Universidade Federal do ABC

1ª Avaliação de Cálculo Numérico

Nome: Lucas Moura de Almeida.

1) Represente o número $x_1 = (2,11)_4$ no sistema de ponto flutuante $F(3,6,3,3)$. Que números na base decimal não são representados nesse sistema?

Resposta: $x_1 = (2,11)_4 = 2,3125 = (0,202210 \times 3)_3$. Overflow: $(-\infty\ ,\ -26,9630) \cup (26,9630\ ,\ \infty)$. Underflow: $(-0,01235\ ,\ 0,01235)$.

2) Seja a função $f(x) = ln(x) + x^2 - 3$. Obtenha 2 funções iterativas do Método Iterativo Linear (MIL). Verifique, usando o critério de convergência, se essas funções irão convergir para a raiz de $f(x)$. Obtenha uma aproximação da raiz positiva pelo MIL com erro relativo inferior à $0,1$.

Resposta: $\psi_1(x) = e^{-x^2+3}$ e $\psi_2(x) = \sqrt{-ln(x)+3}$. Existe uma raiz positiva, $\xi \in (1,2)$. Com $x_0 = 1,5$ e usando $\psi_2(x) = \sqrt{-ln(x)+3}$, obtemos $\xi \approx x_2 = 1,5885$.

3) Sejam as funções $f_1(x) = cos(x/2)$ e $f_2(x) = ln(3x)$. Determine, pelo método de Newton-Raphson, um ponto de interseção das duas funções com erro relativo inferior à $0,01$.

Resposta: $x_{n+1} = x_n - \dfrac{cos(x_n/2) - ln(3x_n)}{-0,5sen(x_n/2) - 1/x_n}$. Com $x_0 = 0,5$ obtemos $\xi \approx x_2 = 0,8320$.

4) Resolva o sistema linear abaixo pela decomposição LU.

$$\begin{cases} 2x & +4y & -z & = 5 \\ -3x & +y & -5z & = -7 \\ 5x & +y & -3z & = 3 \end{cases}$$

Resposta: $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1,5 & 1 & 0 \\ 2,5 & -1,2857 & 1 \end{bmatrix}, U = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 0 & 7 & -6,5 \\ 0 & 0 & -8,8571 \end{bmatrix}.$

Solução: $\{(1\ ;\ 1\ ;\ 1)\}$

~~3~~) Resolva novamente o sistema linear do exercício anterior, mas desta vez por um método iterativo, com erro relativo inferior à $0,1$. É necessário permutar linhas ou colunas do sistema para garantir a convergência do método? Justifique.

Resposta: A permutação é necessária. Com duas iterações o método converge para aproximadamente $(x, y, z) = \{(1\ ;\ 1\ ;\ 1)\}$.

Utilize 4 casas decimais. Todas as contas devem ser justificadas !

Boa Prova !

1) $X_1 = (2{,}11)_4$; $F(\overset{\text{Base}}{3}, \underset{\text{mantissa}}{6}, 3, 3)$ $\quad -3 \leq e \leq 3$

Base $\underline{3 : 0 \ 1 \ 2}$

$(\overset{0}{2},\overset{-1}{1}\overset{-2}{1})_4 = 2.4^0 + 1.4^{-1} + 1.4^{-2} = \boxed{(2{,}3125)_{10}}$

$\therefore$ 2 "cabe" em 3 =>

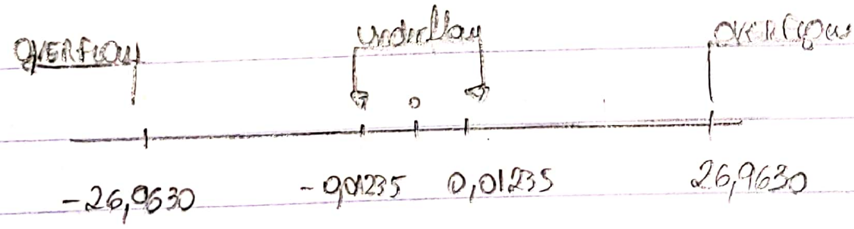
$0{,}3125 \times 3 = \text{0}{,}9375$; $0{,}9375 \times 3 = \text{2}{,}8125$; $0{,}8125 \times 3 = \text{2}{,}4375$; $0{,}4375 \times 3 = \text{1}{,}3125$; $0{,}3125 \times 3 = \text{0}{,}9375$

$\therefore (2{,}11)_4 = (0{,}202210 . 3^1)_3$

Afim de calcular que números não são representados, temos:

Maior valor na base 3 : $0{,}222222 . 3^3 = (\overset{2}{2}\overset{1}{2}\overset{0}{2},\overset{-1}{2}\overset{-2}{2}\overset{-3}{2})_3 = 2.3^2 + 2.3^1 + 2.3^0$
$+ 2.3^{-1} + 2.3^{-2} + 2.3^{-3} = 26{,}9630$

Menor valor na base 3 : $0{,}100000 . 3^{-3} = (0{,}0001000000)_3 = 1.3^{-4}$
$\cong 0{,}01235$



$\therefore$ OVERFLOW $= (-\infty ; -26{,}9630) \cup (26{,}9630 ; +\infty)$

UNDERFLOW $= (-0{,}01235 ; 0{,}01235)$.

