# BC0209–Fenômenos Eletromagnéticos

## Segundo quadrimestre de 2016

Prof. José Kenichi Mizukoshi

Aula 6 (versão 16/06/2015)

Potencial elétrico de distribuições contínuas de carga. Potencial elétrico de um condutor carregado.

# Potencial Elétrico: Distribuições Contínuas de Carga, Condutor Carregado

# Obtendo o campo elétrico a partir do potencial eletrostático

- Para uma **força conservativa** tem-se que a força é menos o **gradiente** da energia potencial $U$ (Aula 5 – Material Suplementar, p. 27):

$$\Delta U = -\int \vec{F} \cdot d\vec{\ell} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{F} = -\vec{\nabla} U$$

  - Em coordenadas cartesianas, o operador **nabla** é dado por

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\,\hat{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\,\hat{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\,\hat{k}$$

    enquanto que em outros sistemas de coordenadas (*e.g.* coordenadas esféricas) as expressões são não-triviais.

# Obtendo o campo elétrico a partir do potencial eletrostático

- Podemos obter uma relação similar, envolvendo o potencial e o campo eletrostático. Como

$$\Delta V = -\int \vec{E} \cdot d\vec{\ell} \quad \Rightarrow \quad dV = -\vec{E} \cdot d\vec{\ell}$$

Em coordenadas cartesianas,

$$dV = -(E_x dx + E_y dy + E_z dz)$$

- Por outro lado, como $V = V(x, y, z)$, tem-se que

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz$$

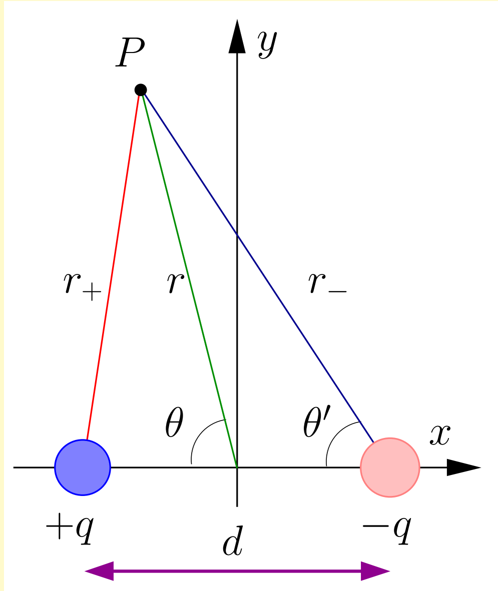
- Comparando as expressões de $dV$ acima, tem-se que

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}; \quad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}; \quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

ou seja, $\vec{E} = -\vec{\nabla} V$.

# Obtendo o campo elétrico a partir do potencial eletrostático – exemplo

**Ex. 1** Obtenha o campo de um dipolo elétrico à partir do seu potencial, no ponto $P$ distante dele, conforme mostra a figura ao lado.




**Solução** Conforme calculado na Aula 5, pág. 21, o potencial num ponto $P$ distante do dipolo elétrico ($r \gg d$) é dado por

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qd}{r^2}\cos\theta$$

- Em coordenadas cartesianas, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Pela figura acima (observando que $x < 0$),

$$\cos\theta = \frac{-x}{r} = \frac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

e portanto

$$V(r) = V(x,y) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} qd \frac{-x}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

# Obtendo o campo elétrico a partir do potencial eletrostático – exemplo

- O campo elétrico é dado por

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V = -\frac{\partial V}{\partial x}\,\hat{\imath} - \frac{\partial V}{\partial y}\,\hat{\jmath} = E_x\,\hat{\imath} + E_y\,\hat{\jmath}$$

Temos que

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} qd \left[\frac{1}{(x^2+y^2)^{3/2}} + \frac{x(-3/2)(2x)}{(x^2+y^2)^{5/2}}\right] = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} qd \frac{-2x^2+y^2}{(x^2+y^2)^{5/2}}$$

$$E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} qd \frac{-3xy}{(x^2+y^2)^{5/2}}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qd}{(x^2+y^2)^{5/2}}\left[(-2x^2+y^2)\,\hat{\imath} - 3xy\,\hat{\jmath}\right]}$$

# Obtendo o campo elétrico a partir do potencial eletrostático – exemplo

- Para o caso particular em que $\theta = \pi/2$ (que corresponde a $x = 0$), temos que

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qd}{y^3}\,\hat{\imath}$$

que está de acordo com o resultado da Aula 2, pág. 8, para $y \gg d$.

