Os Espaços Euclideanos

UFABC, 2º quad. 2011

Várias variáveis ou vetores

Pontos e vetores são as mesmas entidades.
Vetores sem flecha ou negrito.
Indexação usual: $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ em $\mathbb{R}^n$.
Norma: $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$.
Produto interno: $\langle x|y \rangle = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n$.
Usual: $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ e (x, y, z) em vez de (x_1, x_2, x_3).

Os espaços que mais estudaremos, neste curso, são realmente o plano $\mathbb{R}^2$ e o espaço tridimensional $\mathbb{R}^3$. Entretanto, convém estudar o espaço euclideano $\mathbb{R}^n$ em geral (cuja dimensão é um inteiro positivo n), que é o produto cartesiano de n eixos, ou seja, "cópias da reta real". Toda vez que houver dúvidas, então, concentre-se nos casos particulares bi- e tridimensional: quando se faz um exemplo ou aplicação nesses casos, costuma-se usar coordenadas $x, y, z \in \mathbb{R}$ em vez de $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$.

Não destacaremos os vetores, na escrita, com flecha ou negrito: determinar quem é escalar ou vetor (e em qual dimensão) será tarefa do leitor, a partir do contexto. Também não distinguiremos entre vetores e pontos, porque as n-uplas coordenadas desempenham ambos os papéis simultaneamente.

Note que, dados n números reais $x_1, \ldots, x_n$, podemos formar o vetor $x = (x_1, \ldots, x_n)$, que é um elemento de $\mathbb{R}^n$. Também, dado $x \in \mathbb{R}^n$, assumiremos automaticamente que x_i é a i-ésima coordenada ou entrada de x. (Atenção: alguns autores usam a indexação exponencial x^i, ou talvez até a notação de Einstein $x^i y_i$ para a soma que, aqui, escreveremos $\sum_{i=1}^n x_i y_i$.)

Finalmente, observe que utilizamos barras duplas $\|\cdot\|$ para a norma do vetor: isso é precisamente o que, nos cursos iniciais, chamou-se "módulo" do vetor; adotamos novos nome e símbolo para frisar a diferença com escalares em algumas fórmulas; por exemplo, $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$. Para o produto interno, há inúmeras notações em uso; na do slide, temos $\|x\|^2 = \langle x|x \rangle$.

Métrica e topologia

A função $d\colon (\mathbb{R}^n)^2 \to \mathbb{R}$, $d(x, y) = \|x - y\|$, satisfaz:

- $d(x, y) \geqslant 0$;
- $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
- $d(y, x) = d(x, y)$;
- $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$.

e é chamada *função distância ou métrica.*

Essa função simplesmente mede a distância entre dois vetores. A última propriedade que listamos é a chamada *desigualdade triangular:* visualize-a no plano, marcando vetores x, y, z como os vértices de um triângulo, medindo seus lados e verificando quais relações essas medidas devem satisfazer para que o triângulo possa ser formado.

De modo análogo à reta real, cada espaço euclideano tem uma estrutura *algébrica,* que descreve como se opera com os vetores — somando-os coordenada por coordenada — e também *analítica e topológica.* Essa parte, que veremos agora, descreve em termos formais o nosso conhecimento já intuitivo sobre aproximações e distâncias.

A distância fundamenta-se na norma e em suas propriedades, que são similares ao do módulo de números reais: para $x, y \in \mathbb{R}^n$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, valem sempre $\|x\| \geqslant 0$; $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$; $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ e $\|\lambda x\| = |\lambda|.\|x\|$. (Uma demonstração destas propriedades utiliza a própria definição de norma. Verifique, então, que elas podem ser usadas para demonstrar aquelas da distância: para a desigualdade triangular, use $x - z = (x - y) + (y - z)$.)