2) $f(x) = \ln(x) + x^2 - 3$

$\ln(x) = 3 - x^2$

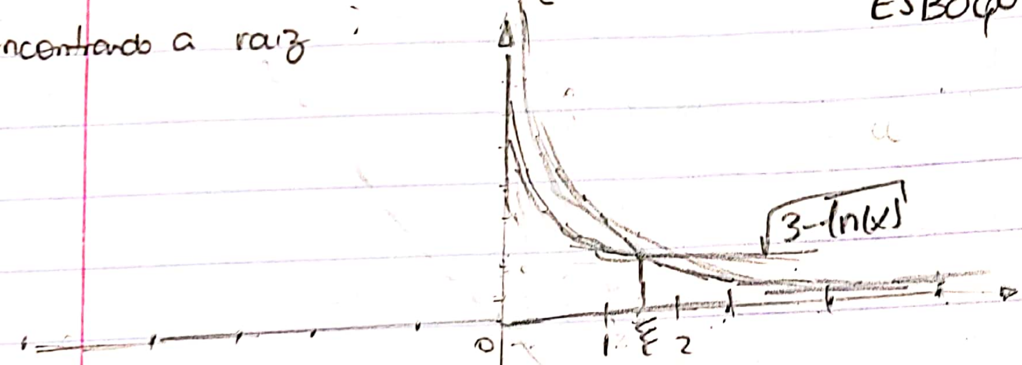
$\varphi_1(x) = x = \underline{e^{(3-x^2)}}$

$\varphi_2(x) = \underline{\sqrt{3 - \ln(x)}}$

$e^{(3-x^2)}$

Encontrando a raiz:

ESBOÇO:



através do método de Bolzano,

Tabela:

x	f(x)	
0	—	
1	-2	raiz
2	1,6931	
3	7,0986	

$\xi \in (1, 2)$

Critério de convergência: $|\varphi'(x)| < 1$

$$\left| -2x \, e^{3-x^2} \right| < 1$$

$$\boxed{|2|x| \, e^{3-x^2} < 1}$$

NADA PODEMOS AFIRMAR.

$$\left| \frac{1}{2\sqrt{3-\ln(x)}} \cdot \frac{-1}{x} \right| < 1$$

C.E. $\boxed{x > 0}$

$$|2x\sqrt{3-\ln(x)}| > 1$$

CONVERGE

$\xi \subset (0, +\infty)$

chute

$\underline{x_0 = 1{,}5}$ utilizando $\varphi_2(x) = \sqrt{3 - \ln(x)}$; $ER_x < 0{,}1$

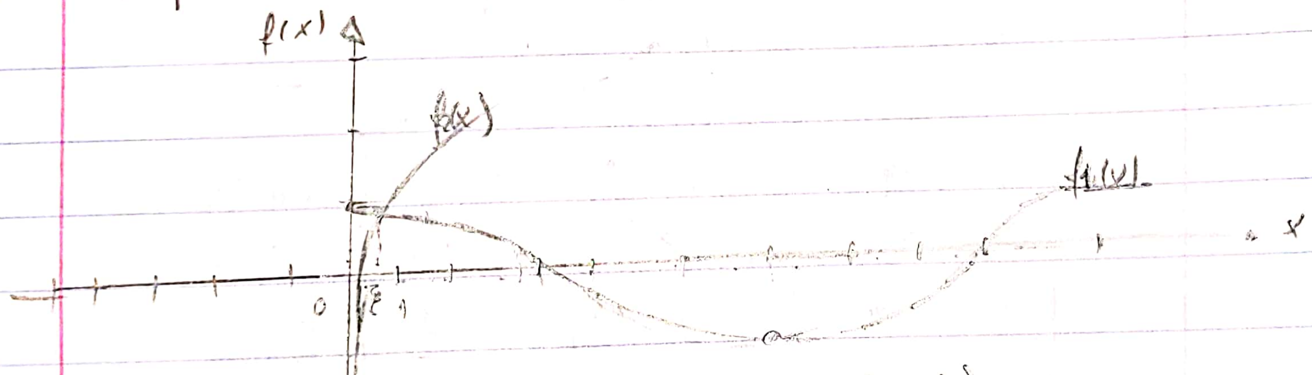
$x_1 = 1{,}6108 \quad ER_x = 0{,}070$

$\longrightarrow x_2 = 1{,}5885 \quad ER_x = 0{,}014$

$\boxed{x_3 = 1{,}5929} \quad ER_x = 0{,}003$

$\therefore \xi \cong x_3 = \underline{1{,}5929}$

3) $f_1(x) = \cos(x/2)$ e $f_2(x) = \ln(3x)$; $ER_x < 0{,}01$



$\xi \in (0,1)$

utilizando a função:

$f(x) = \cos(x/2) - \ln(3x)$, também podemos encontrar ξ (raiz) pelo teorema de Bolzano

