

Aula 4: O Potencial Elétrico

Energia Potencial e Forças Conservativas

O trabalho W realizado por uma força \vec{F} ao longo de um caminho C orientado de um ponto P_1 a um ponto P_2 é dado por

$$W_{P_1 \rightarrow P_2}^C = \int_{P_1}^{P_2} \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

A 2ª Lei de Newton nos dá $\vec{F} = d\vec{p}/dt$, com $\vec{p} = m\vec{v}$, e portanto, se C coincide com a trajetória da partícula, o trabalho é dado por

$$\begin{aligned} W_{P_1 \rightarrow P_2}^C &= \int_{P_1}^{P_2} \frac{d\vec{p}}{dt} \cdot d\vec{l} = m \int_{P_1}^{P_2} \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{l} \\ &= m \int_{v_1}^{v_2} d\vec{v} \cdot \frac{d\vec{l}}{dt} = m \int_{v_1}^{v_2} d\vec{v} \cdot \vec{v} = m \left[\frac{v^2}{2} \right]_{v_1}^{v_2} \\ &= \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = T_2 - T_1 \end{aligned}$$

com $T = \frac{mv^2}{2}$

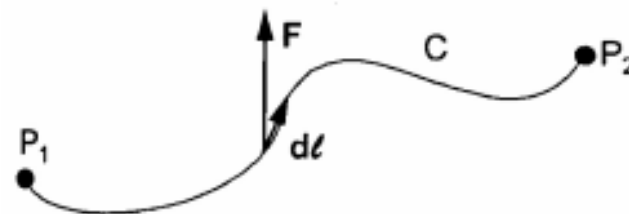


Figura 3.1: Trabalho de uma força \vec{F} ao longo de um caminho C . (Nussenzveig)

Energia Potencial e Forças Conservativas

i.e. o trabalho é a variação de energia cinética T .

Por outro lado, se a força é *central*, i.e. depende apenas da distância r ao centro de forças:

$$\vec{F} = F(r)\hat{r}$$

onde \hat{r} é um vetor unitário na direção do centro de forças, temos

$$W_{P_1 \rightarrow P_2}^C = \int_{P_1}^{P_2} F(r)\hat{r} \cdot d\vec{l} = \int_{r_1}^{r_2} F(r)dr = U_1 - U_2$$

com

$$U(r) = \int_r^{r_0} F(r)dr = - \int_{r_0}^r F(r)dr$$

e aqui U é a energia potencial associada à força, e r_0 é um ponto de referência onde se toma $U(r_0) = 0$. Portanto $W_{P_1 \rightarrow P_2}^C = T_2 - T_1 = U_1 - U_2$ implica

$$T_1 + U_1 = T_2 + U_2 = E$$

ou seja, a energia total $E = T + V$, soma da energia cinética e potencial é *conservada*.

Uma força é dita *conservativa* quando o seu trabalho independe do caminho/trajetória, dependendo apenas dos pontos inicial e final. A força central é portanto uma força conservativa. Outra maneira equivalente de definir uma força conservativa é dizer que a sua circulação, i.e. a integral de linha em um caminho fechado C é igual a zero:

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{l} = 0$$

pois para a curva fechada, os pontos inicial e final arbitrários coincidem. Generalizando, para uma força conservativa temos

$$\int_{P_1}^{P_2} \vec{F} \cdot d\vec{l} = -[U(P_2) - U(P_1)]$$

Potencial Elétrico

Assim como o campo elétrico E foi definido como a força elétrica F por unidade de carga, o potencial elétrico V é definido como a energia potencial elétrica U por unidade de carga.

