Aula 7 (15/Fev)

No aula de hoje:

* Resolução exercícios da Folha 2.
  - Ex 1: Radiação do corpo negro.
  - Ex 3: Modelo atómico de Bohr.
  - Ex 4: Experiências de Young.

—— // ——

Folha de Problemas 2

Propriedades Quânticas Fundamentais

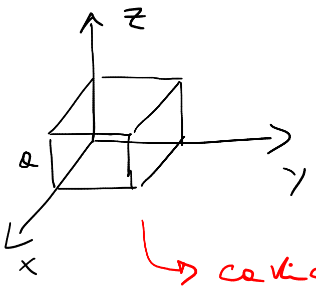
1 Radiação do corpo negro

(a)

$$\rho = \frac{\text{Energia}}{\text{Volume} \cdot \text{Freq}} \Longrightarrow [\rho] = \frac{\overbrace{E}^{M.L^2/T^2}}{L^3 \cdot T^{-1}} = \frac{ML^2}{T^2} \cdot \frac{T}{L^3} =$$

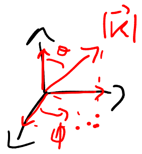
$$= \frac{M}{T.L}$$

(b)



↳ cavidade com paredes condutoras

$$\vec{K} \Longrightarrow |\vec{K}| = \frac{2\pi}{\lambda}$$



$$\begin{cases} k_x = |\vec{k}| \cdot \operatorname{sen}\theta \cdot \cos\phi \\ k_y = |\vec{k}| \cdot \operatorname{sen}\theta \cdot \operatorname{sen}\phi \\ k_z = |\vec{k}| \cdot \cos\theta \end{cases}$$

$$k_i = \frac{2\pi}{\lambda_i} \quad , \quad i = x, y, z$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_x = \dfrac{\lambda}{\operatorname{sen}\theta \cdot \cos\phi} \\ \lambda_y = \dfrac{\lambda}{\operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi} \\ \lambda_z = \dfrac{\lambda}{\cos\theta} \end{cases}$$

Impondo $n_i = \dfrac{2a}{\lambda_i}$, onde $n_i \in \mathbb{N}_0$,

$$\begin{cases} n_x = \dfrac{2a}{\lambda} \cdot \operatorname{sen}\theta \cos\phi \\ n_y = \dfrac{2a}{\lambda} \cdot \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi \\ n_z = \dfrac{2a}{\lambda} \cdot \cos\theta \end{cases}$$

Então

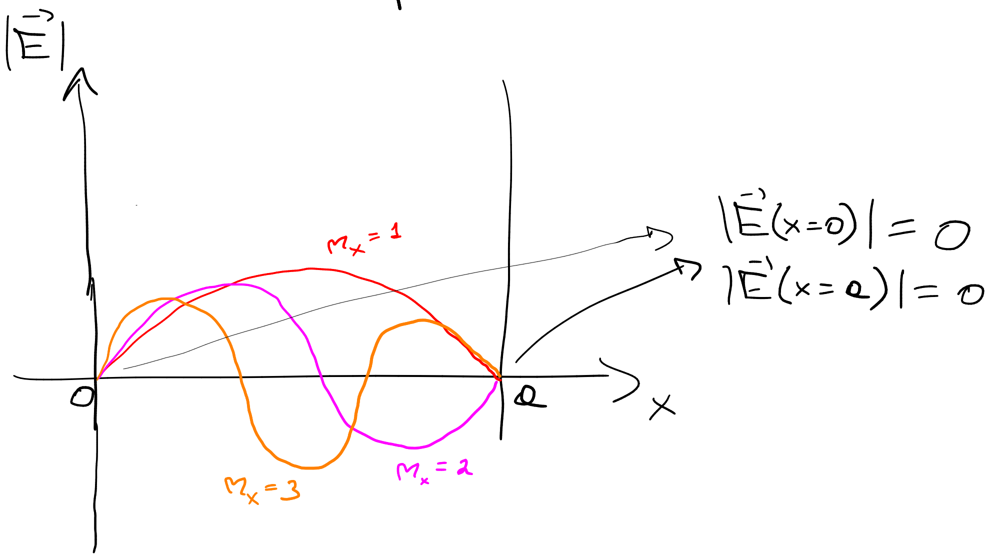
$$n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = \left(\frac{2a}{\lambda}\right)^2 \cdot \Big[\operatorname{sen}^2\theta \, \overbrace{\left(\cos^2\phi + \operatorname{sen}^2\phi\right)}^{1} + \cos^2\theta \Big] = \left(\frac{2a}{\lambda}\right)^2$$

$$\Longleftrightarrow \frac{2a}{\lambda} = \sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2}$$

