



Fundação Universidade Federal do ABC

Pró reitoria de pesquisa

Av. dos Estados, 5001, Santa Terezinha, Santo André/SP, CEP 09210-580

Bloco L, 3ºAndar, Fone (11) 3356-7617

iniciacao@ufabc.edu.br

Material extraído e adaptado de Relatório Final de Iniciação Científica referente ao Edital:
(01/2020)

Nome do aluno: Gabriel Homero Barros Vieira

Nome do orientador: Claudia Celeste Celestino de Paula Santos

Título do projeto: Quasi-Satellite orbits: Investigação e Determinação

Palavras-chave do projeto: Quasi-Satellite orbits, Sistema dinâmico, Estabilidade de órbitas, Problema de N corpos

Área do conhecimento do projeto: Dinâmica Orbital

Santo André – SP

30 de setembro de 2021

Lista de Símbolos

P : Ponto material com massa negligenciável/Veículo espacial

P_1 : Ponto material com massa m_1

P_2 : Ponto material com massa m_2

m_1 : Massa do Sol

m_2 : Massa do asteroide

μ : Razão de massa entre os corpos primários

r_{12} : Distância relativa entre m_1 e m_2

G : Constante gravitacional

n : Movimento médio

\vec{r} : Vetor posição de P

\vec{r}_1 : Vetor posição de P_1

\vec{r}_2 : Vetor posição de P_2

ρ_1 : Distância entre P e P_1

ρ_2 : Distância entre P e P_2

$OXYZ$: Referencial Inercial

$O\xi\eta\zeta$: Referencial Sinódico

Ψ : Ângulo de fase entre os referenciais $O\xi\eta\zeta$ e $OXYZ$

L_1, L_2, L_3, L_4 e L_5 : Pontos de Lagrange

a : Semi-eixo maior

e : Excentricidade

i : Inclinação

ω : Argumento do Periapse

Γ : Anomalia verdadeira

Ω : Longitude do nodo ascendente

\vec{N} : Vetor na direção da linha dos nodos

\vec{h} : Vetor momento angular

V : Volume

U : Potencial gravitacional gerado pelo corpo

J_2 : Segundo Harmônico Zonal do potencial gravitacional

dm : elemento infinitesimal de massa

P' : ponto onde se localiza o diferencial de massa

\vec{r}' : Vetor posição que localiza P'

φ : Ângulo entre os vetores \vec{r}' e \vec{r}

p_n : Polinômios de Legendre

\vec{F}_{J_2} : Força gravitacional devido à J_2

\vec{a}_{J_2} : aceleração de P devido à J_2

a_b : Raio equatorial do Asteroide

ϕ : Latitude

λ : Longitude

2.3. O problema de 3 corpos

O problema de 3 corpos, $n = 3$, consiste na descrição do movimento de um sistema dinâmico formado por 3 corpos de massas pontuais que se interagem gravitacionalmente.

2.3.1 Soluções de Lagrange

Nesta seção serão apresentadas as soluções de Lagrange para o problema de 3 corpos. A formulação foi baseada em Roy (2005), Fernandes e Zanardi (2018) e Junkins e Schaub (2009).

Como dito anteriormente, não há uma solução geral para o problema de 3 corpos, entretanto, será apresentado que para algumas configurações específicas da posição e condições iniciais dos pontos materiais, é possível obter soluções analítica que descrevem o movimento. Estas soluções ocorrem quando os corpos se localizam nas extremidades de triângulos equiláteros e quando são colineares. Lagrange demonstrou que corpos celestes podem existir nessas configurações quando as seguintes condições forem satisfeitas:

- A força resultante sobre cada corpo passa pelo centro de massa;
- A força resultante é diretamente proporcional à distância de cada corpo ao centro de massa;
- Os vetores das velocidades iniciais são proporcionais em magnitudes às respectivas distâncias dos corpos ao centro de massa do sistema fazendo ângulos iguais com os vetores posição partindo do centro de massa.

Considerando a equação do movimento para o problema de 3 corpos ($n = 3$), verifica-se que

$$\ddot{\vec{r}}_1 = -G \frac{m_2}{r_{21}^3} (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) - G \frac{m_3}{r_{31}^3} (\vec{r}_1 - \vec{r}_3) \quad (20.a)$$

$$\ddot{\vec{r}}_2 = -G \frac{m_1}{r_{12}^3} (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) - G \frac{m_3}{r_{32}^3} (\vec{r}_2 - \vec{r}_3) \quad (20.b)$$

$$\ddot{\vec{r}}_3 = -G \frac{m_1}{r_{13}^3} (\vec{r}_3 - \vec{r}_1) - G \frac{m_2}{r_{23}^3} (\vec{r}_3 - \vec{r}_2) \quad (20.c)$$

As equações (20 a-c) são as equações que governam o movimento em um sistema de 3 corpos. Lembrando da conclusão que obtida das integrais primeiras associada ao centro de massa, pode-se considerar um referencial que tem sua origem centrada no centro de massa. Como os vetores posições serão definidos com relação ao centro de massa e pela sua definição, sabe-se que:

$$m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + m_3 \vec{r}_3 = \vec{0} \quad (21)$$

Pode-se reescrever a equação (21) das seguintes maneiras:

$$M\vec{r}_1 = -m_2(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) - m_3(\vec{r}_3 - \vec{r}_1) \quad (22. a)$$

$$M\vec{r}_2 = m_1(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) - m_3(\vec{r}_3 - \vec{r}_2) \quad (22. b)$$

$$M\vec{r}_3 = m_1(\vec{r}_3 - \vec{r}_1) + m_2(\vec{r}_3 - \vec{r}_2) \quad (22. c)$$

Onde M é a massa total do sistema, ou seja, $M = \sum_{i=1}^3 m_i$.

Elevando ao quadrado os dois lados das equações (22 a-c) e lembrando a definição de produto escalar, tem-se:

$$M^2 r_1^2 = m_2^2 r_{12}^2 + m_3^2 r_{13}^2 + 2m_2 m_3 r_{12} r_{13} \cos \alpha_1 \quad (23. a)$$

$$M^2 r_2^2 = m_1^2 r_{12}^2 + m_3^2 r_{23}^2 - 2m_1 m_3 r_{12} r_{23} \cos \alpha_2 \quad (23. b)$$

$$M^2 r_3^2 = m_1^2 r_{13}^2 + m_2^2 r_{23}^2 + 2m_1 m_2 r_{13} r_{23} \cos \alpha_3 \quad (23. c)$$

Em que α_1 , α_2 e α_3 são os ângulos entre os vetores \vec{r}_{12} e \vec{r}_{13} , \vec{r}_{12} e \vec{r}_{23} , \vec{r}_{13} e \vec{r}_{23} , respectivamente.