# Potencial elétrico de uma distribuição contínua de cargas

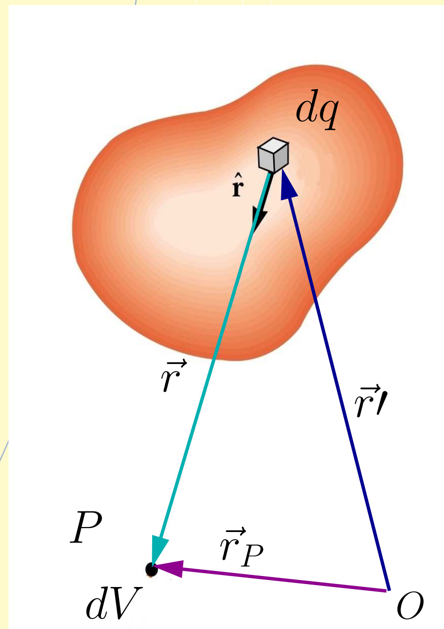
- Considere um objeto carregado, de tamanho finito. Como o objeto não se estende até o infinito, podemos tomar $V = 0$ em $r \to \infty$. Utilizando este referencial de nível zero, o elemento de carga $dq$ produz o potencial elétrico no ponto $P$ dado por

$$dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{dq}{r}$$

onde $r$ é a distância entre o ponto $P$ e a posição da carga $dq$.
Relembre que

$$dq = \begin{cases} \rho\, d\mathcal{V} & \text{(distribuição volumétrica)} \\ \sigma\, dA & \text{(distribuição superficial)} \\ \lambda\, d\ell & \text{(distribuição linear)} \end{cases}$$

dependendo da distribuição das cargas e da geometria do objeto.



# Potencial elétrico de uma distribuição contínua de cargas

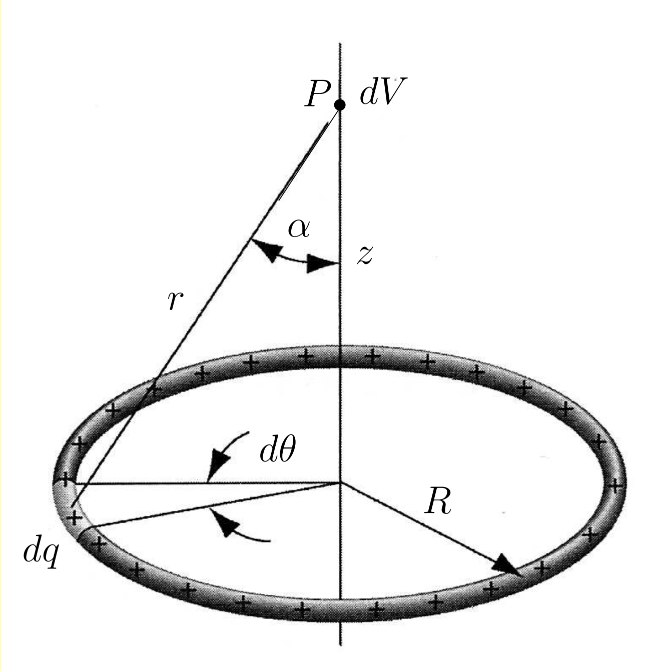
- Pode-se obter o potencial total no ponto $P$ integrando sobre todas as cargas da distribuição, ou seja,

$$V(r_P) = \int dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{dq}{r}$$

➠ Observe que como o potencial elétrico é uma <u>grandeza escalar</u>, não há integração por componentes, como ocorre com o campo elétrico.

# Potencial elétrico de uma distribuição contínua de cargas – exemplo

**Ex. 2** Encontre o potencial elétrico de um anel uniformemente carregado de raio $R$ e carga total $Q$ em um ponto $P$ situado no eixo que passa pelo seu centro.