$\square$

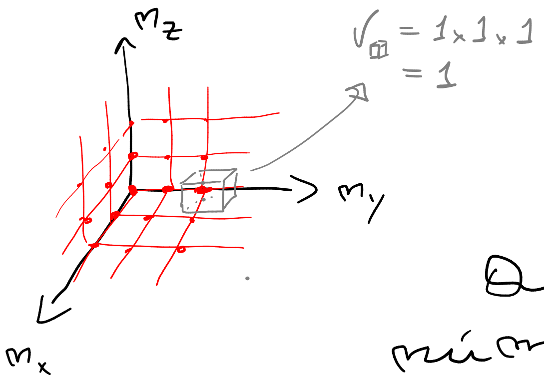
Cavidade é condutora $\Rightarrow$ EMG $= 0$ nas paredes.
Por isso, impor $n_i = \frac{2a}{\lambda_i} \Longleftrightarrow \lambda_i = \frac{2a}{n_i} \Longleftrightarrow$ ondas EMG com nodos nas paredes da cavidade

Ondas estacionárias



Então teremos $\frac{2a}{\lambda} = \sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2}$ é a condição para que tenhamos ondas estacionárias nas 3 direcções.

(c)



$c = \nu\lambda$

$$n = \sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2} = \frac{2a}{\lambda} = \frac{2a\nu}{c}$$

Queremos então calcular número de ondas estacionárias (modos vibração dentro da caixa) com $[n, n+dn]$, dN.

$$N_r = \frac{4\pi}{3} r^3 \Big/ V_\square \longrightarrow \text{pontos dentro da esfera de raio } r.$$

$$= \frac{4\pi}{3} r^3$$

$$N_{r+dr} = \frac{4\pi}{3}(r+dr)^3 \Big/ V_\square \longrightarrow \text{pontos dentro da esfera de raio } r+dr$$

Pontos na casca esférica entre r e $r+dr$,

$$\Rightarrow dN = N_{r+dr} - N_r = \frac{4\pi}{3}\left[(r+dr)^3 - r^3\right]$$

$$= \frac{4\pi}{3}\left[\left(\cancel{r^3} + 3r^2 dr + \ldots\right) - \cancel{r^3}\right]$$

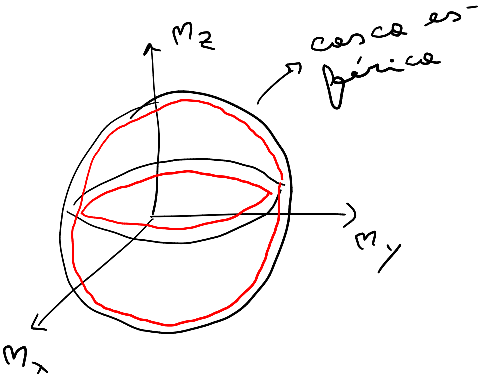
$$= 4\pi r^2 . dr$$

↳ número de modos de vibração numa casca esférica entre r e $r+dr$.

