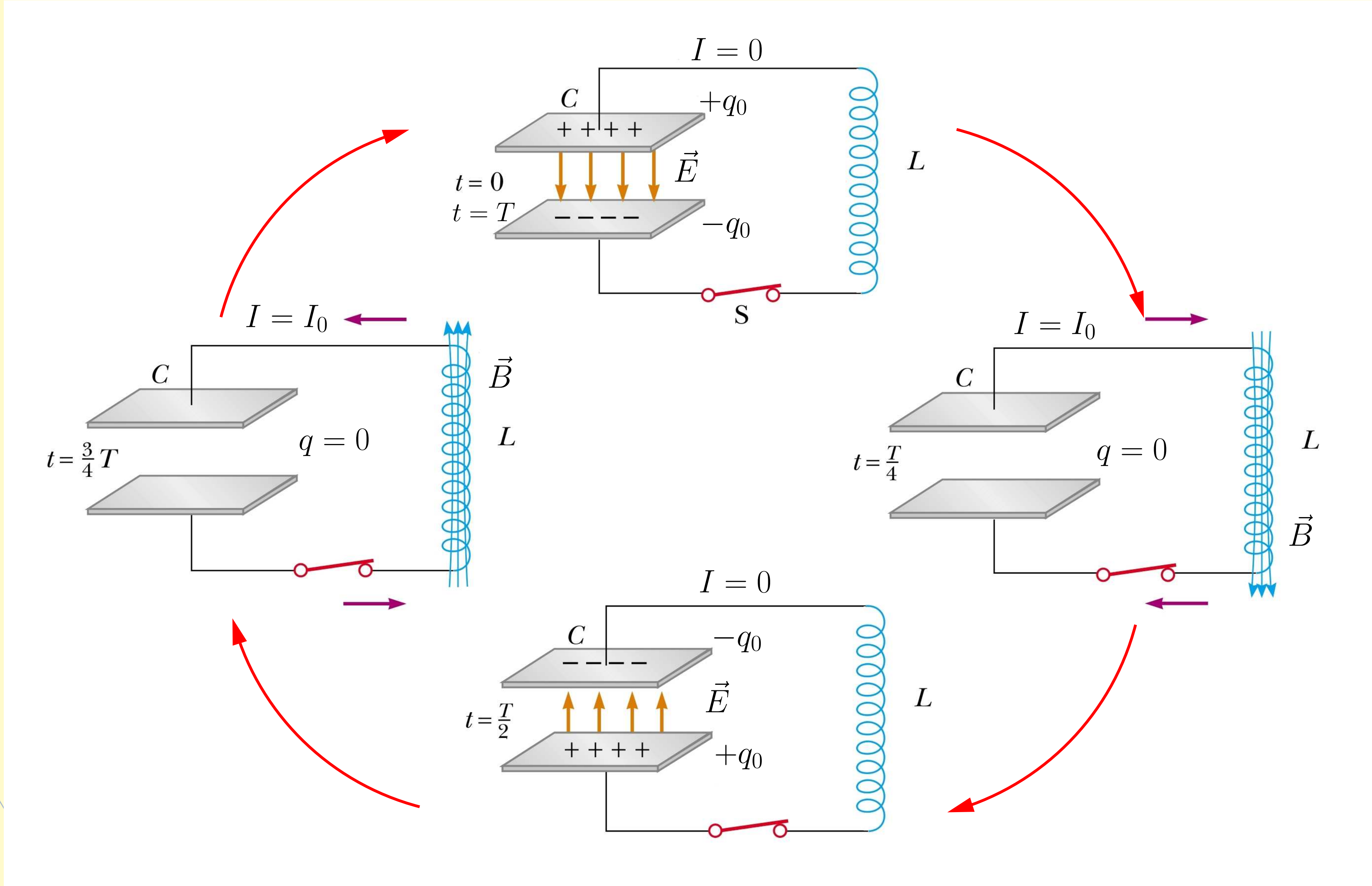
$$I(t) = -\frac{dq}{dt} = q_0\omega \,\text{sen}\, \omega t$$

