Aula 3 (4/Fev)

Na aula de hoje:

* Revisão aula anterior.
* Terminar Ex1 da Folha 1.
* Propriedades quânticas fundamentais.

Revisão da aula anterior

* Terminamos formalismo Hamiltoniano.
  - $\mathcal{L}(q,\dot{q},t) \longrightarrow H(q,p,t)$.
  - Eqs de Hamilton.
  - Evolução temporal de variável.
  - Parêntises de Poisson.
* Folha 1 - exercício 1.

Folha Problemas 1

1.2) Formalismo lagrangeano (cont.)

(b) $$\mathcal{L} = \frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^{\,2} + q\,\dot{\vec{r}}\cdot\vec{A}(t,\vec{r}) - q\,\phi(t,\vec{r})$$

Usar E-L, $\vec{r} = (x,y,z) \equiv x^j$, $j=1,2,3$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^j} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^j} = 0$$

$$\sum_{i=1}^{3} \dot{x}^i \dot{x}_i = \dot{x}^1\dot{x}_1 + \dot{x}^2\dot{x}_2 + \dot{x}^3\dot{x}_3 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2$$

reescrevendo $\mathcal{L} = \frac{m}{2}\dot{x}^i\dot{x}_i + q\left(\dot{x}^i A_i(t,\vec{r}) - \phi(t,\vec{r})\right)$,

e usando E-L,

Nota: Notação de Einstein como multiplicação matrizes:

$\dot{x}^i \equiv$ vector linha $= [\dot{x}\ \dot{y}\ \dot{z}]$

$\dot{x}_i \equiv$ vector coluna $= \begin{bmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\\ \dot{z}\end{bmatrix}$

$\Rightarrow \dot{x}^i\dot{x}_i = \sum_{i=1}^{3}\dot{x}^i\dot{x}_i = [\dot{x},\dot{y},\dot{z}]\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\\ \dot{z}\end{bmatrix} = \dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2$

A métrica transforma $x^i \to x_i$ e vice-versa:

$g_{ij} = \begin{bmatrix}\cdot&\cdot&\cdot\\ \cdot&\cdot&\cdot\\ \cdot&\cdot&\cdot\end{bmatrix} \Rightarrow \dot{x}^i g_{ij} = \dot{x}_j \Leftrightarrow [\cdot\ \cdot\ \cdot]\begin{bmatrix}\cdot&\cdot&\cdot\\ \cdot&\cdot&\cdot\\ \cdot&\cdot&\cdot\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\cdot\\ \cdot\\ \cdot\end{bmatrix}$

Quando não temos sistema relativista (é o caso em MQ-I) a nossa métrica é sempre a identidade $g_{ij} = \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$

$\delta_{ij} = \begin{cases}0 & i\neq j\\ 1 & i=j\end{cases}$

$$q\dot{x}^i\frac{\partial A_i}{\partial x^j} - q\frac{\partial \phi}{\partial x^j} - \frac{d}{dt}\left[\frac{m}{2}\underbrace{\frac{\partial\, \dot{x}^i\dot{x}_i}{\partial \dot{x}^j}}_{=2\dot{x}^i\delta_i{}^j = 2\dot{x}^j} + q\underbrace{\frac{\partial \dot{x}^i}{\partial \dot{x}^j}A_i}_{=\delta^i{}_j A_i = A_j}\right] = 0$$

$\left(\vec{\nabla}_r(\vec{r}\cdot\vec{A}) = \vec{e}_r\cdot\vec{A}\right)$

$$\Leftrightarrow q\left(\dot{x}^i\frac{\partial A_i}{\partial x^j} - \frac{\partial\phi}{\partial x^j} - \underbrace{\frac{dA_j}{dt}}_{=\frac{\partial A_j}{\partial t}+\frac{\partial x^k}{\partial t}\frac{\partial A_j}{\partial x^k}}\right) = m\ddot{x}^j$$

$$\Leftrightarrow q\left(\dot{x}^i\frac{\partial A_i}{\partial x^j} - \frac{\partial\phi}{\partial x^j} - \frac{\partial A_j}{\partial t} - \underbrace{\frac{\partial x^k}{\partial t}}_{=\dot{x}^k}\frac{\partial A_j}{\partial x^k}\right) = m\ddot{x}^j$$

$$-\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \vec{E}$$

$$= \dots = \vec{v}\times\vec{B}$$

$$\Leftrightarrow q\left(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B}\right) = m\ddot{\vec{r}} \qquad \square$$