Sabendo-se comparar vetores, através da noção de distância, os conceitos de limite e continuidade poderão ser formulados de modo idêntico ao usado sobre $\mathbb{R}$. Para ver isso explicitamente, convém reconhecermos algumas entidades:

Dados $a \in \mathbb{R}^n$ e $r > 0$, defina

$$B(a; r) = \{\, x \in \mathbb{R}^n \mid d(x, a) < r \,\}.$$

É a *bola aberta de centro a e raio r.*

Em $n = 2$, é um disco sem sua fronteira.

Em $n = 1$, é o intervalo aberto $]a - r, a + r[$.

Uma *vizinhança* de $a \in \mathbb{R}^n$ é um $V \subseteq \mathbb{R}^n$ que contém $B(a; \varepsilon)$ para algum $\varepsilon > 0$.

Podemos andar um pouco em qualquer direção, a partir de a, sem sair de V.

(Isso será útil quando quisermos fazer cálculos no entorno de a.)

Enfatizamos: é preciso ter o ponto a especificado.

A palavra "vizinhança" é utilizada realmente com seu significado cotidiano. Concentramo-nos no que acontece *localmente* em torno de a, não em todo o espaço ou em todo o domínio de uma função. Porém, exigimos que temos espaço ao redor de a para efetuarmos cálculos de interesse.

Com tal conceito de vizinhança, definem-se como em $\mathbb{R}$:

- pontos de acumulação;
- pontos isolados;
- pontos interiores;
- conjuntos abertos;
- topologia;
- conjuntos fechados;
- conjuntos compactos.

(Discussão em aula.)

Ou seja: Todas as definições que fizemos em "A Estrutura dos Números Reais", para o espaço $\mathbb{R}$, podem ser feitas analogamente para cada espaço euclideano $\mathbb{R}^n$, substituindo-se aquele conceito de vizinhança (que exigia a continência de um intervalo aberto) pelo novo conceito (continência de uma bola aberta).

Deixamos essa renovação a seu cargo, assim como uma certificação em livros-texto, enquanto o próximo slide traz a solução a respeito de conjuntos abertos. Atente para que a maioria das definições, como a de ponto isolado, são idênticas (*mutatis mutandis*) às feitas em $\mathbb{R}$, mas algumas caracterizações não permanecem válidas. Por exemplo, conjuntos compactos são precisamente aqueles simultaneamente fechados e limitados, mas conjuntos conexos podem não ser conexos por caminhos.

Não se preocupe em determinar tudo isso imediatamente. Vejamos apenas a generalização dos principais conceitos: conjuntos abertos, limites e continuidade.

> Um conjunto é *aberto* quando todos os seus pontos são interiores.
> Ou seja: $A \subseteq \mathbb{R}^n$ é aberto $\Leftrightarrow (\forall x \in A)(\exists \varepsilon > 0)\, B(x;\varepsilon) \subseteq A$.

> **Limites**
> Suponha $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $f\colon D \to \mathbb{R}^m$, $L \in \mathbb{R}^m$ e a pto. acumulação de D.
> Então: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L \Leftrightarrow$
>
> $$\Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D)\left[0 < \|x-a\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - L\| < \varepsilon\right].$$

Essa definição funciona, em particular, para funções $s\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}^m$, que correspondem a sequências de vetores; lembre que o único ponto de acumulação do conjunto $\mathbb{N}$ é o infinito ∞.

Nos espaços $\mathbb{R}^m$ com $m \geqslant 2$, não consideraremos pontos infinitos, ou seja, sempre assumiremos que a é um vetor comum.

> **Continuidade**
> Suponha $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $f\colon D \to \mathbb{R}^m$ e $a \in D$.
> *f é contínua em a* se a não é pto. acum. D *ou* se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$, isto é,
>
> $$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D)\left[\, \|x-a\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(a)\| < \varepsilon\right].$$
>
> Diz-se que f é contínua se o for em todo ponto de D. (Casos contrários: *descontínua.*)

> **Componentes escalares**
> Função $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ origina (e pode ser definida a partir de) *componentes* $f_i\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de modo que
> $$f = (f_1, \ldots, f_m).$$
> (Diagrama na lousa.)