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \vec{F}/q & (\text{unidade N/C}) \\ V &= U/q & (\text{unidade J/C} = \text{V})\end{aligned}$$

A unidade do potencial é Joule/Coulomb [J/C], conhecida como Volts [V]. Como a energia potencial elétrica é definida a menos de uma constante arbitrária, o potencial também é. Diferenças de energia potencial e de potencial elétrico, no entanto, são bem definidas. Da Eq. temos então

$$V_2 - V_1 = - \int_{P_1}^{P_2} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Como veremos, em alguns casos tomamos o potencial – e a energia potencial elétrica – como sendo zero no infinito. Neste caso, o potencial é dado por

$$V = - \int_{\infty}^{P_2} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{P_2}^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Potencial Elétrico e Campo Elétrico

Considerando apenas um intervalo infinitesimal, $d\vec{l} = (dx, dy, dz)$, temos $\vec{F} \cdot d\vec{l} = -dU$ i.e. a variação infinitesimal na energia potencial elétrica. Essa variação pode ser expandida em primeira ordem, e portanto temos:

$$\vec{F} \cdot d\vec{l} = -dU = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz\right) = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z}\right) \cdot (dx, dy, dz) = \vec{\nabla}U \cdot d\vec{l}$$

Aqui, $\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$ é o operador diferencial, i.e. um vetor cujas componentes são derivadas parciais prontas para serem aplicadas em um campo escalar e produzir um vetor, denotado o *gradiente* do campo escalar. Portanto, a força é o negativo do gradiente da energia potencial:

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}U = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z}\right)$$

Como o $E = F/q$ e $V = U/q$, a relação entre E e V fica

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z}\right)$$

ou seja, o campo elétrico é menos o gradiente do potencial.

Repita 3 vezes antes de dormir: "O campo é menos o gradiente do potencial".

Potencial Elétrico e Campo Elétrico

SUPERFÍCIES EQUIPOTÊNCIAIS E LINHAS DE CAMPO

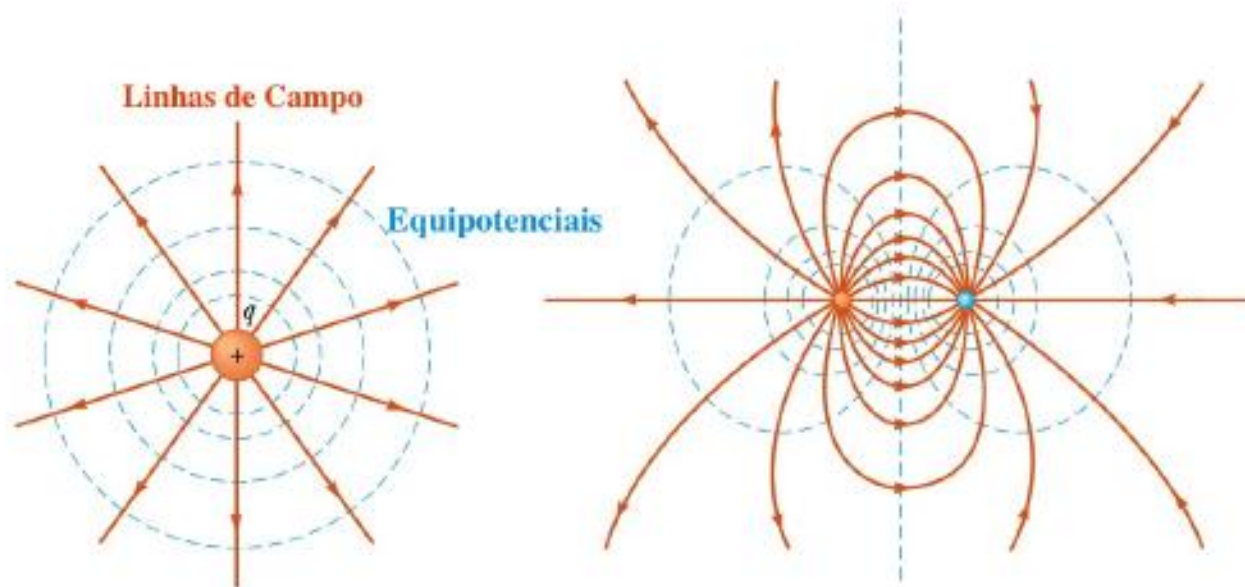


Figura 3.2: Superfícies Equipotenciais e Linhas de Campo Elétrico para uma carga pontual e um dipolo elétrico. Como $\vec{E} = -\nabla V$, linhas de campo são perpendiculares às superfícies equipotenciais. (Serway)