Procura-se as soluções em que os corpos conservam suas configurações originais. Para que isso seja verdadeiro, as distâncias relativas devem evoluir da mesma forma ao longo do tempo e, portanto, pode-se estabelecer que,

$$\frac{r_{12}}{r_{12_0}} = \frac{r_{13}}{r_{13_0}} = \frac{r_{23}}{r_{23_0}} = f(t) \quad (24)$$

Em que o subscrito “0” diz respeito aos valores iniciais, então, $f(0) = 1$. Devido ao fato de que a configuração é fixa, tem-se que os ângulos α_1 , α_2 e α_3 entre os vetores de distância relativa são constantes. Além disso, verifica-se que a configuração geométrica dos corpos pode rotacionar, conseqüentemente, as velocidades angulares dos corpos devem ser iguais ao longo do tempo, ou seja,

$$\dot{\theta}_1 \hat{e}_3 = \dot{\theta}_2 \hat{e}_3 = \dot{\theta}_3 \hat{e}_3 = \dot{\theta}(t) \hat{e}_3 \quad (25)$$

Em que $\dot{\theta}_i$ é a velocidade angular da massa m_i e \hat{e}_3 um vetor unitário perpendicular ao plano que os corpos estão se movendo. Observa-se que θ_i e r_i são as coordenadas polares associadas ao vetor \vec{r}_i . Substituindo a equação (24) na equação (23.a), tem-se:

$$M^2 r_1^2 = (f(t))^2 [m_2^2 r_{12_0}^2 + m_3^2 r_{13_0}^2 + 2m_2 m_3 r_{12_0} r_{13_0} \cos \alpha_1] \quad (26)$$

Ou ainda,

$$r_i = f(t)r_{i_0} \quad , \quad i = 1,2,3 \quad (27)$$

$$\text{Em que } M^2 r_{1_0}^2 = m_2^2 r_{12_0}^2 + m_3^2 r_{13_0}^2 + 2m_2 m_3 r_{12_0} r_{13_0} \cos \alpha_1.$$

A equação (27) mostra que a distância da massa m_i ao centro de massa varia da mesma maneira que a distância relativa.

Para este sistema dinâmico, tem-se que o momento angular é dado por:

$$\vec{h} = \sum_{i=1}^3 m_i \vec{r}_i \times \dot{\vec{r}}_i \quad (28)$$

Da equação (28), é possível tratar o problema como um sistema dinâmico de corpos que sejam coplanares, pois os corpos se moverão no mesmo plano, uma vez que todas as forças envolvidas no sistema estão neste mesmo plano descrito pelo vetor momento angular. Expressando a posição dos vetores \vec{r}_i e suas derivadas de primeira e segunda ordem em coordenadas polares no sistema rotacional $\{\widehat{e}_{r_i}, \widehat{e}_{\theta_i}, \widehat{e}_{3_i}\}$, tem-se:

$$\vec{r}_i = r_i \widehat{e}_{r_i} \quad (29)$$

$$\dot{\vec{r}}_i = \dot{r}_i \widehat{e}_{r_i} + r_i \dot{\theta}_i \widehat{e}_{\theta_i} \quad (30)$$

$$\ddot{\vec{r}}_i = (\ddot{r}_i - r_i \dot{\theta}_i^2) \widehat{e}_{r_i} + (2\dot{r}_i \dot{\theta}_i + r_i \ddot{\theta}_i) \widehat{e}_{\theta_i} \quad (31)$$

Usando as equações (29) e (30), pode-se reescrever o momento angular, equação (28), da seguinte maneira:

$$\vec{h} = \left(\sum_{i=1}^3 m_i r_i^2 \dot{\theta}_i \right) \widehat{e}_3 \quad (32)$$

Lembrando das equações (25) e (27) e substituindo na equação (32)

$$h = \left(\sum_{i=1}^3 m_i r_{i_0}^2 \right) f^2 \dot{\theta} \quad (33)$$

Consequentemente, o produto $f^2 \dot{\theta}$ será constante. Isso implica que o momento angular de cada massa é constante. Como o momento é constante, então sua derivada é nula e, portanto, pode-se observar que:

$$\dot{\vec{h}}_i = m_i \vec{r}_i \times \ddot{\vec{r}}_i = \vec{r}_i \times \overrightarrow{F_{R,i}} = \vec{0} \quad (34)$$

Na equação (34) o vetor da força resultante que atua sobre o ponto material é paralelo ao vetor posição em relação ao centro. Dessa forma, se confirma a condição que diz que a força resultante sobre cada corpo passa pelo centro de massa. Portanto, sabendo que $\vec{F}_{R,i}$ é paralelo à \vec{r}_i , pode-se escrever que:

$$\vec{F}_{R,i} = F_{R,i} \hat{e}_{r_i} \quad (35)$$

Usando este resultado, a segunda lei de Newton e a equação (31), tem-se que:

$$F_{R,i} = m_i (\ddot{r}_i - r_i \dot{\theta}_i^2) \quad (36)$$

Lembrando das equações (27), a equação (36) pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$\frac{F_{R,i}}{m_i} = \ddot{r}_i - r_i \dot{\theta}_i^2 = r_i \left(\frac{\ddot{f}}{f} - \dot{\theta}_i^2 \right) \rightarrow \frac{F_{R,i}}{m_i r_i} = \left(\frac{\ddot{f}}{f} - \dot{\theta}_i^2 \right) = Q(t) \quad (37)$$

Logo, a força resultante por unidade de massa é diretamente proporcional ao vetor posição por um fator $Q(t)$. Com isso, a condição de que a força resultante é diretamente proporcional à distância de cada corpo ao centro de massa é demonstrada e pode-se escrever,

$$\frac{F_{R,i}}{m_i} = \ddot{r}_i - r_i \dot{\theta}_i^2 = r_i (\ddot{f} - f \dot{\theta}_i^2) \rightarrow \frac{F_{R,i}}{m_i r_i} = (\ddot{f} - f \dot{\theta}_i^2) \quad (38)$$