Escrevendo dN em termos de ν,

$$r = \frac{2a}{\lambda} = \frac{2a}{c}.\nu \Rightarrow dr = \frac{2a}{c}.d\nu$$

$$\Rightarrow dN = 4\pi.\left(\frac{2a}{c}\right)^3.\nu^2.d\nu$$



Como $n_i \in \mathbb{N}_0 \Rightarrow dN \rightarrow \frac{dN}{8}$

$$dN = \frac{4\pi \overbrace{a^3}^{=V}}{c^3} \cdot \nu^2 \cdot d\nu = \frac{4\pi V}{c^3} \cdot \nu^3 \cdot d\nu$$

(d) Duas polarizações $\Rightarrow d\tilde{N} = 2dN$

$$\Rightarrow d\tilde{N} = \frac{8\pi . V}{c^3} \cdot \nu^2 \cdot d\nu$$

e como cada grau liberdade tem energia média $K_B T$ (teorema da equipartição de energia)

$$\Rightarrow dE = d\tilde{N} \times K_B T = \frac{8\pi V}{c^3} \cdot \nu^2 K_B T \cdot d\nu$$

Assim, $\frac{\text{Energia}}{\text{Volume}} = \rho_T(\nu) . d\nu = \frac{dE}{V} = \frac{8\pi}{c^3} \cdot \nu^2 \cdot K_B T . d\nu$

$$\Rightarrow \boxed{\rho_T(\nu) = \frac{8\pi}{c^3} \cdot \nu^2 \cdot K_B T} \rightarrow \text{Rayleigh-Jeans}$$

(e)

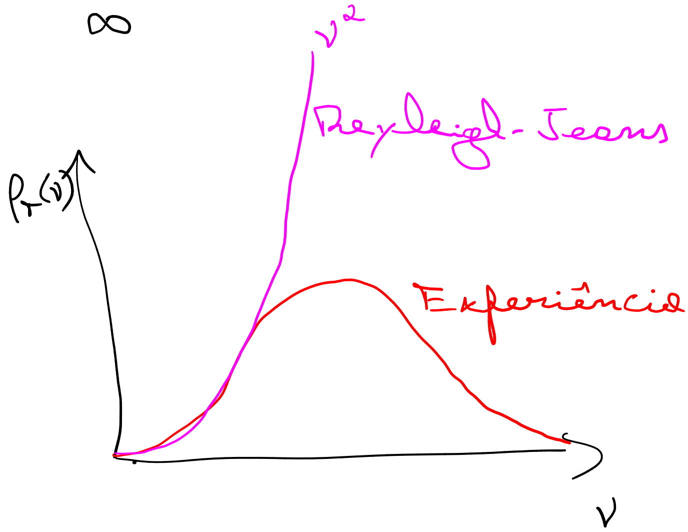
$$\rho_T = \int_0^\infty \rho_T(\nu)\, d\nu$$

$$= \int_0^\infty \frac{8\pi}{c^3}\, \nu^2 \cdot k_B T \, d\nu$$

$$= \frac{8\pi}{c^3} \cdot k_B T \underbrace{\int_0^\infty \nu^2 \cdot d\nu}_{\infty} = \infty$$, integral é divergente

$$\rho_T(\nu) \xrightarrow{\nu \to \infty} \infty$$

$$\rho_T(\nu) \xrightarrow{\nu \to 0} 0$$



(f) Admitamos $E_n = n h \nu$, $n = 0, 1, 2, \dots$.
Então energia média por modo é dada por

$$\langle E \rangle = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} E_n \cdot e^{-\beta E_n}}{\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta E_n}}_{= Z}} \quad , \text{ onde } \beta = \frac{1}{k_B T}$$

$$= \frac{1}{Z} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{d}{d\beta}\right) e^{-\beta E_n} = -\frac{1}{Z} \cdot \frac{d}{d\beta} \overbrace{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta E_n}}^{Z}$$

$$= -\frac{d}{d\beta} \ln Z$$

Basta-nos então calcular a função de partição Z,

$$x \equiv e^{-\beta h \nu}$$

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta h \nu n} = \sum_{n} x^{n} = 1 + x + x^2 + \dots$$

$$= \frac{1}{1-x} = \frac{1}{1-e^{-\beta h \nu}}$$

série geométrica infinita

Substituindo em cima,

$$\langle E \rangle = -\frac{d}{d\beta} \ln \left[\frac{1}{1-e^{-\beta h \nu}} \right] = -\left(\frac{1}{1-e^{-\beta h \nu}} \right)^{-1} \cdot \left(-\frac{+h\nu e^{-\beta h \nu}}{1-e^{-\beta h \nu}} \right)$$

$$= h\nu \frac{e^{-\beta h \nu}}{1-e^{-\beta h \nu}} = \frac{h\nu}{e^{\beta h \nu}-1}$$

Substituindo na densidade espectral $\langle E \rangle = k_B T$ por $\langle E \rangle = \frac{h\nu}{e^{\beta h \nu}-1}$, ficamos com

$$\boxed{\rho_T(\nu) = \frac{8\pi \nu^2}{c^3} \frac{h\nu}{e^{\beta h \nu}-1}} \rightarrow \text{lei Planck}$$

(g) Máximo, λ_{max}, de ρ_T?

