Aula 18 (9/Mar)

No aula de hoje:

* Revisão da aula anterior.
* Exemplos importantes: $\{|\vec{r}\rangle\}$ e $\{|\vec{p}\rangle\}$, $\hat{\vec{R}}$ e $\hat{\vec{P}}$.
* Produto tensorial.

Revisão da aula anterior

* Aula 16:
  - Observáveis e C.C.O.C.s.
  - Exemplos importantes: $\{|\vec{r}\rangle\}$ e $\{|\vec{p}\rangle\}$, $\hat{\vec{R}}$ e $\hat{\vec{P}}$.
* Aula 17: resolução exercícios Folha 4.

4.5 Observáveis

4.5.5) Exemplo importante

Vamos agora olhar para os operadores (

vectoriais) $\hat{\vec{R}} \equiv (\hat{X}, \hat{Y}, \hat{Z})$ e $\hat{\vec{P}} \equiv (\hat{P}_x, \hat{P}_y, \hat{P}_z)$ e construir C.C.O.Cs.

Mas antes vamos olhar duas representações: representação $\{|\vec{r}\rangle\}$ e $\{|\vec{p}\rangle\}$.

4.5.5.1) Representações $\{|\vec{r}\rangle\}$ e $\{|\vec{p}\rangle\}$

Vamos considerar espaço $\mathcal{E}_r$ isomórfico a $\mathcal{F}$, (i.e partícula sem spin em 3D).

Anteriormente [4.2.2.1) e 4.2.2.2)] vimos duas "bases" de $\mathcal{F}$ compostas por funções $\notin \mathcal{F}$:

$$\xi_{\vec{r}_0}(\vec{r}) = \delta(\vec{r} - \vec{r}_0)$$

$$v_{\vec{p}_0}(\vec{r}) = \frac{e^{i\vec{p}_0 \cdot \vec{r}/\hbar}}{(2\pi\hbar)^{3/2}}$$

(pois não são L^2), mas podemos expandir qq $\psi \in \mathcal{F}$ em termos de $\xi_{\vec{r}_0}$ ou $v_{\vec{p}_0} \Rightarrow$ formam base de $\mathcal{F}$.

$$\xi_{\vec{r}_0}(\vec{r}) = \delta(\vec{r}-\vec{r}_0) \longrightarrow |\vec{r}_0\rangle \longrightarrow \text{repres. } \{|\vec{r}_0\rangle\}$$

$$v_{\vec{p}_0}(\vec{r}) = \frac{e^{i\vec{p}_0\cdot\vec{r}/\hbar}}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \longrightarrow |\vec{p}_0\rangle \longrightarrow \text{repres. } \{|\vec{p}_0\rangle\}$$

Nota: Usar ket $|\vec{r}_0\rangle$ e $|\vec{p}_0\rangle$ é abuso de notação pois não pertencem a $\mathcal{E}$.

Ortonormalização

$$\langle \vec{r}_0 | \vec{r}_0' \rangle = \int d^3\vec{r}\, \xi^*_{\vec{r}_0}(\vec{r})\, \xi_{\vec{r}_0'}(\vec{r}) = \int d^3\vec{r}\, \delta(\vec{r}-\vec{r}_0)\, \delta(\vec{r}-\vec{r}_0') = \delta(\vec{r}_0-\vec{r}_0')$$

$$\langle \vec{p}_0 | \vec{p}_0' \rangle = \int d^3\vec{r}\, v^*_{\vec{p}_0}(\vec{r})\, v_{\vec{p}_0'}(\vec{r}) = \int \frac{d^3\vec{r}}{(2\pi\hbar)^3}\, e^{i(\vec{p}_0-\vec{p}_0')\cdot\vec{r}} = \delta(\vec{p}_0-\vec{p}_0')$$

Relação fecho

Por analogia com 44.4.1) temos

$$\boxed{\int d^3\vec{r}_0\, |\vec{r}_0\rangle\langle \vec{r}_0| = \hat{\mathbb{1}}}$$

$$\boxed{\int d\vec{p}_0\, |\vec{p}_0\rangle\langle \vec{p}_0| = \hat{\mathbb{1}}}$$

$\Rightarrow \{|\vec{r}_0\rangle\}$ e $\{|\vec{p}_0\rangle\}$ são representação do espaço estados $\mathcal{E}_r$.