Seguindo a condição imposta pela equação (34), a expressão $\vec{r}_i \times \ddot{\vec{r}}_i = \vec{0}$ deve ser satisfeita, assim, aplicando o produto vetorial na equação do movimento para o ponto P_1 , equação (20.a),

$$\vec{r}_1 \times \left(\frac{m_2}{r_{21}^3} \vec{r}_2 + \frac{m_3}{r_{31}^3} \vec{r}_3 \right) = \vec{0} \quad (39)$$

Da relação dada pela equação (21), pode-se escrever que $m_1 \vec{r}_1 = -m_2 \vec{r}_2 - m_3 \vec{r}_3$. Substituindo na equação (39),

$$m_2 \vec{r}_1 \times \vec{r}_2 \left(\frac{1}{r_{21}^3} - \frac{1}{r_{31}^3} \right) = \vec{0} \quad (40)$$

Similarmente, para os outros pontos materiais, obtém-se:

$$m_3 \vec{r}_2 \times \vec{r}_3 \left(\frac{1}{r_{12}^3} - \frac{1}{r_{32}^3} \right) = \vec{0} \quad (41)$$

$$m_1 \vec{r}_3 \times \vec{r}_1 \left(\frac{1}{r_{13}^3} - \frac{1}{r_{23}^3} \right) = \vec{0} \quad (42)$$

Observa-se que para as equações (40), (41) e (42) serem satisfeitas, tem-se que, somente serão satisfeitas se

$$r = r_{13} = r_{23} = r_{12} \quad (43)$$

Ou, se

$$\vec{r}_1 \times \vec{r}_2 = \vec{r}_2 \times \vec{r}_3 = \vec{r}_3 \times \vec{r}_1 \quad (44)$$

As relações das equações (43) e (44) representam as duas soluções possíveis em que a configuração se mantém a mesma para o problema de 3 corpos.

Lembrando da equação (30) e das expressões das equações (25) e (27) é possível obter as seguintes relações:

$$\|\dot{\vec{r}}_i(t)\| = \sqrt{\dot{r}_i^2 + r_i^2 \dot{\theta}^2} = \sqrt{r_{i0}^2 \dot{f}^2 + r_{i0}^2 f^2 \dot{\theta}^2} = r_{i0} \sqrt{\dot{f}^2 + f^2 \dot{\theta}^2} \quad (45)$$

A equação (45) tem-se a magnitude da velocidade da massa i com $i = 1, 2, 3$.

Da definição do ângulo de voo (Curtis, 2005),

$$\tan \gamma_i = \frac{r_i \dot{\theta}_i}{\dot{r}_i} = \frac{f \dot{\theta}}{\dot{f}} \quad (46)$$

Portanto, de acordo com a equação (46), os pontos materiais do sistema dinâmico têm o mesmo ângulo de voo.

Considerando, inicialmente, a solução em que os corpos estão localizados nos vértices de triângulos equiláteros, representada pela relação (43). Neste caso, as equações do movimento dadas nas equações (20 a-c) se tornam:

$$\ddot{\vec{r}}_1 = -\frac{G}{r^3} [m_2(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) + m_3(\vec{r}_1 - \vec{r}_3)] \quad (47.a)$$

$$\ddot{\vec{r}}_2 = -\frac{G}{r^3} [m_1(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) + m_3(\vec{r}_2 - \vec{r}_3)] \quad (47.b)$$

$$\ddot{\vec{r}}_3 = -\frac{G}{r^3} [m_1(\vec{r}_3 - \vec{r}_1) + m_2(\vec{r}_3 - \vec{r}_2)] \quad (47.c)$$

Das equações (22 a-c):

$$M\vec{r}_1 = m_2(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) + m_3(\vec{r}_1 - \vec{r}_3) \quad (48.a)$$

$$M\vec{r}_2 = m_1(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) + m_3(\vec{r}_2 - \vec{r}_3) \quad (48.b)$$

$$M\vec{r}_3 = m_1(\vec{r}_3 - \vec{r}_1) + m_2(\vec{r}_3 - \vec{r}_2) \quad (48.c)$$

Substituindo as equações (48 a-c) nas equações do movimento (47 a-c):

$$\ddot{\vec{r}}_i = -\frac{GM}{r^3}\vec{r}_i, \quad i = 1,2,3 \quad (49)$$

Sabendo das condições para que um triângulo seja equilátero, os ângulos entre os vetores posição relativas deveram ter os seguintes valores: $\alpha_1 = 60^\circ$, $\alpha_3 = 60^\circ$ e $\alpha_2 = 120^\circ$. Substituindo esses valores nas equações (23 a-c) e da equação (43),

$$M^2 r_1^2 = (m_2^2 + m_3^2 + m_2 m_3) r^2 \quad (50.a)$$

$$M^2 r_2^2 = (m_1^2 + m_3^2 + m_1 m_3) r^2 \quad (50.b)$$

$$M^2 r_3^2 = (m_2^2 + m_2^2 + m_1 m_2) r^2 \quad (50.c)$$

Substituindo as equações (50 a-c) na equação (49), pode-se escrever as equações do movimento,

$$\ddot{\vec{r}}_i + \frac{GM_i}{r_i^3}\vec{r}_i = \vec{0}, \quad i = 1,2,3 \quad (51)$$

Em que

$$M_1 = \frac{1}{M^2} (m_2^2 + m_3^2 + m_2 m_3)^{3/2} \quad (52.a)$$

$$M_2 = \frac{1}{M^2} (m_1^2 + m_3^2 + m_1 m_3)^{3/2} \quad (52.b)$$

$$M_3 = \frac{1}{M^2} (m_2^2 + m_2^2 + m_1 m_2)^{3/2} \quad (52.c)$$

A equação (51) representa a equação do problema de dois corpos, de maneira que o corpo m_i move-se em torno do centro de massa em uma órbita cônica. Observa-se que m_i se comporta como se estivesse orbitando um corpo colocado ao centro de massa com massa M_i e m_i estivesse sendo desprezada, conforme descrito no problema de dois corpos. Mais detalhes do problema de dois corpos podem ser encontrados em Curtis (2005). Desde que as condições iniciais estejam corretas, os corpos permanecerão nesta configuração geométrica de triângulo equilátero, embora seu tamanho possa alterar ao longo do tempo. Portanto, para obter a posição dos corpos nesta configuração, basta solucionar a equação a equação diferencial (51) que, como já mencionado, possui uma solução analítica.

