




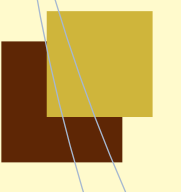
BC0209–Fenômenos Eletromagnéticos

Segundo quadrimestre de 2016

Prof. José Kenichi Mizukoshi

Aula 8 (versão 23/06/2015)

Energia armazenada em um capacitor. Capacitores com dielétricos.
Dielétricos e a Lei de Gauss.



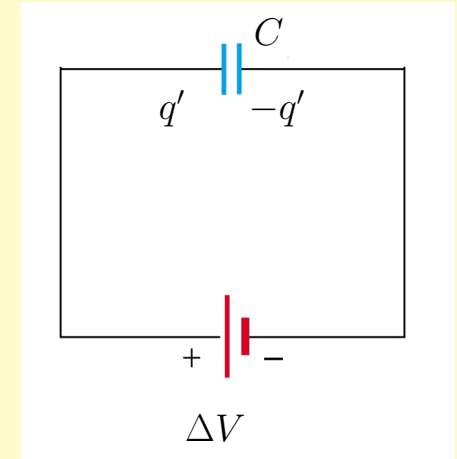
Energia Armazenada em um Capacitor; Capacitores com Dielétricos; Dielétricos e a Lei de Gauss

Energia acumulada em um capacitor carregado

Energia Armazenada em um Capacitor; Capacitores com Dielétricos; Dielétricos e a Lei de Gauss Problemas Propostos

- Considere um capacitor de capacitância C conectado a uma bateria com diferença de potencial ΔV . Para um dado instante de tempo $t < t_f$, o capacitor está sendo carregado. Neste instante, a carga no capacitor é $q' < q$ (q é a carga máxima que o capacitor pode armazenar) e a diferença de potencial é

$$\Delta V' = \frac{q'}{C}$$



Por outro lado, quando o capacitor estiver completamente carregado (para $t > t_f$), tem-se que

$$\Delta V = \frac{q}{C}$$

- Para $t < t_f$, o trabalho realizado pela bateria para transferir uma carga dq' para o capacitor é dado por

$$dW_{\text{bateria}} = +dU = dq' \Delta V'$$

Energia eletrostática armazenada em um capacitor

Energia Armazenada em um Capacitor; Capacitores com Dielétricos; Dielétricos e a Lei de Gauss Problemas Propostos

- A energia eletrostática total armazenada no capacitor é

$$U = \int dU = \int_0^q \underbrace{\Delta V'}_{= q'/C} dq' = \frac{1}{C} \int_0^q q' dq' \Rightarrow U = \frac{q^2}{2C}$$

Como $q = C\Delta V$,

$$U = \frac{(C\Delta V)^2}{2C} \Rightarrow U = \frac{1}{2}C\Delta V^2$$

- Para um capacitor de placas paralelas, $C = \epsilon_0 \frac{A}{d}$ e $\Delta V = Ed$. Logo,

$$U = \frac{1}{2}\epsilon_0 \frac{A}{d}(Ed)^2 \Rightarrow U = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 Ad$$

Energia eletrostática armazenada em um capacitor

Energia Armazenada em um Capacitor; Capacitores com Dielétricos; Dielétricos e a Lei de Gauss Problemas Propostos

- Observe que Ad é o volume do espaço entre as placas do capacitor, preenchido pelo campo elétrico \vec{E} .

Definindo u como sendo a densidade de energia, dada por $u \equiv \frac{\text{energia}}{\text{volume}}$, temos que