$f'(x) = \frac{1}{2}\sin(x/2) - 1/x$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

x	f(x)
0,25	1,2798
0,5	0,5634
0,75	0,1145
1	-0,221

$$x_1 = x_0 - \left[\quad\rule{3cm}{0.4pt}\quad \right]$$

chute: $x_0 = 0,5$

$x_1 = 0,7653 \qquad ER\,x = 0,3467$

$x_2 = 0,8259 \qquad ER\,x = 0,073$

$\boxed{x_3 = 0,8315 \qquad ER\,x = 0,007}$

$x_4 = 0,8320$

$\therefore\ \xi \cong x_3 = 0,8315$

4) $\begin{cases} 2x + 4y - z = 5 \\ -3x + y - 5z = -7 \\ 5x + y - 3z = 3 \end{cases}$ - $\underline{\underline{LU}}$

$Ax = b \Rightarrow LUx = b$

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 \\ -3 & 1 & -5 \\ 5 & 1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} \\ 0 & U_{22} & U_{23} \\ 0 & 0 & U_{33} \end{bmatrix}$$

$U_{11} = 2;\ U_{12} = 4;\ U_{13} = -1$

$l_{21} = -3/2;\ l_{31} = 5/2.$

$\overset{-3/2}{l_{21}} \cdot \overset{4}{U_{12}} + U_{22} = 1 \Rightarrow U_{22} = 7$

$\overset{-3/2}{l_{21}} \cdot \overset{-1}{U_{13}} + U_{23} = -5 \rightarrow U_{23} = -13/2 = -6,5$

$\overset{5/2}{l_{31}} \cdot \overset{4}{U_{12}} + l_{32} \cdot \overset{7}{U_{22}} = 1 \rightarrow l_{32} = -1,2857$

$\overset{5/2}{l_{31}} \cdot \overset{-1}{U_{13}} + \overset{-1,2857}{l_{32}} \cdot \overset{-6,5}{U_{23}} + U_{33} = -3 \rightarrow U_{33} = -8,8571$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3/2 & 1 & 0 \\ 5/2 & -1{,}2857 & 1 \end{bmatrix} ; \quad U = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 0 & 7 & -13/2 \\ 0 & 0 & -8{,}8571 \end{bmatrix}$$

$$Ax = b \Rightarrow L\underbrace{Ux}_{K} = b$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3/2 & 1 & 0 \\ 5/2 & -1{,}2857 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -7 \\ 3 \end{bmatrix} ; \quad \begin{aligned} k_1 &= 5 \\ k_2 &= 1/2 \\ k_3 &= -8{,}8571 \end{aligned}$$

$Ux = k$

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 0 & 7 & -13/2 \\ 0 & 0 & -8{,}8571 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1/2 \\ -8{,}8571 \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} z &= 1 \\ y &= 1 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

$$7y - \frac{13}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2} \rightarrow y = 1$$

$$2x + 4y - z = 5 \rightarrow x = 1$$

$$\therefore S = \{(1,1,1)\}$$

5) Método Iterativo Jacobi Richardson.

$$\begin{cases} 2x + 4y - z = 5 \\ -3x + y - 5z = -7 \\ 5x + y - 3z = 3 \end{cases}$$

$$A: \begin{bmatrix} 5 & 1 & -3 \\ 2 & 4 & -1 \\ -3 & 1 & -5 \end{bmatrix}$$ - permutando linhas obtemos a seguinte matriz

Aplicando o critério de convergência, temos:

$$i=1: \left|\frac{1}{5}\right| + \left|\frac{-3}{5}\right| = 0,8 < 1 \checkmark$$

$$i=2: \left|\frac{2}{4}\right| + \left|\frac{-1}{4}\right| = 0,75 < 1 \checkmark$$

$$i=3: \left|\frac{-3}{-5}\right| + \left|\frac{1}{-5}\right| = 0,8 < 1 \checkmark$$

Portanto, converge.

$$x_{n+1} = \frac{3 - y + 3z}{5} \quad \boxed{0{,}6 - 0{,}2y_n + 0{,}6z_n}$$

$$y_{n+1} = \frac{5 + z - 2x}{4} \quad \boxed{1{,}25 + 0{,}25z_n - 0{,}5x_n}$$

$$z_{n+1} = \frac{-7 - y + 3x}{-5} \quad \boxed{1{,}4 + 0{,}2y_n - 0{,}6x_n}$$

$x_0 = 0{,}6$; $y_0 = 1{,}25$; $z_0 = 1{,}4$

$x_1 = 1{,}19$	$ER_x = 0{,}50$ -
$y_1 = 1{,}3$	$ER_y = 0{,}04$
$z_1 = 1{,}29$	$ER_z = 0{,}09$ -

$x_2 = 1{,}114$	$ER_x = 0{,}07$
$y_2 = 0{,}9775$	$ER_y = 0{,}3$
$z_2 = 0{,}946$	$ER_z = 0{,}36$

Com essas duas iterações é possível notar que o sistema converge para $(x, y, z) = \{(1;1;1)\}$.