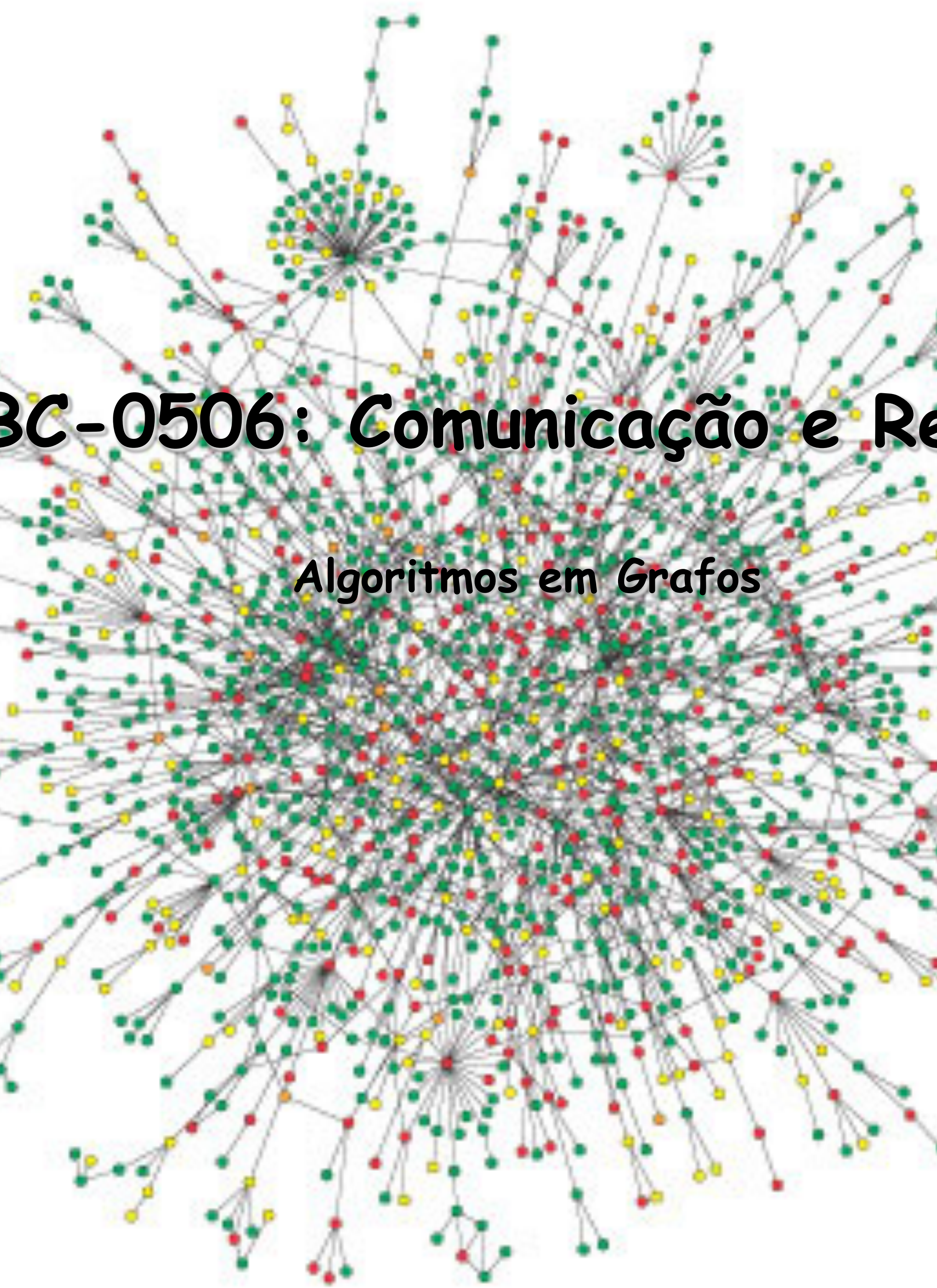
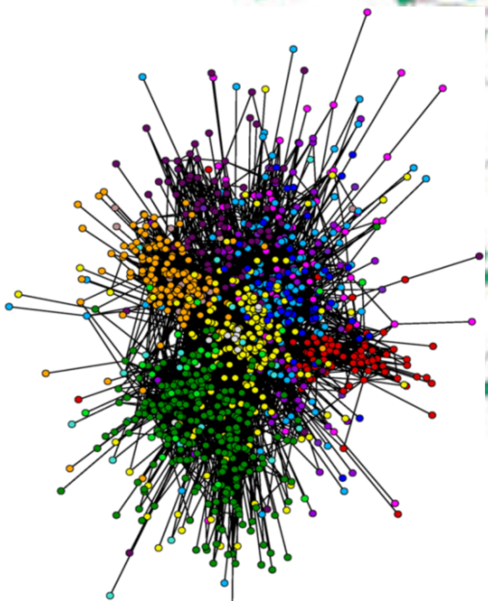
Universidade Federal do ABC

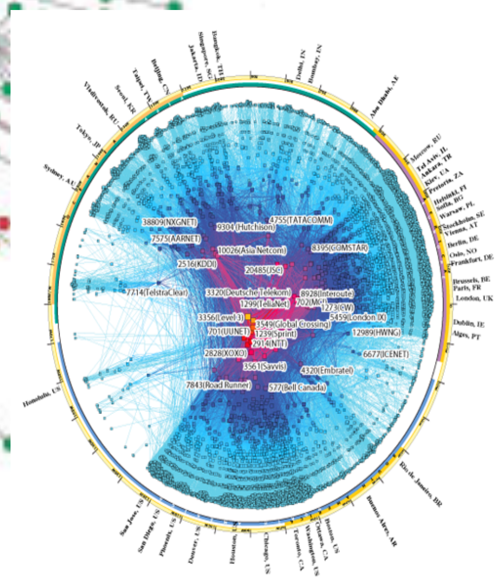
Universidade Federal do ABC



BC-0506: Comunicação e Redes

Algoritmos em Grafos





Relembrando aula passada.........

- Sistema complexo.

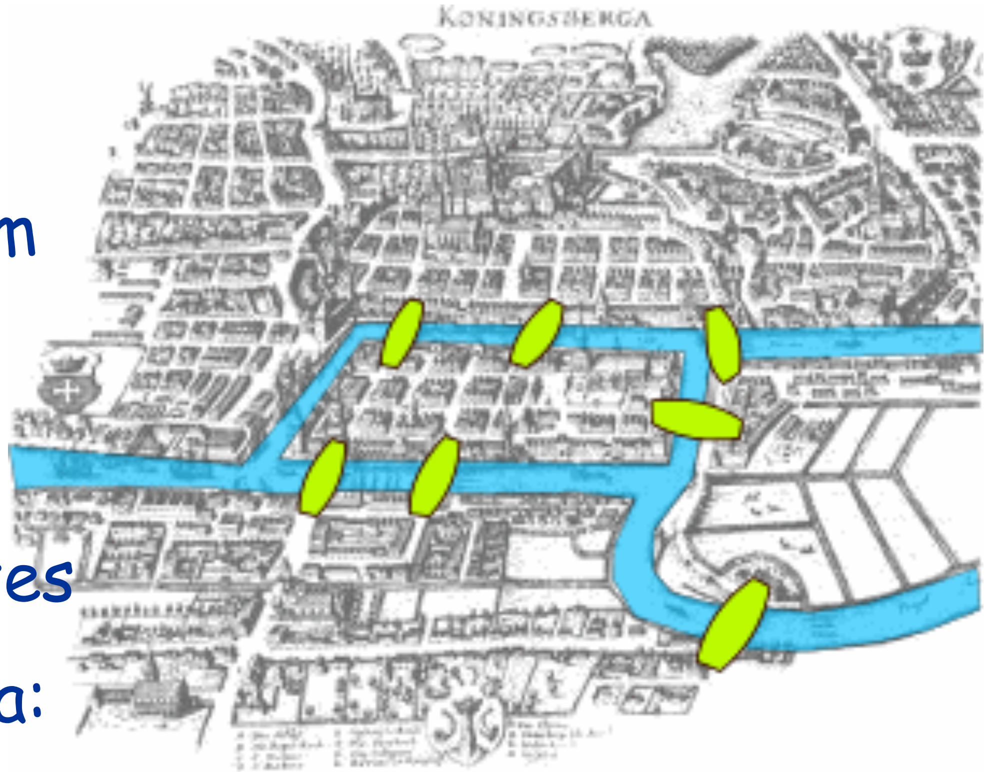
- Uma possível representação é através de uma rede.

- Em matemática, uma rede = grafo.

Universidade Federal do ABC

A 7 Pontes de Königsberg

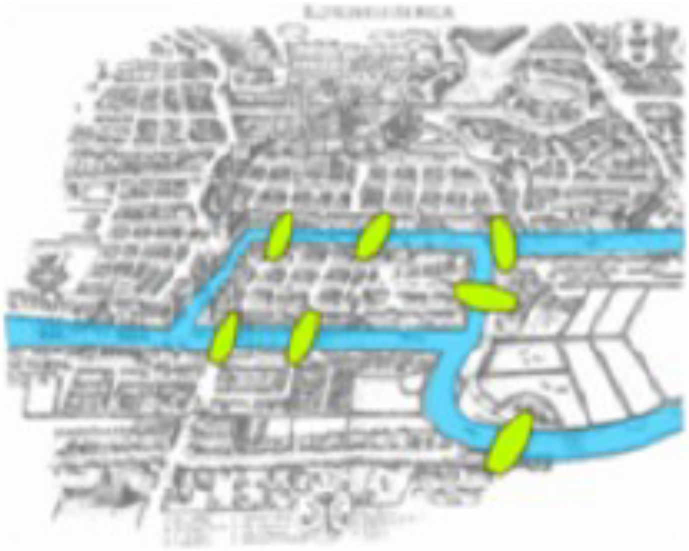
A 7 Pontes de Königsberg

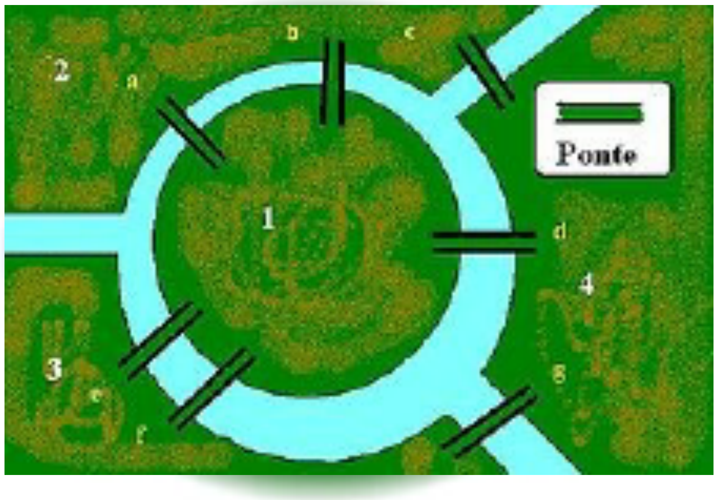


- ✔ A prospera cidade mercantil de Königsberg, Prussia, ficava em ambos os lados do Rio Pregel
- ✔ Tinha 2 ilhas centrais, com as áreas conectadas por 7 pontes
- ✔ Foi lançado um desafio na época:
  - ✔ **É possível passar-se por toda a cidade de modo que cada ponte seja cruzada uma única vez?**
- ✔ **Exercício:** Encontrem uma solução para este problema