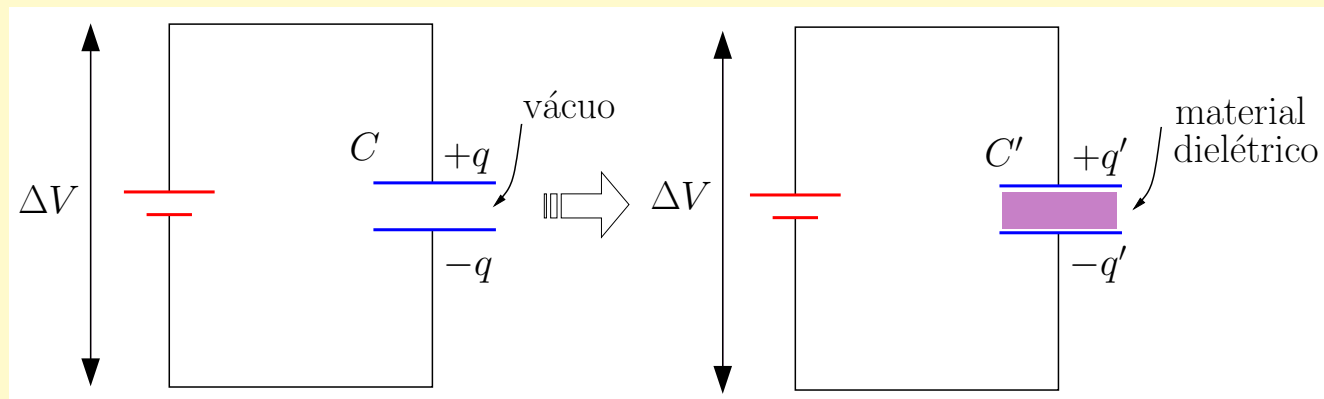
$$u = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2$$

➡ A expressão acima foi deduzida para um capacitor de placas paralelas, mas o resultado é geral. Se existe um campo elétrico numa região do espaço, há uma energia acumulada por unidade de volume associada a ele, dada pela expressão acima.

Capacitores com dielétricos

Energia Armazenada em um Capacitor; Capacitores com Dielétricos; Dielétricos e a Lei de Gauss Problemas Propostos

- Em 1837, Faraday observou que um capacitor preenchido por um **dielétrico** armazenava mais carga elétrica do que um capacitor similar, preenchido a vácuo e sob a mesma diferença de potencial.
- Vamos considerar uma situação similar ao experimento de Faraday, onde um capacitor com vácuo, de capacitância C , está ligado a uma bateria com diferença de potencial ΔV . Quando o capacitor estiver completamente carregado, possuirá carga q .
Se inserirmos um material dielétrico entre as placas do capacitor, mantendo a bateria conectada, observa-se que a nova carga no capacitor será $q' > q$ e a capacitância passa a ser C' .



Capacitores com dielétricos

Energia Armazenada em um Capacitor; Capacitores com Dielétricos; Dielétricos e a Lei de Gauss Problemas Propostos

- Como o capacitor mantém-se sempre ligado à bateria,

$$\Delta V = \frac{q}{C} = \frac{q'}{C'} \Rightarrow C' = \frac{q'}{q} C = \kappa_e C$$

onde κ_e é a **constante dielétrica do material**.

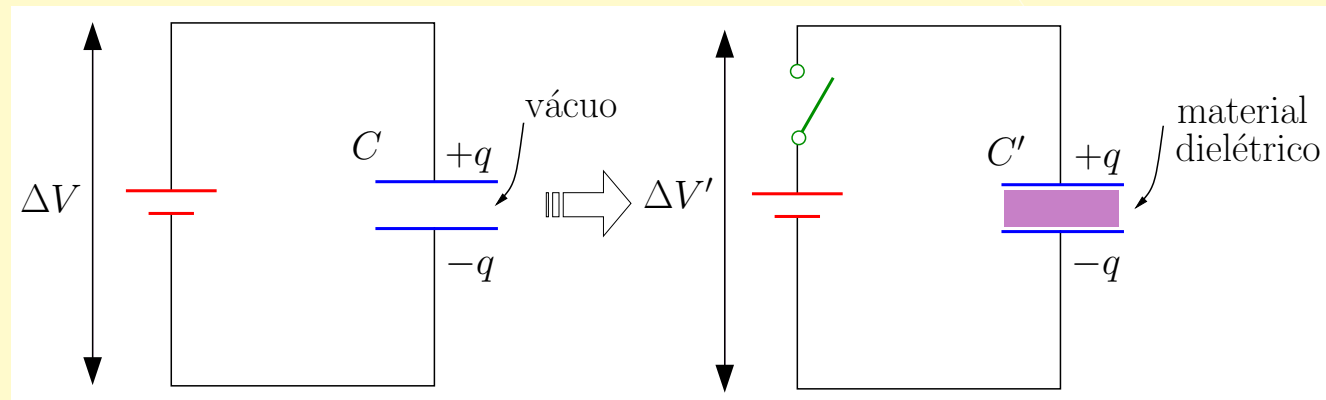
- Listamos na tabela abaixo o valor da constante dielétrica para alguns materiais. Para o vácuo, tem-se que $\kappa_e = 1$.