Anteriormente definimos

$$\frac{dE}{V} = \rho_T(\nu)\,.\,d\nu = \tilde{\rho}_T(\lambda)\,.\,d\lambda$$

mas nós sabemos que $c = \lambda\nu \Leftrightarrow \lambda = c/\nu$. Então teremos

$$d\lambda = -\frac{c}{\nu^2}\,.\,d\nu \Longleftrightarrow d\nu = -\frac{\nu^2}{c}\,d\lambda = -\frac{c}{\lambda^2}\,.\,d\lambda$$

$$\Longrightarrow \frac{dE}{V} = \rho_T(\nu)\,.\left(-\frac{c}{\lambda^2}\,.\,d\lambda\right)$$

$$\Longrightarrow \frac{dE}{V} = \frac{c}{\lambda^2}\,\frac{8\pi h}{\cancel{c^3}}\left(\frac{c}{\lambda}\right)^3 .\,\frac{1}{e^{hc/k_BT\nu}-1}\,.\,d\lambda$$

$$= \frac{8\pi hc}{\lambda^5}\,\frac{1}{e^{hc/k_BT\lambda}-1}\,.\,d\lambda$$

$\Rightarrow \tilde{\rho}_T(\lambda)$

Os extremos de $\tilde{\rho}_T(\lambda)$ são dados por

$$\frac{d\tilde{\rho}_T(\lambda)}{d\lambda} = 0 \Longleftrightarrow 8\pi hc\left[-\frac{5}{\lambda^6}\,\frac{1}{e^{\cdots}-1} - \frac{1}{\lambda^5}\,.\left(-\frac{hc}{k_BT}\right)\frac{1}{\lambda^2}\,\frac{e^{\cdots}}{(e^{\cdots}-1)^2}\right] = 0$$

$$\Longleftrightarrow 5 - \frac{hc}{k_BT}\,\frac{1}{\lambda}\,\frac{e^{\cdots}}{e^{\cdots}-1} = 0$$

usando $x \equiv \frac{hc}{\lambda k_B T}$ teremos

$$\Rightarrow 5 - x\frac{e^x}{e^x - 1} = 0$$

$$\Leftrightarrow 5(e^x - 1) - xe^x = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \quad \vee \quad x = 4{,}9651$$

↳ mínimo ↳ máximo

Assim o máximo será dado por

$$\boxed{\lambda_{max} = \frac{hc}{k_B} \cdot \frac{1}{4{,}9651} \frac{1}{T} = \frac{C}{T}}$$ → lei Wein

onde $C = 0{,}00289 \, m$

Se $T = 1000K \Rightarrow \lambda_{max} = 2{,}89 \times 10^{-6}$ m

$= 2890$ nm

↳ infravermelho

Se T aumenta, λ_{max} diminui.

(b)

$$\rho(T) = \int_0^\infty \rho_T(\nu) \cdot d\nu$$

$$= \int_0^\infty \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{e^{h\nu/k_B T} - 1} \, d\nu$$

$$x \equiv \frac{h\nu}{k_B T} \Rightarrow dx = \frac{h}{k_B T} d\nu$$

$$= \int_0^\infty \frac{8\pi h}{c^3} \left(\frac{k_B T}{h}\right)^3 \cdot \frac{x^3}{e^x - 1} \cdot \frac{k_B T}{h} \cdot dx$$

$$= \frac{8\pi}{c^3} \frac{(k_B T)^4}{h^3} \underbrace{\int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} \cdot dx}_{= \pi^4/15}$$

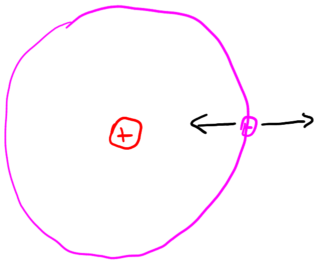
$$\Leftrightarrow \boxed{\rho(T)} = \underbrace{\frac{8\pi^5}{15} \frac{k_B^4}{c^3 h^3}}_{\equiv \sigma} T^4 \boxed{= \sigma T^4}$$

↳ lei Stefan

onde $\sigma = 7{,}549 \times 10^{-16} \ J/K m^3$.

