INTRODUÇÃO A ASTRONÁUTICA

INTRODUÇÃO À MECÂNICA ORBITAL

MOMENTO

É A QUANTIDADE DE RESISTÊNCIA DE UM CORPO EM MOVIMENTO A MUDAR SUA VELOCIDADE OU SUA DIREÇÃO DE MOVIMENTO. RESULTA NO PRODUTO DA MASSA DO OBJETO E DA SUA VELOCIDADE. OBJETOS PODEM TER VELOCIDADE LINEAR OU ANGULAR

- MOMENTUM LINEAR
- MOMENTUM ANGULAR

MOMENTO LINEAR

o momento linear é uma grandeza vetorial relacionada à translação de um corpo de massa, m, que se move com velocidade, $\vec{V}$.

$$\vec{p} = m\,\vec{V}$$

velocidade

momento linear

massa

MOMENTO ANGULAR

Do mesmo modo que nas translações, existe uma quantidade de movimento associada às rotações (ou corpos que estão em movimento de rotação)

$$\vec{H} = I\vec{\omega}$$

velocidade angular

momento angular

momento de inercia

Em função do momento linear

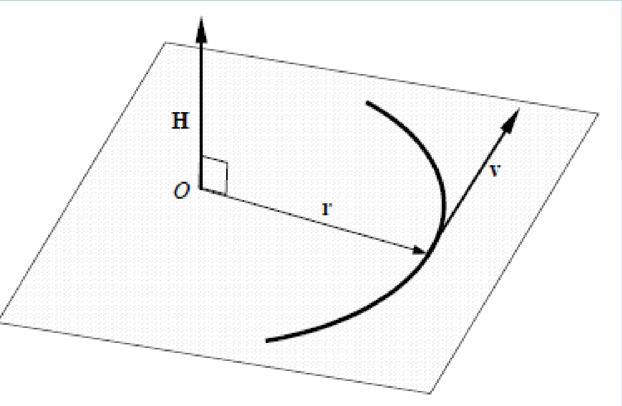
$$\vec{H} = \vec{r} \times m\vec{V}$$

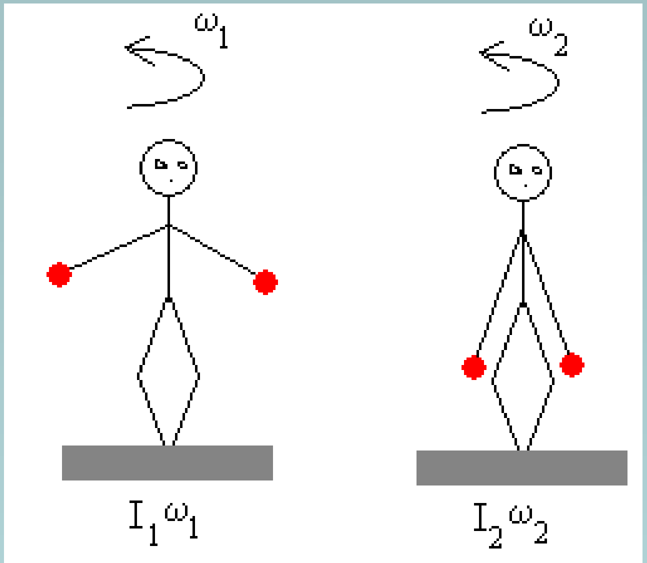
velocidade

momento angular

massa

posição





Diminui rotação Aumento da rotação

(Orban/Corbis/Sygma)

Leis de Newton

1ª Lei: Todo corpo persiste em seu estado de repouso, ou de movimento retilíneo uniforme, a menos que seja compelido a modificar esse estado pela ação de forças impressas sobre ele.

2ª Lei: A taxa de variação ao longo do tempo do momentum é igual a força aplicada

$$\frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} = \frac{\text{var}\,iação\ \ do\ \ momento}{\text{var}\,iação\ \ do\ \ tempo}$$

A segunda lei de Newton,

$$\vec{F} = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t} = \frac{\Delta\left(m\vec{V}\right)}{\Delta t}$$

Assim,

$$\vec{F} = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t} = m\frac{\Delta\left(\vec{V}\right)}{\Delta t} + \vec{V}\frac{\Delta(m)}{\Delta t}$$

Considerando a massa do objeto constante, então:

massa

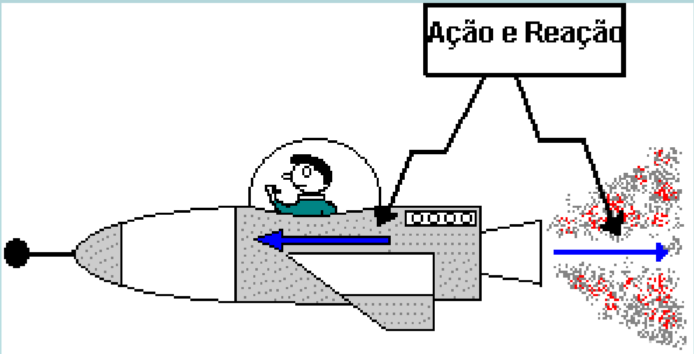
força

$$\vec{F} = m\frac{\Delta\left(\vec{V}\right)}{\Delta t} = m\vec{a}$$

aceleração

Permite entender como as forças afetam o movimento dos corpos.

3ª Lei: Quando um corpo A exerce uma força sobre um corpo B, o corpo B exercerá uma força igual mas oposta no corpo A.



LEI DA GRAVITAÇÃO

A força de gravidade entre 2 corpos é diretamente proporcional ao produto de suas massas e inversamente proporcional ao quadrado da distancia entre eles.

$$\vec{F}_g = \frac{G m_1 m_2}{R^2} \frac{\widehat{R}}{R}$$

Em que:

F_g: Força devido a gravidade

G: Constante de gravitação universal G = 6.67 x 10^{-11} m^3 $kg^{-1}s^{-2}$

m_1,m_2: Massas dos corpos 1 e 2, respectivamente

R: Distância entre os dois corpos

Força Central

Uma força, $\vec{F}$, é “central” quando em qualquer instante, tem sua linha de atuação passando através de um ponto fixo O. O ponto fixo é o centro da força. Devido a esta caracteristica a força pode ser representada por,