Material	constante dielétrica κ_e
Ar (seco)	1,00059
Papel	3,7
Vidro pirex	5,6
Borracha de neopreno	6,7
Silício	12
Água (20°C)	80,4
Titanato de estrôncio	310

Capacitores com dielétricos

Energia Armazenada em um Capacitor; Capacitores com Dielétricos; Dielétricos e a Lei de Gauss Problemas Propostos

- Vamos agora inserir o material dielétrico entre as placas do capacitor, desconectando-se a bateria. Inicialmente, o capacitor é carregado com carga completa q por meio de uma bateria com diferença de potencial ΔV .



- Ao se inserir o material dielétrico, a capacitância muda para $C' = \kappa_e C$, a carga no capacitor permanece constante e a diferença de potencial passa a ser $\Delta V'$. Logo,

$$q = C\Delta V = \underbrace{C'}_{=\kappa_e C} \Delta V' \Rightarrow \Delta V' = \frac{\Delta V}{\kappa_e}$$

Capacitores com dielétricos

Energia Armazenada em um Capacitor; Capacitores com Dielétricos; Dielétricos e a Lei de Gauss Problemas Propostos

■ Como

$$\Delta V = V_+ - V_- = - \int_-^+ \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$$

tem-se que

$$\kappa_e \Delta V' = - \int_-^+ \vec{E} \cdot d\vec{\ell} \Rightarrow \Delta V' = - \int_-^+ \underbrace{\left(\frac{\vec{E}}{\kappa_e} \right)}_{\equiv \vec{E}'} \cdot d\vec{\ell}$$

► Com a bateria desconectada, o campo elétrico diminui na presença do dielétrico. Veremos mais adiante porque isso ocorre.

Capacitores com dielétricos – exemplos

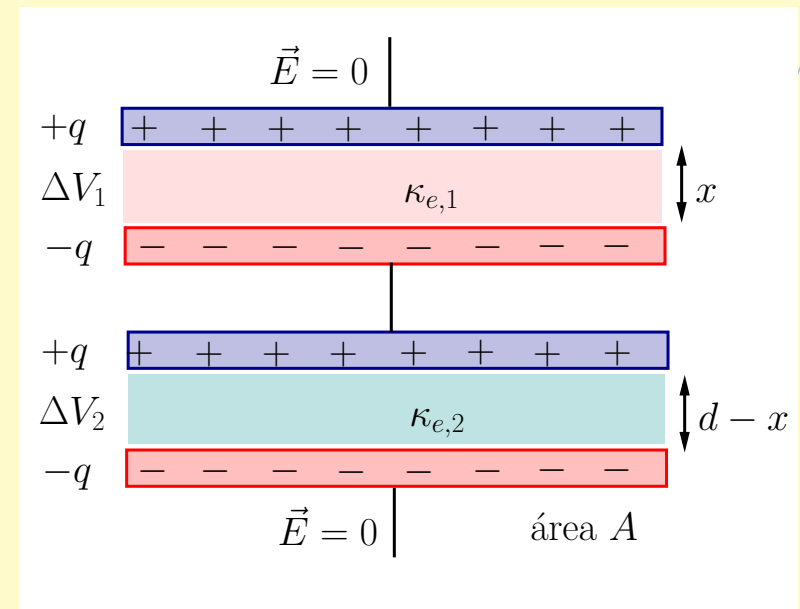
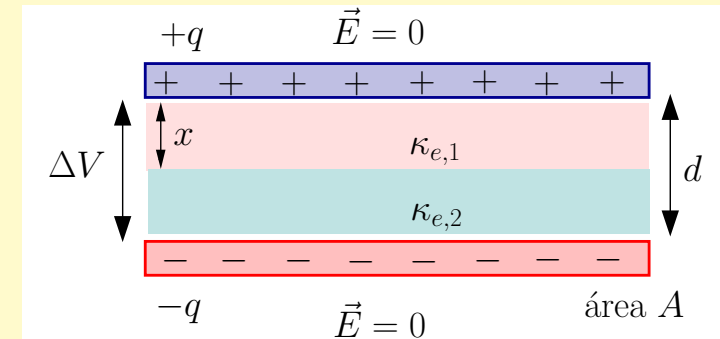
Energia Armazenada em um Capacitor; Capacitores com Dielétricos; Dielétricos e a Lei de Gauss Problemas Propostos