<u>Coeficientes de expansão de ψ</u>

$$|\psi\rangle = \int d^3\vec{r}_0\, |\vec{r}_0\rangle\langle\vec{r}_0|\psi\rangle = \int d^3\vec{r}_0 \Bigg[\underbrace{\int d^3\vec{r}\, \overbrace{\xi^*_{\vec{r}_0}(\vec{r})}^{\delta(\vec{r}_0-\vec{r})}\, \psi(\vec{r})}_{\psi(\vec{r}_0)}\Bigg] |\vec{r}_0\rangle$$

$$= \int d^3\vec{r}_0\, \psi(\vec{r}_0)\, |\vec{r}_0\rangle$$

$$|\psi\rangle = \int d^3 p_0\, |\vec{p}_0\rangle\langle\vec{p}_0|\psi\rangle = \int d^3\vec{r}_0 \Bigg[\underbrace{\int d^3\vec{r}\cdot v^*_{\vec{p}_0}(\vec{r})\cdot \psi(\vec{r})}_{\frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}}\int d^3\vec{r}\, e^{i\vec{p}_0\cdot\vec{r}}\, \psi(\vec{r}) = \hat{\psi}(\vec{p}_0)}\Bigg] |\vec{p}_0\rangle$$

$$= \int d^3\vec{p}_0\, \hat{\psi}(\vec{p}_0)\cdot |\vec{p}_0\rangle$$

$\psi(\vec{r}_0)$ é componente do ket $|\vec{r}_0\rangle$ na base $\{|\vec{r}_0\rangle\}$.

$\hat{\psi}(\vec{p}_0)$ é componente do ket $|\vec{p}_0\rangle$ na base $\{|\vec{p}_0\rangle\}$.

Se usarmos $|\psi\rangle = |\vec{p}_0\rangle$ teremos que

$$\langle\vec{r}_0|\vec{p}_0\rangle = \int d^3\vec{r}\, \xi^*_{\vec{r}_0}(\vec{r})\, v_{\vec{p}_0}(\vec{r})$$

$$= \int d^3\vec{x}\ \delta(\vec{x}-\vec{x}_0)\ \frac{e^{i\vec{p}_0\cdot\vec{x}}}{(2\pi\hbar)^{3/2}}$$

$$= \frac{e^{i\vec{p}_0\cdot\vec{x}_0}}{(2\pi\hbar)^{3/2}}$$

Produto escalar

$$\langle\varphi|\psi\rangle = \int d^3\vec{x}_0\ \underbrace{\langle\varphi|\vec{x}_0\rangle}_{\varphi(\vec{x}_0)^*}\underbrace{\langle\vec{x}_0|\psi\rangle}_{\psi(\vec{x}_0)} = \int d^3\vec{x}_0\ \varphi^*(\vec{x}_0)\,\psi(\vec{x}_0)$$

$$\langle\varphi|\psi\rangle = \int d^3\vec{p}_0\ \underbrace{\langle\varphi|\vec{p}_0\rangle}_{\widehat{\varphi(\vec{p}_0)}^*}\underbrace{\langle\vec{p}_0|\psi\rangle}_{\widehat{\psi(\vec{p}_0)}} = \int d^3\vec{p}_0\ \widehat{\varphi(\vec{p}_0)}^*\ \widehat{\psi(\vec{p}_0)}$$