A 7 Pontes de Königsberg

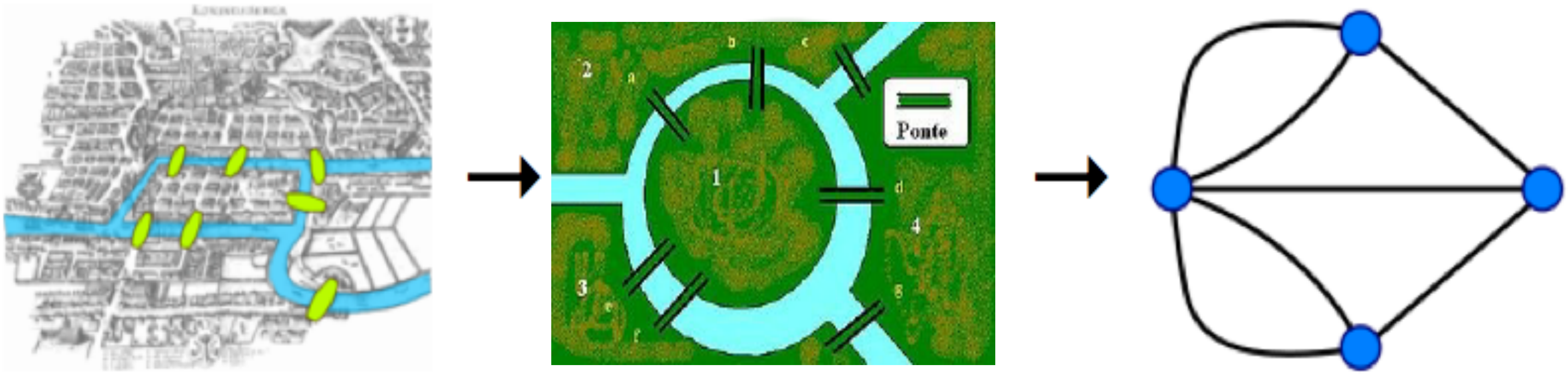
- Um caminho e uma "sequência de regiões" visitadas.
- Para passar de uma região para outra é necessário usar uma ponte.
- Exemplo:
  - <1,2,4,3> é um caminho,
  - mas <1,2,3> não é um caminho.





A 7 Pontes de Königsberg
Modelagem do Problema

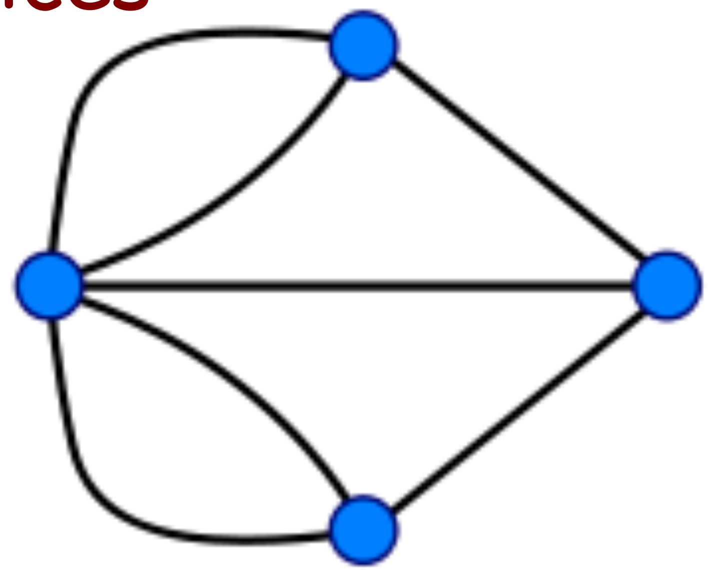
- Euler, um matemático suíço, demonstrou com rigor matemático em 1735 que não existe nenhuma rota que resolva o problema!
- Como ele fez isso??
  - o primeiro passo foi simplificar o problema
  - caminhos dentro dos pedaços de terra não interessavam
  - o que interessa são apenas as conexões entre os pedaços de terra, isto é, as pontes



Grafos

- Chamamos a estrutura matemática resultante de grafo

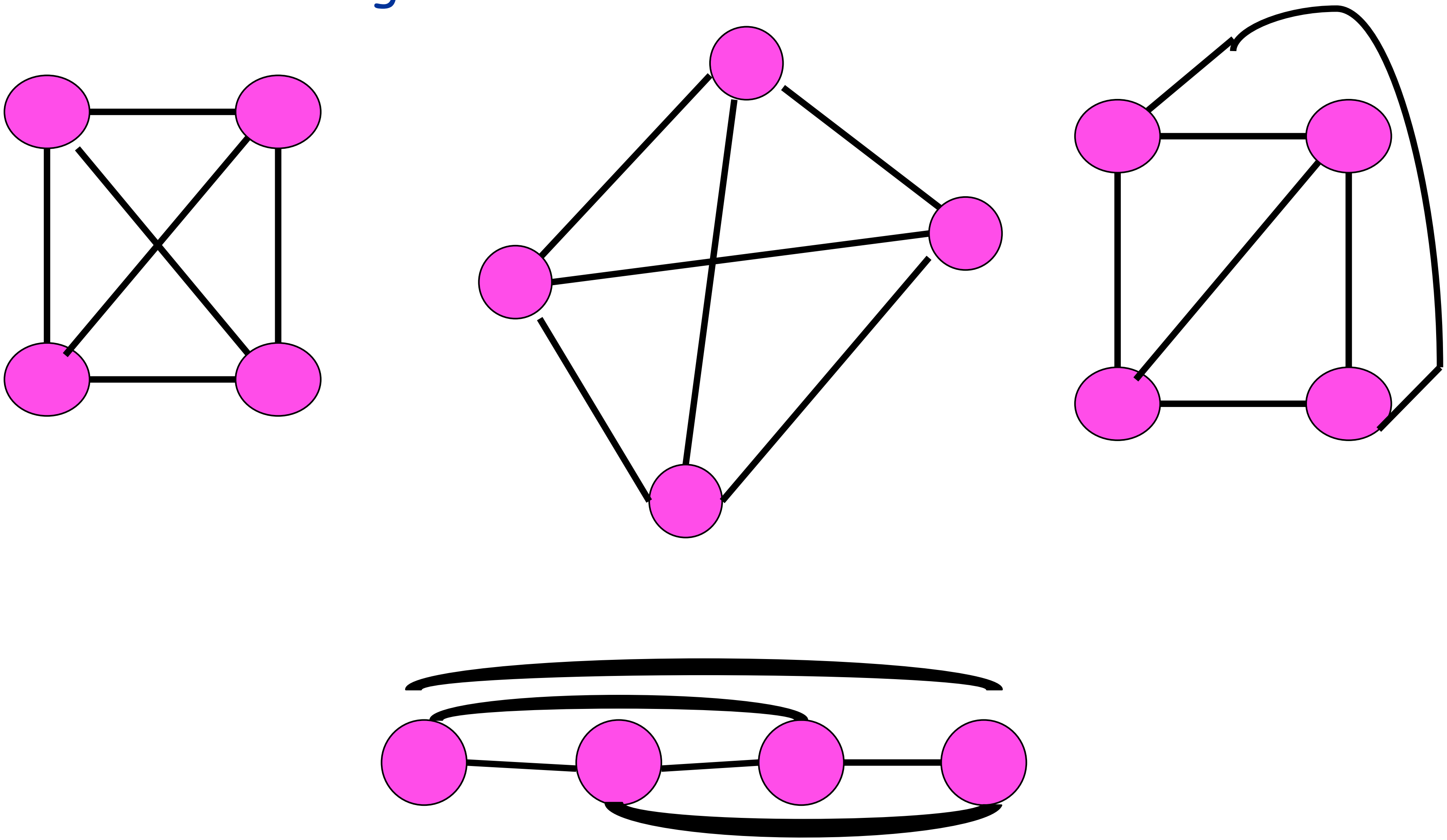
- Os pontos são chamados de vértices e as conexões de arestas



Grafos

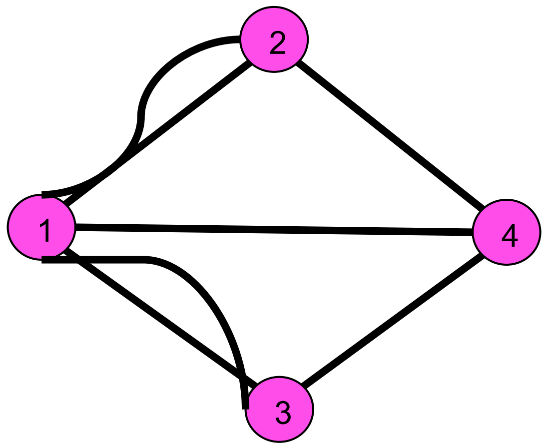
- Diferentes desenhos influenciam apenas na visualização.

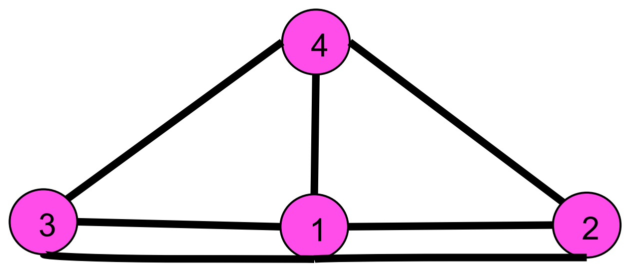
- Diferentes desenhos não alteram as propriedades matemáticas do grafo

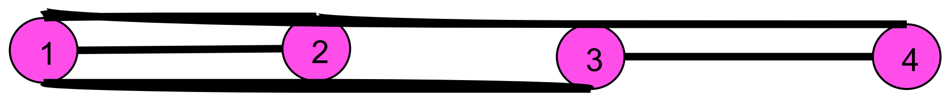


As 7 Pontes de Königsberg

- Diferentes desenhos.







Caminho Euleriano

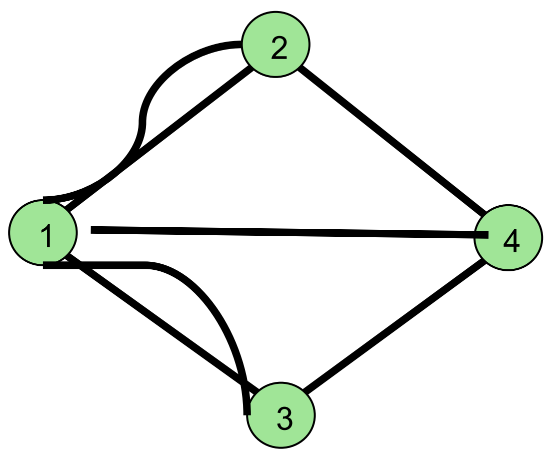
- **Euler** demonstrou que, para que exista um caminho que percorra todos os vértices passando por cada aresta uma única vez:
- É **necessário** que ou **0** ou **2** dos vértices tenham um número impar de arestas.
- Um **Caminho Euleriano** é um caminho em um grafo que visita uma aresta apenas uma vez.
- E assim começou o desenvolvimento da Teoria dos Grafos.

Circuito Euleriano

- Um **Circuito Euleriano** é um caminho Euleriano onde **tanto o vértice de origem como o de destino é o mesmo**.

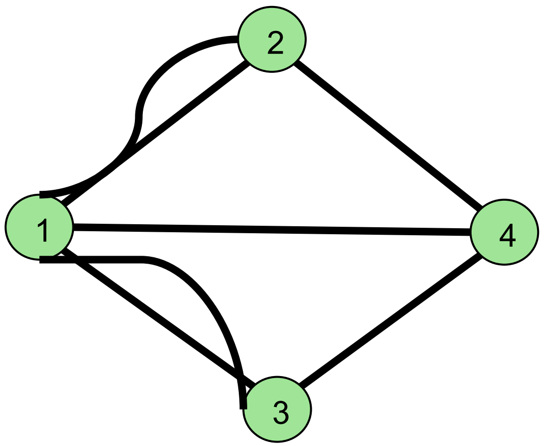
  Neste caso, é preciso que todos os vértices do grafo tenham um número par de arestas.