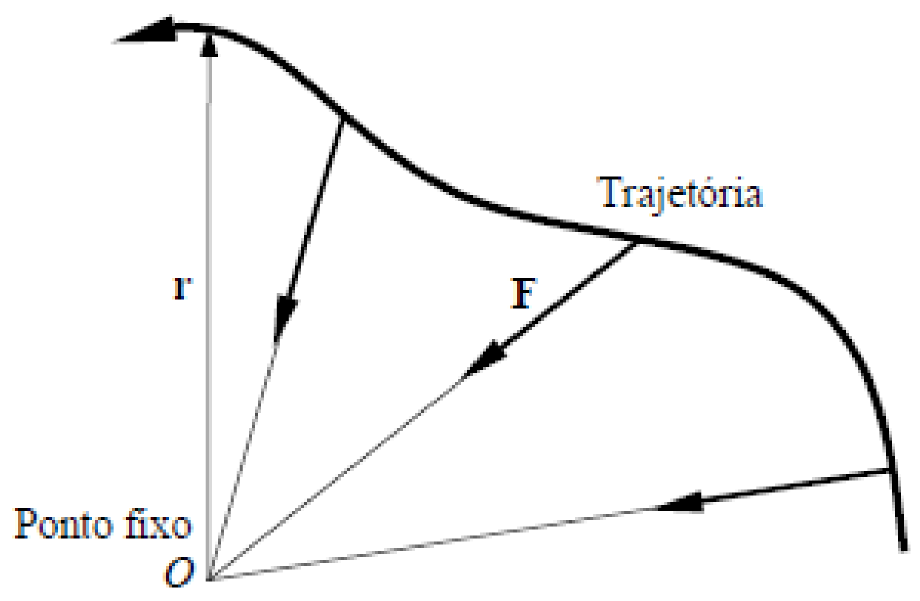


Fig. 2.1 – Trajetória da força central

$$\vec{F} = F(r)\frac{\vec{r}}{r}$$

em que F(r) é o módulo da força que é função do vetor distância.

Exercício de Aplicação

Dadas as massas da Terra, $m_{Terra} = 5.98 \times 10^{24}$ kg e da Lua, $m_{Lua} = 7.35 \times 10^{22}$ kg, calcule a força gravitacional que a Terra exerce sobre a Lua sabendo que a distancia média entre os corpos é 3.84×10^{8} m.

Combinando a segunda lei de Newton e a lei da gravitação universal encontramos a aceleração para uma massa devida a gravidade da Terra

$$ma_g = \frac{mGm_{Terra}}{R^2}$$

$$a_g = \frac{Gm_{Terra}}{R^2}$$

O parâmetro gravitacional, μ, é definido como sendo,

μ = GM, assim considerando a massa da Terra,

$$a_g = \frac{\mu_{Terra}}{R^2}$$

Em que:

μ_{Terra}: 3.986 x 10^{14} m^3s^{-2}

Exercício de aplicação:

1) Usando o raio equatorial 6.378 km obtenha a_g

a) na superfície da Terra

b) na altitude de 200km

c) na altitude de 500 km

d) na altitude de 1.000 km

2) Obtenha o comportamento a_g x h e analise o resultado

Leis de Conservação

Para alguns sistemas mecânicos propriedades tais como Momento e Energia permanecem constantes. Se uma certa propriedade ou quantidade permanece inalterável, a propriedade ou quantidade é CONSERVADA.

Quantidade de Movimento Linear

Num sistema isolado, isto é, um sistema em que não atuam forças externas ou que a resultante das forças externas seja nula, a quantidade de movimento total permanece constante

$$\vec{P} = \sum_i \vec{p}_i = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 + \ldots = constante$$

Quantidade de Movimento Angular

Se é nulo o momento resultante, em relação a um ponto fixo, de todas as forças externas aplicadas a um sistema, o momento angular total do sistema, em relação a esse ponto, será constante em módulo, direção e sentido.

Energia Mecânica

A energia mecânica total é dada pela soma da energia potencial, EP, e da energia cinética, EK., ou seja,

$$E = EP + EK$$

A gravidade é um campo conservativo, ou seja, um campo no qual a ENERGIA TOTAL É CONSERVADA.

Energia potencial é a energia de um objeto em um campo conservativo que depende inteiramente da sua posição.

$$EP = m\,a_g\,h$$

Em que

m	**:**	**Massa**
a_g	**:**	**Aceleração devida a gravidade**
h	**:**	**Altura**

Para o caso de um satélite artificial terrestre tem-se que a aceleração gravitacional varia, dependendo da distancia do objeto ao centro da Terra. Isto é obtido calculando o trabalho necessário para deslocar o satélite desde o centro da Terra a sua posição orbital.

Então a energia potencial orbital é dada por,

$$EP = -\frac{m\mu}{R}$$

Em que:

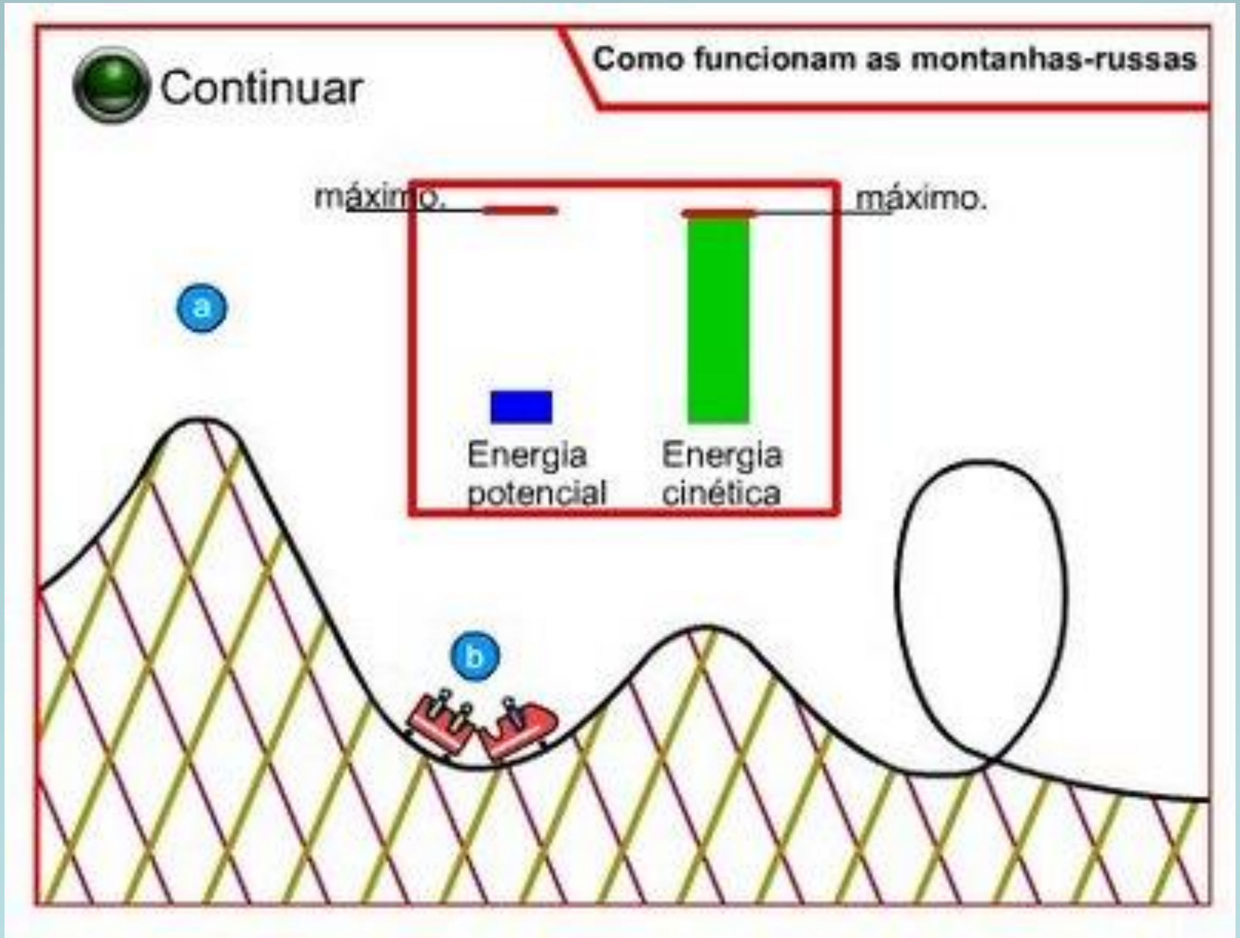
EP : Energia potencial orbital do satélite