Mudança entre repres. $\{|\vec{x}_0\rangle\}$ e repres. $\{|\vec{p}_0\rangle\}$

$$\psi(\vec{x}_0) = \langle\vec{x}_0|\overset{\hat{1}}{}\psi\rangle = \int d^3\vec{p}_0\ \langle\vec{x}_0|\vec{p}_0\rangle\langle\vec{p}_0|\psi\rangle$$

$$= \int d^3\vec{p}_0\ \frac{e^{i\vec{p}_0\cdot\vec{x}_0}}{(2\pi\hbar)^{3/2}}\cdot\widehat{\psi(\vec{p}_0)}$$

$$\widehat{\psi(\vec{p}_0)} = \langle\vec{p}_0|\overset{\hat{1}}{}\psi\rangle = \int d^3\vec{x}_0\ \langle\vec{p}_0|\vec{x}_0\rangle\langle\vec{x}_0|\psi\rangle$$

$$= \int d^3\vec{r}_0 \; \frac{e^{-i\vec{p}_0\cdot\vec{r}_0}}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \; \Psi(\vec{r}_0)$$

e para operadores temos

$$A(\vec{p}\,',\vec{p}) = \langle \vec{p}\,'|\overset{\mathbb{1}}{\,}\hat{A}\overset{\mathbb{1}}{\,}|\vec{p}\rangle = \int d^3\vec{r}\,' d^3\vec{r} \, \langle \vec{p}\,'|\vec{r}\,'\rangle\langle\vec{r}\,'|A|\vec{r}\rangle\langle\vec{r}|\vec{p}\rangle$$

$$= \frac{1}{(2\pi\hbar)^3}\int d^3\vec{r}\,' d^3\vec{r} \; e^{i(\vec{p}\,'\cdot\vec{r}\,' - \vec{p}\cdot\vec{r})} \cdot A(\vec{r}\,',\vec{r})$$

Em resumo,

	Representação $\|\vec{p}\rangle$	Representação $\|\vec{x}\rangle$
Expansão da Função de Onda	$\|\Psi\rangle = \int d\vec{p}\;\tilde{\Psi}(\vec{p})\|\vec{p}\rangle$	$\|\Psi\rangle = \int d\vec{x}_0\Psi(\vec{x}_0)\|\vec{x}_0\rangle$
Relação de Ortonormalização	$\langle\vec{p}\|\vec{p}\,'\rangle = \delta(\vec{p}-\vec{p}\,')$	$\langle\vec{x}_0\|\vec{x}_0\,'\rangle = \delta(\vec{x}_0-\vec{x}_0\,')$
Projecção da Função de Onda	$\langle\vec{p}\|\Psi\rangle = \tilde{\Psi}(\vec{p})$	$\langle\vec{x}_0\|\Psi\rangle = \Psi(\vec{x}_0)$
Produto escalar em componentes	$\langle\Phi\|\Psi\rangle = \int d\vec{p}\tilde{\Phi}^*(\vec{p})\tilde{\Psi}(\vec{p})$	$\langle\Phi\|\Psi\rangle = \int d\vec{x}_0\Phi^*(\vec{x}_0)\Psi(\vec{x}_0)$
Relação de Fecho	$\int d\vec{p}\|\vec{p}\rangle\langle\vec{p}\| = \hat{\mathbf{1}}$	$\int d\vec{x}_0\|\vec{x}_0\rangle\langle\vec{x}_0\| = \hat{\mathbf{1}}$

4.5.5.2) Operadores $\hat{\vec{R}}$ e $\hat{\vec{P}}$

Por definição $|\phi\rangle = \hat{X}|\Psi\rangle$ na base $\{|\vec{r}\rangle\}$

$$\langle \vec{r} | \phi \rangle = \phi(\vec{r}) = \langle \vec{r} | \hat{X} | \psi \rangle = x \langle \vec{r} | \psi \rangle = x \cdot \psi(\vec{r}).$$