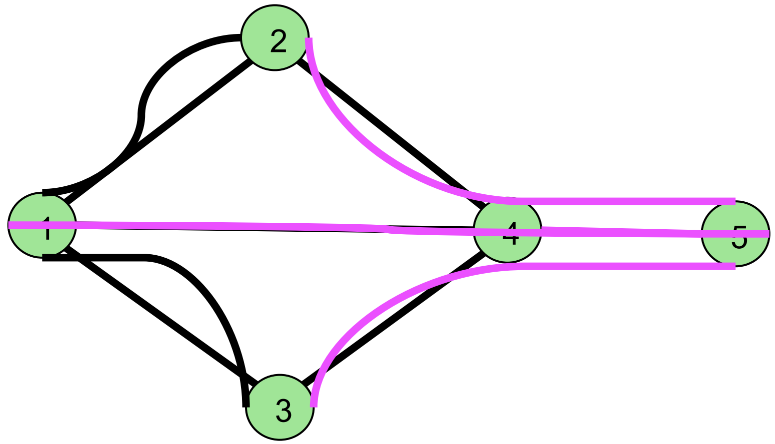
- Exercício: Inclua um novo vértice no problema das 7 pontes de modo a formar um Circuito Euleriano.



Circuito Euleriano

- Um **Circuito Euleriano** é um caminho Euleriano onde **tanto o vértice de origem como o de destino é o mesmo**.
  - Neste caso, é preciso que todos os vértices do grafo tenham um número par de arestas.
- Exercício: Inclua um novo vértice no problema das 7 pontes de modo a formar um Circuito Euleriano.



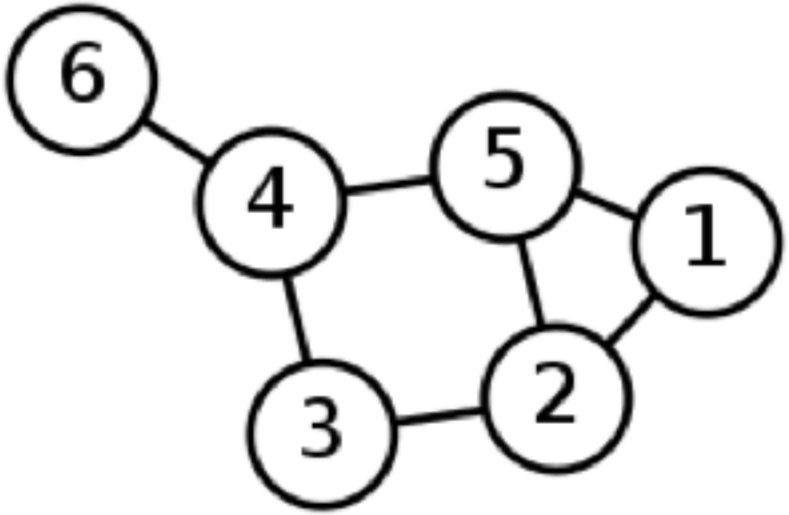


Universidade Federal do ABC

Algumas Definições, Propriedades e Exemplos

Definições

- Podemos definir um grafo por um par ordenado $G = (V,A)$, onde:



  - V é um conjunto de vértices
  - A é um conjunto de arestas
- No exemplo ao lado, temos:

$V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

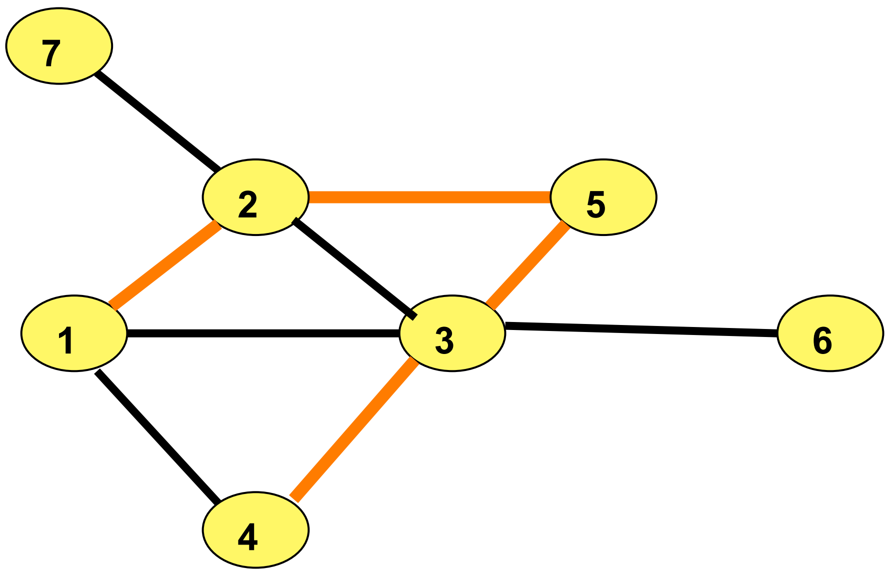
$A = \{ \{1,2\}, \{1,5\}, \{2,5\}, \{2,3\}, \{3,4\}, \{4,5\}, \{4,6\} \}$

- Este grafo é simples (não possui laços e possui no máximo uma aresta entre cada par de vértices) e não-direcionado (as arestas não possui uma direção definida)

Definições

Um caminho do vértice **s** ao vértice **t** é uma sequência de vértices <s, u, v, … , t>, onde cada par de vértices consecutivos é conectado por uma aresta.

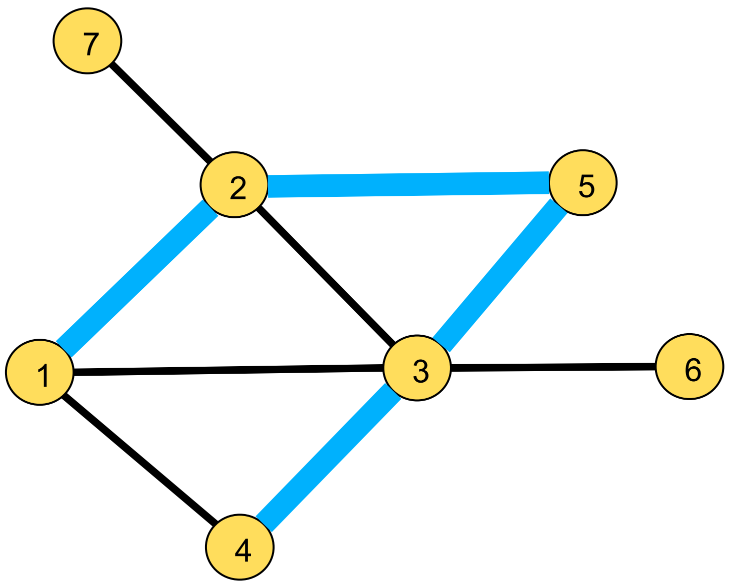
Dizemos que o caminho começa em s e termina em t.



Exemplo:
<1,2,5,3,4> é um caminho.
<1,2,3,4,5> não é um caminho

Definições

O comprimento de um **caminho** é o total de arestas usadas no caminho.



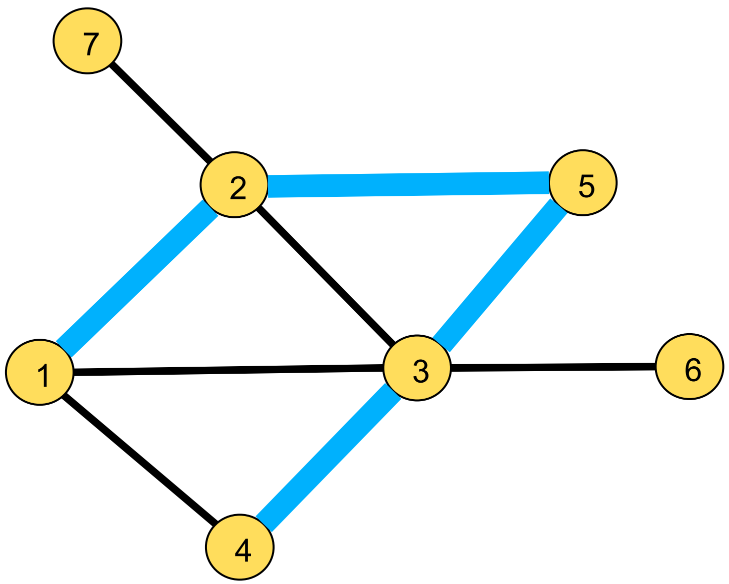
Exemplo:

O caminho <1,2,5,3,4> tem um comprimento de **4**.

Definições

No exemplo temos o tipo mais simples de grafo:

- Não orientado.
- Não possui múltiplas arestas nem *loops*.

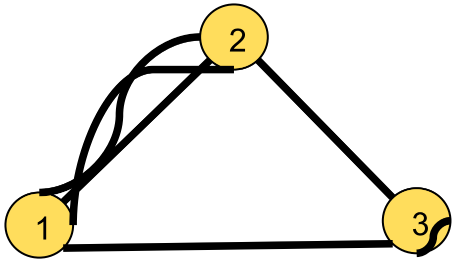


Exemplo de caminhos:

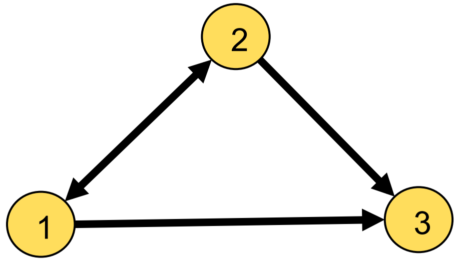
<1,2,5,3,4>

<4,3,5,2,1>

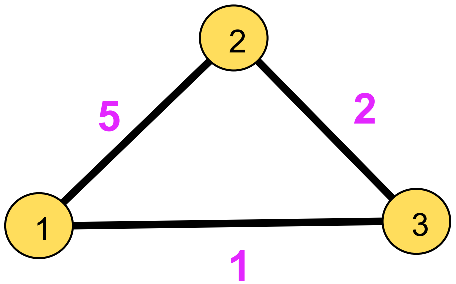
Definições



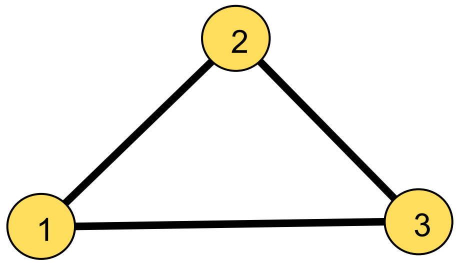
Multi-grafo
(pseudo-grafo)



Grafo direcionado (orientado)



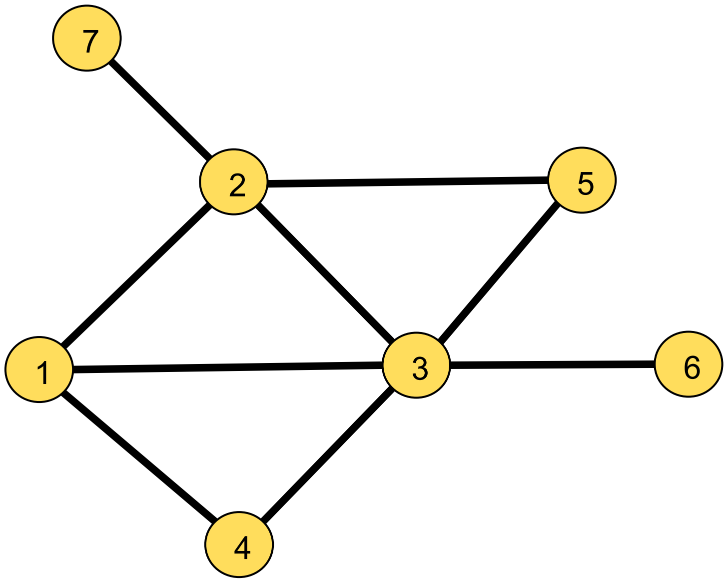
Grafo ponderado



Grafo simples:
não-direcionado, não-ponderado

Definições

Grafo não-direcionado



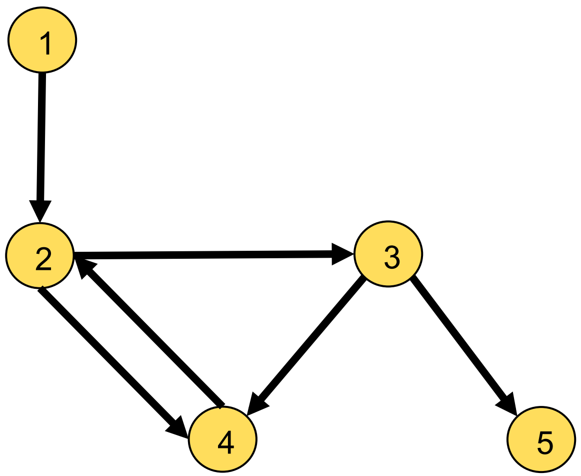
$V = \{1,2,3,4,5,6,7\}$

$$A = \{ \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{2,3\}, \{2,5\}, \{2,7\}, \{3,4\}, \{3,5\}, \{3,6\} \}$$