m : Massa satélite

A energia do movimento ou cinética é apresentada em função da massa e velocidade do objeto.

$$EK = \frac{1}{2} m V^2$$

Se um satélite, em sua órbita, tem pontos próximos a Terra e outros afastados, a energia mecânica se mantem constante.

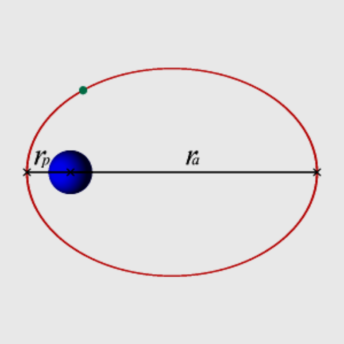

Continuar
Como funcionam as montanhas-russas
máximo.
máximo.
a
b
Energia potencial
Energia cinética

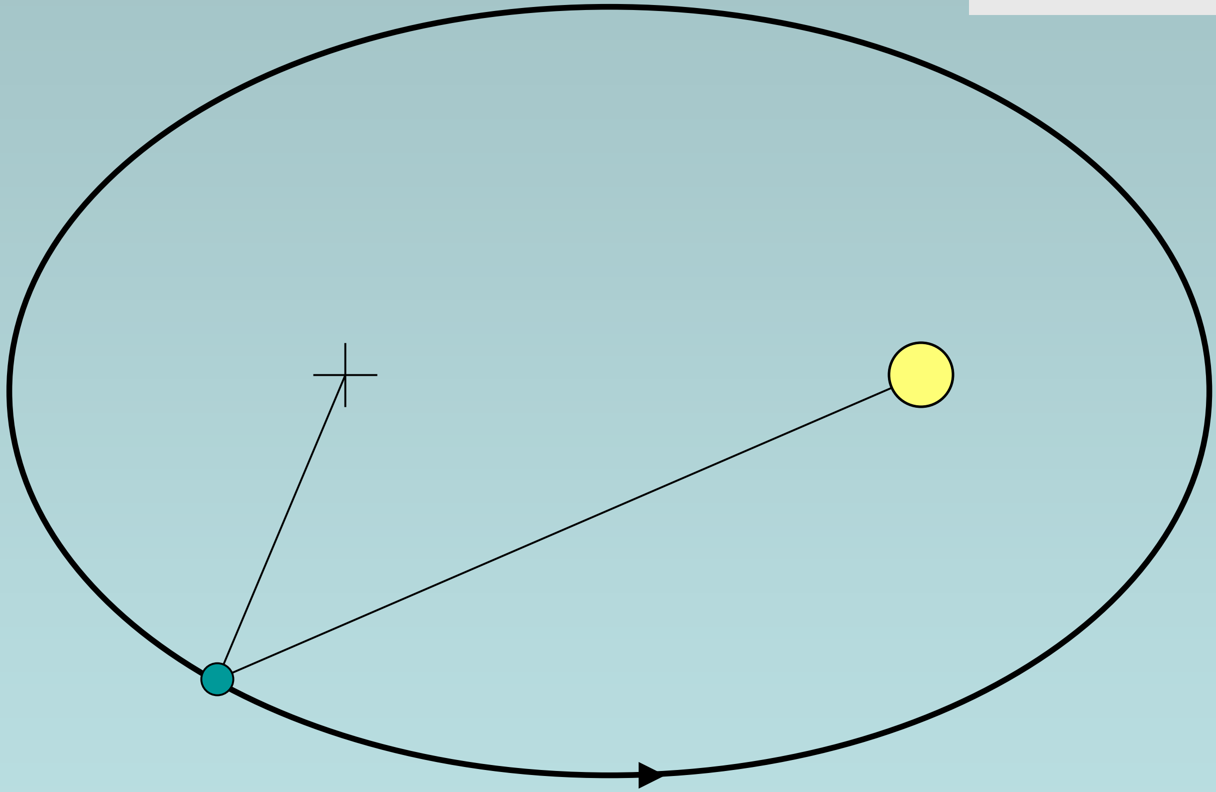
Das equações para a energia cinética e energia potencial podemos obter a expressão para a energia mecânica total de um satélite em órbita em função da massa e velocidade do objeto.