Para obter a solução colinear, neste caso, os corpos estão sobre um eixo que rotaciona em uma certa velocidade angular. Os 3 vetores posições são dados por:

$$\vec{r}_i = x_i \hat{e}_r \quad \text{para } i = 1, 2, 3 \quad (53)$$

Fazendo uso das equações (35), (37) e (53) e relacionando com as equações do movimento,

$$\frac{F_{R,1}}{m_1} = Qx_1 = \ddot{x}_1 = Gm_2 \frac{x_2 - x_1}{x_{12}^3} + Gm_3 \frac{x_3 - x_1}{x_{13}^3} \quad (54.a)$$

$$\frac{F_{R,2}}{m_2} = Qx_2 = \ddot{x}_2 = Gm_3 \frac{x_3 - x_2}{x_{23}^3} - Gm_1 \frac{x_2 - x_1}{x_{12}^3} \quad (54.b)$$

$$\frac{F_{R,3}}{m_3} = Qx_3 = \ddot{x}_3 = -Gm_2 \frac{x_3 - x_2}{x_{23}^3} - Gm_1 \frac{x_3 - x_1}{x_{13}^3} \quad (54.c)$$

Em que $x_{ij} = \|x_j - x_i\| = x_{ji}$

Da equação (27), sabe-se que $x_i = f(t)x_{i_0}$. Substituindo na equação (54.a) tem-se:

$$\frac{F_{R,1}}{m_1} = \frac{G}{f^2} \left[\frac{m_2}{x_{12_0}^3} (x_{2_0} - x_{1_0}) + \frac{m_3}{x_{13_0}^3} (x_{3_0} - x_{1_0}) \right] = \frac{const}{f^2} \quad (55)$$

Se o mesmo for feito para as equações (54.b) e (54.c), obtém-se resultados equivalentes que mostram que a força atuando sobre a massa m_i é central e inversamente proporcional ao quadrado da distância, pois, f é proporcional à distância do centro de massa. Com isso, cada massa descreve trajetórias cônicas. As equações (54 a-c) devem ser resolvidas para as distâncias relativas x_{12} , x_{13} e x_{23} . Será resolvido para o seguinte caso descrito na Figura 3,

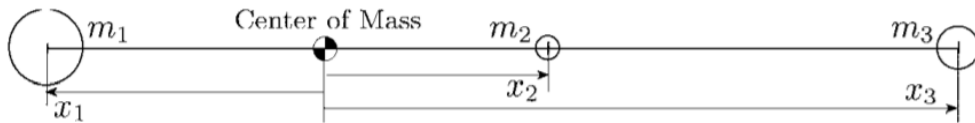


Figura 1: Esquema da sequência dos 3 corpos colineares. Retirado de Junkins e Schaub (2009)

Para auxiliar, define-se a seguinte quantidade:

$$\chi = \frac{x_3 - x_2}{x_2 - x_1} = \frac{x_{23}}{x_{12}} \quad (56)$$

Verifica-se que

$$\frac{x_{13}}{x_{12}} = \frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1} = 1 + \chi \quad (57)$$

Observa-se que se uma das 3 distâncias relativas forem conhecidas, pode-se encontrar χ e determinar a posição dos corpos. Subtraindo a equação (54.a) pela equação (54.b):

$$Q(x_1 - x_2) = -G \frac{(m_1 + m_2)}{x_{12}^2} + Gm_3 \left(\frac{1}{x_{23}^2} - \frac{1}{x_{13}^2} \right) \quad (58)$$

Agora, subtraindo da equação (54.b) a equação (54.c):

$$Q(x_1 - x_2) = -G \frac{(m_2 + m_3)}{x_{23}^2} + Gm_1 \left(\frac{1}{x_{12}^2} - \frac{1}{x_{13}^2} \right) \quad (59)$$

Introduzindo a definição de χ nas equações (58) e (59) se obtém, respectivamente, as expressões (60) e (61).

$$\frac{Qx_{12}^3}{G} = -(m_1 + m_2) + m_3 \left(\frac{1}{\chi^2} - \frac{1}{(1 + \chi)^2} \right) \quad (60)$$

$$\frac{Qx_{12}^3}{G} = -\frac{(m_2 + m_3)}{\chi^3} + m_1 \left(\frac{1}{\chi} - \frac{1}{\chi(1 + \chi)^2} \right) \quad (61)$$

Igualando as duas equações e rearranjando, chega-se em uma equação polinomial de quinto grau em χ .

$$(m_1 + m_2)\chi^5 + (3m_1 + 2m_2)\chi^4 + (3m_1 + m_2)\chi^3 - (m_2 + 3m_3)\chi^2 - (2m_2 + 3m_3)\chi - (m_2 + m_3) = 0 \quad (62)$$

Pela regra de sinais de Descartes, verifica-se que a equação (62) tem somente uma raiz positiva, esta, é utilizada para encontrar a quantidade χ e através das equações (56) e (57), encontra-se os valores para as posições relativas e, conseqüentemente, a posição dos corpos colineares.

Foram obtidas as soluções para as configurações em que os corpos são colineares e que estão nos vértices do triângulo equilátero, porém, em nenhum momento, foi imposto que a escala dessas configurações não se alterasse, e, de fato, a escala pode mudar ao longo do tempo. Porém existem casos em que a escala não se altera, essas soluções são chamadas de soluções estacionárias em que as distâncias relativas não se alteram. Na seção seguinte será visto que algumas dessas soluções estacionárias são representadas por uma solução em que m_1 e m_2 são colineares e o terceiro corpo se localizada em pontos de equilíbrios denominados pontos de Lagrange, veja Figura 4.

