S T Q Q S S D

Nome: Lucas Moura de Almeida
RA: 11201811415

1) $x(0) = x_0$

$x(1) = 2x_0$

$x(t) = 3x_0$

$$\frac{dx}{dt} = qx \longrightarrow \int \frac{dx}{x} = \int q\,dt$$

$$\ln(x) = qt + C$$

$$x(t) = e^{qt+C} = e^{qt} \cdot e^{C} = C_1 e^{qt}$$

Utilizando as condições iniciais, chegamos na expressão dada no enunciado:

$$x(0) = C_1 e^{q0} = x_0 \longrightarrow C_1 = x_0$$

$$\underline{x(t) = x_0 e^{qt}}$$

Utilizando o fato de que $x(1) = 2x_0$, podemos obter q

$$x(1) = x_0 e^{q} = 2x_0$$

$$e^{q} = 2 \longrightarrow \ln(e^{q}) = \ln(2)$$

$$\therefore q = \ln(2)$$

Desse modo é possível obter o tempo para o qual temos o número de bactérias igual a $3x_0$

$$x(t) = 3\cancel{x_0} = \cancel{x_0} e^{\ln(2)t}$$

$$\longrightarrow e^{\ln(2)t} = 3 \longrightarrow \ln(2)t = \ln(3)$$

$$\therefore t = \frac{\ln(3)}{\ln(2)} = \boxed{1,585\ h}$$

1

Nome: Lucas Moura de Almeida

__/__/__ RA: 11201811415

S T Q Q S S D

2) a) $\ddot{w}(t) + \frac{b}{m}\dot{w}(t) + \frac{K}{m}w(t) = \frac{K}{m}u(t)$

$y(t) = w(t)$; $x_1(t) = w(t)$
$x_2(t) = \dot{w}(t)$

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

$$\dot{x}_1(t) = \dot{w}(t) = x_2(t)$$
$$\dot{x}_2(t) = \ddot{w}(t) = -\frac{b}{m}x_2(t) - \frac{K}{m}x_1(t) + \frac{K}{m}u(t)$$

Portanto, agora podemos descrever o sistema na forma vetorial-matricial:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -K/m & -b/m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ K/m \end{bmatrix}u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + 0\,u(t)$$

De modo que:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -K/m & -b/m \end{bmatrix} ; B = \begin{bmatrix} 0 \\ K/m \end{bmatrix} ; C = [1, 0] ; D = 0$$

S T Q Q S S D

Nome: Lucas Moura de Almeida

RA: 11.201811415

__/__/__

2) b)

Dado a matriz A definida no item anterior, temos:

$$\det(q I - A) = 0$$

$$\det\left(q\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0 & 1\\ -K/m & -b/m\end{bmatrix}\right) = 0$$

$$\det\left(\begin{bmatrix}q & 0\\ 0 & q\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0 & 1\\ -K/m & -b/m\end{bmatrix}\right) = 0$$

$$\det\left(\begin{bmatrix}q & -1\\ K/m & q + b/m\end{bmatrix}\right) = 0$$

$$q^2 + \frac{qb}{m} + \frac{K}{m} = 0$$

$$q = \frac{-\frac{b}{m} \pm \sqrt{\frac{b^2}{m^2} - \frac{4K}{m}}}{2}$$

$$\therefore \quad q = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4mK}}{2m}$$

Para um sistema subamortecido as raízes da equação característica serão complexas conjugadas, portanto:

$$q = \frac{-b \pm j\sqrt{4mK - b^2}}{2m} \text{ ; temos que } \quad 4mK - b^2 > 0$$

$$b^2 < 4mK$$

$$-2\sqrt{mK} < b < 2\sqrt{mK}$$

spiral

Contudo, como é dito no enunciado do exercício 2 que o parâmetro b deve ser estritamente positivo, então temos que

$$\boxed{0 < b < 2\sqrt{mK}}$$

2) c) Considerando $b = 0$, temos:

$$\det\left(\begin{bmatrix} q & 0 \\ 0 & q \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -K/m & 0 \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} q & -1 \\ K/m & q \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$q^2 + \frac{K}{m} = 0$$

$$q^2 = -\frac{K}{m} \longrightarrow q = \pm\sqrt{\frac{-K}{m}}$$

$$\therefore \boxed{q = \pm j\sqrt{\frac{K}{m}}}$$

Como todos os autovalores de A têm parte real igual a zero, é possível classificar o sistema como estável

S T Q Q S S D

Nome: Lucas Moura de Almeida
RA: 11201811415

__/__/__

2) d)

$$\ddot{w}(t) + \frac{b}{m}\dot{w}(t) + \frac{K}{m}w(t) = \frac{K}{m}u(t)$$

forma padrão: $\ddot{w}(t) + 2\xi w_n \dot{w}(t) + w_n^2 w(t) = w_n^2 u(t)$

$m = 2Kg$

Primeiramente obtemos os dados de máximo sobressinal (M_p) e o tempo de pico (t_p) através da Figura 2.