Ex. 1 Obtenha a capacitância do capacitor de placas paralelas preenchido com dois dielétricos, de constantes dielétricas $\kappa_{e,1}$ e $\kappa_{e,2}$, conforme indicado na figura ao lado.

Solução O capacitor acima pode ser pensado como um conjunto de dois capacitores, cada um preenchido com um tipo de dielétrico, ligado em série.

■ Temos que $\Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2$ e

$$\begin{cases} q = C\Delta V \\ q = C_1\Delta V_1 \\ q = C_2\Delta V_2 \end{cases} \Rightarrow \frac{q}{C} = \frac{q}{C_1} + \frac{q}{C_2}$$



Capacitores com dielétricos – exemplos

Energia Armazenada em um Capacitor; Capacitores com Dielétricos; Dielétricos e a Lei de Gauss Problemas Propostos

Portanto,

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

- Como se tratam de capacitores de placas paralelas preenchidas por materiais dielétricos,

$$C_1 = \frac{\epsilon_0 \kappa_{e,1} A}{x} \quad \text{e} \quad C_2 = \frac{\epsilon_0 \kappa_{e,2} A}{d-x}$$

Logo,

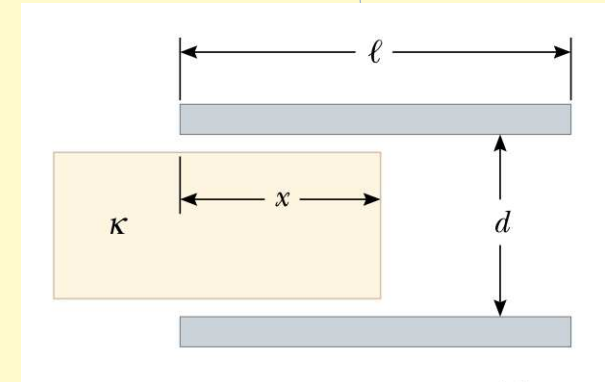
$$C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \frac{\frac{\epsilon_0 \kappa_{e,1} A}{x} \frac{\epsilon_0 \kappa_{e,2} A}{d-x}}{\frac{\epsilon_0 \kappa_{e,1} A}{x} + \frac{\epsilon_0 \kappa_{e,2} A}{d-x}} \Rightarrow C = \frac{\epsilon_0 A \kappa_{e,1} \kappa_{e,2}}{x(d-x)} \frac{1}{\frac{\kappa_{e,1}(d-x) + \kappa_{e,2}x}{x(d-x)}}$$

$$\therefore \boxed{C = \frac{\epsilon_0 A}{d} \frac{\kappa_{e,1} \kappa_{e,2}}{\frac{\kappa_{e,1}(d-x)}{d} + \frac{\kappa_{e,2}x}{d}}}$$