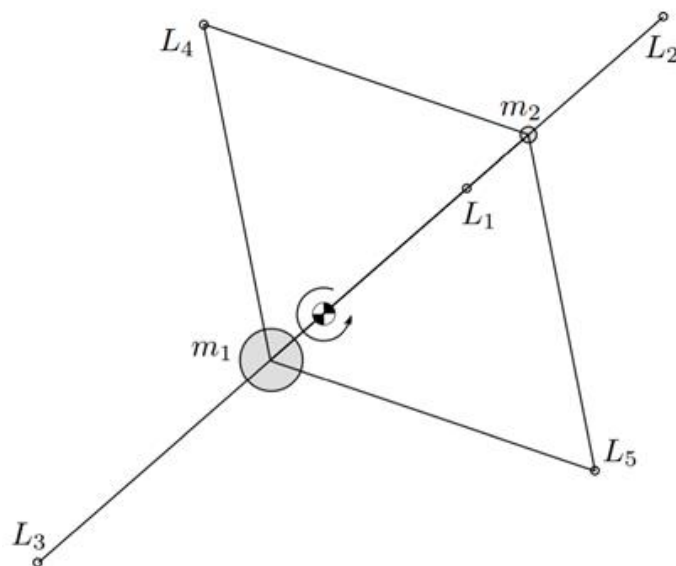


Figura 2: Pontos estacionários de Lagrange. Retirado de Junkins e Schaub (2009)

2.4. O problema restrito de 3 corpos

No problema restrito de 3 corpos, considerou-se dois corpos massas pontuais se movem em orbitas circulares em torno do centro de massa comum aos dois. Enquanto isso, o terceiro corpo possui uma massa negligenciável e não afeta o movimento dos outros dois corpos gravitacionalmente, embora seu movimento seja descrito pela influência gravitacional dos corpos primários (os dois corpos mais massivos). O problema consiste em descrever o movimento deste terceiro corpo.

2.4.1 As equações do movimento para o Problema circular e restrito de 3 corpos

Considerando o movimento de um ponto P com massa negligenciável, movendo-se devido a atração gravitacional dos corpos primários P_1 e P_2 de massa m_1 e m_2 . Assumindo m_1 maior que m_2 . Lembrando que os corpos primários estão em órbitas circulares em torno do centro de massa.

Para facilitar na descrição do problema, será adotado um conjunto de unidades canônicas. Portanto, estabelecendo que a massa do sistema será unitária, ou seja, $m_1 + m_2 = 1$, tem-se que:

$$m_1 = 1 - \mu, \quad m_2 = \mu \quad (63)$$

A unidade de distância adimensional, é definida pela distância relativa entre os corpos primários, de maneira que:

$$r_{12} = \|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\| = 1 \quad (64)$$

A unidade de tempo será escolhida de maneira que o período da órbita do corpo P_1 seja igual a 2π e $G = 1$. Devido a escolha de um sistema adimensional, o movimento médio dos corpos P_1 e P_2 também será unitário (Roy, 2005).

Para ilustrar o problema circular restrito de 3 corpos é dada a Figura 5 em que os corpos de massa μ e $1 - \mu$ se movem no plano X-Y.

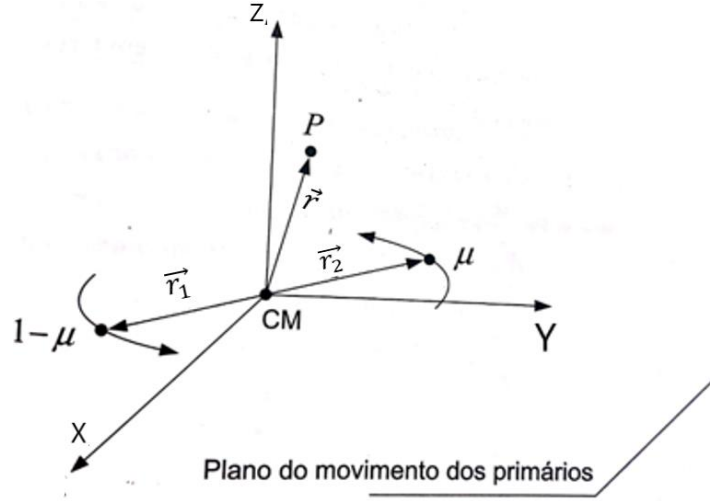


Figura 3: Referencial inercial para o problema circular restrito de 3 corpos. Adaptado de Fernandes e Zanardi (2018).

Assim, da Figura 5, tem-se que os vetores posição, para os corpos primários de massa μ e $1 - \mu$, em coordenadas cartesianas,

$$\vec{r}_i = x_i \hat{i} + y_i \hat{j} \quad , \quad \text{para } i = 1, 2 \quad (65)$$

E, o vetor posição, \vec{r} , do ponto P,

$$\vec{r} = x \hat{i} + y \hat{j} + z \hat{k} \quad (66)$$

Lembrando que, os corpos de massa μ e $1 - \mu$ se movem no plano X-Y e, portanto, a componente Z para os corpos primários é nula, isto é, $z_1 = z_2 = 0$.

Utilizando das equações (63) até (66) e substituindo na equação do movimento (47.c), tem-se que o movimento de P, é descrito por:

$$\ddot{x} = -\frac{(1-\mu)}{\rho_1^3}(x-x_1) - \frac{\mu}{\rho_2^3}(x-x_2) \quad (67.a)$$

$$\ddot{y} = -\frac{(1-\mu)}{\rho_1^3}(y-y_1) - \frac{\mu}{\rho_2^3}(y-y_2) \quad (67.b)$$

$$\ddot{z} = -\frac{(1-\mu)}{\rho_1^3}z - \frac{\mu}{\rho_2^3}z = -\left(\frac{(1-\mu)}{\rho_1^3} + \frac{\mu}{\rho_2^3}\right)z \quad (67.c)$$

Onde ρ_2 e ρ_1 representa, a distância entre a partícula P e os corpos primário de massa μ e $1-\mu$, respectivamente, assim:

$$\rho_1 = \sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z)^2} \quad (68)$$

$$\rho_2 = \sqrt{(x-x_2)^2 + (y-y_2)^2 + (z)^2} \quad (69)$$

Definindo um sistema referencial não inercial chamado de referencial sinódico $O\xi\eta\zeta$, no qual rotaciona em torno do eixo ζ , coincidente ao eixo Z, em uma velocidade angular constante igual ao movimento médio dos corpos primários.

Com isso, os corpos primários, localizados sobre o eixo ξ , movem-se no plano $\xi\eta$, Figura 6.