Da mesma forma $|\chi\rangle = \hat{P}_x |\psi\rangle$ na base $\{|\vec{p}\rangle\}$, $\langle \vec{p} | \chi \rangle = \chi(\vec{p}) = \langle \vec{p} | \hat{P}_x | \psi \rangle = p_x \langle \vec{p} | \psi \rangle = p_x \hat{\psi}(\vec{p})$

e assim podemos escrever

$$\left.\begin{aligned} \langle \vec{r} | \hat{X} | \psi \rangle &= x \langle \vec{r} | \psi \rangle \\ \langle \vec{r} | \hat{Y} | \psi \rangle &= y \langle \vec{r} | \psi \rangle \\ \langle \vec{r} | \hat{Z} | \psi \rangle &= z \langle \vec{r} | \psi \rangle \end{aligned}\right. \Rightarrow \left\{\begin{aligned} \hat{X} |\vec{r}\rangle &= x |\vec{r}\rangle \\ \hat{Y} |\vec{r}\rangle &= y |\vec{r}\rangle \\ \hat{Z} |\vec{r}\rangle &= z |\vec{r}\rangle \end{aligned}\right.$$

$$\left.\begin{aligned} \langle \vec{p} | \hat{P}_x | \psi \rangle &= p_x \langle \vec{p} | \psi \rangle \\ \langle \vec{p} | \hat{P}_y | \psi \rangle &= p_y \langle \vec{p} | \psi \rangle \\ \langle \vec{p} | \hat{P}_z | \psi \rangle &= p_z \langle \vec{p} | \psi \rangle \end{aligned}\right. \Rightarrow \left\{\begin{aligned} \hat{P}_x |\vec{p}\rangle &= p_x |\vec{p}\rangle \\ \hat{P}_y |\vec{p}\rangle &= p_y |\vec{p}\rangle \\ \hat{P}_z |\vec{p}\rangle &= p_z |\vec{p}\rangle \end{aligned}\right.$$

Mas e, por exemplo, $\hat{P}_x |\vec{r}\rangle$?

$$\langle \vec{r} | \hat{P}_x | \psi \rangle = \int d^3\vec{p} \, \langle \vec{r} | \vec{p} \rangle \overbrace{\langle \vec{p} | \hat{P}_x | \psi \rangle}^{p_x \langle \vec{p} | \psi \rangle}$$

$$= \int d^3\vec{p} \, \underbrace{\frac{e^{i\vec{p}\cdot\vec{r}/\hbar}}{(2\pi\hbar)^{3/2}} p_x}_{-i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \frac{e^{i\vec{p}\cdot\vec{r}/\hbar}}{(2\pi\hbar)^{3/2}}} \cdot \hat{\psi}(\vec{p})$$

$$= -i\hbar \frac{d}{dx} \int d^3\vec{p}\ \frac{e^{i\vec{p}\cdot\vec{r}/\hbar}}{(\quad)^{3/2}}\ \psi(\vec{p})$$

$$= \left(-i\hbar \frac{d}{dx}\right) \int d^3\vec{p}\ \langle \vec{r}|\vec{p}\rangle\langle\vec{p}|\psi\rangle$$

$$= \left(-i\hbar \frac{d}{dx}\right) \langle \vec{r}|\psi\rangle$$

e assim em $\{|\vec{r}\rangle\}$

$$\boxed{\langle \vec{r}|\hat{\vec{P}}|\psi\rangle = -i\hbar\vec{\nabla}\langle\vec{r}|\psi\rangle}$$

Analogamente podemos mostrar

$$\boxed{\langle \vec{p}|\hat{\vec{R}}|\psi\rangle = +i\hbar\vec{\nabla}_{\vec{p}}\langle\vec{p}|\psi\rangle}$$

onde $\vec{\nabla}_{\vec{p}} = \left(\frac{\partial}{\partial p_x}, \frac{\partial}{\partial p_y}, \frac{\partial}{\partial p_z}\right)$.

__Nota:__ Podemos escrever o Hamiltoniano $\hat{H} = \frac{\hat{\vec{P}}^2}{2m} + V(\hat{\vec{R}})$ em ambas representações

$$|\vec{r}\rangle \longrightarrow \langle\vec{r}|\hat{H}|\psi\rangle = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\vec{\nabla}^2 + V(\vec{r})\right]\psi(\vec{r})$$

$$|\vec{p}\rangle \longrightarrow \langle\vec{p}|\hat{H}|\psi\rangle = \left[-\frac{\vec{p}^2}{2m} + V(+i\hbar\vec{\nabla}_{\vec{p}})\right]\widehat{\psi(\vec{p})}$$