Capacitores com dielétricos – exemplos

Energia Armazenada em um Capacitor; Capacitores com Dielétricos; Dielétricos e a Lei de Gauss Problemas Propostos

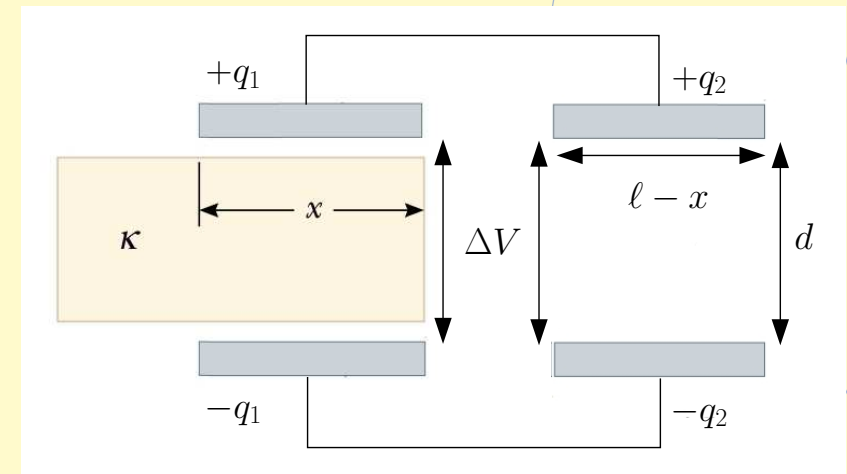
Ex. 2 Um capacitor é construído a partir de duas placas quadradas de lados ℓ e separação d , com $\ell \gg d$. Um material de constante dielétrica κ é inserido a uma distância x no capacitor, como mostra a figura ao lado. Obtenha a capacitância do capacitor.



Solução Neste caso, o capacitor com dielétrico é equivalente a um conjunto com dois capacitores ligados em paralelo, visto que a diferença de potencial entre as placas é igual em todos os pontos.

■ Temos que

$$\begin{cases} q_1 = C_1 \Delta V \\ q_2 = C_2 \Delta V \\ q = C \Delta V \end{cases} \Rightarrow q_1 + q_2 = C_1 \Delta V + C_2 \Delta V$$



Capacitores com dielétricos – exemplos

Energia Armazenada em um Capacitor; Capacitores com Dielétricos; Dielétricos e a Lei de Gauss Problemas Propostos

Como $q_1 + q_2 = q$, segue que

$$C = C_1 + C_2 = \frac{\kappa \varepsilon_0 \ell x}{d} + \frac{\varepsilon_0 \ell (\ell - x)}{d} \Rightarrow \boxed{C = \frac{\varepsilon_0}{d} [\ell^2 + \ell x (\kappa - 1)]}$$

Se a diferença de potencial entre as placas for ΔV , obtenha a energia armazenada no capacitor.

Solução Como

$$U = \frac{1}{2} C \Delta V^2$$

temos que

$$\boxed{U = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_0 \Delta V^2}{d} [\ell^2 + \ell x (\kappa - 1)]}$$

Capacitores com dielétricos – exemplos

Energia Armazenada em um Capacitor; Capacitores com Dielétricos; Dielétricos e a Lei de Gauss Problemas Propostos

Se o capacitor é mantido a uma diferença de potencial de ΔV , obtenha a força exercida sobre o dielétrico.

Solução Do item anterior, vemos que a energia potencial eletrostática é função de x : $U = U(x)$. Como $\vec{F} = -\vec{\nabla}U$ (Aula 5, pág. 27) temos que neste caso,