Superfície Equipotencial: Região do espaço com o mesmo potencial, i.e. onde $dV = 0$ e o campo não realiza trabalho em uma carga q na superfície, i.e.

$$dV = -W/q = -\vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$$

Potencial Elétrico e Campo Elétrico

para $d\vec{s}$ na superfície equipotencial. Um produto escalar é nulo quando os vetores são perpendiculares, logo segue $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$ é perpendicular à superfície equipotencial, i.e. o gradiente do potencial é perpendicular às equipotenciais. Essa é uma propriedade geral: o gradiente de um campo escalar é perpendicular às superfícies equipotenciais do campo (regiões de $dV = 0$). Além disso, como $dV = \vec{\nabla}V \cdot d\vec{l} = |\vec{\nabla}V||d\vec{l}|\cos\theta$, temos que dV é máximo (e igual a $|\vec{\nabla}V||d\vec{l}|$), quando $\theta = 0$, i.e. quando $d\vec{l}$ aponta na mesma direção de $\vec{\nabla}V$. Portanto, o gradiente aponta na direção de maior variação do campo potencial.

Na Fig 3.2, mostra-se linhas de campo e superfícies (linhas) equipotenciais para uma carga pontual e um dipolo elétrico.

Potencial de Condutores

Dentro de condutores, $\vec{E} = 0$. Portanto

$$V_2 - V_1 = - \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0 \quad \rightarrow \quad V_2 = V_1$$

para quaisquer pontos 1 e 2. Portanto:

$$V = \text{const} \quad (\text{condutor})$$

i.e. o volume interno do condutor é um *volume equipotencial*. Em particular, a superfície do condutor é uma equipotencial, e portanto é consistente com o fato do campo próximo do condutor ser perpendicular a ele.

Exemplos

Carga Pontual e Superposição

Para uma carga pontual, usando a Lei de Coulomb na definição de potencial, e usando um caminho conectando dois pontos na direção radial da carga, temos

$$\begin{aligned} V(r) - V(r_0) &= - \int_{r_0}^r \vec{E} \cdot d\vec{s} = - \int_{r_0}^r E ds \\ &= - \int_{r_0}^r \frac{q}{4\pi\epsilon_0 s^2} \left[\frac{q}{4\pi\epsilon_0 s} \right]_{r_0}^r = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_0} \end{aligned}$$

Tomando $r_0 = \infty$ e definindo $V(\infty) = 0$, obtemos

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

Para um conjunto de N cargas, a Lei da superposição do campo se transmite para o potencial

$$V = \sum_{i=1}^N V_i = \sum_{i=1}^N \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_i}$$

Anel de Carga

Considere o anel de cargas na Fig 3.3. O potencial do elemento dq é dado por

$$dV = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{z^2 + R^2}}$$

e portanto

$$\begin{aligned} V &= \int dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{z^2 + R^2}} \int dq \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{z^2 + R^2}} \end{aligned}$$

Como o potencial depende apenas da coordenada z , e não de x, y , o campo elétrico fica

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\vec{\nabla}V = -\frac{\partial V}{\partial z} \hat{z} \\ &= \frac{qz}{4\pi\epsilon_0 (z^2 + R^2)^{3/2}} \hat{z} \end{aligned}$$

como obtido na integração direta do campo elétrico.