O elemento de matriz de $\hat{P}_x$ é

$$\langle \varphi | \hat{P}_x | \psi \rangle = \int d^3\vec{r} \, \langle \varphi | \vec{r} \rangle \langle \vec{r} | \psi \rangle$$
$$= \int d^3\vec{r} \; \varphi(\vec{r})^* \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \right) \psi(\vec{r})$$

e o comutador $[\hat{X}, \hat{P}_x]$ é dado por

$$\langle \vec{r} | [\hat{X}, \hat{P}_x] | \psi \rangle = \langle \vec{r} | \hat{X}\hat{P}_x - \hat{P}_x \hat{X} | \psi \rangle$$
$$= x \langle \vec{r} | \hat{P}_x | \psi \rangle - \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \right) \langle \vec{r} | \hat{X} | \psi \rangle$$
$$= x \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \right) \psi(\vec{r}) + \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \right) x \, \psi(\vec{r})$$
$$= -i\hbar \left[\cancel{x \frac{\partial \psi}{\partial x}(\vec{r})} - \psi(\vec{r}) - \cancel{x \frac{\partial \psi(\vec{r})}{\partial x}} \right]$$
$$= i\hbar \, . \, \psi(\vec{r})$$

e concluímos $[\hat{X}, \hat{P}_x] = i\hbar \, \hat{\mathbb{1}}$. Podemos mostrar $(i = 1, 2, 3)$

$$\boxed{\begin{aligned} [\hat{R}_i, \hat{R}_j] &= 0 \\ [\hat{P}_i, \hat{P}_j] &= 0 \\ [\hat{R}_i, \hat{P}_j] &= i\hbar \, \delta_{ij} \hat{\mathbb{1}} \end{aligned}} \Rightarrow$$

Relações de comutação canônicas.

Podemos mostrar que $\hat{\vec{R}}$ e $\hat{\vec{P}}$ são hermíticos

$$\langle\varphi|\hat{X}|\varphi\rangle = \int d^3\vec{r}\ \varphi^*(\vec{r}) \times \varphi(\vec{r}) = \left[\int d^3\vec{r}\ \varphi^*(\vec{r}).x.\varphi(\vec{r})\right]^*$$

$$= \langle\varphi|\hat{X}|\varphi\rangle^* \Rightarrow \hat{X}^+ = \hat{X}$$

$$\langle\varphi|\hat{A}|\varphi\rangle = \langle\varphi|\hat{A}^+|\varphi\rangle^*$$

$$\langle\varphi|\hat{P}_x|\varphi\rangle = \int d\vec{p}\ \varphi^*(\vec{p})\, p_x\, \varphi(\vec{p}) = \dots = \langle\varphi|\hat{P}_x|\varphi\rangle^*$$

$$\Rightarrow \hat{P}_x^+ = \hat{P}_x$$

<u>Exercício</u>: Provar $\hat{P}_x^+ = \hat{P}_x$ usando $\{|\vec{r}\rangle\}$.

Como $\{|\vec{r}\rangle\}$ e $\{|\vec{p}\rangle\}$ têm $\hat{\vec{R}}$ e $\hat{\vec{P}}$ diagonais (e como são op. hermíticos), $\hat{\vec{R}}$ e $\hat{\vec{P}}$ são <u>observáveis</u>.

↳ Poderemos formar CCOC com eles. Por estarmos em 3D

↳ $\{\hat{X}, \hat{Y}, \hat{Z}\}$ formam CCOC

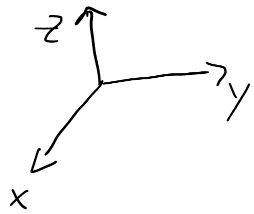
↳ $\{\hat{P}_x, \hat{P}_y, \hat{P}_z\}$ " "

↳ $\{\hat{X}, \hat{P}_y, \hat{P}_z\}$ " "

mas $\{\underbrace{\hat{X}, \hat{P}_x}, \hat{P}_y\}$ não formam ECOC.