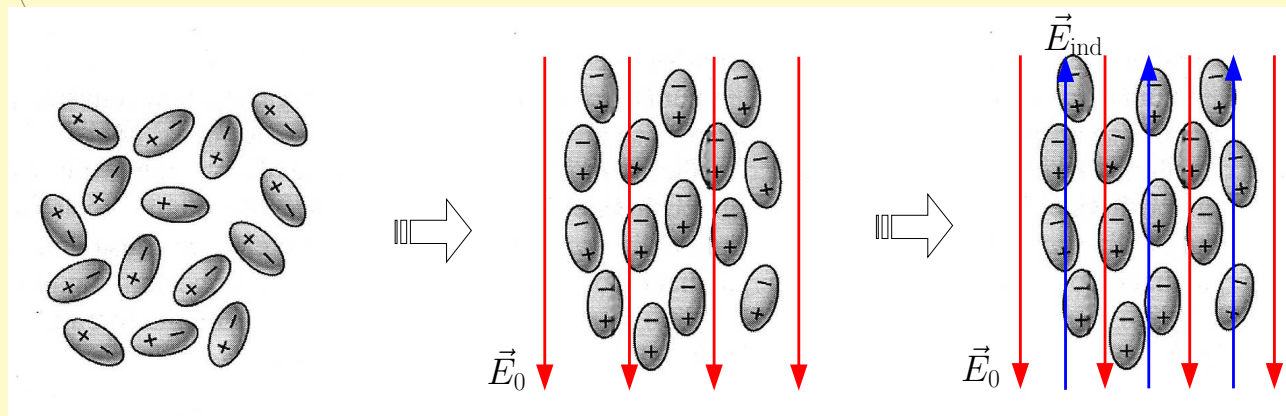
$$\vec{F} = -\frac{dU}{dx} \hat{i} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{F} = -\frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 \Delta V^2}{d} \ell (\kappa - 1) \hat{i}}$$

➡ Se ΔV é mantida constante, a força sobre o dielétrico é horizontal e para à esquerda. É necessário que um agente externo empurre o dielétrico para à direita até uma distância x , aumentando a energia potencial do capacitor com o dielétrico, em relação ao capacitor com vácuo.

Dielétricos e a lei de Gauss

Energia Armazenada em um Capacitor; Capacitores com Dielétricos; Dielétricos e a Lei de Gauss Problemas Propostos

- Nos materiais dielétricos não há elétrons livres, como no caso dos condutores. E apesar de neutros, as moléculas geralmente possuem momento de dipolo elétrico não nulo e estão distribuídas aleatoriamente em todas as direções.
- A presença de um campo elétrico externo \vec{E}_0 faz com que as moléculas se alinhem parcialmente a esse campo – elas passam a ser **polarizadas**;
- As moléculas polarizadas produzem um excesso de cargas negativas e positivas (cargas induzidas) nas superfícies do material;
- As cargas superficiais induzidas produzem um campo elétrico de polarização (ou campo induzido), \vec{E}_{ind} , que é paralelo a \vec{E}_0 , mas em sentido contrário.



Dielétricos e a lei de Gauss

Energia Armazenada em um Capacitor; Capacitores com Dielétricos; Dielétricos e a Lei de Gauss Problemas Propostos

- O campo elétrico resultante no material é dado por

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_{\text{ind}} \Rightarrow E = E_0 - E_{\text{ind}} \quad (*)$$

ou seja, o campo elétrico resultante dentro do material dielétrico é menor do que o campo externo aplicado.

- Para muitos materiais, chamados de materiais lineares, o campo de polarização aumenta proporcionalmente ao campo externo. Usando a Eq. (*), podemos escrever

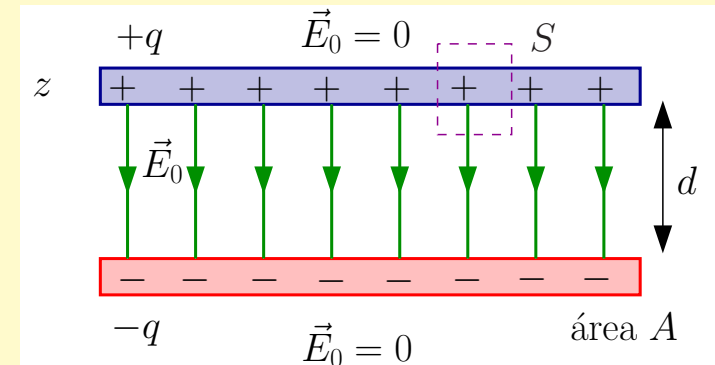
$$E = \frac{1}{\kappa_e} E_0$$

onde κ_e é a **constante dielétrica** do material.