$$E = \frac{1}{2} m V^2 - \frac{m\mu}{R}$$

Leis de Kepler

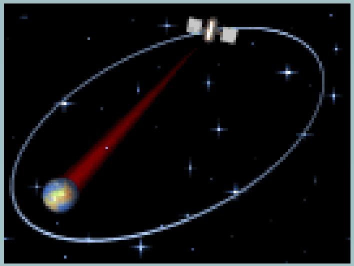
1ª Lei de Kepler

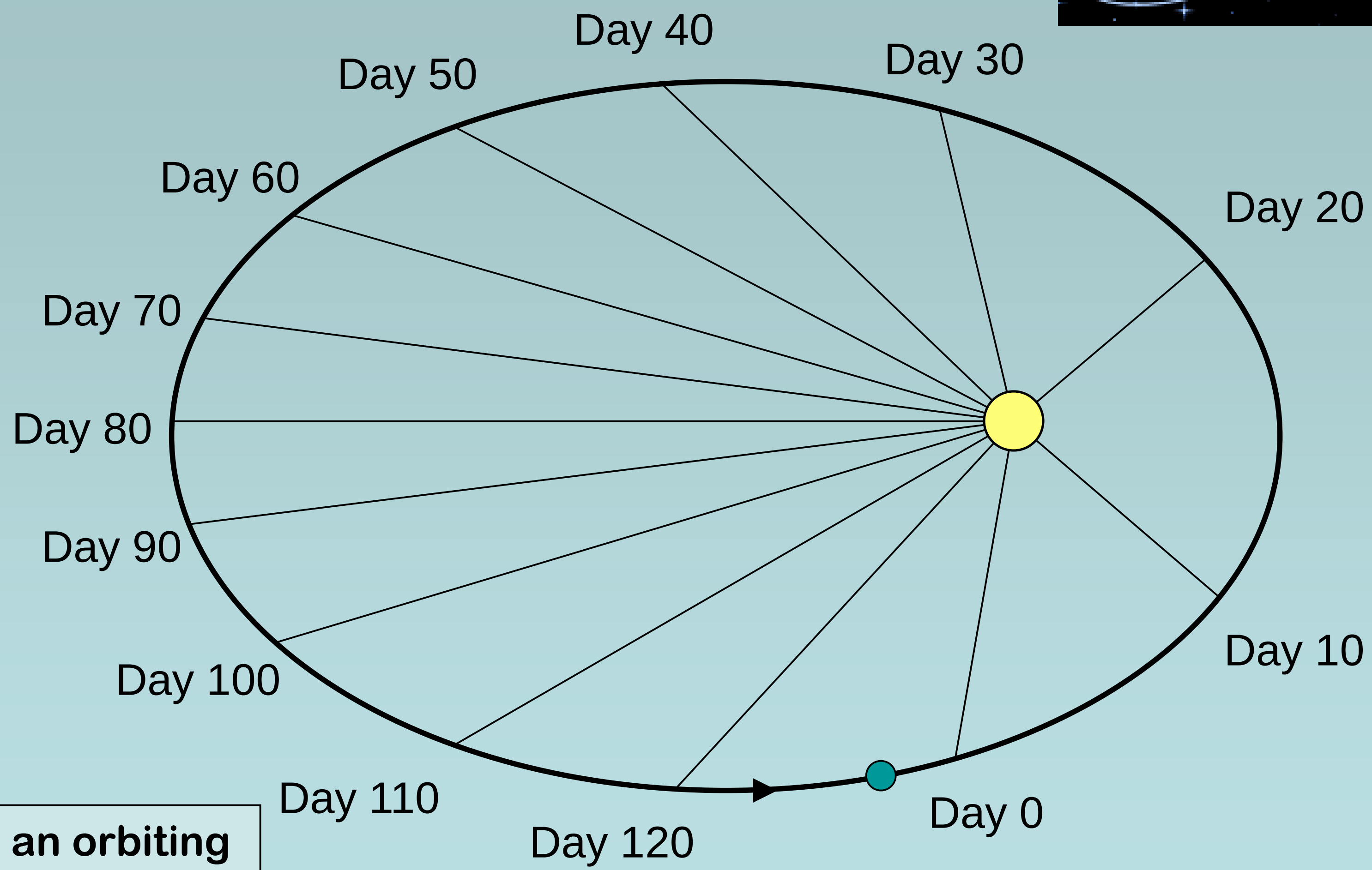




Every orbit is an ellipse with the Sun (main body) located at one foci.

2ª Lei de Kepler





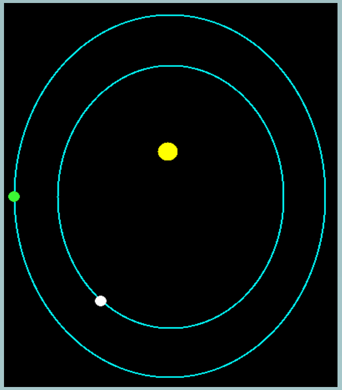
A line between an orbiting body and primary body sweeps out equal areas in equal intervals of time.

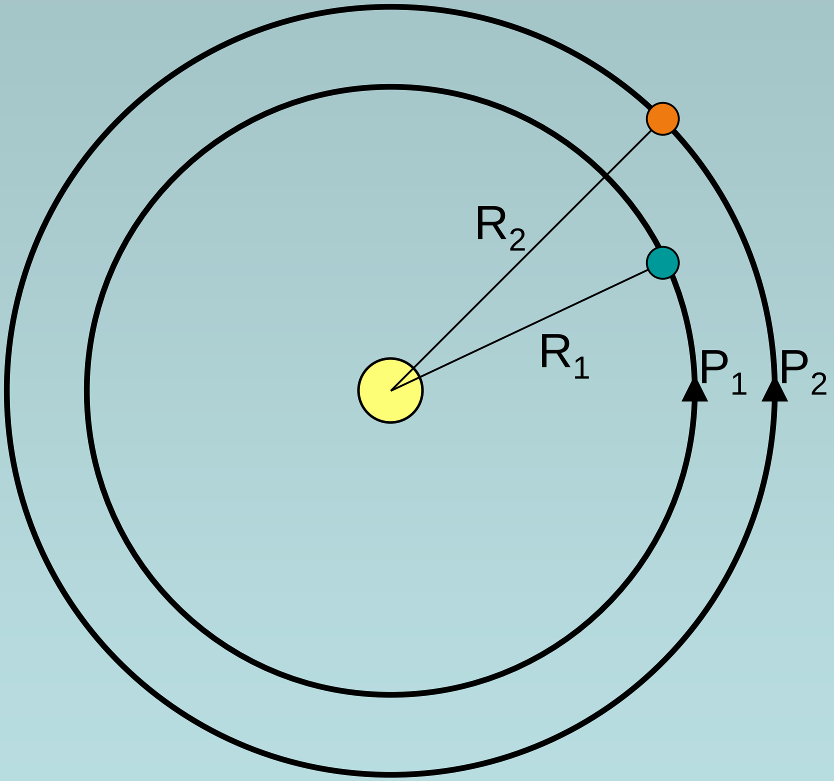
3ª Lei de Kepler

This defines the relationship of <u>Orbital Period</u> & <u>Average Radius</u> for any two bodies in orbit.