4.6 Produto tensorial de espaços de estados

$\mathcal{E}_x \longleftrightarrow \mathcal{E}_{\vec{r}} \implies \mathcal{E}_{\vec{r}} = \mathcal{E}_x \otimes \mathcal{E}_y \otimes \mathcal{E}_z$



Partícula com spin em 3D $\quad \mathcal{E} = \mathcal{E}_{\vec{r}} \otimes \mathcal{E}_S$

Caso de duas partículas $\quad \mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2$

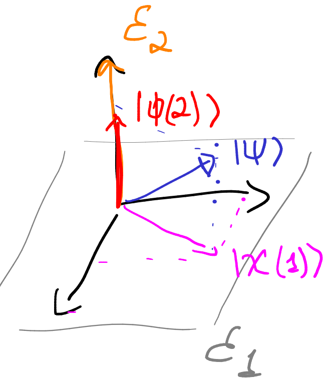
4.6.1) Definição e propriedades

Consideremos dois espaços de estados $\mathcal{E}_1$ e $\mathcal{E}_2$ com dimensão N_1 e N_2. Associaremos índice (1) e (2) a vectores e operadores vivendo em cada um desses espaços.

Definição: Produto tensorial entre $\mathcal{E}_1$ e $\mathcal{E}_2$ é notado por

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2$$

e vectores $|\chi(1)\rangle \in \mathcal{E}_1$ e $|\phi(2)\rangle \in \mathcal{E}_2$ podemos combiná-los



$$|\psi\rangle = |\chi(1)\rangle \otimes |\phi(2)\rangle$$

$$= |\phi(2)\rangle \otimes |\chi(1)\rangle$$

Nota: O produto tensorial de $|\chi(1)\rangle$ e $|\phi(2)\rangle$ é

↳ linear nos dois kets

$$[\lambda|\chi(1)\rangle] \otimes |\phi(2)\rangle = \lambda[|\chi(1)\rangle \otimes |\phi(2)\rangle]$$

$$|\chi(1)\rangle \otimes [\lambda|\phi(2)\rangle] = \lambda[|\chi(1)\rangle \otimes |\phi(2)\rangle]$$

↳ distributivo na adicção vectores

$$|\chi(1)\rangle \otimes [|\phi_a(2)\rangle + |\phi_b(2)\rangle] =$$

$$= |\chi(1)\rangle \otimes |\phi_a(2)\rangle + |\chi(1)\rangle \otimes |\phi_b(2)\rangle$$

$\hookrightarrow$ se base $\{|u_i(1)\rangle\} \in \mathcal{E}_1$ e $\{|v_\ell(2)\rangle\} \in \mathcal{E}_2$ então $\{|u_i(1)\rangle \otimes |v_\ell(2)\rangle\} \in \mathcal{E}$ será base de $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2$.

Vectores em $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2$

O vector mais geral é

$$|\psi\rangle = \sum_{i,j} c_{i,j} |u_i(1)\rangle \otimes |v_j(2)\rangle$$

Mas há vectores mais simples, que são produtos tensoriais de $|\chi(1)\rangle = \sum_i a_i |u_i(1)\rangle \in \mathcal{E}_1$ e $|\phi(2)\rangle = \sum_j b_j |v_j(2)\rangle \in \mathcal{E}_2$,

$$|\psi\rangle = |\chi(1)\rangle \otimes |\phi(2)\rangle$$

$$= \sum_{i,j} a_i b_j \, |u_i(1)\rangle \otimes |v_j(2)\rangle$$

Nota: Usaremos notação $|\chi(1)\,\phi(2)\rangle = |\chi(1)\rangle \otimes |\phi(2)\rangle$.