Dielétricos e a lei de Gauss

Energia Armazenada em um Capacitor; Capacitores com Dielétricos; Dielétricos e a Lei de Gauss Problemas Propostos

- Considere um capacitor de placas paralelas de área A , separadas por uma distância d . Se a carga no capacitor é q , as placas terão uma densidade superficial de carga, cujo módulo é $\sigma = q/A$.
- Desprezando-se os efeitos de borda, vimos que o campo externo ao capacitor é nulo e que no seu interior possui valor constante. Logo, pode-se utilizar a lei de Gauss para calcular esse campo:



$$\int_S \vec{E}_0 \cdot d\vec{A} = \frac{\sigma A_{\perp}}{\epsilon_0}$$

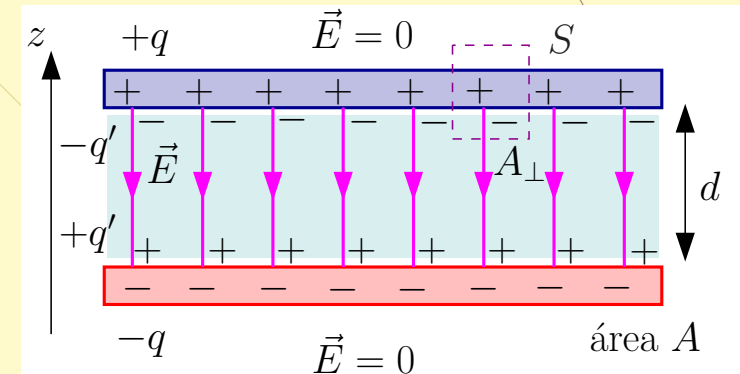
onde tomamos a superfície gaussiana S como um cilindro de área transversal A_{\perp} . Segue que

$$E_0 A_{\perp} = \frac{\sigma A_{\perp}}{\epsilon_0} \Rightarrow E_0 = \frac{q}{\epsilon_0 A}$$

Dielétricos e a lei de Gauss

Energia Armazenada em um Capacitor; Capacitores com Dielétricos; Dielétricos e a Lei de Gauss Problemas Propostos

- Com a presença do dielétrico entre as placas do capacitor, haverá uma carga induzida q' na superfície do material dielétrico.



- Aplicando a lei de Gauss para um cilindro de área transversal A_{\perp} :

$$\int_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{(\sigma - \sigma')A_{\perp}}{\epsilon_0} \Rightarrow EA_{\perp} = \frac{(\sigma - \sigma')A_{\perp}}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{q - q'}{\epsilon_0 A}$$

Temos que, como $E = \frac{1}{\kappa_e} E_0 = \frac{1}{\kappa_e} \frac{q}{\epsilon_0 A}$,

$$\frac{1}{\kappa_e} \frac{q}{\epsilon_0 A} = \frac{q - q'}{\epsilon_0 A} \Rightarrow q' = q \left(1 - \frac{1}{\kappa_e} \right)$$

Dielétricos e a lei de Gauss

Energia Armazenada em um Capacitor; Capacitores com Dielétricos; Dielétricos e a Lei de Gauss Problemas Propostos

- Temos também que

$$q - q' = \frac{q}{\kappa_e} \Rightarrow \sigma - \sigma' = \frac{\sigma}{\kappa_e}$$

Portanto, a lei de Gauss na presença do dielétrico fica

$$\int_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{(\sigma - \sigma')A_{\perp}}{\epsilon_0} = \frac{\sigma A_{\perp}}{\kappa_e \epsilon_0}$$

onde σA_{\perp} é a **carga livre** q dentro da superfície gaussiana S e

$$\epsilon_0 \kappa_e \equiv \epsilon$$

é a **permissividade do material**.