> Abordagem comum na Matemática:
> Somamos vetores coordenada por coordenada;
> Agora, estudaremos f estudando cada f_i!

(Outro exemplo da mesma abordagem "ponto a ponto" é definir a soma de funções $f + g$ através de uma definição de seu valor, em separado, em cada ponto do domínio: $f(x) + g(x)$.)

Isso significa que podemos estudar uma função observando, em separado, cada uma de suas componentes. Desse modo, para responder a alguma pergunta sobre funções *vetoriais* $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ — o que é sua integral, sua derivada, etc. —, poderemos antes formular a mesma pergunta sobre funções *escalares* $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, ainda de várias variáveis. Firmada uma resposta, tentaremos generalizá-la para funções vetoriais pelo método "coordenada a coordenada". *Esse será o nosso procedimento neste curso.*

Por exemplo, valem os resultados do próximo slide:

> Assim:
> $\lim_{x\to a} f(x) = L \Leftrightarrow (\forall i)\ \lim_{x\to a} f_i(x) = L_i$.
> f é contínua $\Leftrightarrow$ todas as componentes f_i são contínuas.

Essas equivalências exigem, obviamente, demonstrações, porque os conceitos envolvidos foram definidos utilizando-se bolas abertas. Deixamos a seu cargo pensar a respeito, observando que uma vizinhança de um ponto a contém sempre um paralelepípedo aberto (produto cartesiano de intervalos abertos) que contém a e, reciprocamente, qualquer paralelepípedo desses será, também, uma vizinhança aberta, por conter uma pequena bola aberta centrada em a.

Note bem: *Não* podemos escrever $\lim_{x\to a} f(x) = L \Leftrightarrow (\forall i, j)\ \lim_{x_j\to a_j} f_i(x_j) = L_i$ porque, de fato, cada f_i tem como argumento um vetor de n variáveis, ou seja, requer a definição de todos $x_1, \ldots, x_n$. A decomposição do limite (e da condição de continuidade) nas componentes é feita sobre o espaço-imagem, não sobre o domínio.

Várias técnicas que conhecemos para o cálculo de limites (e demonstração de continuidade) em $\mathbb{R}$ são válidas também no caso vetorial, devidamente adaptadas, mas é preciso atentar que $x \to a$ significa que as coordenadas de x aproximam-se das respectivas coordenadas de a "de todas as formas possíveis".

Por exemplo, tome

$$f(x, y) = \frac{x^2}{x^2 + y^2},$$

onde x, y são variáveis reais segundo nossa convenção para exemplos. Podemos perguntar se existe $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$. Aqui, $(x, y) \to (0, 0)$ significa que o vetor (x, y) aproxima-se da origem, mas o modo como essa aproximação se dá não é especificada; o valor do limite deverá ser o mesmo para qualquer "jeito" que (x, y) vá a $(0, 0)$. Se supusermos que $x \equiv 0$ e $y = t$ com $t \to 0$, temos mesmo $(x, y) \to (0, 0)$ e

$$\lim_{t\to 0} f(0, t) = \lim_{t\to 0} \frac{0^2}{0^2 + t^2} = 0.$$

Porém, se tomarmos ambos $x = y = t$ com $t \to 0$, também $(x, y) \to (0, 0)$ e agora

$$\lim_{t\to 0} f(t, t) = \lim_{t\to 0} \frac{t^2}{t^2 + t^2} = \tfrac{1}{2}.$$

Assim, devemos concluir que não existe $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$ e que nenhum valor para $f(0, 0)$ tornará f contínua na origem.

Fica claro, também, que há inúmeros "modos" de $(x, y) \to (0, 0)$, como $x = t^2 + \operatorname{sen} t$ e $y = \exp(-1/|t|)$ com $t \to 0$ e outros. Em geral, é impossível considerar todas as possibilidades para o cálculo do limite. Veremos ao longo do curso como fazê-lo praticamente.