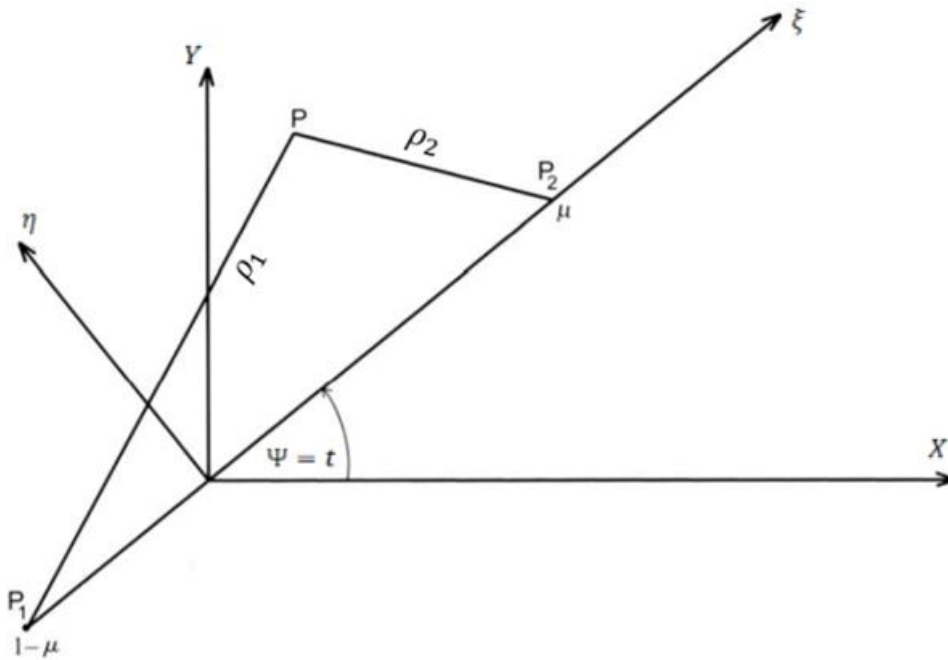


Figura 4: Relação entre os referenciais inercial e sinódico. Figura adaptada de Roy (2005).

Nesta Figura 6, $\Psi = nt$ sendo que $n = 1$. Isso se deve ao fato de que foi adotado a unidade de tempo de forma que o período orbital dos corpos primários seja igual a 2π .

No referencial sinódico,

$$\vec{r}_i = \xi_i \hat{i}' \quad , \quad \text{para } i = 1,2 \quad (70)$$

$$\vec{r} = \xi \hat{i}' + \eta \hat{j}' + \zeta \hat{k}' \quad (71)$$

Da definição de centro de massa, tem-se que:

$$(1 - \mu)\xi_1 + \mu\xi_2 = 0$$

e, devido ao fato de que a distância entre os corpos primários é unitária, sabe-se que:

$$\xi_2 - \xi_1 = 1$$

Das equações $(1 - \mu)\xi_1 + \mu\xi_2 = 0$ e $\xi_2 - \xi_1 = 1$, verifica-se que

$$\xi_1 = 1 - \mu \quad (72.a) \quad \xi_2 = -\mu \quad (72.b)$$

Das equações (70), (71) e (72a-b), tem-se que, no referencial $O\xi\eta\zeta$ as distâncias entre P e os corpos primários, são:

$$\rho_1 = \sqrt{(\xi + \mu)^2 + (\eta)^2 + (\zeta)^2} \quad (73)$$

$$\rho_2 = \sqrt{(\xi - 1 + \mu)^2 + (\eta)^2 + (\zeta)^2} \quad (74)$$

Da Figura 6,

$$\xi = x \cos \Psi + y \sin \Psi \quad (75.a)$$

$$\eta = -x \sin \Psi + y \cos \Psi \quad (75.b)$$

$$\zeta = z \quad (75.c)$$

$$x = \xi \cos \Psi - \eta \sin \Psi \quad (76.a)$$

$$y = \eta \cos \Psi + \xi \sin \Psi \quad (76.b)$$

$$z = \zeta \quad (76.c)$$

Dessa forma, lembrando que $\Psi = t$ e diferenciando as equações (75.a-c) duas vezes:

$$\ddot{\xi} - 2\dot{\eta} - \xi = \ddot{x} \cos t + \dot{y} \sin t \quad (77.a)$$

$$\ddot{\eta} + 2\dot{\xi} - \eta = \dot{y} \cos t - \ddot{x} \sin t \quad (77.b)$$

$$\ddot{\zeta} = \ddot{z} \quad (77.c)$$

Usando as equações do movimento (67.a-c) e substituindo nas equações (77.a-c), pode-se obter:

$$\ddot{\xi} - 2\dot{\eta} - \xi = -\frac{(1 - \mu)}{\rho_1^3}(\xi + \mu) - \frac{\mu}{\rho_2^3}(\xi + \mu - 1) \quad (78.a)$$

$$\ddot{\eta} + 2\dot{\xi} - \eta = -\left(\frac{(1-\mu)}{\rho_1^3} + \frac{\mu}{\rho_2^3}\right)\eta \quad (78.b)$$

$$\ddot{\zeta} = -\left(\frac{(1-\mu)}{\rho_1^3} + \frac{\mu}{\rho_2^3}\right)\zeta \quad (78.c)$$

Definindo uma função D

$$D = \frac{1}{2}(\xi^2 + \eta^2) + \frac{1-\mu}{\rho_1} + \frac{\mu}{\rho_2} \quad (79)$$

É possível reescrever as equações (78.a-c),

$$\ddot{\xi} - 2\dot{\eta} = \frac{\partial D}{\partial \xi} \quad (80.a)$$

$$\ddot{\eta} + 2\dot{\xi} = \frac{\partial D}{\partial \eta} \quad (80.b)$$

$$\ddot{\zeta} = \frac{\partial D}{\partial \zeta} \quad (80.c)$$

As equações (78.a-c) e (80.a-c) descrevem o movimento do corpo localizado em P. Resolvendo essas equações numericamente obtém-se o movimento do corpo de massa desprezível em torno dos corpos primários.