(c) Assumamos $\phi = 0$ e $\vec{A} = \frac{B}{2}(-y, x, 0)$

$$\Rightarrow \mathcal{L} = \frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^2 + q\frac{B}{2}(-\dot{x}y + \dot{y}x)$$

Aplicando E-L:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = \frac{qB}{2}\dot{y}, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = -\frac{qB}{2}\dot{x}, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} - \frac{qB}{2}y, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} + \frac{qB}{2}x, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}} = m\dot{z}$$

e assim temos as eqçs movimento

$$\begin{cases} \frac{qB}{2}\dot{y} - m\ddot{x} + \frac{qB}{2}\dot{y} = 0 \Leftrightarrow \ddot{x} = \omega_c \dot{y} \\ -\frac{qB}{2}\dot{x} - m\ddot{y} - \frac{qB}{2}\dot{x} = 0 \Leftrightarrow \ddot{y} = -\omega_c \dot{x} \\ m\ddot{z} = 0 \Leftrightarrow \ddot{z} = 0 \end{cases}$$

$\square$

(d) $p_z = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}} = m\dot{z}$ é constante do movimento porque $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} = 0$.

1.3) Formalismo Hamiltoniano

(a) Os momentos canônicos conjugados são dados por $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}$,

$$\left.\begin{aligned} p_x &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} - \frac{qB}{2}y \quad \neq m\dot{x} \\ p_y &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} + \frac{qB}{2}x \quad \neq m\dot{y} \\ p_z &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}} = m\dot{z} + 0 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \vec{p} = m\dot{\vec{\pi}} + q\vec{A}$$

(b) O Hamiltoniano é dado da transformação,

$$H(x_i, p_i, t) = p^i \dot{x}_i(x_i, p_i, t) - \mathcal{L}(x_i, \dot{x}_i(x_i, p_i, t), t)$$

$$\Rightarrow H = \vec{p} \cdot \underbrace{\dot{\vec{\pi}}}_{= \vec{p}/m - q\vec{A}/m} - \left[\frac{m}{2} \dot{\vec{\pi}}^2 + q\left(\dot{\vec{\pi}} \cdot \vec{A} - \phi\right) \right]$$

$$= \vec{p} \cdot \frac{\vec{p} - q\vec{A}}{m} - \frac{1}{2m}(p - qA)^2 - \frac{q}{m}\left(\vec{p}\cdot\vec{A} - q\vec{A}^2\right) + q\phi$$

$$= \dots = \frac{(\vec{p} - q\vec{A})^2}{2m} + q\phi = T + V \quad \square$$

(c) $\phi = 0$ e $\vec{A} = \frac{B}{2}(-y, x, 0)$

As eqç. Hamilton: $\frac{d}{dt}\vec{r} = \frac{\partial H}{\partial \vec{p}}$, $\frac{d}{dt}\vec{p} = -\frac{\partial H}{\partial \vec{r}}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{\vec{r}} = \frac{(\vec{p} - q\vec{A})}{m} \\ \dot{\vec{p}} = q\frac{(\vec{p} - q\vec{A})^i}{m} \vec{\nabla} A_i + q\vec{\nabla}\phi \end{cases}$$

$$= \cdots =$$

(d) p_z é constante do movimento se e só se $\{p_z, H\} = 0$

$$\frac{dp_z}{dt} = \cancelto{0}{\frac{\partial p_z}{\partial t}} + \{p_z, H\}$$

Teremos então

$$\{p_z, H\} = \sum_{i=1}^{3} \left[\cancelto{0}{\frac{\partial p_z}{\partial x_i} \frac{\partial H}{\partial p_i}} - \frac{\partial H}{\partial x_i} \underbrace{\frac{\partial p_z}{\partial p_i}}_{\text{só} \neq 0 \; i=3} \right]$$

$$= \sum_{i=1}^{3} \left[-\frac{\partial H}{\partial x_i} \cdot \delta_{i3} \right] = -\frac{\partial H}{\partial z} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dp_z}{dt} = 0 \Rightarrow p_z \text{ constante movimento}$$

(como já antes tínhamos notado)

—— // ——

Capítulo 2: Propriedades quânticas fundamentais

Refs:

* Cohen, Vol. 1, Cap. 1
* Feynmann, Vol 3, Cap 1,2,3

2.1 Fenomenologia

Propriedades fundamentais marcadamente distintas dos sistemas clássicos:

(i) quantificação grandezas físicas;

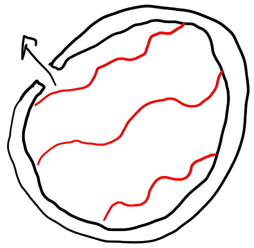
(ii) dualidade onda-partículas;

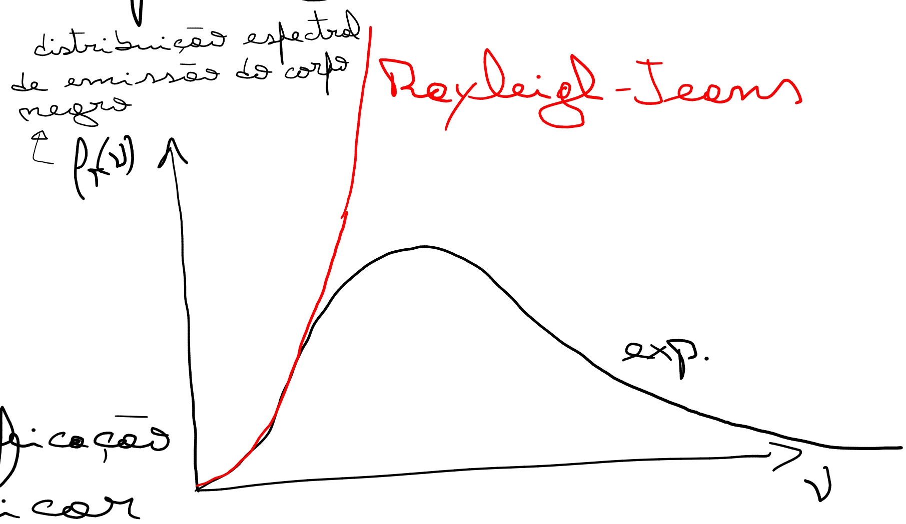
(iii) natureza probabilística;

(iv) medição influencia sistema;

2.1.1) Quantificação grandezas físicas

Radiação do corpo negro





Planck invocou quantificação do E para explicar esta observação.

Rayleigh-Jeans calcularam $\rho_T(\nu)$, estimando número de ondas estacionárias na cavidade, e usando teorema da equipartição energia [ver Folha 2]

$$\boxed{\rho_T(\nu) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}} \xrightarrow{\nu\to\infty} \infty$$

(catástrofe do ultravioleta)

Planck notou que a fórmula seguinte resolvia a divergência quando $\nu \to \infty$.

$$\boxed{\rho_T(\nu) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \cdot \frac{h\nu}{e^{h\nu/k_BT}-1}} \xrightarrow{\nu\to\infty} 0$$

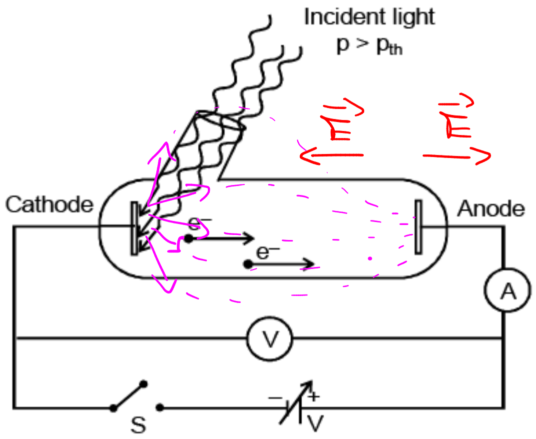
→ hoje conhecida como constante de Planck

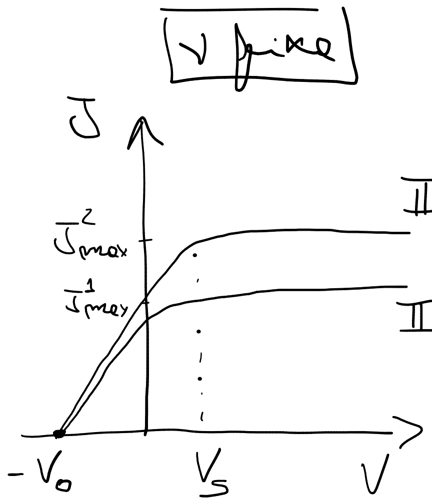
Se ajustar $\boxed{h = 6{,}626 \times 10^{-34}\ \text{J.s}}$, consegue reproduzir muito bem as observações experimentais.