O circuito LC

- Observe que há intervalos de tempo em que $q(t) < 0$, o que significa que as cargas nas placas do capacitor variam periodicamente não somente em valor absoluto, mas também em polaridade. Similarmente, a corrente muda de sentido periodicamente.
- Lembrando que o período T do movimento está relacionado com a frequência angular, temos

$$\omega T = 2\pi \quad \Rightarrow \quad T = 2\pi\sqrt{LC}$$

O circuito LC



O circuito LC

- As energias armazenadas no indutor e no capacitor são, respectivamente,

$$U_B = \frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2}L(q_0\omega)^2 \text{sen}^2\,\omega t$$

$$U_E = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} = \frac{1}{2}\frac{q_0^2}{C}\cos^2\omega t$$

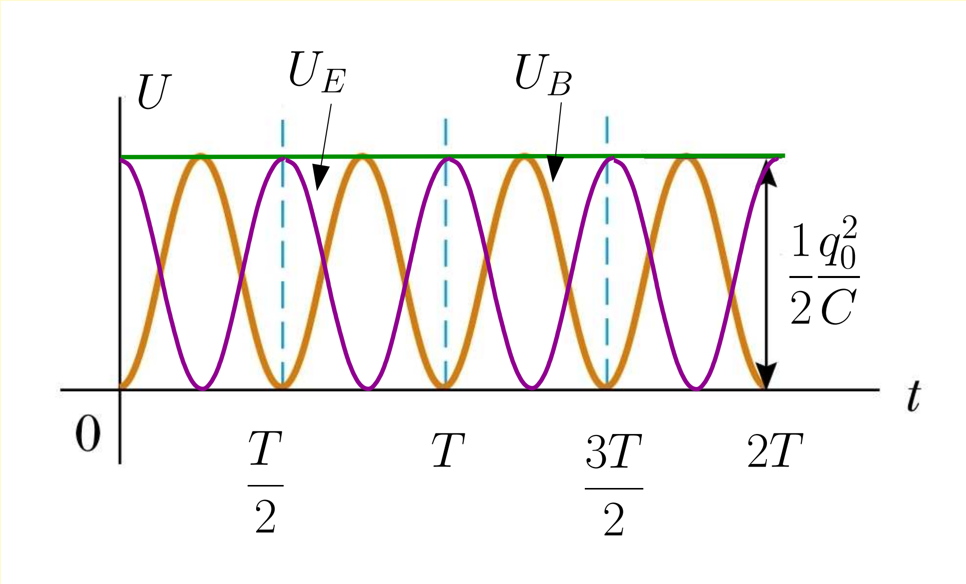
- Lembrando que $\omega = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$, a energia total do circuito é dada por

$$U = U_B + U_E = \frac{1}{2}L(q_0\omega)^2 \text{sen}^2\,\omega t + \frac{1}{2}\frac{q_0^2}{C}\cos^2\omega t \quad \Rightarrow \quad U = \frac{1}{2}\frac{q_0^2}{C}$$

➠ A **energia total (eletromagnética)** permanece constante no circuito LC.

O circuito LC

- Gráficos das energias elétrica, magnética e total no circuito LC



- Se considerarmos a resistência elétrica, teremos um circuito RLC. Como há dissipação de energia eletromagnética no resistor, haverá uma oscilação amortecida em U_E e U_B.

Corrente de deslocamento e a lei de Ampère generalizada

- Conforme já visto, cargas em movimento ou correntes, geram campos magnéticos. De acordo com a lei de Ampère, podemos relacionar a corrente com o campo magnético produzido por ela:

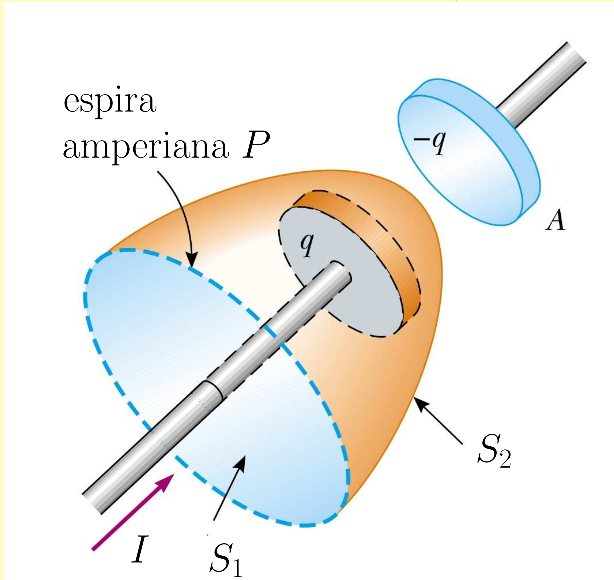
$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I$$

  A integral de linha é calculada sobre qualquer trajetória fechada (denominada espira amperiana) e I é a corrente total que passa através de uma superfície qualquer limitada pela espira.

- Conforme discutiremos a seguir, **Maxwell percebeu que a lei de Ampère dada na forma acima tem uma limitação**: ela só é válida quando a corrente for contínua no espaço.

Corrente de deslocamento e a lei de Ampère generalizada

- A figura ao lado exibe um capacitor circular de placas paralelas sendo carregado. Vamos aplicar a lei de Ampère na sua formulação original, escolhendo-se a espira amperiana P e considerando duas superfícies distintas: S_1 e S_2.



- Quando se escolhe a superfície S_1, obtemos

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I$$

- Por outro lado, escolhendo-se a superfície S_2, a integral acima dá zero, pois não há corrente entre as placas do capacitor.
- Para resolver essa discrepância, Maxwell postulou a existência de um termo adicional no lado direito da lei de Ampère, chamado de **corrente de deslocamento**:

$$I_d = \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$$

Corrente de deslocamento e a lei de Ampère generalizada

Temos que

$$\Phi_E = \int \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

é o fluxo do campo elétrico.

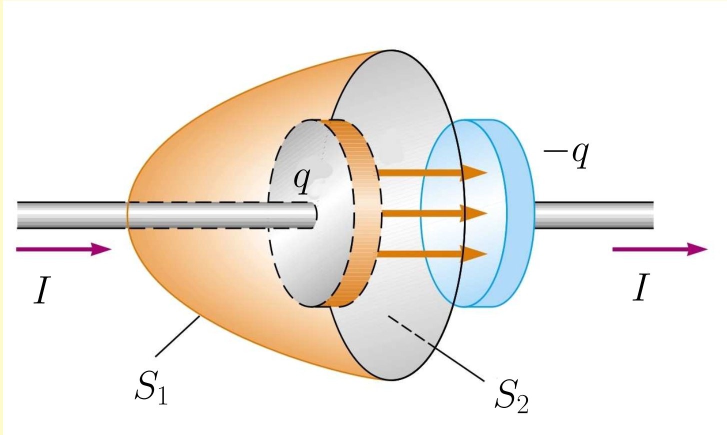
- Adicionando-se a corrente de deslocamento, a forma geral da lei de Ampère, também conhecida como a **lei de Ampère-Maxwell**, fica

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d}{dt} \int \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

- No caso do capacitor <u>sendo carregado (ou descarregado)</u> , a variação do campo elétrico entre as placas pode ser equivalente a uma corrente que atua como uma continuação da corrente I no fio.

Corrente de deslocamento e a lei de Ampère generalizada

- Considere agora a espira amperiana indicada na figura ao lado, com o capacitor ideal sendo carregado. Pela lei de Ampère-Maxwell, temos que



$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$$

- Escolhendo-se a superfície S_2 (um círculo entre as placas), temos que $I = 0$ na equação acima, enquanto que o fluxo elétrico é

$$\Phi_E = \int \vec{E} \cdot d\vec{A} = EA = \left(\frac{q}{\varepsilon_0 A}\right) A \quad \Rightarrow \quad \Phi_B = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

Portanto,

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d}{dt}\left(\frac{q}{\varepsilon_0}\right) \quad \Rightarrow \quad \oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I$$

que é o resultado obtido ao se escolher a superfície S_1.