Pares não ordenados

Definições

Grafo direcionado



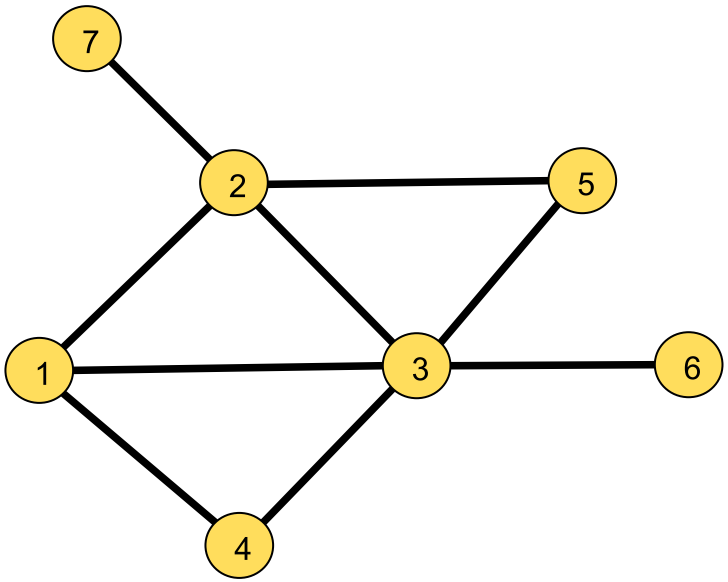
V = {1,2,3,4,5}

A = { {1,2}, {2,3}, {2,4},
{3,4}, {3,5}, {4,2} }

Pares ordenados

Grafos: Propriedades

A **Ordem** de um grafo é o número total de vértices.

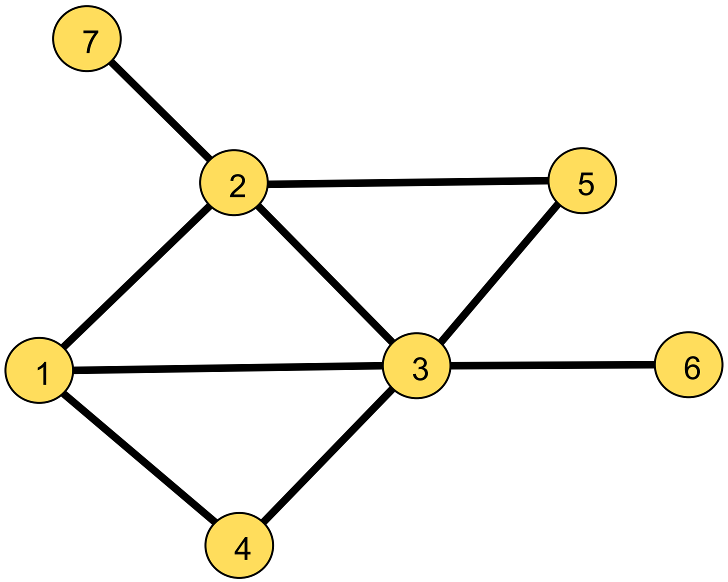


Exemplo:

O grafo possui 7 vértices, neste caso, dizemos que ele tem ordem 7.

Grafos: Propriedades

O **Tamanho** de um grafo é o número total de arestas.

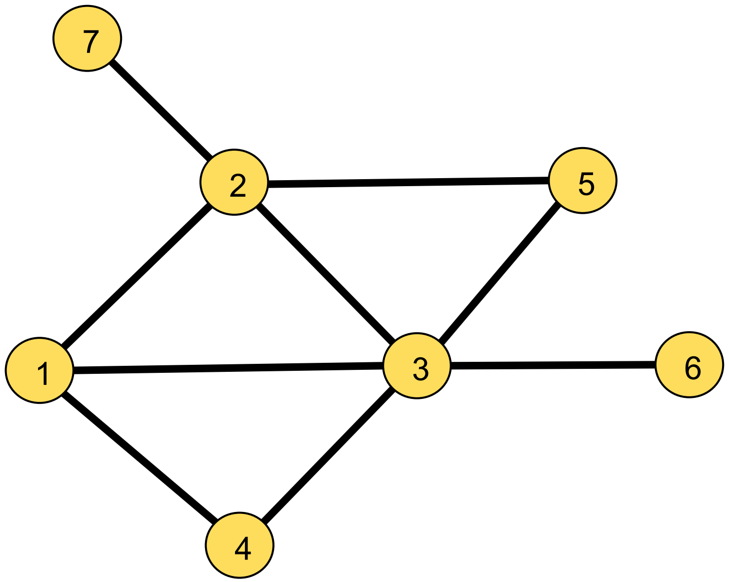


Exemplo:

O grafo tem tamanho **9**.

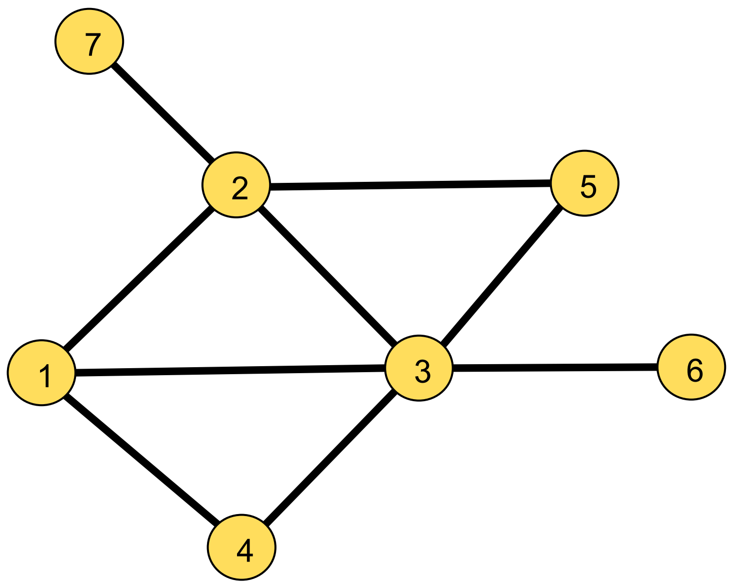
Grafos: Propriedades

O **Diâmetro** é o maior dos menores caminhos entre cada par de vértices.



Grafos: Propriedades

O **Diâmetro** é o maior dos menores caminhos entre cada par de vértices.



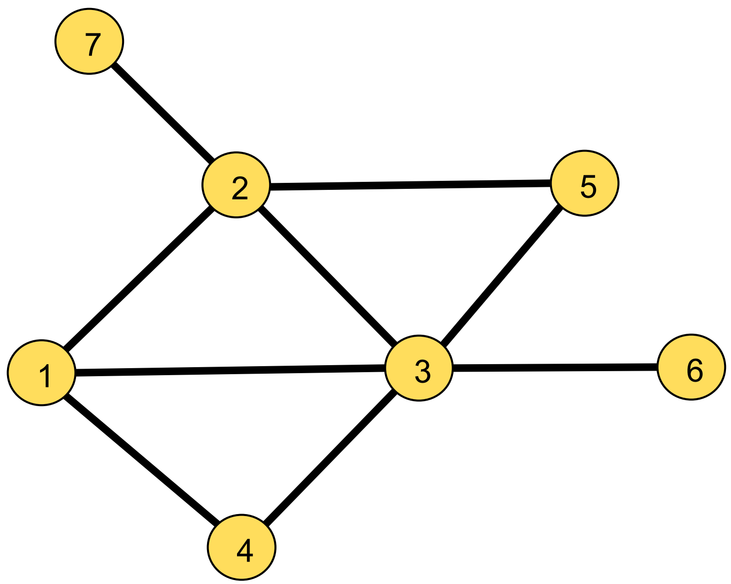
Caminhos entre os vértices:

1-2:
1-3:
1-4:
1-5:
1-6:
1-7:
2-3:
2-4:
2-5:
2-6:
2-7:

3-4:
3-5:
3-6:
3-7:
4-5:
4-6:
4-7:
5-6:
5-7:
6-7:

Grafos: Propriedades

O **Diâmetro** é o maior dos menores caminhos entre cada par de vértices.



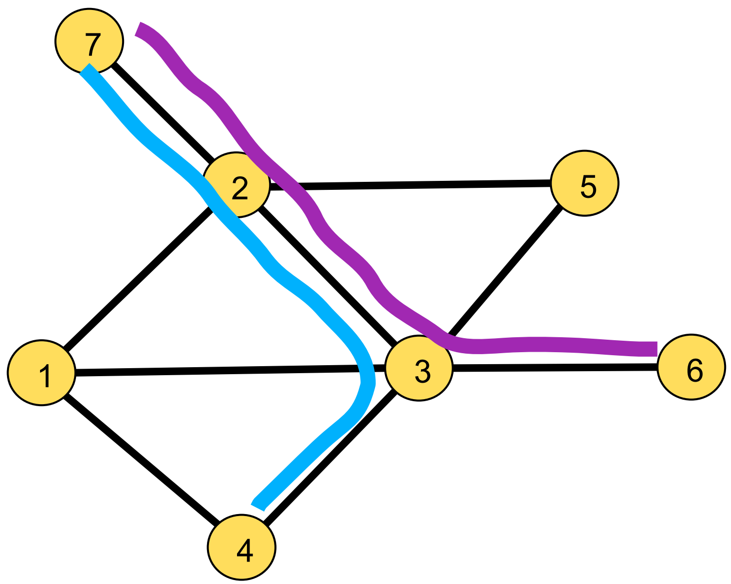
Caminhos entre os vértices:

1-2: <1,2>
1-3: <1,3>
1-4: <1,4>
1-5: <1,2,5>
1-6: <1,3,6>
1-7: <1,2,7>
2-3: <2,3>
2-4: <2,3,4>
2-5: <2,5>
2-6: <2,3,6>
2-7: <2,7>

3-4: <3,4>
3-5: <3,5>
3-6: <3,6>
3-7: <3,2,7>
4-5: <4,3,5>
4-6: <4,3,6>
4-7: <4,3,2,7>
5-6: <5,3,6>
5-7: <5,2,7>
6-7: <6,3,2,7>

Grafos: Propriedades

O **Diâmetro** é o maior dos menores caminhos entre cada par de vértices.