3) Modelo atómico de Bohr

(a)



Raio constante implica que

$$|\vec{F}_{centrifuga}| = |\vec{F}_{centripeta}|$$

$$\vec{F}_{centripeta} = \vec{F}_{coul.} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Ze^2}{r^2}\vec{e}_r$$

$$\vec{F}_{centrifuga} = +m\frac{v^2}{r}\vec{e}_r$$

$$\vec{F}_{total} = \vec{F}_{centripeta} + \vec{F}_{centrifuga} = 0 \Longrightarrow \underline{\underline{\text{raio const}}}$$

$$\Rightarrow m\frac{v^2}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Ze^2}{r^2}$$

$\longrightarrow$ condição de raio constante

(b) $E = E_{cin} + E_{pot}$

$$E_{cin} = \frac{m}{2}|\dot{\vec{r}}|^2 = \frac{m}{2}v^2 = \frac{\cancel{r}}{2}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Ze^2}{r^{\cancel{2}}}$$

$$= \frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\frac{Ze^2}{r}$$

$$E_{pot} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Ze^2}{r}$$

Então temos que energia total é

$$E = E_{cin} + E_{pot} = -\frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\frac{Ze^2}{r}$$

$\square$

(c) Se para o átomo de hidrogénio $(Z=1)$ temos

$$\frac{1}{\lambda} = R_H\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right) \quad , \; n > m$$

$$\Rightarrow E_f - E_i = \frac{hc}{\lambda} = hcR_H\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right)$$

então níveis energia do átomo hidrogénio serão da forma

$$\boxed{E_n = -hc.R_H.\frac{1}{n^2}} \quad , \; n = 1, 2, 3, \ldots$$

(d) Se temos $E = E_n = -hc.R_H/n^2$,

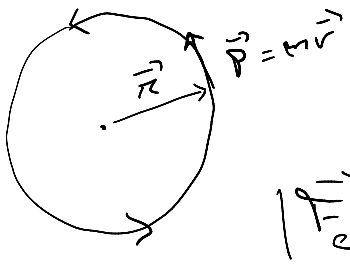
então,

$$+hc.R_H\frac{1}{n^2} = +\frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\overset{1}{Z}e^2}{r}$$

$$\Leftrightarrow r = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\,\frac{e^2}{h.c.R_H}\,.\,n^2\,, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

ou seja, só alguns raios de órbita são admitidos.

(e) $|\vec{L}| = |\vec{r} \times \vec{p}| = m v . r$



$$\Rightarrow L^2 = m^2 v^2 . r^2$$

$$|\vec{F}_{centrífuga}| = |\vec{F}_{centrípeta}|$$

$$\Rightarrow m\,\frac{v^2}{\cancel{r}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{e^2}{r^{\cancel{2}}} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m}\,\frac{1}{r}}$$

$$\Rightarrow L^2 = m^{\cancel{2}}\, r^{\cancel{2}} . \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 \cancel{m}}\,\frac{1}{\cancel{r}}$$

$$= \frac{m}{4\pi\varepsilon_0}\,e^2 . \frac{1}{2(4\pi\varepsilon_0)}\,\frac{e^2}{h.c.R_H} . n^2$$

$$R_H = \frac{m e^4}{8\varepsilon_0^2 h^3 c}$$

$$\Rightarrow L = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0} . n . \sqrt{\frac{\cancel{m}}{\cancel{2}\cancel{h}\cancel{c}.\pi^2}\,\frac{\cancel{2}(4\pi\varepsilon_0)^2 . h^{\cancel{3}}\cancel{c}}{4\cancel{m}e^4}}$$

