Universidade Federal do ABC

1ª Avaliação de Introdução às Equações Diferenciais Ordinárias

Nome: ______________________________________ **Turma:** __________

1) (2.5 pontos) Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y\prime - y = 1 + 3cos(t) \\ y(0) = a \end{cases}$$ - linear

onde $a \in \mathbb{R}$.

(a) Encontre a solução geral da equação diferencial.

(b) Encontre a solução do p.v.i. problema do valor inicial

(c) Encontre o(s) valor(es) de a para o(s) qual(is) a solução do p.v.i. permaneça finita quando $t \to \infty$.

2) (2.5 pontos) Uma população de bactérias cresce a uma taxa proporcional a população presente. Sabendo-se que após uma hora a população é 2 vezes a população inicial, determine:

(a) A população como função do tempo. $\frac{dN}{dt} = KN$

(b) O tempo necessário para que a população triplique.

(c) Faça um esboço do grafico da população em função do tempo.

3)(2.5 pontos) Encontre a solução geral da equação diferencial $y' = \dfrac{x^2+y^2}{2xy}$. - homogênea

4) (2.5 pontos) Considere a equação de Bernoulli

$$y' + p(t)y = g(t)y^n$$

onde $n \neq 0, 1$. Mostre que a mudança de variável $u = y^{1-n}$ reduz a equação de Bernoulli a uma equação linear.

Boa prova !

Prova 1 - Noturno

Q1. $y' - y = 1 + 3\cos x$ $\qquad y(0) = a$

a) $\mu = e^{-x}$

$$\int \frac{d}{dx} e^{-x} y = \int e^{-x} + \int e^{-x} 3 \cos x$$

$$\cancel{e^{-x}} y = -e^{-x} + \frac{3}{2} \cancel{e^{-x}} (\text{sen}\, x - \cos x) + c$$

$$\boxed{y = -1 + \frac{3}{2} (\text{sen}\, x - \cos x) + c e^{x}}$$

b) $y(0) = -1 + \frac{3}{2} (\cancelto{0}{\text{sen}\, 0} - \cancelto{1}{\cos 0}) + c \cancelto{1}{e^{0}} = a$

$-1 - \frac{3}{2} + c = a \qquad c = a + \frac{5}{2}$

$$\boxed{y(t) = -1 + \frac{3}{2} (\text{sen}\, x - \cos x) + \left(a + \frac{5}{2}\right) e^{x}}$$

c) $y = \underbrace{-1}_{\text{constante}} + \frac{3}{2} \underbrace{(\text{sen}\, x - \cos x)}_{\text{limitado}} + c\, e^{x}$

$x \to \infty$

$e^{x} \to \infty$

∴ C deve ser 0 p/ que a solução seja finita.

$a + \frac{5}{2} = 0 \qquad \boxed{a = -\frac{5}{2}}$

02. $\frac{db}{dt} = kb$

a) $\int \frac{1}{b}\, db = k \int dt$

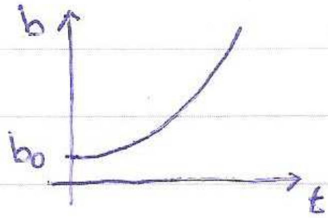
$\ln b = kt + c \rightarrow \boxed{b(t) = b_0 e^{kt}}$

b) $b(1) = 2b_0$

$e^{k} = 2 \qquad k = \ln 2$

$e^{kt} = 3 \qquad kt = \ln|3|$

$$\boxed{t = \frac{\ln 3}{\ln 2}}$$

c) 

→ crescimento exponencial

03. $y' = \frac{x^2 + y^2}{2xy}$ → homogênea de grau 2

$y = ux \qquad dy = u\,dx + x\,du$

$(2xy)\,dy = (x^2 + y^2)\,dx$

$2x \cdot ux\,[u\,dx + x\,du] = [x^2 + u^2x^2]\,dx$

$2\cancel{x^2}u\,[u\,dx + x\,du] = [\cancel{x^2}(1 + u^2)]\,dx$

$2u^2\,dx + 2ux\,du = [1 + u^2]\,dx$

$2xu\,du = [1 + u^2 - 2u^2]\,dx$

$2\int \frac{u}{1-u^2}\,du = \int \frac{1}{x}\,dx$

$$\cancel{2}\left[-\frac{1}{\cancel{2}}\ln|1-u^2|\right] = \ln x + c$$

$$(1-u^2)^{-1} = Ax \Rightarrow \frac{1}{1-u^2} = Ax$$

$$1-u^2 = \frac{1}{Ax} \Rightarrow -u^2 = \frac{1}{Ax} - 1 \Rightarrow u = \pm\sqrt{-\frac{1}{Ax}+1}$$

$$y = ux \rightarrow y(x) = x\left[\pm\sqrt{-\frac{1}{Ax}+1}\right]$$

04. $y' + p(t)\,y = g(t)\,y^n \qquad u = y^{1-n}$

1. Dividindo tudo por y^n:

$$y^{-n}\frac{dy}{dt} + p(t)\,y\cdot y^{-n} = g(t)$$

$$y^{-n}\frac{dy}{dt} + p(t)\,y^{1-n} = g(t)$$

$$u = y^{1-n} \qquad \frac{du}{dt} = (1-n)\,y^{1-n-1}\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{du}{dt}\,\frac{y^n}{(1-n)}$$

$$\cancel{y^{-n}}\,\frac{\cancel{y^n}}{(1-n)}\frac{du}{dt} + p(t)\,u = g(t)$$

2. Substituindo dy/dt e multiplicando tudo por $(1-n)$:

$$\boxed{\frac{du}{dt} + (1-n)\,p(t)\,u = (1-n)\,g(t)}$$