Diametro = 3

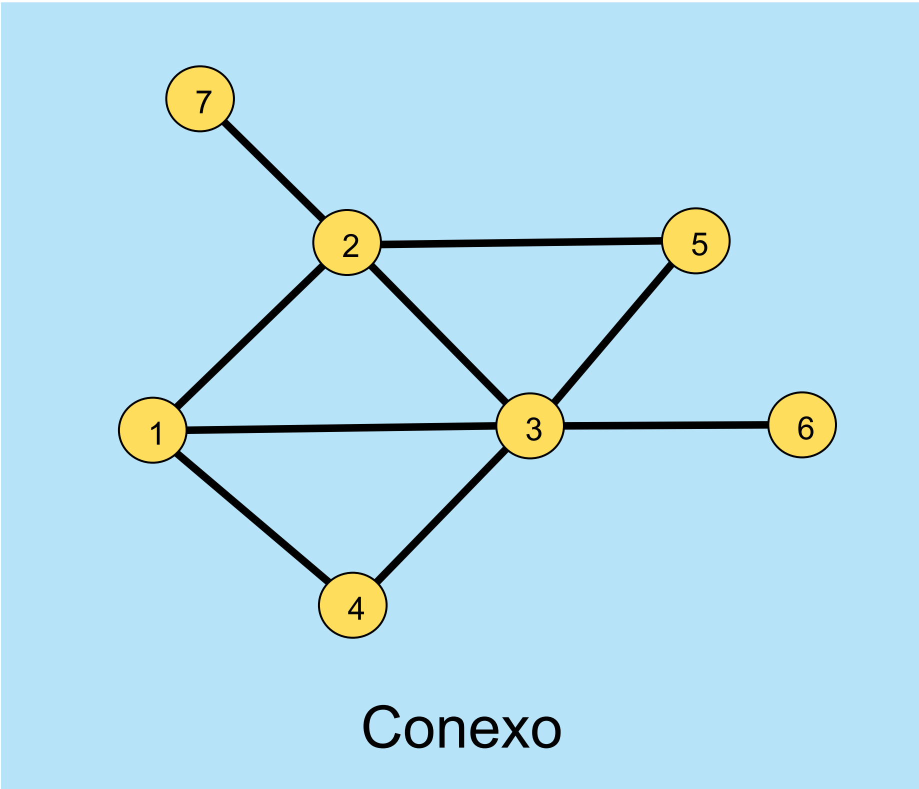
Caminhos entre os vértices:

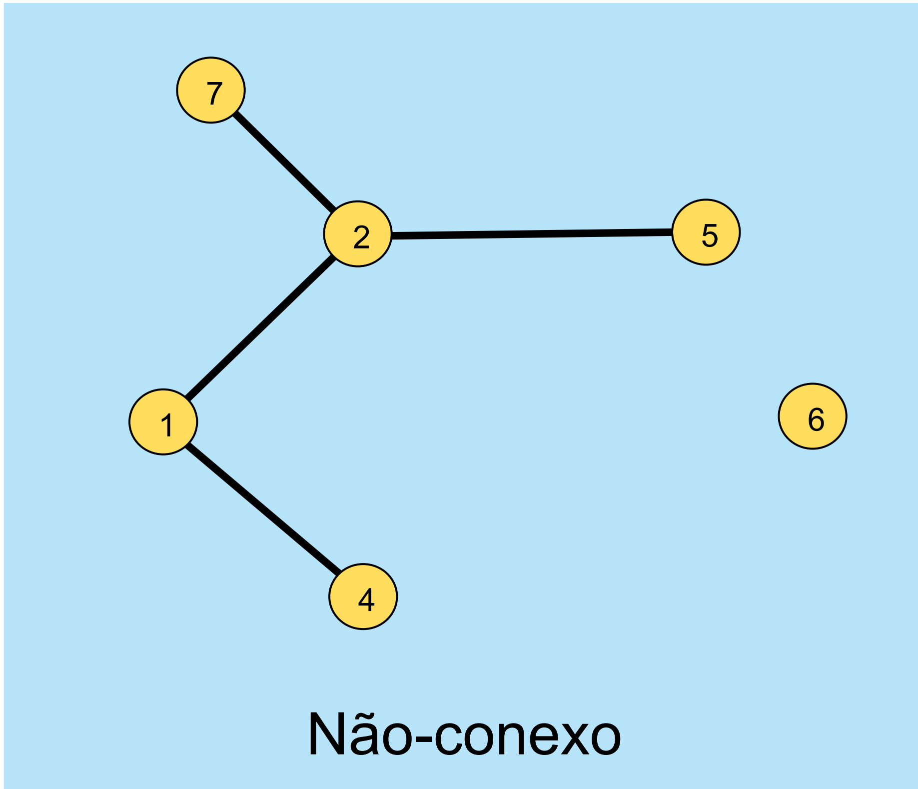
1-2: <1,2>
1-3: <1,3>
1-4: <1,4>
1-5: <1,2,5>
1-6: <1,3,6>
1-7: <1,2,7>
2-3: <2,3>
2-4: <2,3,4>
2-5: <2,5>
2-6: <2,3,6>
2-7: <2,7>

3-4: <3,4>
3-5: <3,5>
3-6: <3,6>
3-7: <3,2,7>
4-5: <4,3,5>
4-6: <4,3,6>
4-7: <4,3,2,7>
5-6: <5,3,6>
5-7: <5,2,7>
6-7: <6,3,2,7>

Grafos

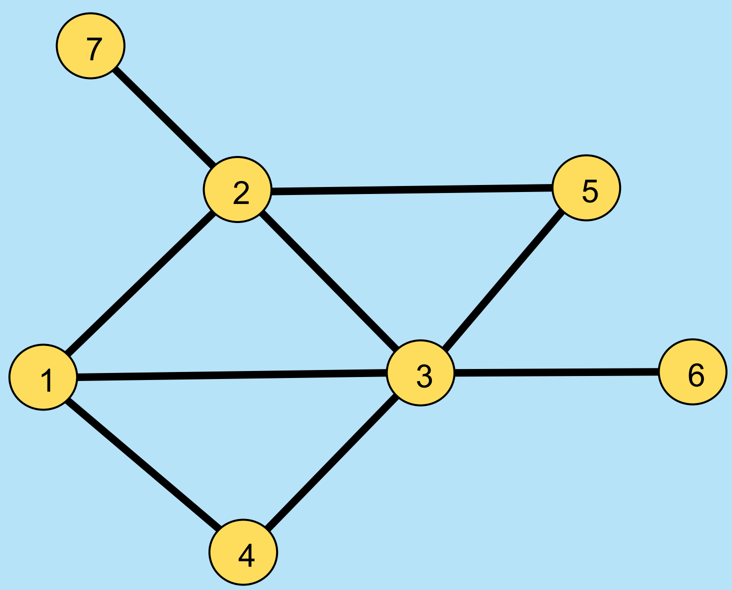
Um grafo é **conexo** se existe um caminho entres quaisquer pares de vértices.



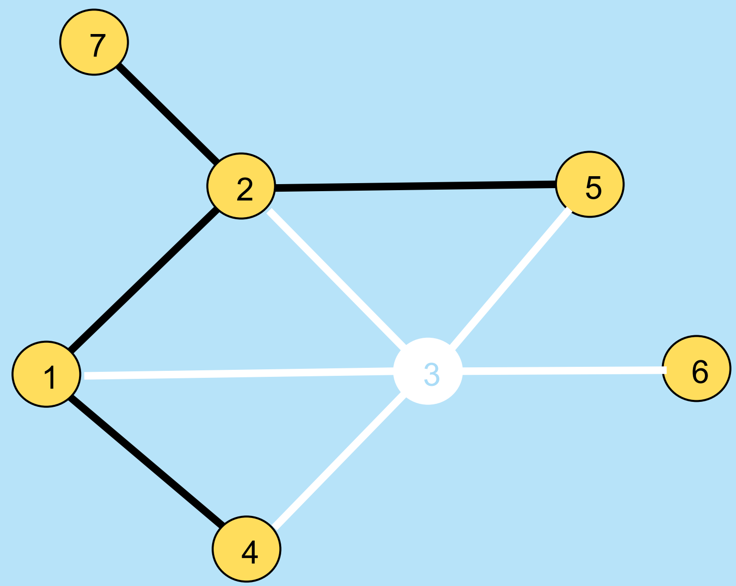


Grafos: Propriedades

A **Conectividade dos Vértices** é o número mínimo de vértices cuja remoção desconecta o grafo.



Conexo

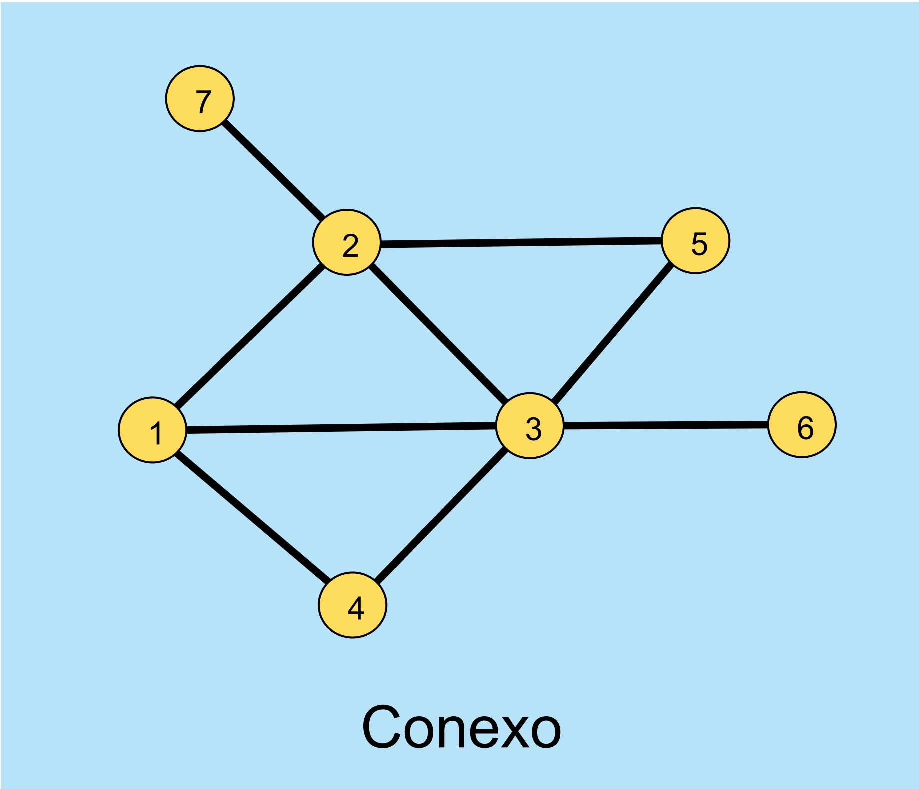


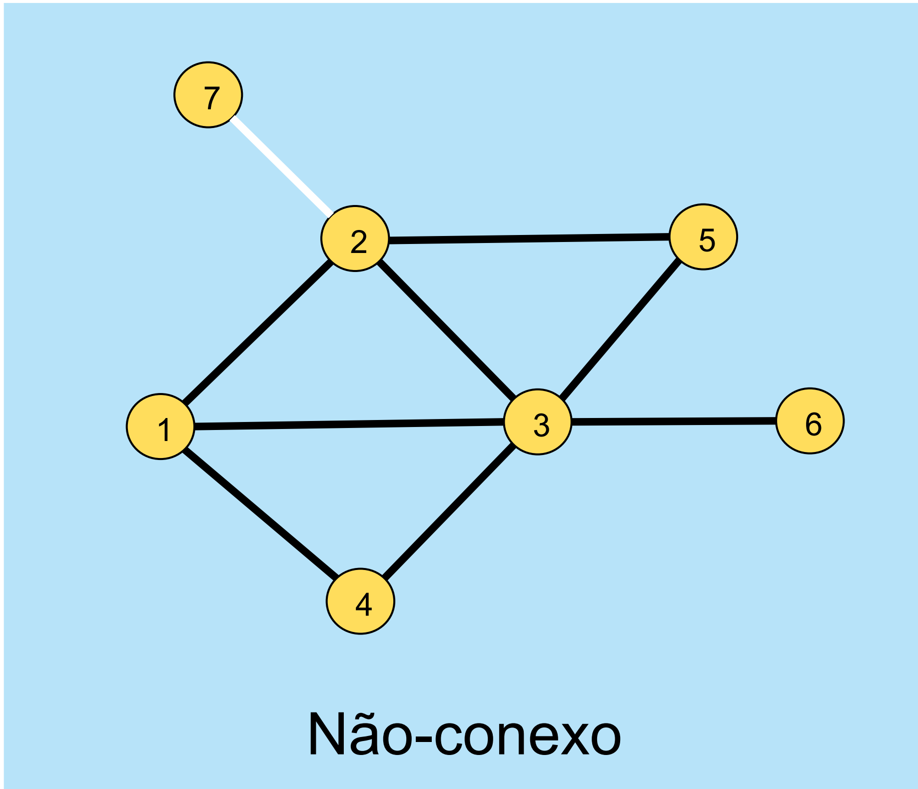
Não-conexo

Conectividade dos Vértices = 1

Grafos: Propriedades

A **Conectividade das Arestas** é o número mínimo de arestas cuja remoção desconecta o grafo.

