Universidade Federal do ABC – UFABC
ESTA020-17: Modelagem e Controle
Primeira lista de exercícios
Professor Dr. Alfredo Del Sole Lordelo

1- Uma cultura de bactérias tem inicialmente x_0 bactérias. Em $t = 1h$, o número de bactérias é $1,5x_0$. Se a taxa de crescimento for proporcional ao número de bactérias presentes no instante t, determine o tempo necessário para triplicar o número de bactérias nesta cultura.

2- A meia-vida de um elemento radioativo é o tempo necessário para que a metade de uma certa quantidade inicial deste elemento se transforme em outro elemento. Em 15 anos, verifica-se que $0,043\%$ de uma certa quantidade inicial de plutônio-239 se transformou em outro elemento. Determine a meia-vida do plutônio-239, sabendo que a taxa de transformação é proporcional à quantidade remanescente.

3- Na década de 1950, o químico Willard Libby inventou um método para usar o carbono-14 radioativo como um meio para determinar a idade aproximada dos fósseis. A teoria de datação por carbono-14 se baseia no fato de que esse isótopo é produzido na atmosfera pela ação da radiação cósmica sobre o nitrogênio. A razão da quantidade de carbono-14 em relação ao carbono-12, que é estável, é constante na atmosfera. Assim, a quantidade proporcional de carbono-14 presente em todos os organismos vivos é a mesma que a da atmosfera. Quando um organismo morre, cessa a absorção de carbono-14 pela respiração ou alimentação. Comparando a quantidade proporcional de carbono-14 presente em um fóssil com a razão constante encontrada na atmosfera, é possível obter uma estimativa razoável da idade de um fóssil. O método se baseia no fato de que a meia-vida do carbono-14 é de aproximadamente 5600 anos. Determine a idade de um fóssil que contem um milésimo da quantidade de carbono-14 original.

4- Considere os sistemas mecânicos apresentados nas figuras 1 e 2. Descreva cada um deles em termos das variáveis de estado

$$\boldsymbol{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_1(t) \\ w_2(t) \\ \dot{w}_1(t) \\ \dot{w}_2(t) \end{bmatrix} \qquad \text{e saída} \qquad \boldsymbol{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_1(t) \\ w_2(t) \end{bmatrix}$$

na forma vetorial-matricial

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{x}}(t) &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t) \\ \boldsymbol{y}(t) &= \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t) \end{aligned}$$

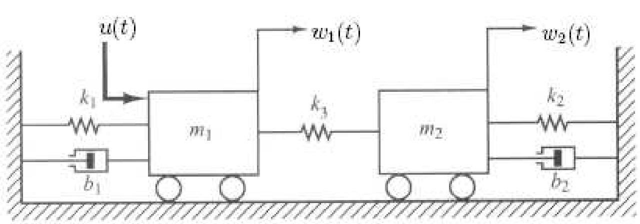

Figura 1: Sistema mecânico.
Do livro “Engenharia de Controle Moderno”, Katsuhiko Ogata, 4^a edição, Pearson & Prentice Hall, 2005.

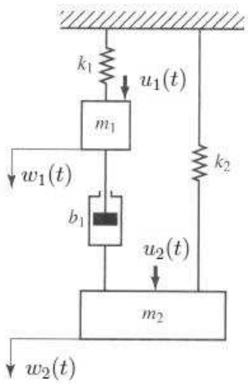

Figura 2: Sistema mecânico.
Do livro "Engenharia de Controle Moderno", Katsuhiko Ogata, 4^a edição, Pearson & Prentice Hall, 2005.

5- Considere o circuito RLC apresentado na figura 3, linear e invariante no tempo, no qual $L = 200mH$ é indutância do indutor, R é resistência do resistor e C é a capacitância do capacitor. A entrada $u(t)$ é a diferença de potencial elétrico aplicado no circuito conforme a figura 3. A saída $v_c(t)$ do sistema é a diferença de potencial elétrico nos terminais do capacitor.

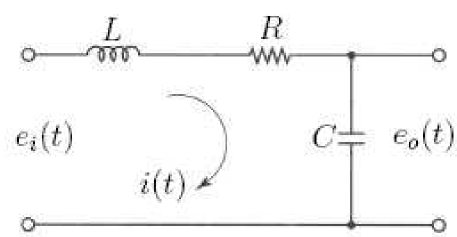

Figura 3: Circuito RLC.
Do livro "Engenharia de Controle Moderno", Katsuhiko Ogata, 4^a edição, Pearson & Prentice Hall, 2005.

a) Sabendo que

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} \qquad \text{e} \qquad v_c(t) = \frac{q(t)}{C} = \frac{1}{C}\int_0^t i(t)dt$$

deduza a equação diferencial linear de segunda ordem não-homogênea que modela este sistema, em termos de $v_c(t)$;

b) Considerando que o sistema pode ser representado pela equação diferencial linear de segunda ordem não-homogênea na forma padrão dada por $\ddot{x}(t) + 2\xi\omega_n\dot{x}(t) + \omega_n^2 x(t) = \omega_n^2 u(t)$, na qual ω_n é a frequência natural e ξ é o coeficiente de amortecimento, determine os parâmetros R e C, de maneira que, para uma entrada degrau $u(t) = r(t)$ definida como

$$r(t) = e_i(t) = \begin{cases} E & \text{se} \quad t \geq 0 \\ 0 & \text{se} \quad t < 0 \end{cases}$$

o máximo sobressinal seja $M_p = 30\%$ e o tempo de acomodação seja $t_s = 0,5s$, na qual

$$M_p = e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \Rightarrow \xi = \sqrt{\frac{(ln(M_p))^2}{(ln(M_p))^2 + \pi^2}} \quad \text{e} \quad t_s = \frac{4}{\xi\omega_n}$$

c) Descreva o sistema na forma de variáveis de estado, considerando $x_1(t) = v_c(t)$ e $x_2(t) = \dot{v}_c(t)$ e a saída $y(t) = e_o(t) = v_c(t)$. Faça o diagrama de blocos para este sistema;

d) Projete um controlador proporcional-derivativo, definido como $u(t) = k_p e(t) + k_d \dot{e}(t)$, no qual $e(t) = r(t) - y(t)$ é o erro, de maneira que $M_p = 20\%$ e $t_s = 0,1s$, para os mesmos valores de R e C obtidos anteriormente. Deduza as expressões dos controladores.

e) Faça o diagrama de blocos para o sistema controlado.