**Solução** Como se trata de uma distribuição linear de cargas,

$$dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{dq}{r}$$

onde $r = \sqrt{R^2 + z^2}$ e $dq = \lambda\, d\ell$, com $d\ell = Rd\theta$.

- Temos que

$$V = \int dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda R}{\sqrt{R^2+z^2}}\underbrace{\int_0^{2\pi} d\theta}_{=2\pi}$$

- Como a distribuição de cargas é uniforme,

$$\lambda = \frac{dq}{d\ell} = \frac{Q}{2\pi R}$$

- Portanto,

$$\boxed{V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{\sqrt{R^2+z^2}}}$$

Partindo-se da expressão encontrada acima para o potencial elétrico, obtenha o campo elétrico.

**Solução** Como $V = V(z)$, o campo elétrico é dado por

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V = -\frac{dV}{dz}\,\hat{\imath}$$

Obtemos assim,

$$\boxed{\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Qz}{(R^2+z^2)^{3/2}}\,\hat{k}}$$

➠ O resultado acima é similar a aquele encontrado na Aula 2, pág. 16, à partir da integração direta do campo.

# Potencial elétrico de uma distribuição contínua de cargas – exemplos

**Ex. 3** Obtenha o potencial elétrico de uma esfera de raio $R$, uniformemente carregada com carga $Q$.

**Solução** O potencial elétrico pode ser obtido integrando-se $dV = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{dq}{r}$.

Contudo, neste caso, devido à existência de simetria na distribuição de cargas, podemos encontrar primeiro o campo elétrico à partir da lei de Gauss e posteriormente obter o potencial elétrico através da expressão

$$V(r) = -\int \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$$

- Conforme visto na Aula 4, pág. 12, o campo elétrico em toda a região do espaço é dado por

$$\vec{E} = \begin{cases} \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{Qr}{R^3}\,\hat{r} & (\text{região } I, r < R) \\ \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{Q}{r^2}\,\hat{r} & (\text{região } II, r \geq R) \end{cases}$$

# Potencial elétrico de uma distribuição contínua de cargas – exemplos

- Podemos assumir que $V = 0$ para $r \to \infty$, pois a distribuição de cargas é finita. Neste caso, devemos realizar a integração do campo a partir do infinito.

- Para $r > R$ (fora da esfera)

$$V_{II}(r) = -\int_{\infty}^{r} \vec{E}_{II} \cdot \underbrace{d\vec{\ell}}_{= dr\,\hat{r}} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \underbrace{\int_{\infty}^{r} \frac{dr}{r^2}}_{= -\frac{1}{r}\Big|_{\infty}^{r}} \quad \Rightarrow \quad V_{II}(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r} \qquad (*)$$

- Para $r < R$ (dentro da esfera)

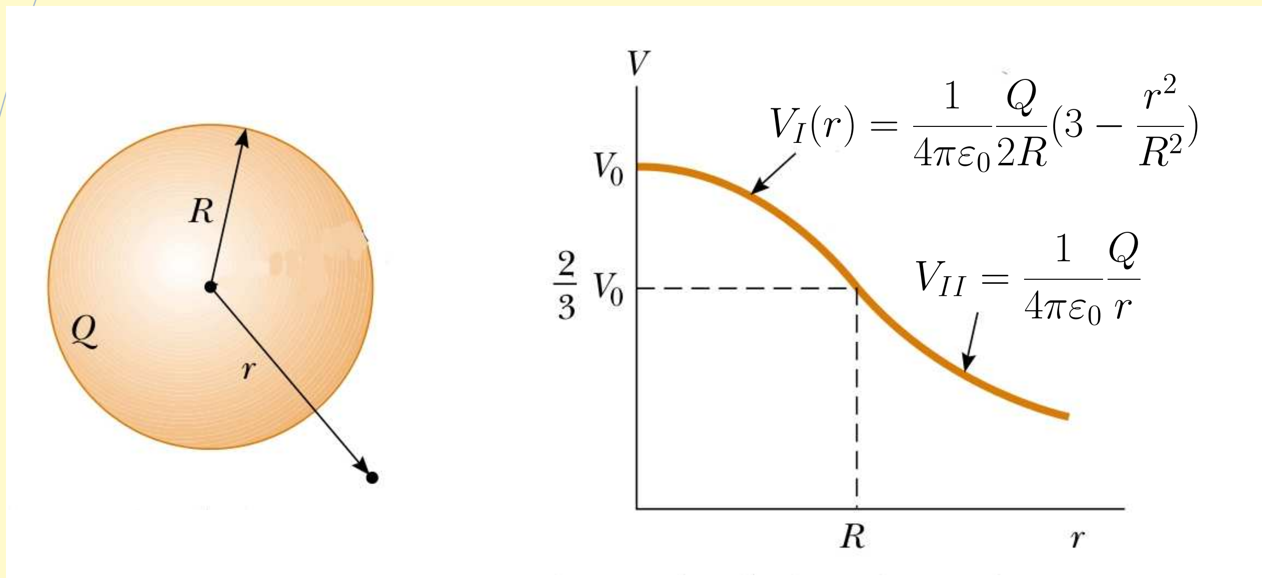
$$\Delta V = V_I(r) - V_I(R) = -\int_{R}^{r} \vec{E}_I \cdot d\vec{\ell} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{R^3}\int_{R}^{r} r\,dr$$