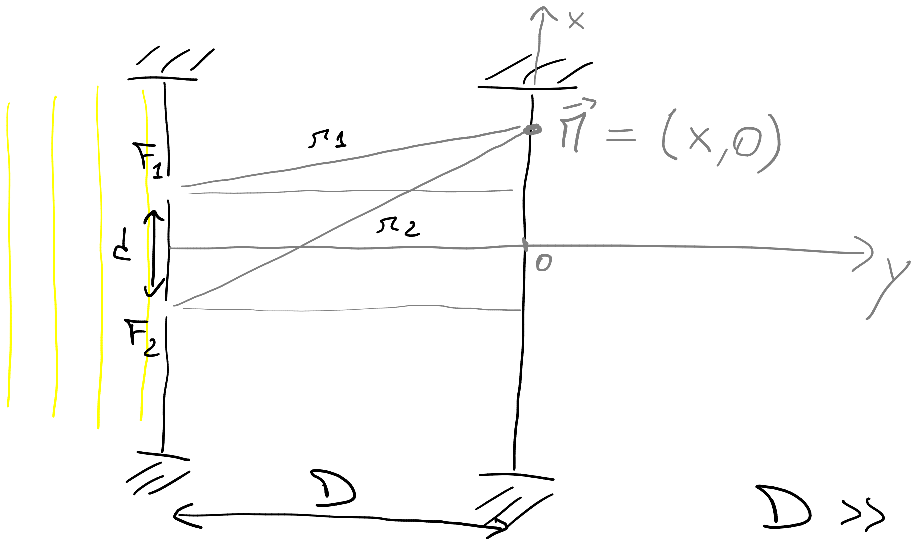
$$= \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0} \cdot n \, \frac{4\pi\varepsilon_0}{e^2} \cdot \frac{h}{2\pi} = \hbar$$

$$\Longleftrightarrow \boxed{L = n\hbar} \quad , \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

$\square$

O momento angular do electrão que orbita o núcleo está quantizado.

(4) Experiências de Young



$D \gg d$

(a)

$$\begin{cases} r_1^2 = D^2 + \left(x - \frac{d}{2}\right)^2 \\ r_2^2 = D^2 + \left(x + \frac{d}{2}\right)^2 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} r_1 = D \cdot \sqrt{1 + (x - d/2)^2 / D^2} \\ r_2 = D \cdot \sqrt{1 + (x + d/2)^2 / D^2} \end{cases}$$

Os campos eléctricos da fenda 1 e da fenda 2 em $\vec{r} = (x, 0)$ são dados por

$$\vec{E}_1(t, \vec{r}) = A \cdot \vec{e}_p \cdot e^{i(\underbrace{\vec{k} \cdot \vec{r}_1 - \omega t}_{= \phi_1})}$$

$$\vec{E}_2(t, \vec{r}) = A \cdot \vec{e}_p \cdot e^{i(\underbrace{\vec{k} \cdot \vec{r}_2 - \omega t}_{= \phi_2})}$$

Assim, a intensidade é dada por $I \propto |\vec{E}|^2$, e então

$$|\vec{E}(t, \vec{r})|^2 = |\vec{E}_1(t, \vec{r}) + \vec{E}_2(t, \vec{r})|^2$$

$$= |\vec{E}_1|^2 + |\vec{E}_2|^2 + |\vec{E}_1| \cdot |\vec{E}_2| \cdot \left(e^{-i\vec{k}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)} + e^{ik(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}\right)$$

$$= A^2 + A^2 + A^2 \cdot 2 \cos [k(r_1 - r_2)]$$

$$= 2A^2 \cdot [1 + \cos(\Delta\phi)]$$

A diferença de fase das duas ondas em $\vec{r}$, é dada por

$$\Delta\phi = k(r_1 - r_2) = k.D\left[\sqrt{1+\left(\frac{x-d/2}{D}\right)^2} - \sqrt{1+\left(\frac{x+d/2}{D}\right)^2}\right]$$

que como $D \gg d$ e como $D \gg x$, então teremos que $D \gg x \pm d/2$, e poderemos escrever,