For a given body, the orbital period and average distance for the *<u>second</u>* orbiting body is:

$$P^2 = R^3$$





P = Orbital Period
R = Average Radius

EXAMPLE:

<u>Earth</u>

P = 1 Year

R = 1 AU

<u>Mars</u>

P = 1.88 Years

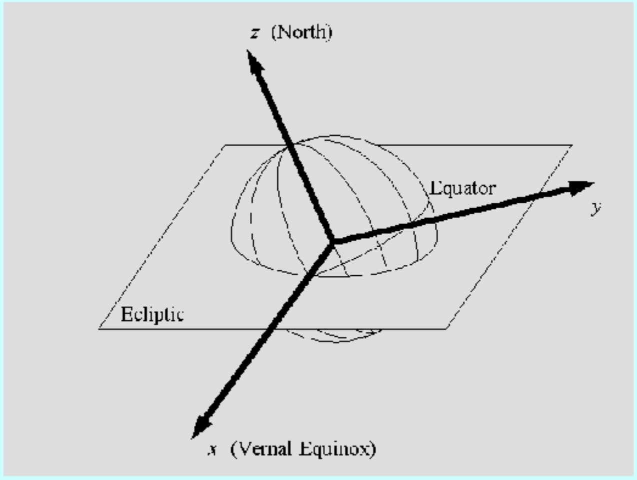
R = 1.52 AU

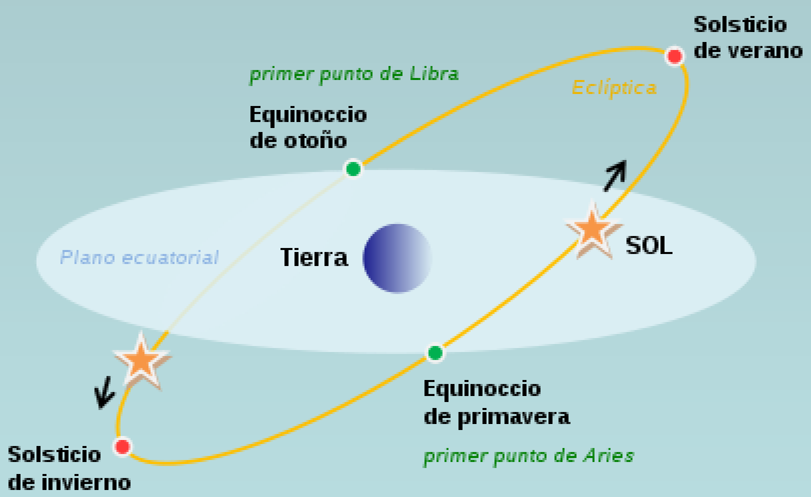
PROBLEMA DOS 2 CORPOS

SISTEMAS DE COORDENADAS

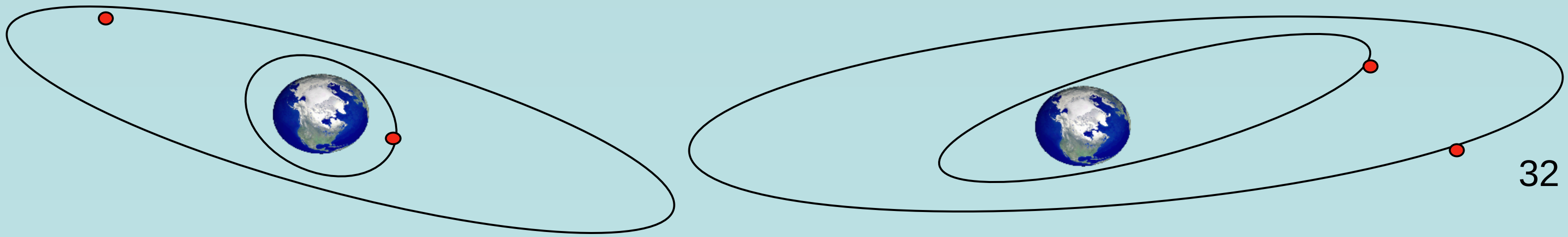
Leis de Newton válidas em sistemas de referência inerciais.

Para veículos espaciais orbitando a Terra: "Sistema de Coordenadas Equatorial Geocêntrico" o qual possui as seguintes características:





- **<u>Origem</u> o centro da Terra (daqui o nome geocêntrico).**
- **<u>Plano fundamental</u>, plano do equador terrestre. Polo norte perpendicular a esse plano.**
- **<u>Direção principal</u>, a direção do equinócio vernal encontrado o primeiro dia da primavera na direção desde a Terra ao Sol.**



EQUAÇÕES DE MOVIMENTO

Usando o sistema de coordenadas geocêntrico equatorial pode-se aplicar a segunda lei de Newton e examinar a forças externas que poderiam agir em um veículo espacial, como exemplo:

Gravidade da Terra.

Arrasto.

Empuxo.

Terceiro corpo (Sol, Lua, Planetas) etc.

Somando todas as forças,

$$\sum \vec{F}_{externa} = \vec{F}_{gravidade} + \vec{F}_{arrasto} + \vec{F}_{empuxo} + \vec{F}_{3^{o}\ corpo} + \vec{F}_{outras} = m\vec{a}$$

SIMPLIFICAÇÕES

Satélite - altura elevada $F_{arrasto} \longrightarrow 0$

Satélite não realiza manobras $F_{empuxo} \longrightarrow 0$

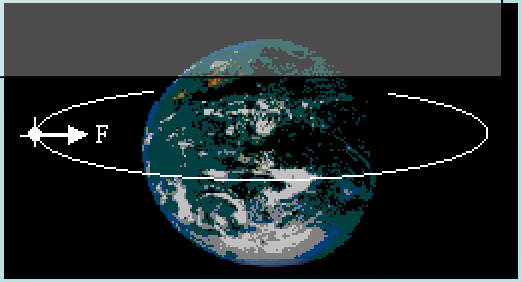
Satélite órbita próxima a Terra $F_{3^o\ corpo} \longrightarrow 0$