$M_p = 0,4 = 40\%$
$t_p = 1s$

Desse modo podemos obter ξ e w_n:

$$\xi = \sqrt{\frac{[\ln(0,4)]^2}{[\ln(0,4)]^2 + \pi^2}} = \boxed{0,280}$$

$$w_n = \frac{\pi}{1\sqrt{1-(0,28)^2}} = \boxed{3,273 \text{ rad/s}}$$

Comparando a equação principal com sua forma padrão, temos:

$b = 2m\xi w_n$; $K = m.w_n^2$

$b = 2.2.0,280.3,273 = \boxed{3,666 \text{ Ns/m}}$ //

$K = 2.(3,273)^2 = \boxed{21,425 \text{ N/m}}$ //

Nome: Lucas Moura de Almeida

RA: 11201811415

__/__/__ S T Q Q S S D

2) e) $u(t) = K_p\, e(t) + K_d\, \dot{e}(t)$

$e(t) = r(t) - y(t)$; $r(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \geq 0 \\ 0 & \text{se } t < 0 \end{cases}$

$M_p = 20\%$; $m = 2{,}0\,kg$; $b = 3{,}666\ Ns/m$; $K = 21{,}425\ N/m$

$t_s = 1{,}0\,s$

$$\xi = \sqrt{\frac{[\ln(0{,}2)]^2}{[\ln(0{,}2)]^2 + \pi^2}} = \boxed{0{,}456}$$

$$\omega_n = \frac{4}{(0{,}456)1} = \boxed{8{,}772\ rad/s}$$

$$u(t) = K_p(1 - \omega(t)) + K_d(-\dot{\omega}(t))$$

$$u(t) = K_p - K_p\,\omega(t) - K_d\,\dot{\omega}(t)$$

$$\ddot{\omega}(t) + \frac{b}{m}\dot{\omega}(t) + \frac{K}{m}\omega(t) = \frac{K}{m}(K_p - K_p\,\omega(t) - K_d\,\dot{\omega}(t))$$

$$\ddot{\omega}(t) + \dot{\omega}(t)\underbrace{\left(\frac{b}{m} + \frac{K K_d}{m}\right)}_{2\xi\omega_n} + \omega(t)\underbrace{\left(\frac{K}{m} + \frac{K K_p}{m}\right)}_{\omega_n^2} = \frac{K K_p}{m}$$

$$\omega_n^2 = \frac{K(1 + K_p)}{m} \quad ; \quad 2\xi\omega_n = \frac{(b + K K_d)}{m}$$

Nome: Lucas Moura de Almeida
RA: 11201811415

S T Q Q S S D ___/___/___

$$K_p = \left(\frac{m\,w_n^2}{K}\right) - 1 = \left(\frac{2\,(8{,}772)^2}{21{,}425}\right) - 1 = 6{,}183$$

$$K_d = \frac{(2m\xi w_n - b)}{K} = \frac{(2.2.0{,}456.8{,}772 - 3{,}666)}{21{,}425}$$

$$= 0{,}576$$

$$\therefore \boxed{\begin{matrix} K_p = 6{,}183 \\ K_d = 0{,}576 \end{matrix}}$$

2) f) Para o sistema controlado (item e), podemos calcular o tempo de subida

$$w_d = w_n\sqrt{1-\xi^2} = 8{,}772\sqrt{1-(0{,}456)^2} = 7{,}807$$

$$\therefore t_r = \frac{\pi - tg^{-1}\,(w_d/(\xi w_n))}{w_d}$$

$$= \frac{\pi - tg^{-1}\,(7{,}807/(0{,}456.8{,}772))}{7{,}807}$$

$$\therefore \boxed{t_r = 0{,}262\,s}$$

spiral

Nome: Lucas Moura de Almeida
RA: 11201811415

__/__/__ S T Q Q S S D

2) g)

$m = 2(1+0,3) = \underline{2,6\,kg}$

Com os mesmos índices de desempenho do transitório do item e, temos:

$M_p = 0,2$; $t_s = 1,0s$; $b = 3,666\,Ns/m$; $K = 21,425\,N/m$

$\xi = 0,456$ e $w_n = 8,772\,rad/s$

$u(t) = K_p - K_p w(t) - K_d \dot{w}(t)$

$$\ddot{w}(t) + \dot{w}(t)\underbrace{\left(\frac{b}{m} + \frac{K K_d}{m}\right)}_{2\xi w_n} + w(t)\underbrace{\left(\frac{K}{m} + \frac{K K_p}{m}\right)}_{w_n^2} = \frac{K K_p}{m}$$

$$w_n^2 = \frac{K(1+K_p)}{m} \quad ; \quad 2\xi w_n = \frac{(b + K K_d)}{m}$$

$$K_p = \left(\frac{m w_n^2}{K}\right) - 1 \quad ; \quad K_d = \frac{(2 m \xi w_n - b)}{K}$$

$$K_p = \left(\frac{2,6\,(8,772)^2}{21,425}\right) - 1 = \underline{8,338}$$

$$K_d = \frac{(2 \cdot 2,6 \cdot 0,456 \cdot 8,772 - 3,666)}{21,425} = \underline{0,799}$$

S T Q Q S S D

Nome: Lucas Moura de Almeida
RA: 11201811415

__/__/__

2) h) $q = -\xi w_n \pm j w_n \sqrt{1-\xi^2}$

Para um sistema assintoticamente estável os autovalores da matriz A estão no semiplano esquerdo do plano complexo, de modo que a parte real de q é menor que zero

$\therefore \xi w_n > 0$

Considerando o desenvolvimento dos itens anteriores, sabemos que $Kd = \dfrac{(2\xi w_n m - b)}{K}$

$$\rightarrow \frac{(Kd\,K + b)}{2m} = \xi w_n > 0$$

$$\therefore \frac{(Kd\,K + b)}{2m} > 0$$

$$\boxed{Kd > \frac{-b}{K}}$$

spiral