$$\boxed{\sqrt{1\pm\delta} \simeq 1 \pm \frac{\delta}{2} + \dots \qquad \delta \ll 1}$$

$$\Delta\phi \simeq k.D.\left[\left(\cancel{1} + \frac{1}{2D^2}\left(\cancel{x^2} - xd + \cancel{\frac{d^2}{4}}\right) + \dots\right) - \right.$$

$$\left. - \left(\cancel{1} + \frac{1}{2D^2}\left(\cancel{x^2} + xd + \cancel{\frac{d^2}{4}}\right) + \dots\right)\right]$$

$$\simeq k.\cancel{D}\,\frac{(-xd)}{2D^{\cancel{2}}} \simeq -\frac{kxd}{D}$$

Assim, os máximos de intensidade no plano detector (ao longo do eixo Ox) serão dados pelos máximos do $\cos(\Delta\phi)$, ou seja, por

$$\Delta\phi = 2\pi . m \quad , \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$\Leftrightarrow \frac{K x d}{D} = 2\pi m \Leftrightarrow \boxed{x = \frac{2\pi D}{K . d} . m}$$

↳ posições de todos os máximos

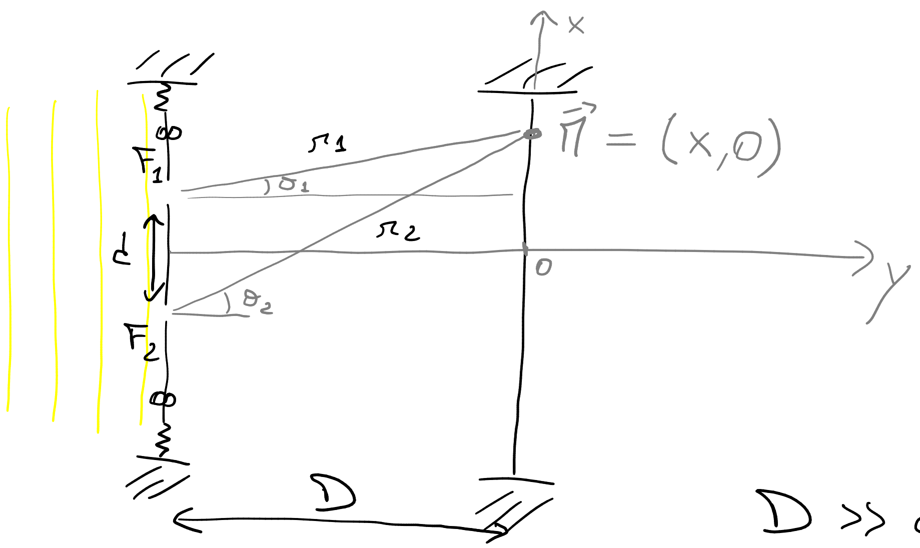
e assim, a distância entre dois máximos consecutivos é dado por

$$\lambda = 2\pi / k$$

$$\Delta x = x_1 - x_0 = \frac{2\pi D}{K d} = \frac{\lambda D}{d}$$

□

(b) Experiência de Young modificada



$D \gg d$

de Broglie $\Rightarrow p = \hbar |\vec{k}| = \frac{h}{\lambda}$.

O momento transmitido para o plano das fendas de um fotão que passe em F_1 ou em F_2 e é detectado em $\vec{r}$, é dado por

$$\begin{cases} p_x^1 = p \cdot \operatorname{sen}\theta_1 & , \text{ se passa em } F_1 \\ p_x^2 = p \cdot \operatorname{sen}\theta_2 & , \text{ se passa em } F_2 \end{cases}$$

sendo que $\Delta p = |p_x^2 - p_x^1|$ é dado por

$$\Delta p = p \cdot |\operatorname{sen}\theta_2 - \operatorname{sen}\theta_1|$$

$$\operatorname{sen}\theta = \sqrt{\operatorname{sen}^2\theta} = \sqrt{\frac{1}{1+\frac{\cos^2\theta}{\operatorname{sen}^2\theta}}} = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{cotg}^2\theta}}$$

$$= p \left| \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{cotg}^2\theta_2}} - \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{cotg}^2\theta_1}} \right|$$