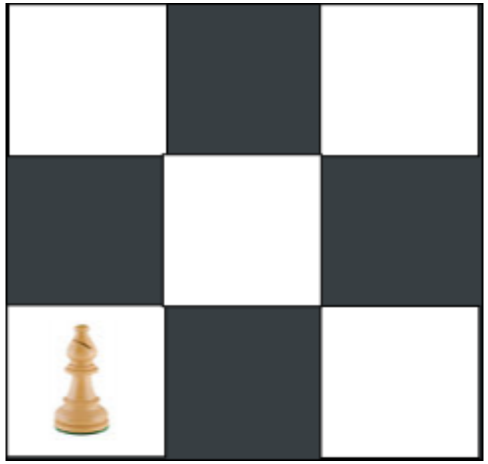




Conectividade das Arestas = 1

Jogo de Xadrez 3x3

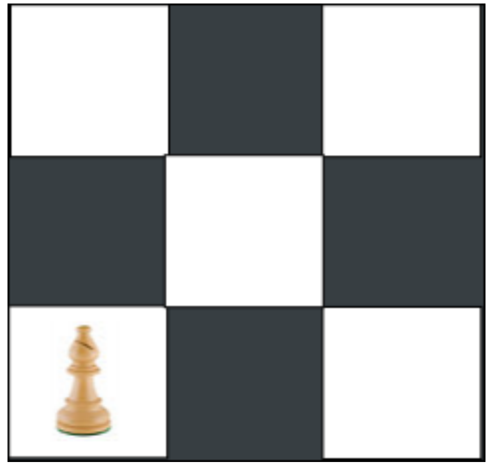
- Grafos podem ser utilizados para representar diversos problemas:



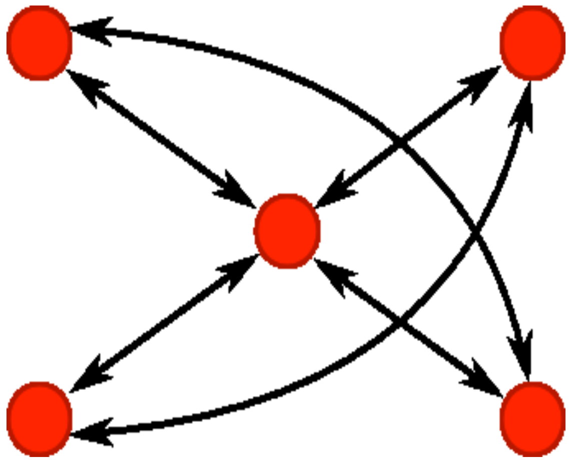
- Em um tabuleiro 3x3, deseja-se mapear todos os movimentos que podem ser realizados por um **bispo** que se move nas casas brancas.

Jogo de Xadrez 3x3

- Grafos podem ser utilizados para representar diversos problemas:



- Em um tabuleiro 3x3, deseja-se mapear todos os movimentos que podem ser realizados por um **bispo** que se move nas casas brancas.

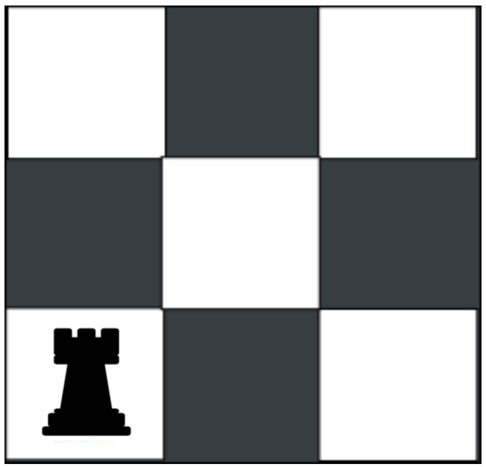


- O grafo à direita representa os movimentos desse bispo.

Jogo de Xadrez 3x3

- **Exercício:**

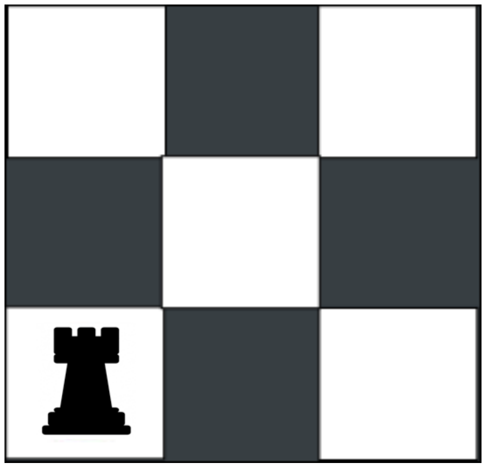
Desenhe um grafo que represente todos os movimentos da torre.

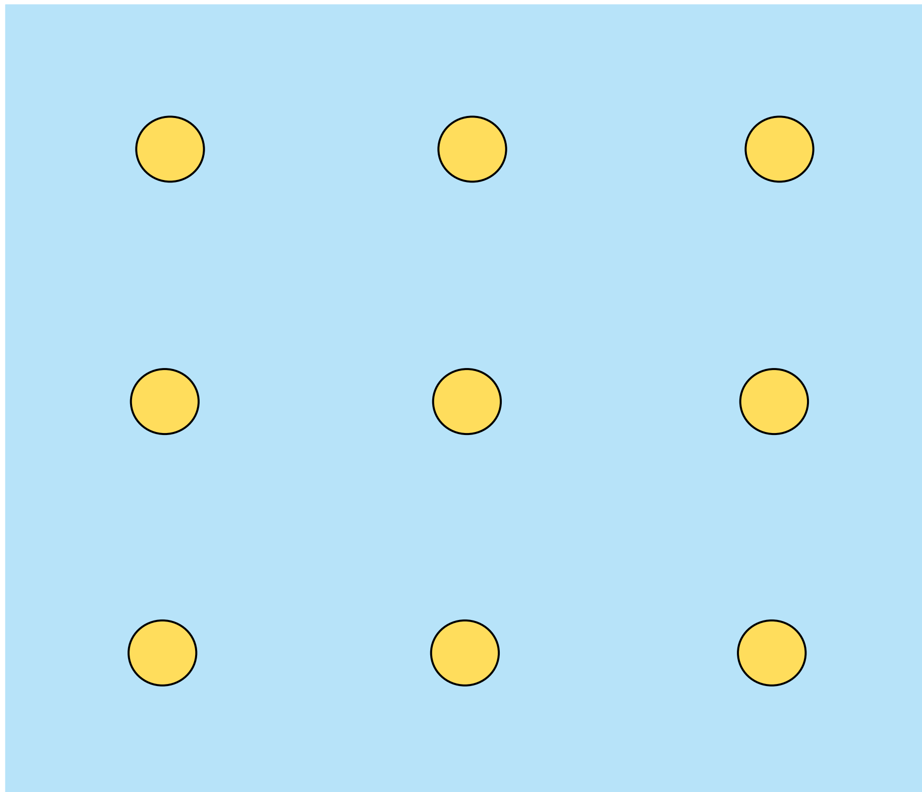


Jogo de Xadrez 3x3

- **Exercício:**

Desenhe um grafo que represente todos os movimentos da torre.

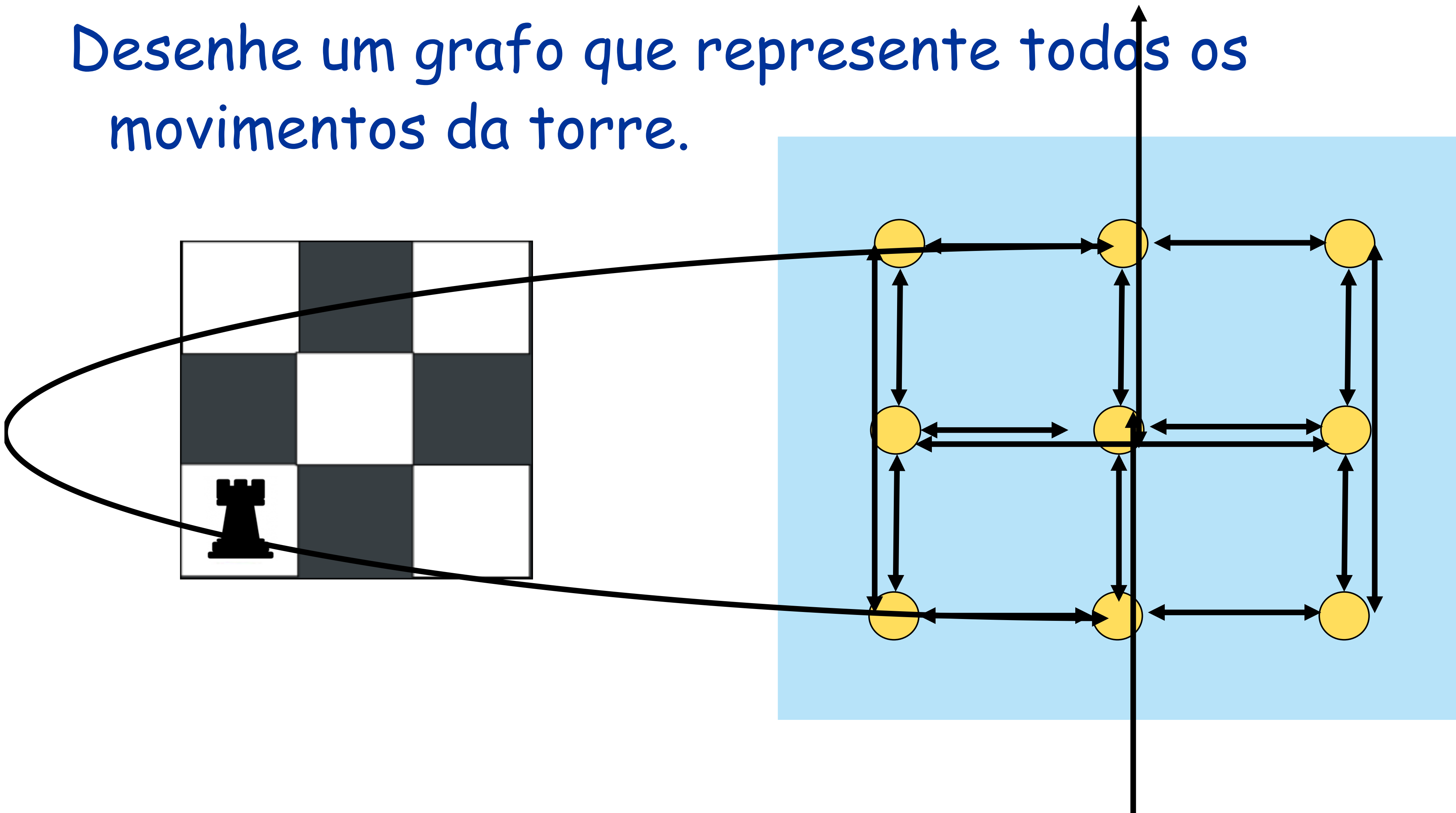




Jogo de Xadrez 3x3

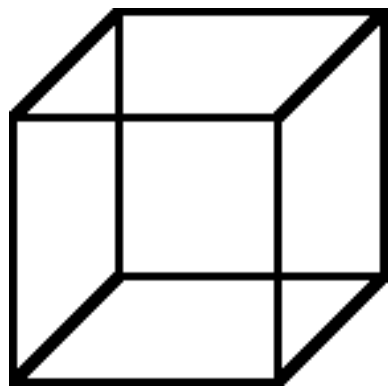
- **Exercício:**

Desenhe um grafo que represente todos os movimentos da torre.