Produto escalar em $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2$

Dois kets de $\mathcal{E}$ $|\chi(1)\,\phi(2)\rangle$ e $|\chi'(1)\,\phi'(2)\rangle$ têm produto escalar

$$\langle \chi(1)\,\phi(2) | \chi'(1)\,\phi'(2)\rangle = \langle \chi(1)|\chi'(1)\rangle\langle\phi(2)|\phi'(2)\rangle$$

Nota: A base $\{|u_i(1)\,v_j(2)\rangle\}$ é ortonormal se

$$\langle u_i(1)\,v_j(2) | u_{i'}(1)\,v_{j'}(2)\rangle = \delta_{ii'}\,\delta_{jj'}$$

4.6.2) Operadores em $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2$

Seja $\hat{A}(1)$ definido $\mathcal{E}_1$. Então $\hat{\tilde{A}}(1)$ é a extensão de $\hat{A}(1)$ para $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2$

$$\hat{\tilde{A}}(1)\left[|\chi(1)\rangle \otimes |\phi(2)\rangle\right] = \left[\hat{A}(1)|\chi(1)\rangle\right] \otimes |\phi(2)\rangle$$

Podemos escrever extensão $\hat{\tilde{A}}(1)$ como

$$\hat{\tilde{A}}(1) = \hat{A}(1) \otimes \hat{\mathbb{1}}(2)$$

$$\hat{\tilde{B}}(2) = \hat{\mathbb{1}}(1) \otimes \hat{B}(2)$$

bem como

$$\hat{C} \equiv \hat{A}(1) \otimes \hat{B}(2) = \overbrace{\hat{\tilde{A}}(1)}^{\hat{A}(1)\otimes\hat{1}(2)} \cdot \overbrace{\hat{\tilde{B}}(2)}^{=\ \hat{1}(1)\otimes\hat{B}(2)}$$

<u>Nota:</u> Repare que $\left[\hat{\tilde{A}}(1), \hat{\tilde{B}}(2)\right] = 0$

$$\hat{\tilde{A}}(1) = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc}\mathcal{E}_1 & \mathcal{E}_2\end{array} \\ \begin{array}{c}\mathcal{E}_1\\ \mathcal{E}_2\end{array} & \left[\begin{array}{c|c} \boxed{\hat{A}(1)} & 0 \\ \hline 0 & \begin{matrix}1 & & & 0\\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & 1 \\ & & & & \ddots\end{matrix}\end{array}\right]\end{array}$$

$$\hat{\tilde{B}}(2) = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc}\mathcal{E}_1 & \mathcal{E}_2\end{array} \\ \begin{array}{c}\mathcal{E}_1\\ \mathcal{E}_2\end{array} & \left[\begin{array}{c|c} \begin{matrix}1 & & & 0\\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & 1\end{matrix} & 0 \\ \hline 0 & \boxed{\hat{B}(2)}\end{array}\right]\end{array}$$

Tinha de ver que $\left[\hat{\tilde{A}}(1), \hat{\tilde{B}}(2)\right] = 0$

Auto-valores e auto-vectores

$\hat{A}(1)$ definido em $\mathcal{E}_1$

$$\hat{A}(1)\,|\varphi_n^i(1)\rangle = a_n\,|\varphi_n^i(1)\rangle \quad , \quad i = 1, \ldots, g_n,$$

Então $|\psi\rangle \equiv |\varphi_n^i(1)\rangle \otimes |\chi(2)\rangle$ será auto-vector de $\hat{\tilde{A}}(1) = \hat{A}(1) \otimes \hat{1}$.

Podemos reescrever $|\chi(2)\rangle = \sum_j b_j |v_j(2)\rangle$ e assim auto-vectores de $\hat{\tilde{A}}(1)$ serão

$$|\psi_n^{i,j}\rangle = |\varphi_n^i(1)\rangle \otimes |v_j(2)\rangle$$

↳ $\hat{A}(1)$ é observável em $\mathcal{E}_1 \Rightarrow \hat{\tilde{A}}(1)$ será observável em $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2$.

↳ O espectro de $\hat{\tilde{A}}(1)$ será igual ao de $\hat{A}(1)$.

↳ Degenerescência do auto-valor a_n será agora $g_n \times N_2$.

CCOCs em $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2$

Se temos CCOC em $\mathcal{E}_1$ e outro CCOC em $\mathcal{E}_2$ então juntando teremos CCOC em $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2$.