$$\Rightarrow \quad V_I(r) = V_I(R) - \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{R^3}\frac{r^2 - R^2}{2}$$

- A função $V(r)$ é contínua, portanto $V_I(R)$ é igual a $V_{II}(R)$, que é dada pela Eq. ($\circledast$). Logo,

$$V_I(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{R} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{R^3}\frac{r^2 - R^2}{2} \quad \Rightarrow \quad V_I(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{2R}\left(3 - \frac{r^2}{R^2}\right)$$

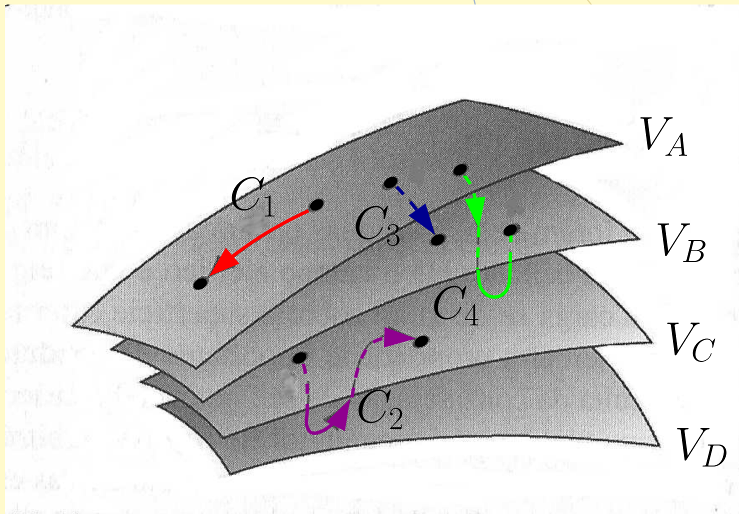
Em particular, no centro da esfera o potencial é máximo e possui o valor $V_I(0) \equiv V_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{3Q}{2R}$.



# Superfícies equipotencias



- Uma **superfície equipotencial** é uma superfície na qual o potencial elétrico tem o mesmo valor em todos os pontos.
- A figura ao lado mostra partes de uma família de superfícies equipotenciais.




  - O trabalho realizado por forças elétricas para mover uma carga $q_0$ é nulo quando os pontos inicial e final se encontram numa mesma superfície equipotencial, como é o caso dos caminhos $C_1$ e $C_2$.
  - Os trabalhos pelos caminhos $C_3$ e $C_4$ não são nulos e possuem os mesmos valores, pois ambos os caminhos começam num ponto com potencial $V_A$ e terminam em um outro com potencial $V_B$. Neste caso, para ambos os caminhos, tem-se

$$W_{AB} = -q_0(V_B - V_A)$$

# Superfícies equipotencias

- Temos que

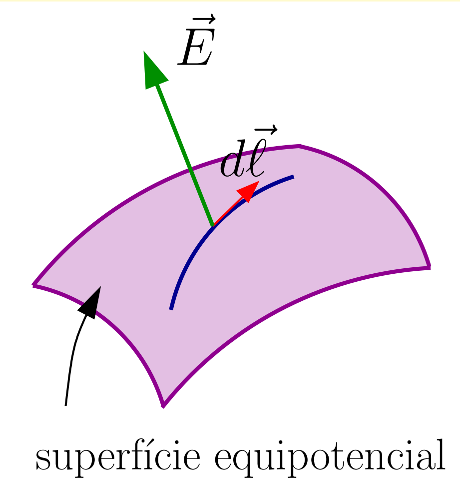
$$\Delta V = \int dV = -\int \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$$