Cubo e grafos planares

Grafos podem ser utilizados para representar objetos, como cubos



Um grafo planar é aquele que pode ser desenhado em um plano sem que nenhuma aresta se cruze

Exercício 1: É possível transformar o grafo do cubo em um grafo planar? Se sim, redesenhe o grafo

Exercício 2: E no caso do grafo que representa todos os movimentos do bispo?

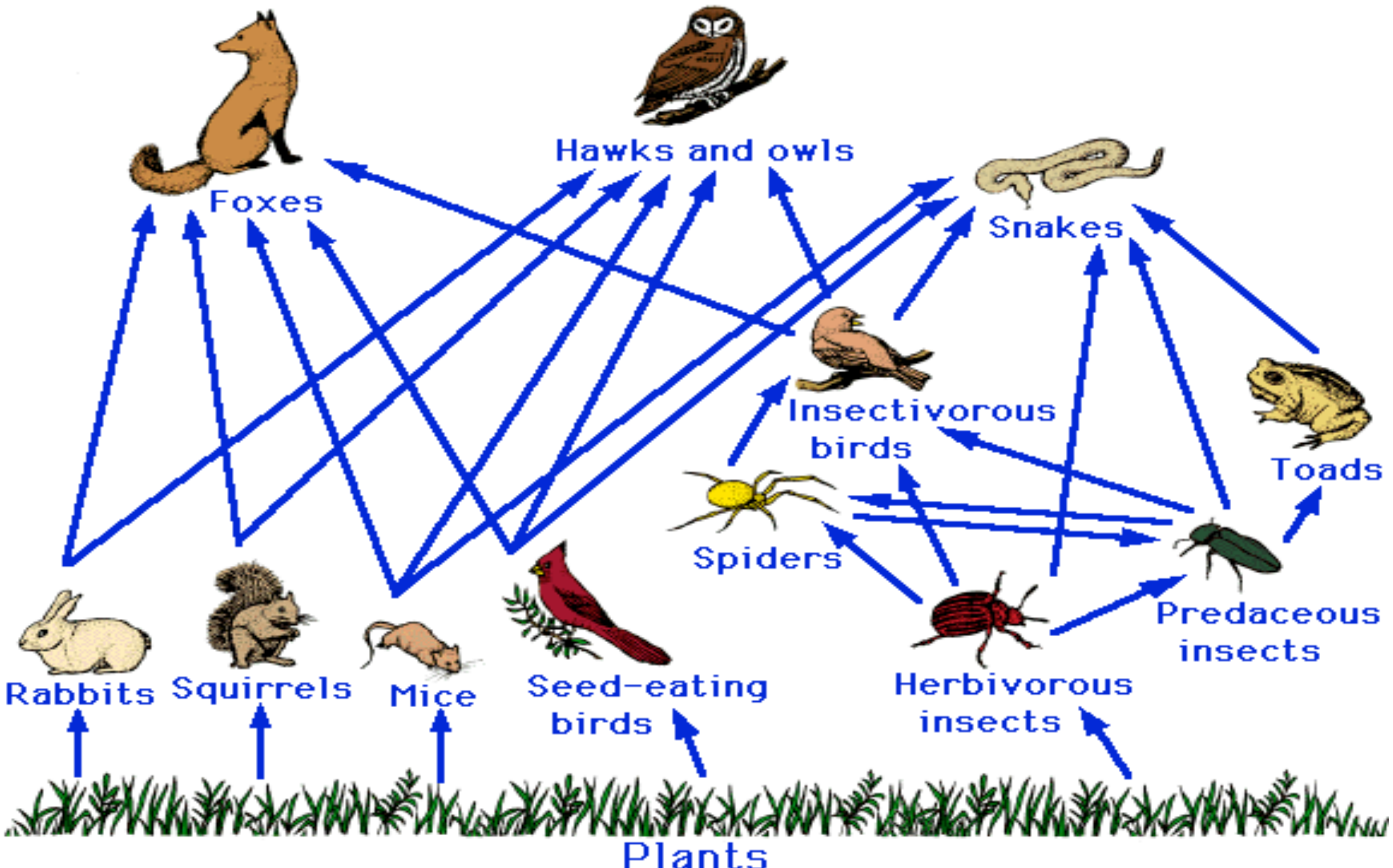
Exercício 3: E para os movimentos da torre?

Aplicações de grafos planares:

- circuitos integrados (problema crítico que tem levado a novos avanços na área)
- circuitos impressos (placas onde componentes eletrônicos são montados)
- rodovias conectando cidades
- linhas de transmissão de energia elétrica
- linha de produção em uma indústria

Exemplo:cadeia alimentar

Na cadeia alimentar temos arestas direcionadas, ou seja, o fluxo da informação / energia segue apenas uma direção.



Exemplo:cadeia alimentar

Nesse caso podemos pensar em três tipos de nós importantes:

- ❑ Nós que **transmitem** energia para várias espécies.
- ❑ Nós que **recebem** energia de várias espécies.
- ❑ Nós que **enviam e recebem** energia de várias espécies.

Exemplo:cadeia alimentar

Nós que **transmitem energia** para várias espécies são caracterizadas por aquelas que conseguem gerar energia do sol (plantas).

Como elas não consomem energia de nenhuma espécie e, diversas espécies consomem energia através dela, as plantas tem várias arestas apontando parar fora dela.

Essa quantidade é mensurada como **GRAU DE SAÍDA**, que é o número de arestas saindo do nó.

Exemplo:cadeia alimentar

Nós que **recebem energia** de várias espécies são caracterizadas por aquelas que são grandes predadores e não são presas de outras espécies.

Nesse caso, essas espécies contêm arestas apenas apontando para elas, ou seja, chegando nelas.

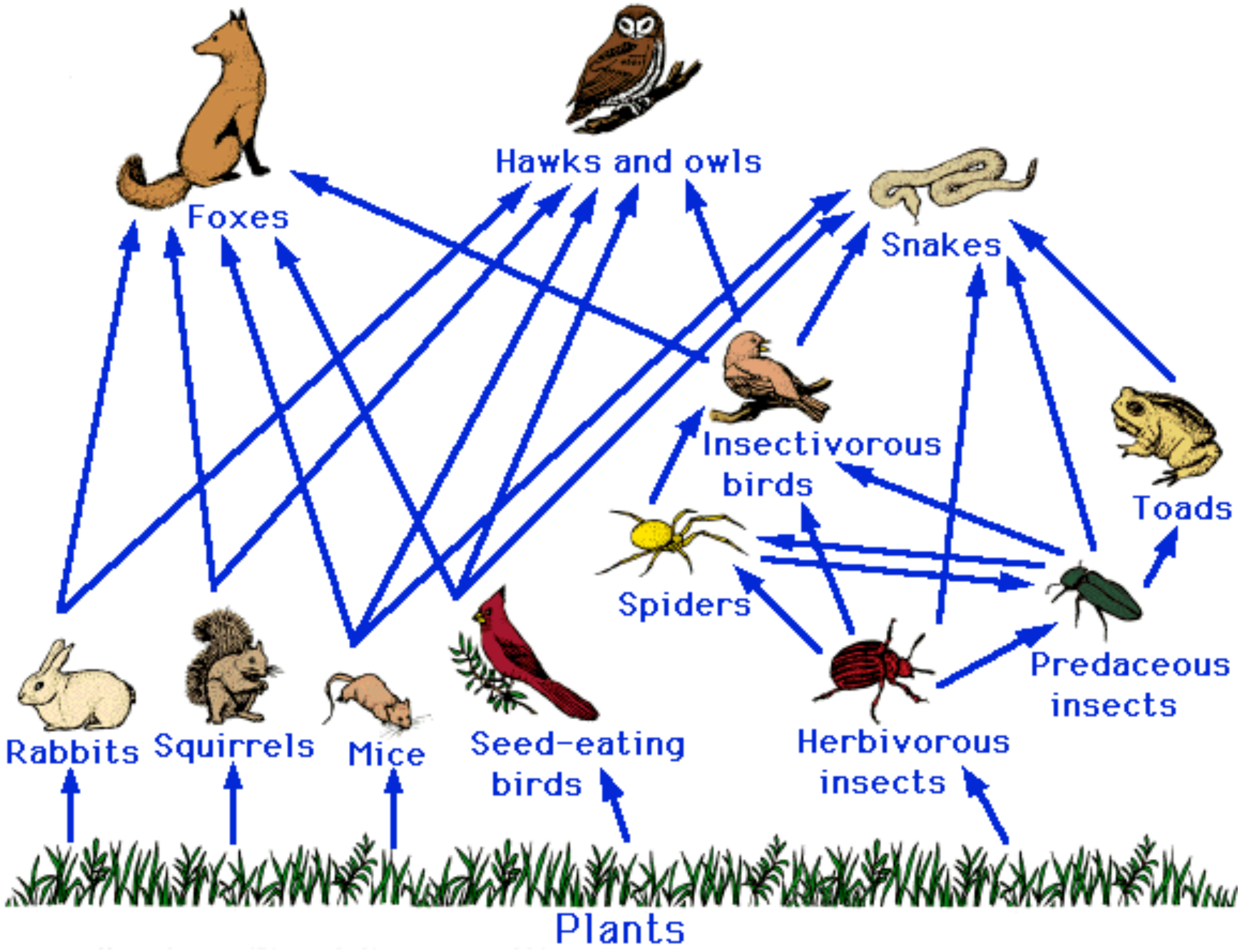
Essa quantidade é mensurada como **GRAU DE ENTRADA**, que é o número de arestas chegando em um nó.

Exemplo:cadeia alimentar

Já as espécies intermediárias que são predadoras de diversas espécies mas também servem de presas tem tanto arestas chegando nelas como saindo delas.

Essas espécies podem ser classificadas pelo **GRAU DE ENTRADA**, pelo **GRAU DE SAÍDA** e pela soma desses dois que dá o **GRAU TOTAL** do nó.