4.6.3) Exemplos

4.6.3.1) Estados de 1-partícula em 1D e 3D

Em 1D temos $\mathcal{E}_x$ (isomórfico ao espaço $\tilde{\mathcal{F}}$ de f.o. suaves em 1D) $\Rightarrow \{|x\rangle\}$ tal que $\langle x|\psi\rangle = \psi(x)$.
De igual forma,

$$\mathcal{E}_y \longrightarrow \{|y\rangle\} \longrightarrow \psi(y) = \langle y|\psi\rangle$$

$$\mathcal{E}_z \longrightarrow \{|z\rangle\} \longrightarrow \psi(z) = \langle z|\psi\rangle$$

Podemos construir $\mathcal{E}_{\vec{r}}$ como

$$\mathcal{E}_{\vec{r}} = \mathcal{E}_x \otimes \mathcal{E}_y \otimes \mathcal{E}_z$$

que terá base $|x,y,z\rangle \equiv |\vec{r}\rangle = |x\rangle \otimes |y\rangle \otimes |z\rangle$
tal que

$$|\psi\rangle = \int \underbrace{dx\,dy\,dz}_{d^3\vec{r}}\, \psi(x,y,z)\,|x,y,z\rangle$$

Trivialmente temos que um CCOC para $\mathcal{E}_x$, $\mathcal{E}_y$ e $\mathcal{E}_z$ é $\hat{X}$, $\hat{Y}$ e $\hat{Z}$, respetivamente.

$\hookrightarrow$ Assim $\mathcal{E}_{\vec{r}}$ terá CCOC $\{\hat{X}, \hat{Y}, \hat{Z}\}$ ou $\{\hat{X}, \hat{P}_y, \hat{Z}\}$.

Nota: Se pudermos escrever $\hat{H}$ como

$$\hat{H} = \hat{H}_x + \hat{H}_y + \hat{H}_z$$

então podemos resolvê-los separadamente

$$\hat{H}_x |\varphi_n\rangle = E_n^x |\varphi_n\rangle$$

$$\hat{H}_y |\chi_p\rangle = E_p^y |\chi_p\rangle$$

$$\hat{H}_z |\omega_r\rangle = E_r^z |\omega_r\rangle$$

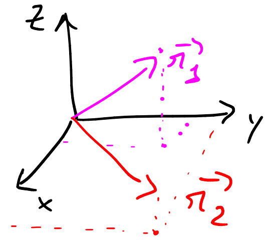
tal que $|\Psi_{n,p,r}\rangle = |\varphi_n\rangle \otimes |\chi_p\rangle \otimes |\omega_r\rangle$ serão auto-estados de $\hat{H}$, com as auto-energias $E_{n,p,r} = E_n^x + E_p^y + E_r^z$.

4.6.3.2) Estados de duas partículas

A f.o. tem 6 variáveis $\Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \Psi(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2)$ tal que

$$d\mathcal{P}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = |\Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2)|^2 d^3\vec{r}_1 d^3\vec{r}_2$$

da probabilidade de termos partícula 1 num volume $d^3\vec{r}_1$ em torno de $\vec{r}_1$ e a partícula 2 num volume $d^3\vec{r}_2$ em torno de $\vec{r}_2$



A normalização da f.o.

$$\int d^3\vec{r}_1 \, d^3\vec{r}_2 \, |\psi(r_1, r_2)|^2 = 1$$

Podemos definir observáveis $\hat{\vec{R}}_1 \in \mathcal{E}_1$ e $\hat{\vec{R}}_2 \in \mathcal{E}_2$ e construir $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2$ tal que $|\vec{r}_1, \vec{r}_2\rangle = |\vec{r}_1\rangle |\vec{r}_2\rangle$. Um estado nesta representação será dado por

$$|\psi\rangle = \int d\vec{r}_1 \, d\vec{r}_2 \, \psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \, |\vec{r}_1\rangle \otimes |\vec{r}_2\rangle$$

Um CCOC de $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2$ será $\{\hat{X}_1, \hat{Y}_1, \hat{Z}_1, \hat{X}_2, \hat{Y}_2, \hat{Z}_2\}$.