Corrente de deslocamento e a lei de Ampère generalizada – exemplo

Ex. 2 Um capacitor de placas paralelas possui placas circulares de raio $R = 30$ mm e a distância entre elas é 5,0 mm. Se aplicarmos uma tensão entre as placas dada por

$$V(t) = V_0 \,\text{sen}\, \omega t$$

onde $V_0 = 150$ V e $\omega = 2\pi f$, com $f = 60$ Hz, qual o campo magnético induzido, $B(r,t)$, em função da distância radial r para um dado instante de tempo t?

Solução

- Para um capacitor de placas paralelas, tem-se que

$$\Delta V = Ed$$

  onde neste caso $\Delta V = V(t)$ e $d = 5{,}0$ mm.

- De acordo com a lei de Ampère-Maxwell, tem-se que

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d}{dt} \int \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

Corrente de deslocamento e a lei de Ampère generalizada – exemplo

- Dentro do capacitor, $I = 0$. Logo, o campo magnético é gerado pela variação do fluxo do campo elétrico, que está relacionado com a corrente de deslocamento I_d.

- Desprezando-se os efeitos de borda, a região interna do capacitor pode ser aproximada como um cilindro muito longo de raio R conduzindo uma corrente imaginária uniforme I_d. Tal corrente gera um campo magnético, cujas linhas de campo são circulares, com centro no eixo do cilindro.

- Para $r \leq R$, escolhendo um círculo de raio r entre as placas do capacitor como a espira amperiana, temos que

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = B 2\pi r = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d}{dt} \int \underbrace{\vec{E} \cdot d\vec{A}}_{= E\, dA} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\pi r^2}{d} \frac{dV(t)}{dt}$$

$$\Rightarrow \quad B = \frac{\mu_0 \varepsilon_0 r}{2d} \frac{dV(t)}{dt}$$

Como $\dfrac{dV(t)}{dt} = V_0 \omega \cos \omega t$, segue que

$$B(r,t) = \frac{\mu_0 \varepsilon_0 r}{2d} V_0 \omega \cos \omega t$$

- Lembrando que

$$\mu_0 = 4\pi 10^{-7}\ \mathsf{T \cdot m/A} \quad \text{e} \quad \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \approx 8{,}99 \times 10^9\ \frac{\mathsf{N\,m^2}}{\mathsf{C^2}}$$

Temos que

$$\boxed{B(r,t) = (6{,}28 \times 10^{-11}\, r\ \mathsf{T}) \cos[2\pi(60\ \mathsf{Hz})t]}$$

onde $r \leq R$ é dado em metros.

Corrente de deslocamento e a lei de Ampère generalizada – exemplo

- Para $r > R$, escolhendo um círculo de raio r como sendo a espira amperiana (lembrando que o campo elétrico é zero fora das placas),

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = B 2\pi r = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d}{dt} \int \underbrace{\vec{E} \cdot d\vec{A}}_{= E\, dA} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\pi R^2}{d} \frac{dV(t)}{dt}$$