Radiação solar $\longrightarrow$ órbitas baixas

Massa Terra muito maior que a massa do satélite

$\longrightarrow \quad m_{Terra} >> m_{satélite}$

Após estas simplificações pode-se considerar a dinâmica do problema de dois corpos. E considerando o sistema inercial pode-se ainda determinar a equação do movimento para o problema de dois corpos, da seguinte maneira:

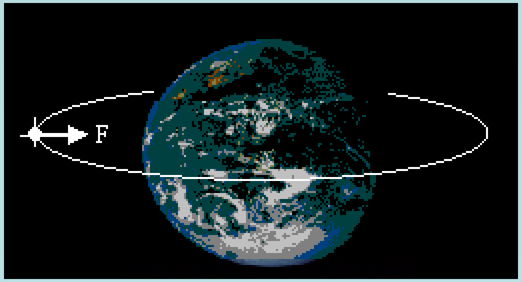


Das considerações anteriores

$$\sum \vec{F}_{externa} = \vec{F}_{gravidade} = m\vec{a}$$

Aplicando a lei de gravitação universal de Newton

$$\vec{F}_{gravidade} = -\frac{\mu m}{R^2}\frac{\vec{R}}{R}$$



E a equação de movimento é dada por:

$$\vec{F}_{gravidade} = -\frac{\mu m}{R^2}\frac{\vec{R}}{R} = m\vec{a} = m\ddot{\vec{R}}$$

Assim a equação de movimento do "PROBLEMA DOS 2 CORPOS" .

Parametro gravitacional

Vetor posição do satélite

$$\ddot{\vec{R}} + \frac{\mu}{R^2}\frac{\vec{R}}{R} = 0$$

Aceleração

Modulo do vetor posição do satélite

A solução da equação de movimento do problema de 2 corpos, fornece a magnitude do vetor posição:

$$R = \frac{p}{1 + e\cos\theta}$$

Em que:

R : Magnitude do vetor posição

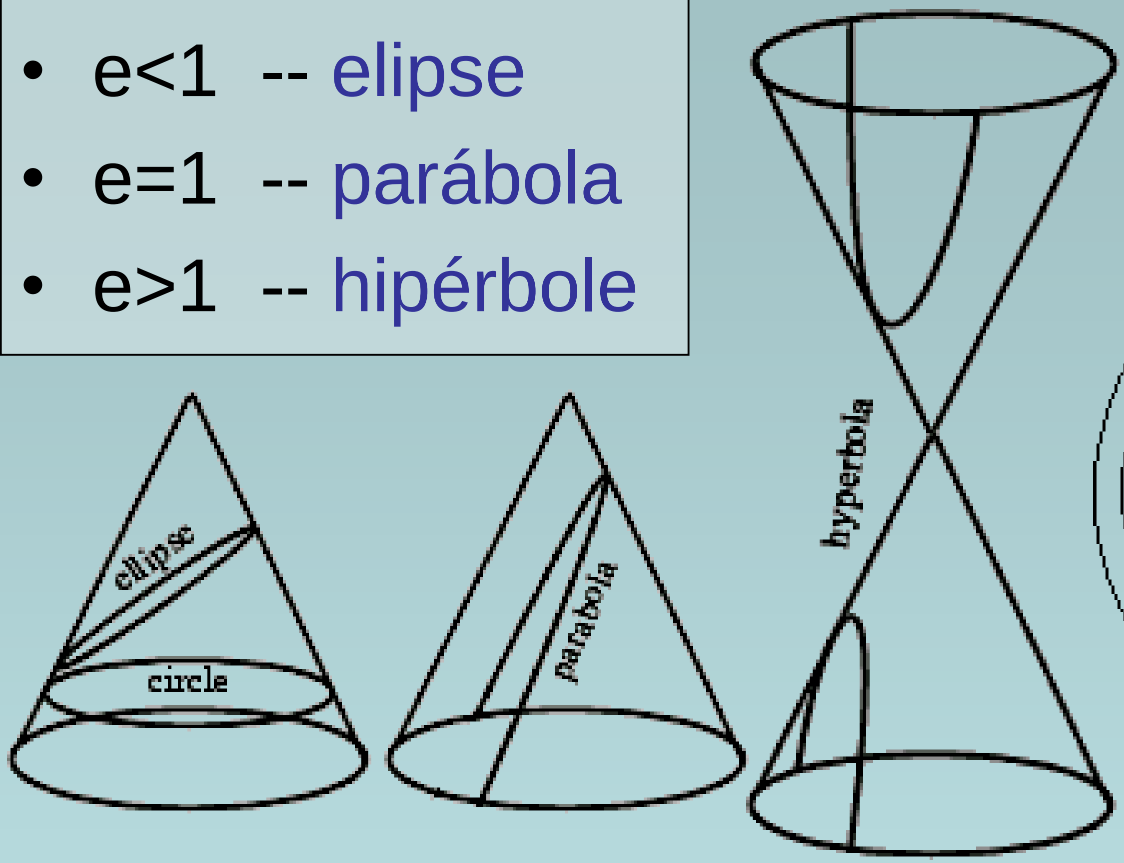
p : semi latus rectum da cônica

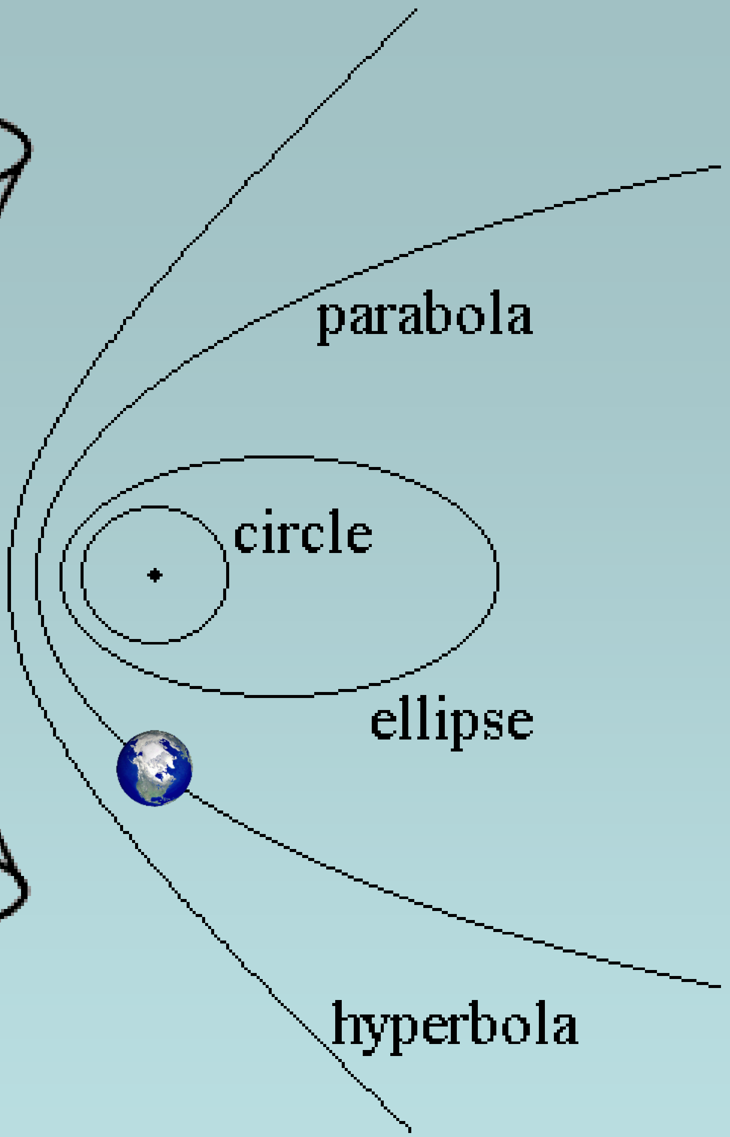
e : excentricidade da cônica

θ : Ângulo polar medido desde o eixo principal a R

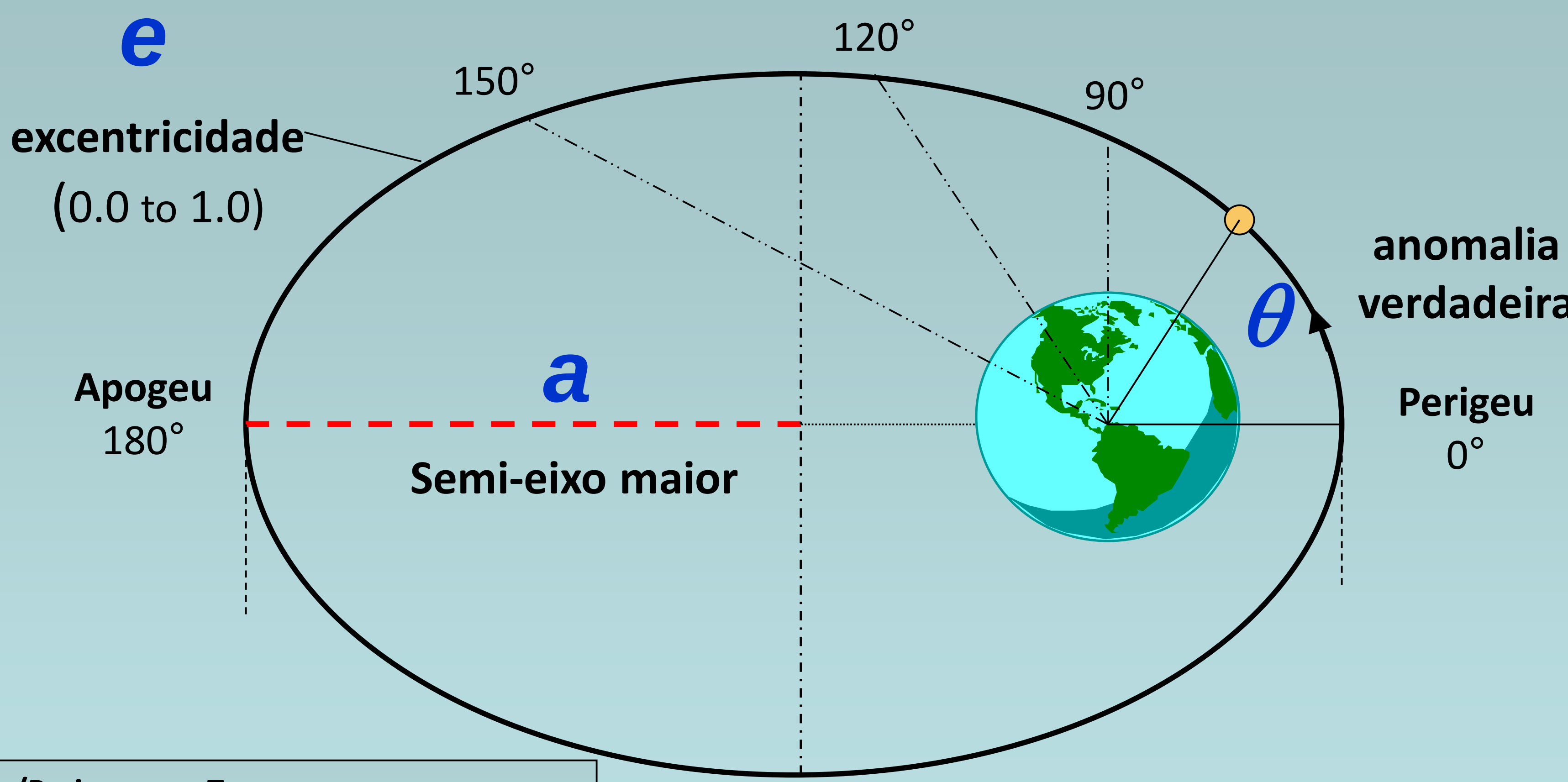
Esta equação descreve a localização do veículo espacial R em termos de duas constantes e do ângulo polar. Esta mesma equação também representa a "EQUAÇÃO DAS CÔNICAS". Assim, podemos obter circulo, elipse, parábola ou hipérbole.

- e=0 -- circulo
- e<1 -- elipse
- e=1 -- parábola
- e>1 -- hipérbole





Geometria da Órbita - Elipse



Apo/Peri geu – **Terra**

Apo/Peri lua – **Lua**

Apo/Peri helio – **Sol**

Apo/Peri apsides – **não especificado**

e define a forma da elipse

a define o tamanho da elipse

θ define o ângulo desde o perigeu

Algumas relações:

$$2a = R_a + R_p$$

$$2c = R_a - R_p$$

$$e = \frac{2c}{2a}$$

Em que:

2a : Eixo maior

2c : Distancia entre os focos

R_a : Raio do apoapsis

R_p : Raio do periapsis

Com os parâmetros geométricos anteriores, é possível obter a equação polar de uma cônica, $R = \dfrac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta}$

Em que

$$p = a(1-e^2)$$

EXERCÍCIO DE APLICAÇÃO:

Determine as distancias mais próximas e mais afastadas do corpo principal

Constantes do Movimento Orbital

Em um campo conservativo a energia mecânica e o momento são conservados. O movimento orbital acontece no campo conservativo gravitacional. Assim o movimento do veículo espacial conserva a energia mecânica e o momentum angular.