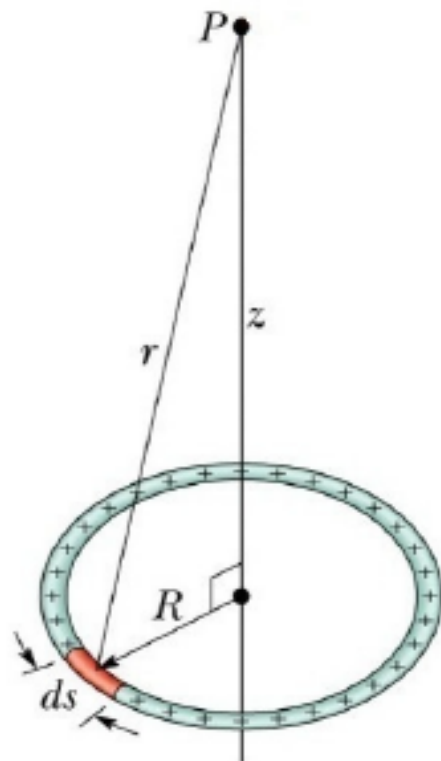


Figura 3.3: Anel carregado. (Halliday)

Disco de Carga

Considere o disco de cargas na Fig 3.4 . Vizualizando o disco como uma sucessão de anéis com raio variavel R' , temos

$$dV = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0\sqrt{z^2 + (R')^2}}$$

A carga infinitesimal é $dq = \sigma(2\pi R' dR')$, e portanto o potencial do disco fica

$$\begin{aligned} V &= \int \frac{\sigma 2\pi R' dR'}{4\pi\epsilon_0\sqrt{z^2 + (R')^2}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \int \frac{R' dR'}{\sqrt{z^2 + (R')^2}} \\ &= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[\sqrt{z^2 + (R')^2} \right]_0^R \\ &= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(\sqrt{z^2 + R^2} - z \right) \end{aligned}$$

O campo elétrico é entao dado por

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\vec{\nabla}V = -\frac{\partial V}{\partial z}\hat{z} \\ &= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}} \right] \hat{z} \end{aligned}$$

também de acordo com a integração direta do campo.

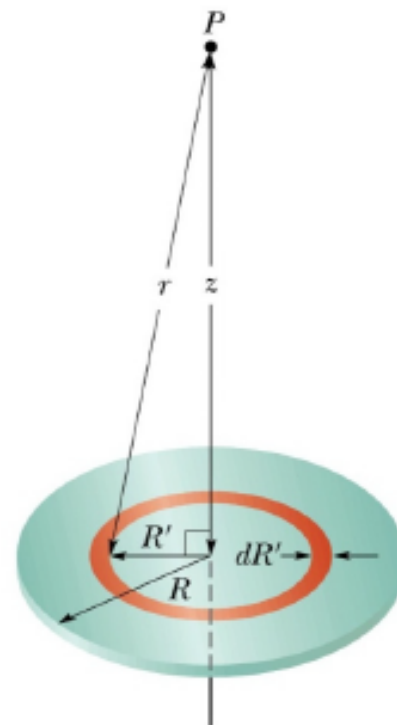


Figura 3.4: Disco carregado.
(Halliday)

Disco de Carga

Considere o disco de cargas na Fig 3.4 . Vizualizando o disco como uma sucessão de anéis com raio variavel R' , temos

$$dV = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0\sqrt{z^2 + (R')^2}}$$

A carga infinitesimal é $dq = \sigma(2\pi R' dR')$, e portanto o potencial do disco fica

$$\begin{aligned} V &= \int \frac{\sigma 2\pi R' dR'}{4\pi\epsilon_0\sqrt{z^2 + (R')^2}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \int \frac{R' dR'}{\sqrt{z^2 + (R')^2}} \\ &= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[\sqrt{z^2 + (R')^2} \right]_0^R \\ &= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(\sqrt{z^2 + R^2} - z \right) \end{aligned}$$

O campo elétrico é entao dado por

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\vec{\nabla}V = -\frac{\partial V}{\partial z}\hat{z} \\ &= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}} \right] \hat{z} \end{aligned}$$

também de acordo com a integração direta do campo.