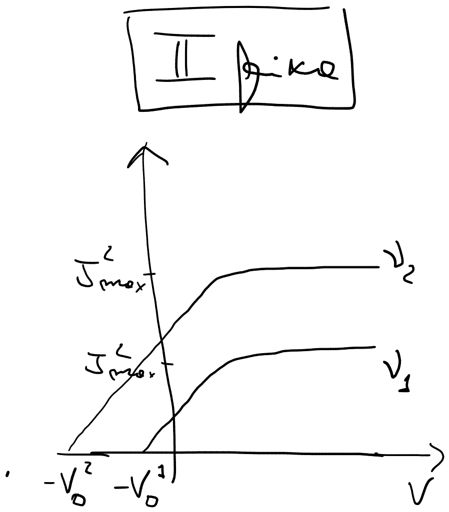
Planck notou que invocar quantificação da energia permite obter lei Planck, isto é, se energia dos modos da cavidade for dada por

$$\boxed{E = nh\nu} \quad , \; n = 1, 2, 3, \dots .$$

Efeito fotoeléctrico







Observações

* $V > V_s \Rightarrow J$ satura
* $J_{max} \propto I$ luz incidente (Classicamente esperado)
* V_0 não depender de I (NÃO CLÁSSICO)
* Aumentar $\nu \Rightarrow |V_0|$ aumentar

Einstein propôs "pacotes de luz" (fotões) com energia,

$$\boxed{E = h\nu} .$$

Cada fotão ejetado terá energia cinética

$$h\nu - \phi = E_{cin}^{elec.} = \frac{m}{2} v^2$$

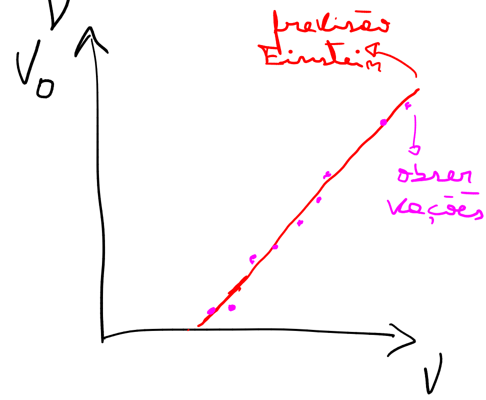
↳ barreira para ejecção do electrão do átomo

E assim, V_0 será dado por $|eV_0| = \left(\frac{m}{2} v^2\right)_{max}$

$$\Rightarrow h\nu - \phi = |eV_0|$$

$$\Leftrightarrow \boxed{|V_0| = \frac{h\nu}{|e|} - \frac{\phi}{|e|}}$$

→ previsão foi observada

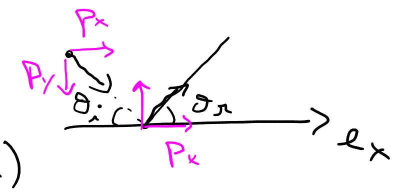


⇒ Reforça que a luz transporta "quantões" de energia.

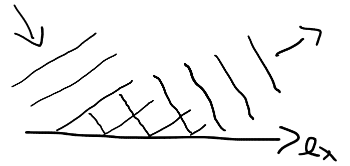
2.1.2) Dualidade onda-partícula para luz

Reflexão: $\theta_i = \theta_r$

* Corpuscular ⇒ conservação do mo/ linear (direcç e_x)

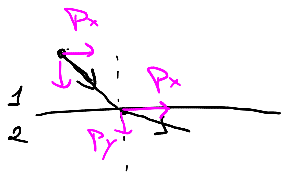


* Ondulatório ⇒ Princípio Huygens



Refração:

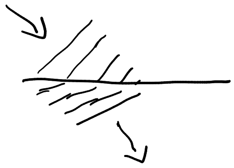
* corpuscular ⟹ conservação momento linear



errada

$$\cancel{\frac{\text{sen}\,\theta_1}{\text{sen}\,\theta_2} = \frac{v_2}{v_1}}$$

* ondulatória ⟹ Prin. Huygens

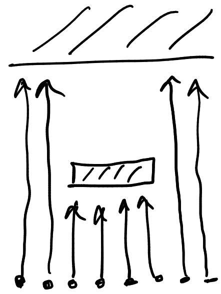


$$\frac{\text{sen}\,\theta_1}{\text{sen}\,\theta_2} = \frac{v_1}{v_2}$$

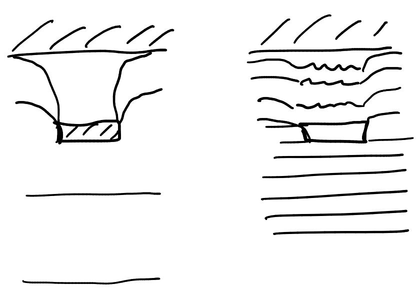
lei Snell

Difração:

* corpuscular ⟹ sombras bem definidas



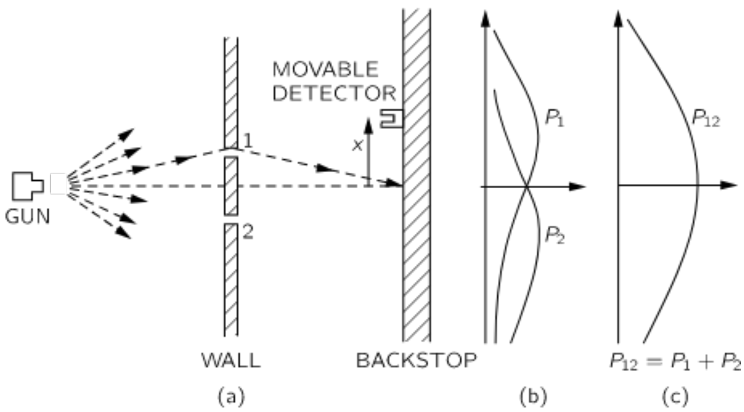
* ondulatória ⟹ sombras mal definidas $\lambda \lesssim l$; bem definidas se $\lambda > l$



$\lambda > l$ $\qquad$ $\lambda \lesssim l$

Interferência

* corpuscular ⟹ dois pontos bem definidos

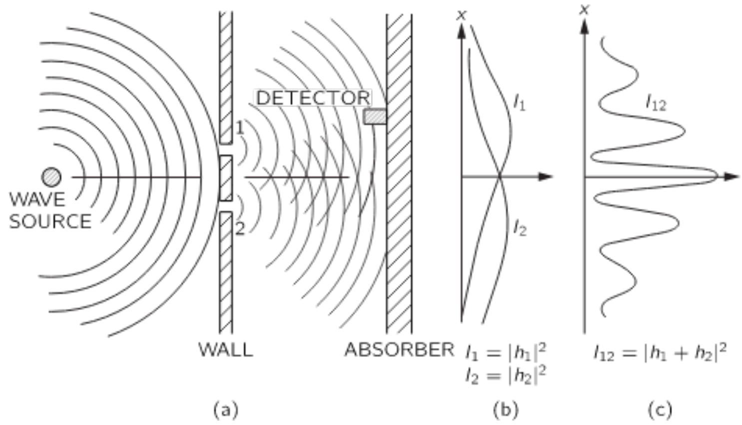


$$I_1 \propto P_1$$

$$I_2 \propto P_2$$

$$\Rightarrow I = I_1 + I_2 = P_1 + P_2$$

* Ondulatória $\Rightarrow$ padrão de interferência



$$E_1(x) = h_1(x) \cdot e^{i\omega t} \Rightarrow I_1(x) \propto |E_1|^2$$

$$E_2(x) = h_2(x)\, e^{i\omega t} \Rightarrow I_2(x) \propto |E_2|^2$$

$$I \propto |E_1(x) + E_2(x)|^2 =$$

$$= |E_1(x)|^2 + |E_2(x)|^2 + \left(E_1^*(x) E_2(x) + E_2^*(x) E_1(x)\right)$$

Observações experimentais (Young) mostraram que luz se comporta como onda.

No entanto, a radiação do corpo negro e o efeito fotoeléctrico só podem ser compreendidos invocando a natureza corpuscular da luz.

$\boxed{\text{Dualidade onda-partícula}}$

↳ Alguns fenómenos só podem ser explicados invocando a natureza ondulatória da luz, enquanto que outros necessitam que invoquemos a natureza corpuscular da luz.