Energia Mecânica Especifica

Da energia mecânica:

$$E = \frac{1}{2} m V^2 - \frac{m\mu}{R}$$

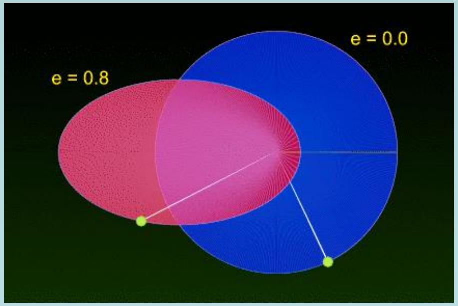
Para generalizar a equação anterior, define-se a ENERGIA MECANICA ESPECIFICA (ε) a qual não depende da massa:

$$\varepsilon \equiv \frac{E}{m}$$

Assim:

$$\varepsilon = \frac{1}{2} V^2 - \frac{\mu}{R}$$

A energia mecânica especifica é conservada, então deve ser a mesma ao longo da órbita. Quando veículo espacial se aproxima do ponto mais afastado do corpo principal (foco) ganha altitude, ou seja, ganha energia potencial e ao mesmo tempo perde energia cinética e quando se aproxima do ponto mais perto do foco perde altitude, ou seja, ganha energia cinética.



Da expressão para energia total específica do problema de dois corpos, tem-se:

$$V = \sqrt{2\left(\frac{\mu}{R} + \varepsilon\right)}$$

Aplicável posteriormente para mudanças de órbitas.

Existe uma relação entre a energia mecânica especifica e o semieixo maior da órbita:

$$\varepsilon = -\frac{\mu}{2a}$$

Tipo de órbita a partir da sinal da energia mecânica especifica:

- **ε<0 (negativo)-- órbita circular ou elíptica**
- **ε =0 -- órbita parabólica**
- **ε>0 (positivo) – órbita hiperbólica**

Dada a energia, podemos determinar o período orbital P, que é o tempo que demora o veículo espacial em completar uma volta ao redor da sua órbita:

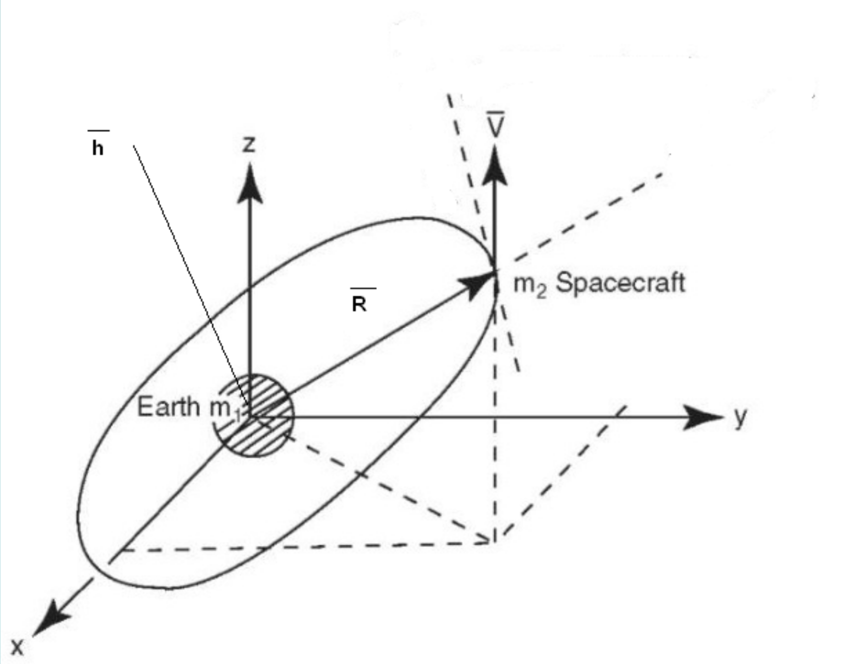
$$P = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{\mu}}$$

Momento Angular Especifico

momento angular especifico (h):

$$\vec{h} \equiv \frac{\vec{H}}{m}$$

$$\vec{h} = \vec{R} \times \vec{V}$$



O plano que contem ao vetor R e ao vetor V é o plano de órbita.

Exercícios

1) **Dadas as massas da Terra, $m_{Terra} = 5.98 \times 10^{24}$ kg e da Lua, $m_{Lua} = 7.35 \times 10^{22}$ kg, calcule a força gravitacional que a Terra exerce sobre a Lua sabendo que a distancia média entre os corpos é 3.84×10^{8} m.**
2) **Usando o raio equatorial 6.378 km obtenha a_g**

a) **na superfície da Terra**

b) **na altitude de 200km**

c) na altitude de 500 km

d) Na altitude de 1.000 km

3) Obtenha o comportamento a_g x h e analise o resultado. Utilize o recurso gráfico do MatLab.

4) Utilizando a solução da equação para o raio orbital de uma cônica obtenha a equação geral do raio orbital para as distancias mais próximas, r_p, e mais afastadas, r_a, do corpo principal

5) Obtenha o perigeu e o apogeu da órbita do satélite CBERS 1, 2 e 2B e do SCD1 e 2. Faça uma pesquisa na internet sobre sua excentricidade, e, e semieixo maior, a, no lançamento e que o sistema dinâmico em que ele está sujeito é apenas o problema de dois corpos, ou seja, que a e e se mantenha constante.

6) Obtenha o período orbital para dos dados do exercício 5.

7) Obtenha a equação geral da velocidade do perigeu, V_p, e do apogeu, V_a, de um satélite em função da excentricidade e semieixo maior. Obtenha também para uma órbita circular.

8) Obtenha V_p e V_a do satélite CBERS 1, 2 e 2B e do SCD1 e 2. Compare o resultado com a velocidade de um satélite geoestacionário (pesquise a velocidade de um satélite geoestacionário).

9) Obtenha o comportamento da velocidade, V, (km/s) e do período (min) orbital, P, em função da altitude, h, para um satélite em órbita circular considerando as órbitas: LEO e MEO (Discutir o resultado). Utilize recurso gráfico do MatLab.

a) LEO – h entre 200 km e 2.000 km

b) MEO – h entre 15.000km e 25.000 km