Portanto,

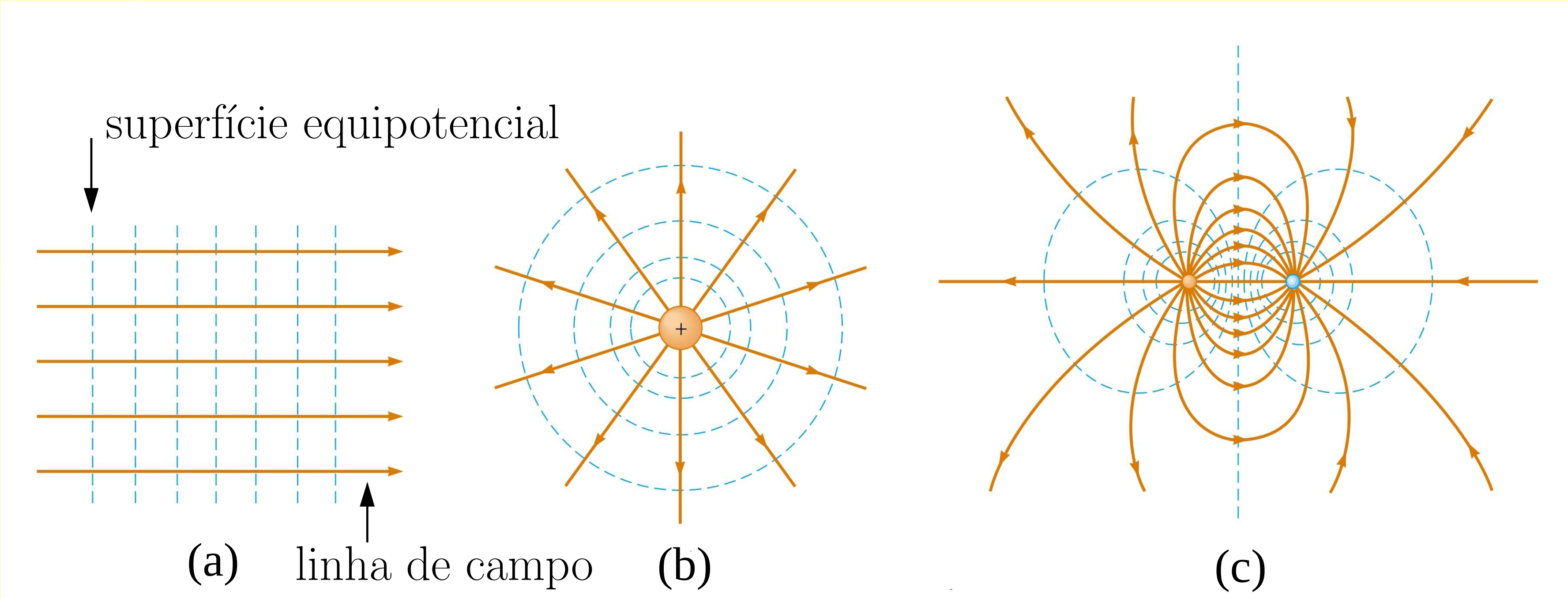
$$dV = -\vec{E} \cdot d\vec{\ell}$$

- Em uma superfície equipotencial, tem-se que $dV = 0$ quando se desloca $d\vec{\ell}$ sobre ela. Portanto, $\vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0$, ou seja, $\vec{E} \perp d\vec{\ell}$.

Como $d\vec{\ell}$ é paralela à superfície equipotencial, isto implica que próximo à essa superfície, o campo elétrico é perpendicular a ela.



- Superfícies equipotenciais (linhas tracejadas) e linhas de campo elétrico (linhas cheias) para (a) uma placa infinita, (b) uma carga pontual $q > 0$ e (c) um dipolo elétrico.