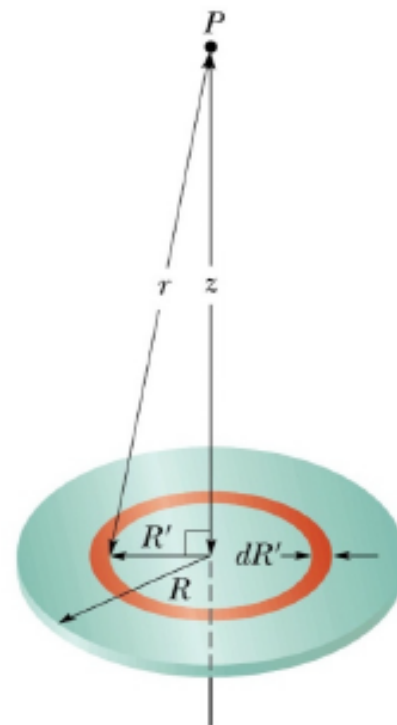
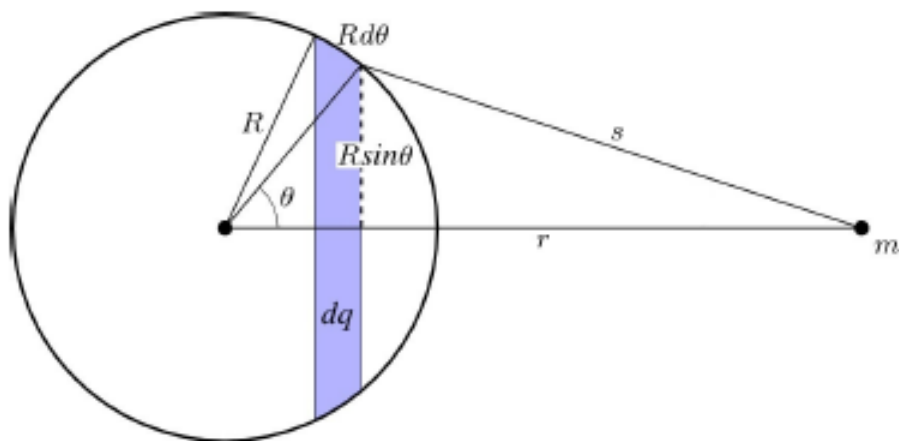


Figura 3.4: Disco carregado.
(Halliday)

Casca Esférica e Esfera

e agora uma casca esférica carregada dada na Fig 3.6. Vamos considerar primeiro o



potencial em um ponto m fora da casca esférica. O elemento infinitesimal indicado na figura é um anel com carga diferencial dq , cuja contribuição ao potencial é dada por

$$dV = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 s}$$

Com o elemento de carga $dq = \sigma(2\pi R \sin \theta)(R d\theta)$, temos

$$V = \int \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 s} = \frac{\sigma(2\pi R^2)}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\sin \theta}{s} d\theta$$

Como s é função de θ , é conveniente fazer a integração em s . Usando a lei dos cossenos temos

$$s^2 = r^2 + R^2 - 2rR \cos \theta \quad \rightarrow \quad \sin \theta d\theta = \frac{s ds}{rR}$$

e o potencial fica

$$\begin{aligned}
 V &= \frac{\sigma(2\pi R^2)}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{sd s}{rR} \frac{1}{s} \\
 &= \frac{\sigma(2\pi R)}{4\pi\epsilon_0 r} \int_{r-R}^{r+R} ds \\
 &= \frac{\sigma(2\pi R)}{4\pi\epsilon_0 r} [(r+R) - (r-R)] \\
 &= \frac{\sigma(4\pi R^2)}{4\pi\epsilon_0 r} \\
 &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}
 \end{aligned}$$

Portanto, o potencial de uma casca esférica é o mesmo de uma carga pontual com carga q localizada no centro da casca esférica.