$$\operatorname{cotg}^2\theta_{1,2} = \frac{\cos^2\theta_{1,2}}{\operatorname{sen}^2\theta_{1,2}} = \frac{D^2}{(x \mp d/2)^2} \gg 1$$

$$= p \cdot \left| \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{D}{x+d/2}\right)^2}} - \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{D}{x-d/2}\right)^2}} \right|$$

$$= p \cdot \left| \frac{x+d/2}{D}(1+\ldots) - \frac{x-d/2}{D}(1+\ldots) \right|$$

e assim concluímos que

$$\Delta p = |p_2 - p_1| \simeq \frac{p \cdot d}{D} \quad \square$$

(c) Se quisermos distinguir por qual das fendas passou o fóton, teremos que medir Δp do plano das fendas com uma precisão maior do que

$$|p_2 - p_1| \simeq \frac{p \cdot d}{D}.$$

Assim a incerteza na medição de p do plano das fendas tem que ser

$$p = h/\lambda$$

$$\Delta p \ll \frac{p d}{D} = \frac{h d}{D \lambda}$$

Mas pelo P. Incerteza sabemos que

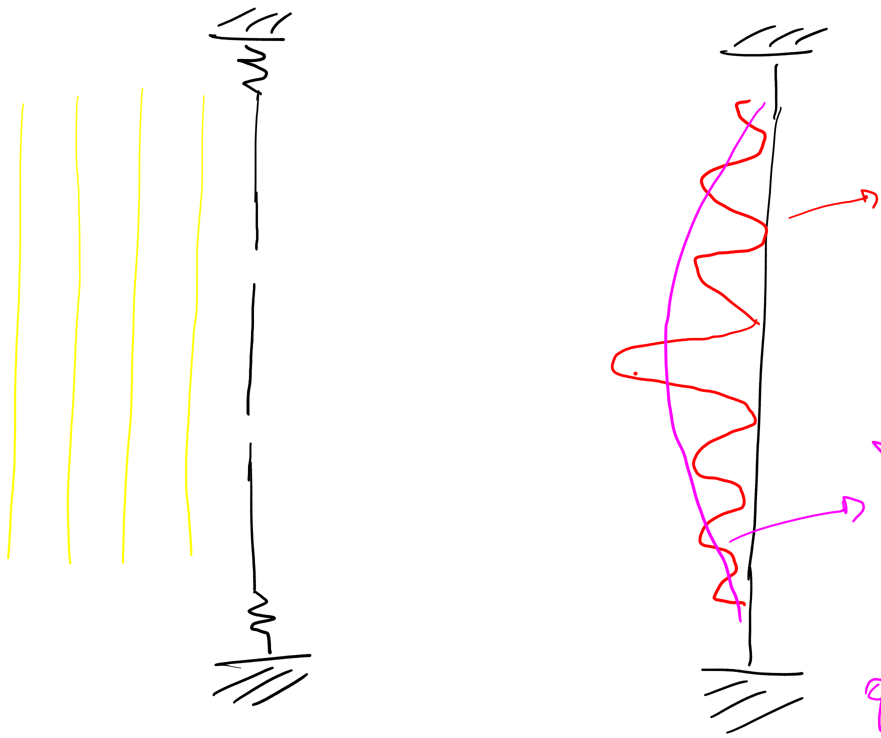
$$\Delta x \Delta p \gtrsim h \Longleftrightarrow \Delta x \gtrsim \frac{h}{\Delta p}$$

E então, a incerteza na posição do plano das fendas (na direcção Ox), Δx, é dado por

$$\Longrightarrow \Delta x \gg \frac{\cancel{h}}{\cancel{h} \cdot d / D\lambda} = \frac{D \lambda}{d}$$

que é a distância entre máximos consecutivos. A incerteza na posição do plano das fendas será muito maior do que a distância entre máximos.

↳ Não conseguiremos ver o padrão de interferência.



Padrão de interferência inicial

Padrão de interferência quando tentamos ver por qual fenda passa o fóton, e geramos incerteza na posição das fendas, "misturando" posição dos máximos no plano detector.