# O potencial elétrico de um condutor carregado

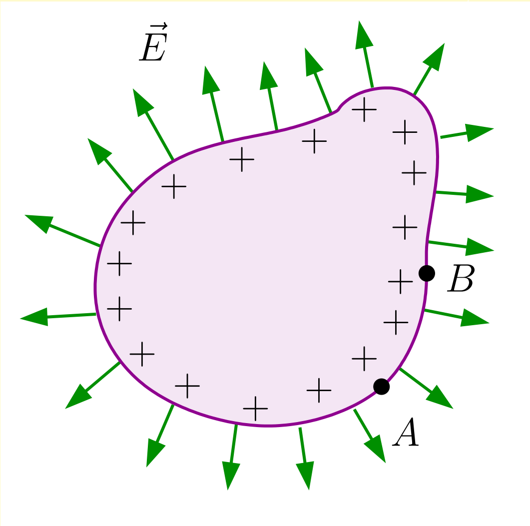
- Foi visto que para um condutor carregado e isolado (Aula 4),

  (i) o campo elétrico é nulo em seu interior;

  (ii) a carga se distribui sobre a superfície do condutor (este arranjo possui a menor energia potencial).

- A terceira propriedade para um condutor carregado: no regime eletrostático, todo o condutor está a um mesmo potencial.

  De fato, considere o condutor carregado e isolado da figura ao lado. Para quaisquer pontos $A$ e $B$ na superfície do condutor,




$$V_B - V_A = -\int_A^B \underbrace{\vec{E}\cdot d\vec{\ell}}_{=0,\text{ pois } \vec{E}\perp d\vec{\ell}} = 0 \;\Rightarrow\; V_A = V_B$$

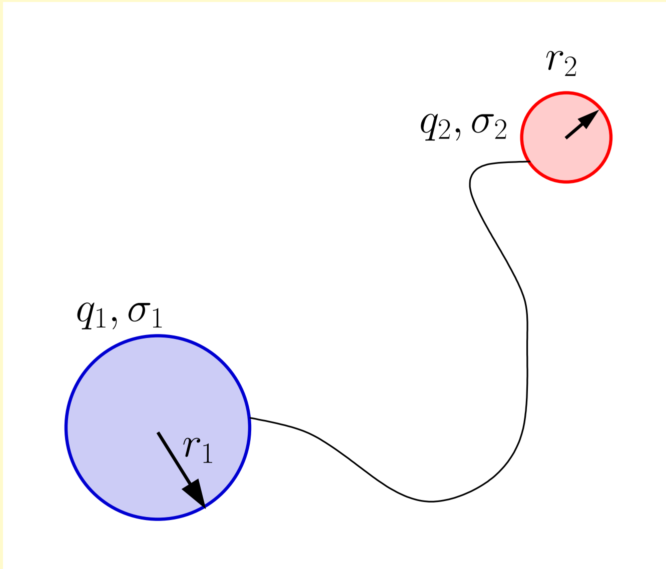
# O potencial elétrico de um condutor carregado

➠ Superfície de um condutor é uma superfície equipotencial.

Além disto, como $\vec{E} = 0$ no interior de um condutor em regime eletrostático, o potencial elétrico $V$ nessa região é constante e igual ao seu valor da superfície.

- Quarta propriedade: para um condutor de formato arbitrário, a densidade superficial de carga é maior perto das pontas (superfícies convexas que tenham um pequeno raio de curvatura).

Para demonstrar esta propriedade, considere o objeto formado por duas esferas condutoras carregadas, conectadas por um **fio condutor** longo e fino. O condutor de raio $r_1$ está carregado com carga $q_1$ e o condutor de raio $r_2$ com carga $q_2$. Vamos supor que $r_1 > r_2$.



Como na superfície esférica de raio $r$ o potencial é dado por

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r}$$

e no equilíbrio eletrostático ele é constante por todo o objeto, tem-se que

$$V_1 = V_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1}{r_1} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_2}{r_2} \quad \Rightarrow \quad \frac{q_2}{q_1} = \frac{r_2}{r_1} \quad (\circledast)$$

Portanto, fazendo uso da Eq. $(\circledast)$,

$$\frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \frac{q_2/(4\pi r_2^2)}{q_1/(4\pi r_1^2)} = \underbrace{\frac{q_2}{q_1}}_{=\frac{r_2}{r_1}}\frac{r_1^2}{r_2^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \frac{r_1}{r_2} > 1$$

Logo, $\sigma_2 > \sigma_1$.