Para pontos dentro da esfera, o cálculo é idêntico, mas de acordo com a Fig 3.7 os limites de integração são $s = R + r$ e $s = R - r$, o que resulta

$$\begin{aligned}
 V &= \frac{\sigma(2\pi R)}{4\pi\epsilon_0 r} [(R+r) - (R-r)] \\
 &= \frac{\sigma(4\pi R)}{4\pi\epsilon_0} = \frac{\sigma(4\pi R^2)}{4\pi\epsilon_0 R} \\
 &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R}
 \end{aligned}$$

i.e. o potencial é constante e igual ao valor em $r = R$, garantindo continuidade.

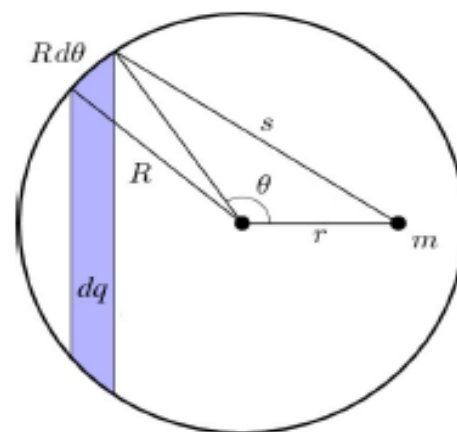


Figura 3.7: Casca esférica carregada. Potencial dentro da casca.

3.8 Cálculo da Energia Eletrostática

A energia potencial elétrica de uma configuração de cargas é igual ao trabalho necessário para formar aquela configuração, trazendo todas as cargas do infinito, configuração inicial em que a energia é tomada como nula. Para uma única carga q_1 , obviamente $U_1 = 0$. Para uma segunda carga q_2 na presença de um potencial, e.g. criado pela primeira carga, temos

$$U_{12} = q_2 V_1 = \frac{q_1 q_2}{4\pi r_{12}^2}$$

Trazendo uma terceira carga, ela responderá ao potencial de cada uma das duas cargas já trazidas, tendo novas contribuições à energia de $U_{13} = q_3 V_1$ e $U_{23} = q_3 V_2$. A energia total das 3 cargas fica:

$$\begin{aligned} U_{123} &= U_1 + U_{12} + U_{13} + U_{23} = q_2 V_1 + q_3 (V_1 + V_2) \\ &= \frac{q_1 q_2}{4\pi r_{12}^2} + \frac{q_1 q_3}{4\pi r_{13}^2} + \frac{q_2 q_3}{4\pi r_{23}^2} \end{aligned}$$

Para um sistema de N cargas pontuais, podemos imaginar trazer as cargas uma por vez do infinito, sucessivamente até formar a configuração desejada. Cada nova carga terá uma contribuição à energia que depende de todas as outras cargas já trazidas. Consideramos então cada par de cargas somente uma vez:

$$U = \sum_{i,j>i} U_{ij} = \sum_{i,j>i} \frac{q_i q_j}{4\pi \epsilon_0 r_{ij}}$$

Alternativamente, podemos considerar os pares duas vezes e dividir por 2, já que $U_{ij} = U_{ji}$. Temos então

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i,j \neq i} \frac{q_i q_j}{4\pi \epsilon_0 r_{ij}} = \frac{1}{2} \sum_i q_i \sum_{j \neq i} \frac{q_j}{4\pi \epsilon_0 r_{ij}} = \frac{1}{2} \sum_i q_i V_i$$

onde $V_i = \sum_{j \neq i} \frac{q_j}{4\pi \epsilon_0 r_{ij}}$ é o potencial criado na posição da carga i devido a todas as outras. Imaginando cargas infinitesimais, temos no limite contínuo

$$U = \frac{1}{2} \int dq(r) V(r) = \frac{1}{2} \int \rho(r) V(r) dv$$

onde dv é o elemento de volume.