2.4.2 Pontos lagrangeanos

Nesta seção, serão utilizadas as equações do movimento para o problema circular restrito de 3 corpos para obter a localização dos pontos de equilíbrio lagrangeanos. Embora, para o problema circular restrito de 3 corpos não exista solução analítica fechada, é muito importante obter os pontos de equilíbrio, ou, como mencionado, os pontos referentes às soluções estacionárias. Neste tipo de solução, as distâncias relativas entre os corpos não se alteram. Para isso, as seguintes condições devem ser satisfeitas,

$$\dot{\eta} = \dot{\xi} = \dot{\zeta} = 0 \quad e \quad \ddot{\eta} = \ddot{\xi} = \ddot{\zeta}$$

Impondo essas condições nas equações (78.a-c), obtém-se:

$$-\xi = -\frac{(1-\mu)}{\rho_1^3}(\xi + \mu) - \frac{\mu}{\rho_2^3}(\xi + \mu - 1) \quad (81.a)$$

$$-\eta = -\left(\frac{(1-\mu)}{\rho_1^3} + \frac{\mu}{\rho_2^3}\right)\eta \quad (81.b)$$

$$0 = -\left(\frac{(1-\mu)}{\rho_1^3} + \frac{\mu}{\rho_2^3}\right)\zeta \quad (81.c)$$

Da equação (81.c), uma vez que o termo em parênteses é maior que zero, para a equação ser satisfeita, ζ deve ser nulo e, portanto, já é possível obter uma conclusão de que os pontos de equilíbrio estão no plano $\xi\eta$.

Da equação (81.b) se observa que para que a igualdade seja satisfeita, tem-se que

$$\eta = 0 \quad (82)$$

ou,

$$\frac{(1-\mu)}{\rho_1^3} + \frac{\mu}{\rho_2^3} = 1 \quad (83)$$

Verifica-se que, da equação (81.a), pode-se escrever que:

$$\xi \left[1 - \frac{(1-\mu)}{\rho_1^3} - \frac{\mu}{\rho_2^3} \right] = \frac{(1-\mu)}{\rho_1^3} \mu + \frac{\mu}{\rho_2^3} (\mu - 1) \quad (84)$$

Em função da equação (83), o termo em colchete do lado direito da equação (84) torna-se nulo e, portanto, para que a equação (84) seja satisfeita,

$$\frac{1}{\rho_2^3} = \frac{1}{\rho_1^3}$$

Então, $\rho_2 = \rho_1$. Lembrando da equação (83), se constata que:

$$\rho_2 = \rho_1 = 1 \quad (85)$$

A equação (85) leva a uma conclusão interessante de que existem dois pontos de equilíbrio formando uma configuração de triângulo equilátero com os corpos primários. Esses pontos são os pontos L4 e L5 conforme ilustrado na Figura 4. Para obter as coordenadas destes pontos, deve-se substituir a equação (85) nas equações (73) e (74) e resolver para ξ e η , resultando,

$$\xi = -\mu + \frac{1}{2} \quad e \quad \eta = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Com isso, as coordenadas de L4 e L5 são, em unidade normalizadas:

$$L_4 = \left(-\mu + \frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; 0 \right) \quad (86)$$

$$L_5 = \left(-\mu + \frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}; 0 \right) \quad (87)$$

Os outros pontos de Lagrange, satisfazem as condições de que $\eta = 0$ e $\zeta = 0$. Isso quer dizer que os outros pontos de equilíbrio estão sobre o eixo dos primários, eixo ξ . Para obtê-los, são impostas essas condições nas equações (73) e (74),

$$\rho_1 = |\xi + \mu| \quad (88)$$

$$\rho_2 = |\xi - 1 + \mu| \quad (89)$$

Substituindo as equações (88) e (89) na equação (81.a),

$$\xi - \frac{(1 - \mu)}{|\xi + \mu|^3} (\xi + \mu) - \frac{\mu}{|\xi - 1 + \mu|^3} (\xi + \mu - 1) = 0 \quad (90)$$

As raízes da equação (90) fornecem a posição dos pontos L1, L2 e L3. Essa equação deve ser resolvida numericamente. Como ilustração desses pontos, tem-se a Figura 4.

Com relação à estabilidade desses pontos de Lagrange, tem-se que os pontos L1, L2 e L3 encontram-se em um equilíbrio instável e os pontos L4 e L5 são estáveis quando $\mu < 0,0385$ (Roy, 2005).

2.4.3 Integral de Jacobi

O problema circular restrito de 3 corpos tem uma integral primeira exata que fornece resultados interessantes, que, como será visto, determinará as regiões possíveis para o movimento do corpo em P. Essa integral é denominada de integral de Jacobi. Considerando as equações que descrevem o movimento de P, equações (80.a-c), multiplicando a equação (80.a) por $\dot{\xi}$, a equação (80.b) por $\dot{\eta}$ e a equação (80.c) por $\dot{\zeta}$ e somando todas as 3 equações, obtém-se:

$$\xi \ddot{\xi} + \eta \ddot{\eta} + \zeta \ddot{\zeta} = \frac{\partial D}{\partial \xi} \dot{\xi} + \frac{\partial D}{\partial \eta} \dot{\eta} + \frac{\partial D}{\partial \zeta} \dot{\zeta} \quad (91)$$

Observando que:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{v^2}{2} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 + \dot{\zeta}^2}{2} \right) = \xi \ddot{\xi} + \eta \ddot{\eta} + \zeta \ddot{\zeta} \quad (92)$$

E,

$$\frac{d}{dt}D(\xi, \eta, \zeta) = \frac{\partial D}{\partial \xi}\dot{\xi} + \frac{\partial D}{\partial \eta}\dot{\eta} + \frac{\partial D}{\partial \zeta}\dot{\zeta} \quad (93)$$

Pode-se substituir as equações (92) e (93) na equação (91) e integrar uma vez, obtendo que:

$$\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 + \dot{\zeta}^2 = 2D(\xi, \eta, \zeta) - C \quad (94)$$

A equação (94) representa o resultado da integral primeira de Jacobi, e, determinar a constante C será de suma importância para determinar as regiões acessíveis pela partícula P . Observa-se que o termo $\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 + \dot{\zeta}^2$ da equação (94) está associado ao quadrado da velocidade que, por uma questão matemática só pode ser números maiores ou iguais à zero, de forma que $v^2 \geq 0$. Para que essa condição e a igualdade da equação (94) sejam satisfeitas, tem-se que, obrigatoriamente,

$$2D(\xi, \eta, \zeta) \geq C \quad (95)$$

Quando $C = 2D(\xi, \eta, \zeta)$, que em função da definição de D ,

$$C = (\xi^2 + \eta^2) + 2\frac{1-\mu}{\rho_1} + 2\frac{\mu}{\rho_2} \quad (96)$$

Essa igualdade defini as superfícies de velocidade zero que delimitam as regiões em que o movimento de P é possível. A constante C é encontrada a partir das condições iniciais $(\xi_0, \eta_0, \zeta_0, \dot{\xi}_0, \dot{\eta}_0, \dot{\zeta}_0)$. Com isso, a condição imposta pela integral de Jacobi deve ser constantemente verificada durante as integrações numéricas das equações de movimento para garantir que os resultados numéricos de fato fazem sentido físico.