# O potencial elétrico de um condutor carregado

Conforme visto na Aula 4, pág. 26, a intensidade do campo elétrico na vizinhança da superfície condutora é dada por

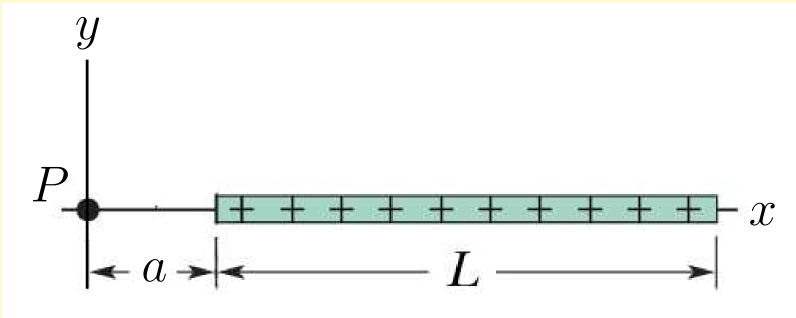
$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

Portanto, temos que $E_2 > E_1$.

➠ Consequência: perto de um condutor com ponta fina, o campo elétrico pode ser grande o suficiente para ionizar moléculas do ar na vizinhança. Isto ocorre para $E > E_{\max}$, onde $E_{\max}$ é conhecido como **rigidez dielétrica** do material (*e.g.* $E_{\max} \approx 3 \times 10^6$ V/m para o ar). Tal efeito é conhecido como **descarga corona**.

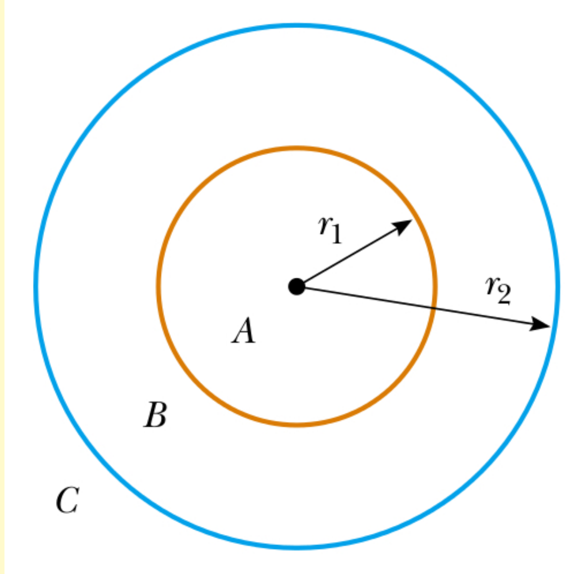
# Problemas Propostos

**P1** A Fig. abaixo mostra uma haste fina de plástico de comprimento $L$, carregada uniformemente com carga positiva $Q$, colocada sobre o eixo $x$ a uma distância $a$ da origem, onde está localizado o ponto $P$. Adotando-se que $V = 0$ no infinito, (a) encontre o potencial elétrico em $P$. (b) Escreva a expressão do potencial elétrico para um ponto $x$ qualquer e encontre, à partir dessa expressão, o campo elétrico em $P$ e o compare com a expressão da Aula 2, pág. 13.




**Resp.** (a) $V(0) = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{Q}{L}\ln\left(1 + \dfrac{L}{a}\right)$; (b) $\vec{E} = -\dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{Q}{a(a+L)}\,\hat{\imath}$.

**P2** Considere duas cascas esféricas finas condutoras, conforme mostradas na Fig. ao lado. A casca interna possui raio $r_1 = 15{,}0$ cm e carga $q_1 = 10{,}0$ nC, enquanto que a casca externa possui raio $r_2 = 30{,}0$ cm e carga $q_2 = -15{,}0$ nC. Encontre o potencial elétrico $V$ nas regiões $A$, $B$ e $C$, com $V = 0$ em $r \to \infty$.