Portanto,

$$B(r,t) = \frac{\mu_0 \varepsilon_0 R^2}{2rd} V_0 \omega \cos \omega t$$

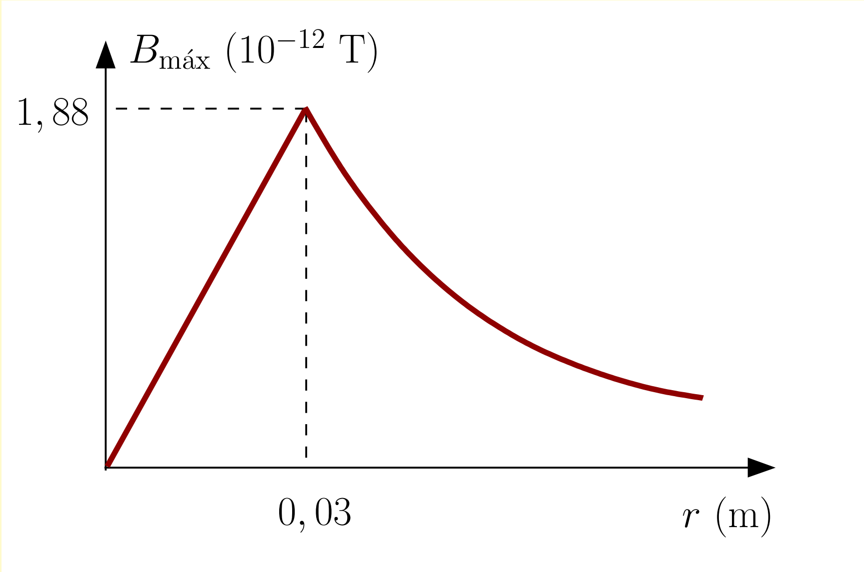
- Logo,

$$\boxed{B(r,t) = \left(\frac{5{,}66}{r} \times 10^{-14}\ \mathrm{T} \right) \cos[2\pi (60\ \mathrm{Hz}) t]}$$

onde $r > R$ é dado em metros.

Corrente de deslocamento e a lei de Ampère generalizada – exemplo

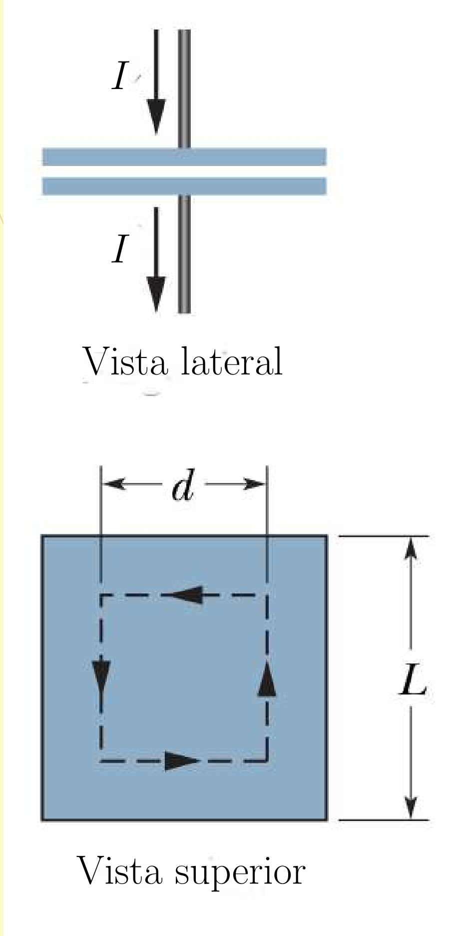
- O gráfico abaixo mostra o máximo valor do campo magnético em função de r.



Problemas Propostos

P1 Na Fig. ao lado, um capacitor de placas paralelas possui placas quadradas de lado $L = 1{,}0$ m. Uma corrente de 2,0 A carrega o capacitor, produzindo um campo uniforme E entre as suas placas, com E perpendicular às placas. (a) Qual é a corrente de deslocamento I_d através da região entre as placas? (b) Qual o valor de dE/dt nessa região? (c) Qual é a corrente de deslocamento circundada pelo caminho quadrado pontilhado de lado $d = 0{,}50$ m? Qual o valor de $\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell}$ ao longo do caminho quadrado pontilhado?

Resp. (a) $I_d = 2{,}0$ A; (b) $dE/dt = 2{,}3 \times 10^{11}$ V/m · s; (c) $I'_d = 0{,}50$ A; (d) $\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = 4{,}3 \times 10^{-7}$ T · m.



Referências

- R. A. Serway, e J. W. Jewett Jr., *Princípios de Física, Vol. 3*, Cengage Learning;
- D. Halliday, R. Resnick e K. S. Krane, *Física, Vol. 3*, LTC.