A superfície descrita pela equação (96) determina os extremos geométricos possíveis para um determinado estado de energia relativa (Junkins e Schaub, 2009). Estudar essas superfícies permite determinar rapidamente se é possível para, por exemplo, um veículo espacial viajar de um corpo primário para o outro do sistema dinâmico. Portanto, estudar o movimento de P visto pelo referencial rotativo é muito conveniente ao explorar possíveis trajetórias perto dos dois corpos celestes.

A Figura 7 apresenta os contornos da superfície de velocidade zero no plano $\xi - \eta$ para alguns estados críticos de energia. O primeiro estado crítico (Figura 7a) é onde P tem apenas energia suficiente para atingir o ponto $L1$ entre $1 - \mu$ e μ . Aumentar o estado de energia de P infinitesimalmente além desse estado abre um corredor entre os dois corpos em órbita, tornando teoricamente possível que um objeto passe de um corpo para outro. No entanto, ainda é impossível para um objeto próximo a $1 - \mu$ ou μ deixar o sistema dos dois corpos primários. O próximo estado de energia crítica é onde a superfície de velocidade zero atinge o ponto $L2$

(Figura 7b). Qualquer adicional de energia agora torna possível que P escape do sistema dinâmico entre $1 - \mu$ e μ . Na Figura 7c, é onde a superfície de velocidade zero apenas toca o ponto L_3 . Por fim, à medida que a energia da partícula P aumenta, as últimas regiões proibidas a desaparecer são as que ficam em torno dos pontos L_4 e L_5 , conforme descrito na Figura 7d.

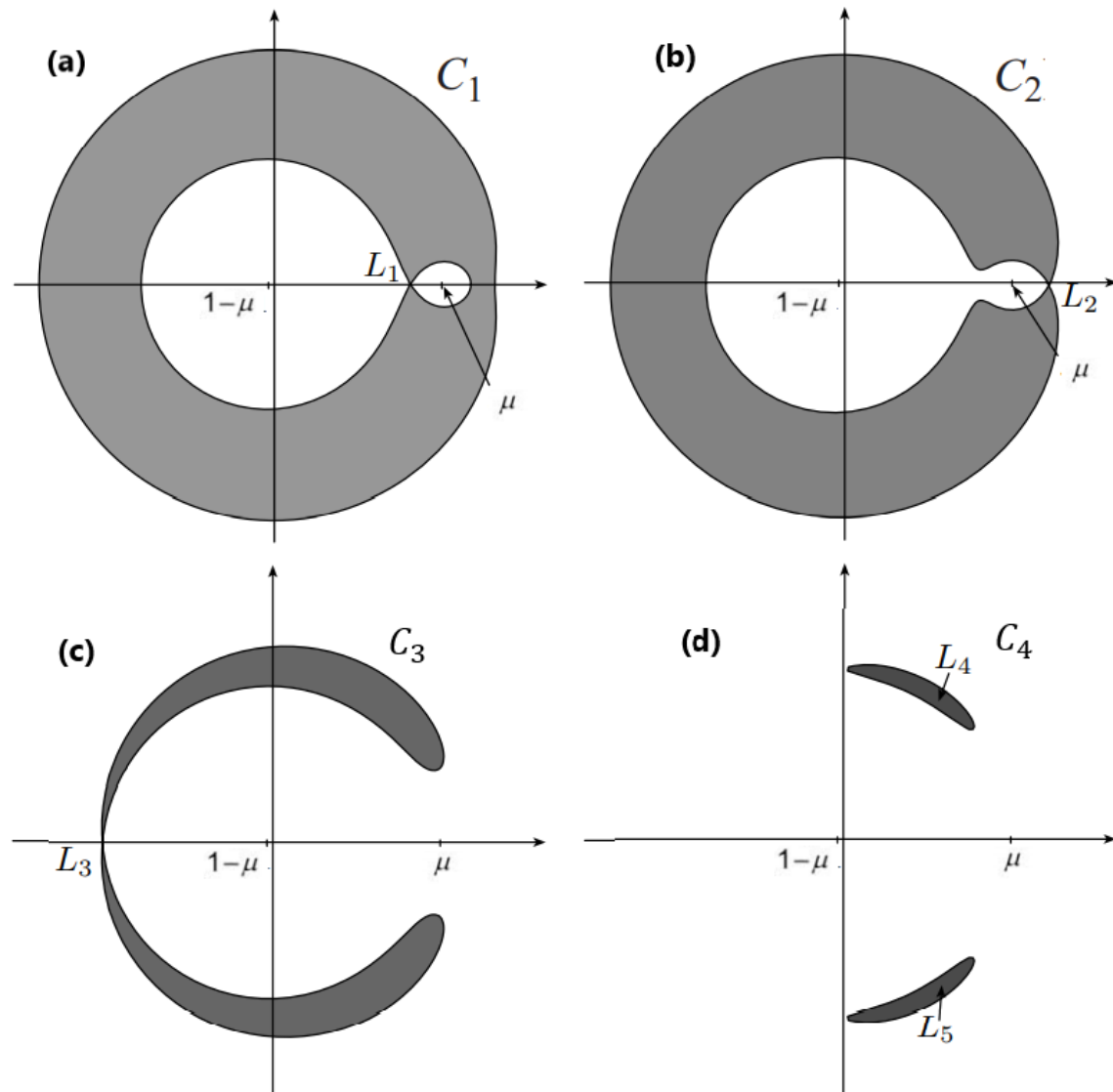


Figura 5 - curvas de velocidade zero. adaptado de Junkins e Schaub (2009).