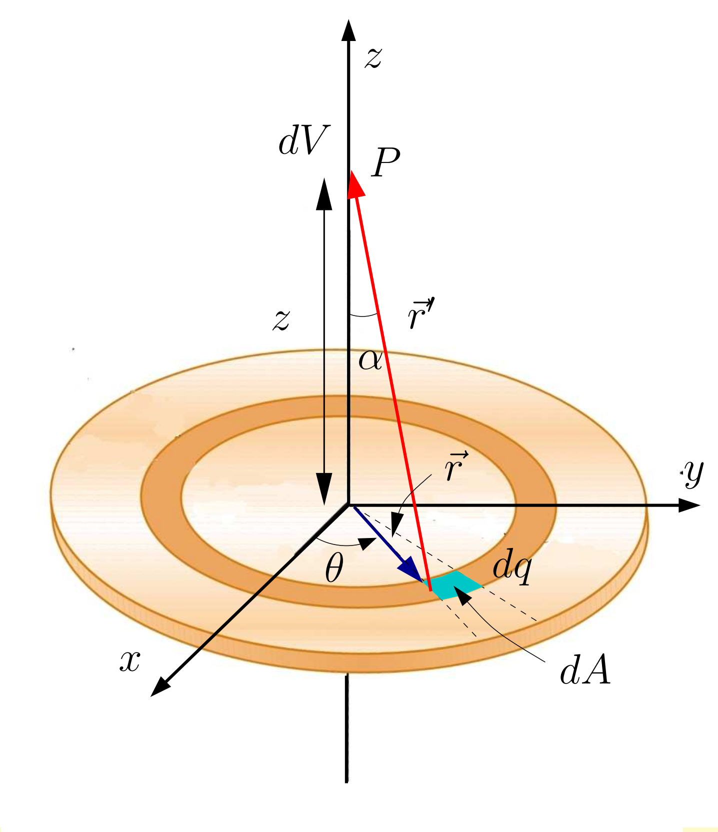

*Dica*: encontre primeiro o campo elétrico em toda a região do espaço utilizando a lei de Gauss.

**Resp.** $V_C = \left(-\dfrac{45{,}0}{r}\right)$ V; $V_B = \left(-450 + \dfrac{89{,}9}{r}\right)$ V; $V_A = +150$ V.

# Material Suplementar

# Potencial elétrico de uma distribuição contínua de cargas – exemplo

**Ex. 4** Considere um disco de raio $R$, uniformemente carregado com densidade de carga $\sigma$. Obtenha o potencial elétrico dessa distribuição de cargas num ponto $P$, sobre o eixo que passa pelo centro do disco.




**Solução**

- Tomando $V = 0$ para $r' \to \infty$, temos que

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{dq}{r'}$$

Como $r' = \sqrt{z^2 + r^2}$ e $dq = \sigma\, dA = \sigma r dr d\theta$, temos que para $z > 0$,

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sigma \underbrace{\int_0^R \frac{r\,dr}{\sqrt{z^2+r^2}}}_{=\sqrt{z^2+r^2}\big|_0^R} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\theta}_{=2\pi} \quad \Rightarrow \quad \boxed{V = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{z^2+R^2} - z\right)}$$

# Potencial elétrico de uma distribuição contínua de cargas – exemplo

Obtenha o campo elétrico no ponto $P$ à partir do potencial $V$ obtido acima.

**Solução**

- Temos que $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$. Como o potencial $V$ da pág. anterior só depende de $z$,

$$\vec{E} = -\frac{dV}{dz}\,\hat{k} = -\frac{d}{dz}\left[\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{z^2+R^2}-z\right)\right]\hat{k}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{E} = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}}-1\right)\hat{k}$$

Fazendo $\sigma = \dfrac{q}{\pi R^2}$, obtemos

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{2q}{R^2}\left(1-\frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}}\right)\hat{k}$$

que é a mesma expressão obtida através da integração direta do campo (Aula 2, p. 32)

# Referências


- R. A. Serway, e J. W. Jewett Jr., *Princípios de Física, Vol. 3*, Cengage Learning;
- D. Halliday, R. Resnick e K. S. Krane, *Física, Vol. 3*, LTC;