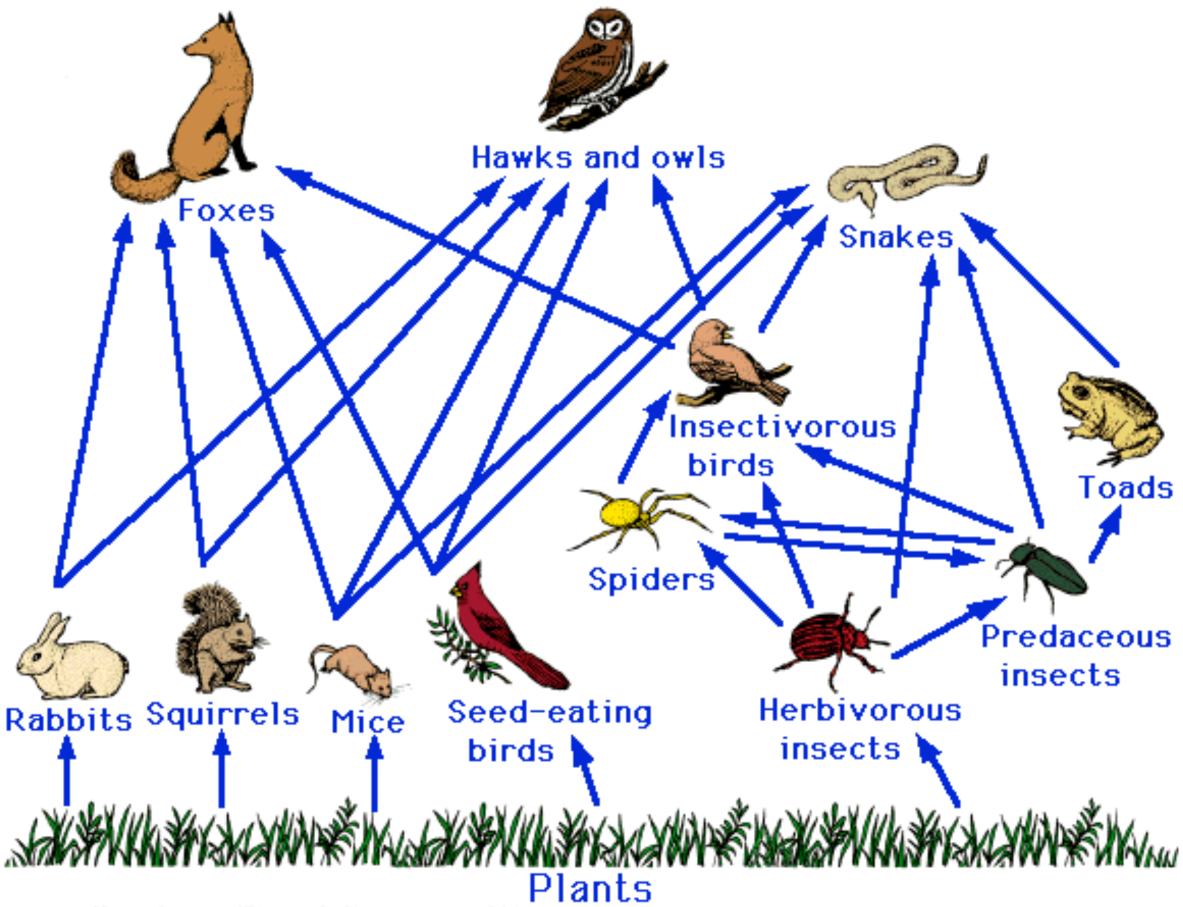
Exemplo:cadeia alimentar



GRAU DE SAÍDA:

Plantas = 5
Coelhos = 2
Esquilos = 2
Ratos = 3
Pássaros = 3
Insetos = 3
Aranhas = 2
Pássaros Inset. = 3
Sapos = 1
Cobras = 0
Raposas = 0
Falcões = 0

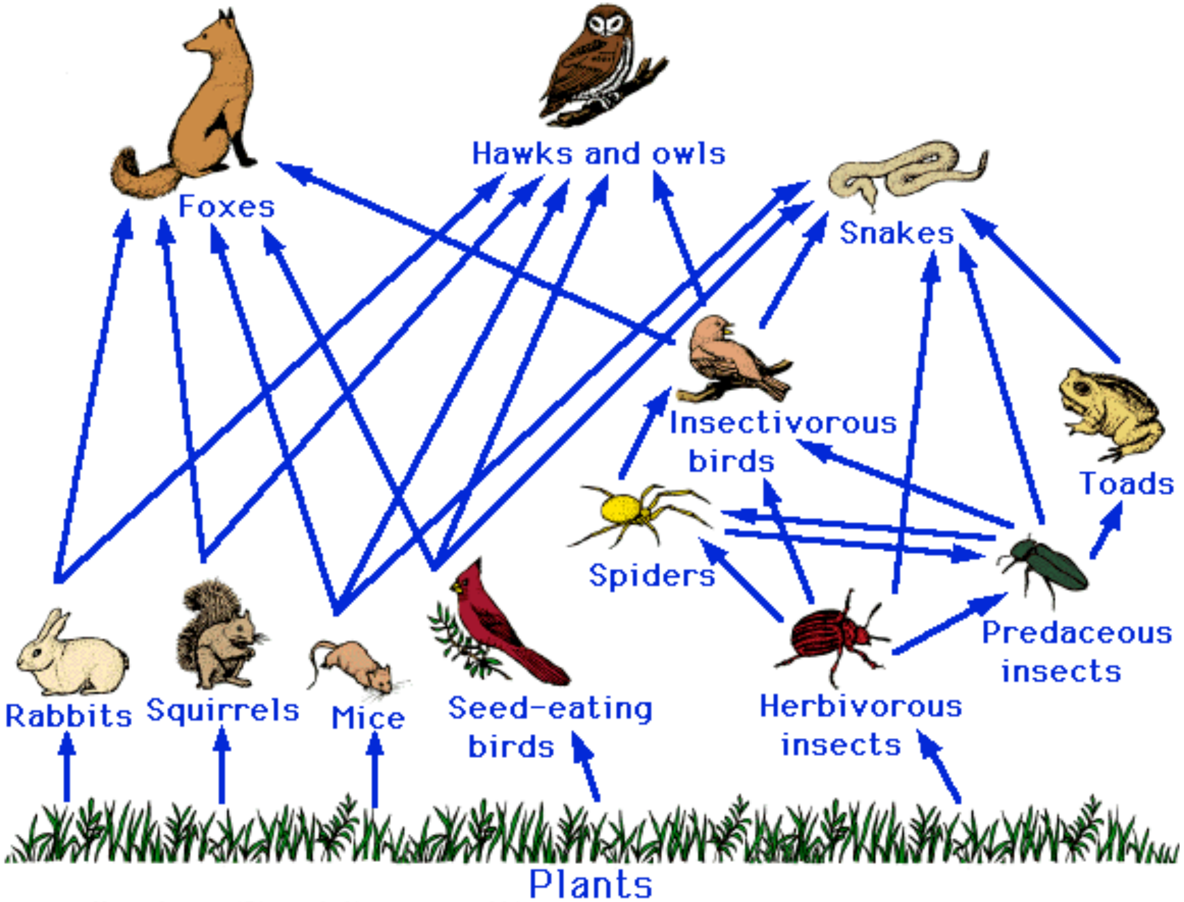
Exemplo:cadeia alimentar



GRAU DE ENTRADA:

Plantas = 0
Coelhos = 1
Esquilos = 1
Ratos = 1
Pássaros = 1
Insetos = 1
Aranhas = 2
Pássaros Inset. = 3
Sapos = 1
Cobras = 6
Raposas = 5
Falcões = 5

Exemplo:cadeia alimentar



GRAU DE TOTAL:

Plantas = 5
Coelhos = 3
Esquilos = 3
Ratos = 3
Pássaros = 4
Insetos = 4
Aranhas = 4
Pássaros Inset. = 5
Sapos = 2
Cobras = 6
Raposas = 5
Falcões = 5

Universidade Federal do ABC

Aplicação I:
Otimização

Alguns Problemas de Otimização

Uma empresa que realiza entregas na Grande São Paulo possui um centro de distribuição e um caminhão
Qual caminho o caminhão deve percorrer de modo a realizar todas as entregas com a menor quilometragem?

Você deseja implementar em um programa de GPS uma funcionalidade de cálculo da melhor rota entre dois pontos, de modo a minimizar o tempo de viagem
Como calcular a rota com o menor tempo?

Você está planejando uma rede de galerias subterrâneas para captação de águas da chuva, evitando alagamentos
Como calcular o fluxo máximo de água que a rede de galerias é capaz de escoar?

1) Caixeiro Viajante

Um problemas clássico é o do caixeiro viajante

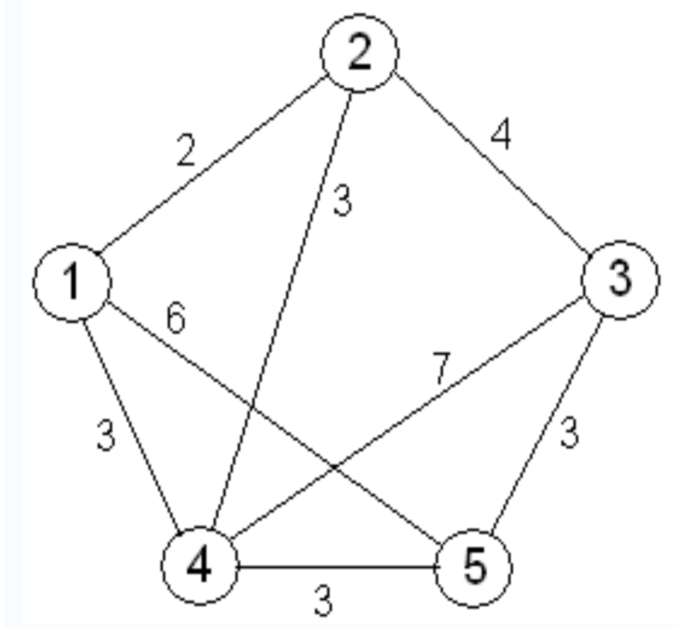
Imagine um caixeiro viajante que deseja encontrar o caminho mais curto que passe por todas as cidades de seu país

No exemplo ao lado, vemos o caminho mais curto que passa por diversas cidades da Alemanha

Modelagem por grafos

Uma maneira de resolver o problema é realizando sua modelagem por grafo ponderado

Cada cidade é representada por um nó e cada estrada por um vértice, com peso igual ao comprimento da estrada



Mas podemos também minimizar:
(1) Tempo gasto na viagem
(2) Custo total da viagem

Exercício : Qual o caminho mais curto no grafo acima começando numa cidade qualquer, entre várias, visitando cada cidade precisamente uma vez e regressando à cidade inicial?

Entrega de Encomendas

Voltando ao nosso problema inicial:

Uma empresa que realiza entregas na Grande São Paulo possui um centro de distribuição e um caminhão

Qual caminho o caminhão deve percorrer de modo a realizar todas as entregas com a menor quilometragem?

Exercício: Como você modelaria este problema utilizando a abordagem de grafos? Em particular, pense em como você definiria os nós e os vértices do grafo

Solução do Caixeiro Viajante

O número de roteiros possíveis envolvendo n cidades é

`R(n)=(n-1)!`, um número que cresce rapidamente

n	rotas por segundo	(n - 1)!	cálculo total
5	250 milhoes	24	insignific
10	110 milhoes	362 880	0.003 seg
15	71 milhoes	87 bilhoes	20 min
20	53 milhoes	1.2×10^{17}	73 anos
25	42 milhoes	6.2×10^{23}	470 milhoes de anos

Os algoritmos exatos mais rápidos requerem um tempo que cresce exponencialmente com o número de cidades

Mas existem aproximações muito mais rápidas :-)

Tabela retirada de http://www.mat.ufrgs.br/~portosil/caixeiro.html

2) Menor Distância

Suponha que você deseje implementar em um programa de GPS uma funcionalidade de cálculo da melhor rota entre dois pontos, de modo a minimizar o tempo de viagem

Como calcular a rota com o menor tempo?

Exercício: Modele o problema utilizando grafos e pense em como você faria para encontrar a menor distância no grafo

Modelagem por grafos

Você pode modelar o problema atribuindo um nó a cada cruzamento a uma aresta a cada trecho de rua

Cada aresta deve receber um peso, que pode ser o tempo para percorrê-lo
ou seu comprimento

Desenhe um grafo que represente as ruas da figura ao lado

Modelagem por grafos

- A partir do modelo da cidade, seu programa pode calcular a melhor rota entre 2 pontos utilizando algoritmos bem conhecidos para encontrar a menor distância entre 2 pontos
- Ao contrário do problema do caixeiro viajante, existem algoritmos que encontram a distância entre 2 pontos de modo eficiente, isto é, polinomial com relação ao número de nós e arestas do grafo.
- Notem que sem realizar uma modelagem do problema, não seria possível escrever o programa que realiza a tarefa

Resumo

Até aqui vimos:

- ✓ Tipos de grafos.
- ✓ Ordem = total de vértices.
- ✓ Tamanho = total de arestas.
- ✓ Conectividade dos vértices de das arestas.

Algumas definições importantes:

- ✓ Caminho.
- ✓ Comprimento do caminho.
- ✓ Conexidade