- De uma forma geral, a lei de Gauss na presença de um material dielétrico linear é dada por

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{\text{livre}}}{\epsilon}$$

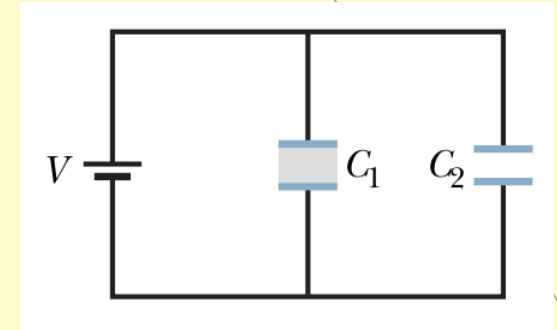
Problemas Propostos

Capacitores com dielétricos

Energia Armazenada em um Capacitor; Capacitores com Dielétricos; Dielétricos e a Lei de Gauss Problemas Propostos

P1 Na Fig. ao lado, qual é a carga total armazenada pelos capacitores de placas paralelas conectados a uma bateria de 12,0 V? Um dos capacitores é preenchido com ar, enquanto que o outro com um material dielétrico dcom $\kappa = 3,00$; ambos os capacitores possuem uma área da placa de $5,00 \times 10^{-3} \text{ m}^2$ e a separação de 2,00 mm entre as placas.

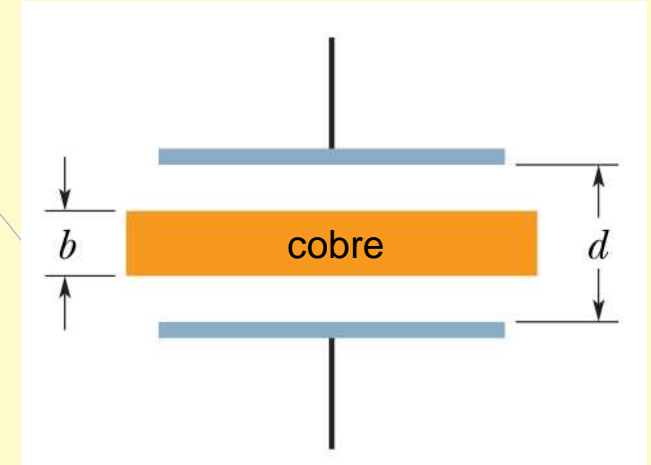
Resp. $q_{\text{tot}} = 1,06 \times 10^{-9} \text{ C}$.



Energia armazenada em um capacitor

Energia Armazenada em um Capacitor; Capacitores com Dielétricos; Dielétricos e a Lei de Gauss Problemas Propostos

P2 Uma chapa de cobre de espessura $d = 2,00$ mm é introduzida entre as placas de um capacitor de placas paralelas de área $A = 2,40$ cm², separadas por uma distância $d = 5,00$ mm, conforme mostra a figura ao lado. A chapa está exatamente a meio caminho das placas. (a) Qual é a capacitância após a chapa ser introduzida? (b) Se a carga $q = 3,40$ μ C for mantida nas placas, qual é a razão da energia armazenada antes e após a introdução da chapa? (c) Qual o trabalho realizado sobre a chapa quando ela é introduzida entre as placas do capacitor? A chapa será sugada ou ela deverá ser empurrada?



Resp. (a) $C' = \varepsilon_0 A / (d - b) = 0,708$ pF; (b) $U/U' = d/(d - b) = 1,67$; (c) $W = -q^2 b / 2\varepsilon_0 A = -5,44$ J. Como $W < 0$, a chapa será sugada.

Referências

Energia Armazenada em um Capacitor; Capacitores com Dielétricos; Dielétricos e a Lei de Gauss Problemas Propostos

- R. A. Serway, e J. W. Jewett Jr., *Princípios de Física, Vol. 3*, Cengage Learning;
- D. Halliday, R. Resnick e K. S. Krane, *Física, Vol. 3*, LTC;