CARGA ELÉTRICA

Quantizada em unidades da carga elementar $q = 1{,}6\,.\,10^{-19}C$. A carga total de qualquer corpo é sempre um múltiplo inteiro positivo de q e escrevemos que a carga do corpo é Q = n.q (ou seja, tem n quantidades da carga elementar).

É conveniente trabalhar com as distribuições de carga numa linha, numa superfície ou num volume. Definem-se, pois, as densidades linear, superficial e volumétrica, respectivamente:

$$dq = \lambda dl;\; dq = \sigma dA\,;\; dq = \rho dV$$

CONDUTORES, ISOLANTES E CARGAS INDUZIDAS

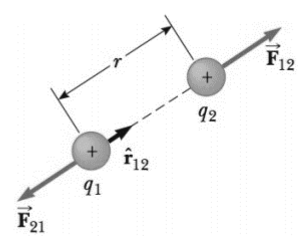
Condutores são materiais nos quais as cargas elétricas podem se movimentar livremente. Sua principal característica, do ponto de vista de campos elétricos, é que o **campo em seu interior é nulo** (as cargas entram em equilíbro eletrostático e se acumulam na superfície do condutor).

Isolantes são materiais em que as cargas elétricas **não tem mobilidade** (ou tem mobilidade muito reduzida) e portanto se encontram distribuídas pelo corpo.

Carga induzida é o nome dado ao conjunto de cargas que "aparecem" num corpo eletricamente neutro pela proximidade de um corpo carregado. Ou seja, são elétrons que por repulsão (ou atração) se concentraram num ponto do corpo.

LEI DE COULOMB

A Lei de Coulomb descreve a força entre duas cargas q_1 e q_2, separadas de uma distância r (lembrando que distância = módulo do vetor que liga a carga 1 com a carga 2). Como a força é um vetor, a ela está associado uma direção que representaremos pelo versor $\hat{r}$. Assim, define-se a Lei de Coulomb como:



$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}\hat{r}_{12}\,, onde\; \hat{r}_{12} = \frac{\overrightarrow{r_{12}}}{r}$$

Da definição do versor, podemos escrever a Lei de Coulomb como:

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^3}\overrightarrow{r_{12}}$$

Se quisermos calcular a força numa carga (que chamaremos de 1) devido a um conjunto de cargas, podemos simplesmente falar que a força na carga 1 é a soma vetorial das forças em 1 devido a cada uma das cargas. Esse é o **princípio da superposição** (no caso mais geral a somatória se extende a uma integral)**:**

$$\vec{F}_1 = \sum_{i=2}^{cargas}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_i}{r^3}\overrightarrow{r_{i1}}$$

CAMPO ELÉTRICO E FORÇA ELÉTRICA

O campo elétrico surge onde houver carga elétrica. Ele é definido como (onde q é a carga que gera o campo):

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,\hat{r}$$

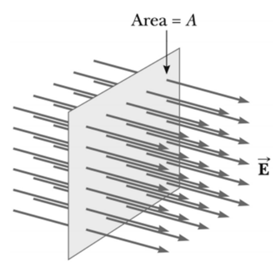
Sabemos que se houver uma carga q_0 a uma distância r da carga q, a força sobre a carga q_0 será dada pela Lei de Coulomb. Podemos então entender que essa força é resultado da interação do campo elétrico com a carga q_0, de modo que:

$$\vec{F} = \frac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,\hat{r} = q_0\vec{E}$$

Do mesmo modo que na Lei de Coulomb, vale o **princípio da superposição** para o campo elétrico.

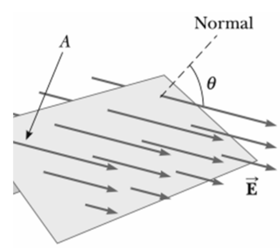
FLUXO ELÉTRICO

O fluxo elétrico é a medida de quanto campo passa por uma área. Se a área é grande (ou o campo), então o fluxo é intenso. Agora, se a área for muito pequena, ou o campo muito fraco, ai o fluxo é fraco. É conveniente, pois, definir o fluxo como campo multiplicado pela área:



$$\phi = EA$$

Podemos generalizar um pouco mais o conceito considerando o ângulo entre o vetor normal ao plano da área e o campo elétrico. Se eles são paralelos, então o maior número possível de linhas passa pela área. A medida que o plano se inclina, observa-se que passam cada vez menos linhas, até o caso em que não passa mais campo algum. Vamos definir, pois, o vetor $\vec{A} = \hat{n}A$, onde $\hat{n}$ é o vetor normal ao plano, assim podemos computar a inclinação da área em relação ao campo através de um produto escalar, graças ao cosseno que dá 0 quando $\theta = 90°$:



$$\phi = \vec{E}\vec{A} = EA\cos\theta$$

Por fim, podemos generalizar o conceito para uma superfície S qualquer, irregular, considerando que o fluxo através da superfície irregular é a soma (integral) dos pequenos fluxos em cada uma das pequenas áreas da superfície, ou seja:

$$d\phi = \vec{E}.\overrightarrow{dA} \Rightarrow \phi = \int_S \vec{E}.\overrightarrow{dA}$$

LEI DE GAUSS

A Lei de Gauss é a primeira equação de Maxwell. Ela relaciona o quanto passa de campo elétrico numa superfície fechada com a carga interna à superfície. A Lei de Gauss é escrita como (onde o círculo na integral representa “fechado”):

$$\oint_S \vec{E}.\overrightarrow{dA} = \frac{q_{in}}{\epsilon_0}$$

Embora complicada, essa equação é uma tentativa de dizer que de certa forma, se nós sabemos quem é a carga que está dentro da nossa superfície, então nós sabemos como o campo elétrico que passa por essa superfície se comporta, ou seja, é mais um método para determinar o campo elétrico no espaço.

ENERGIA POTENCIAL ELÉTRICA

Podemos associar a um conjunto de cargas uma energia potencial elétrica. O que a energia potencial elétrica mede é a energia necessária para manter o sistema unido. Por exemplo, para duas cargas muito afastadas, de mesmo sinal, a energia necessária para manter uma perto da outra é muito pequena. Agora, a medida que aproximamos as cargas, temos que fazer cada vez mais força para manter a configuração estável. Disso, observamos que é necessário mais de uma carga para haver energia potencial, ou seja, para uma única carga a energia potencial é nula.

Da Lei de Coulomb observamos que a força depende da distância entre as cargas, e que a direção dela aponta na mesma direção da linha que une as cargas. Tais forças são chamadas forças centrais. Aplicando a definição de trabalho para uma força central, observamos que o trabalho, que é a energia inicial – a energia final, independe da trajetória, ou seja:

$$W = \int_{Inicial}^{Final} F(r)dr \ (def. de\ trabalho\ para\ uma\ força\ central)$$

$$U_{inicial} - U_{final} = \int_{Inicial}^{Final} F(r)dr \Rightarrow U_{final} - U_{inicial} = -\int_{Inicial}^{Final} F(r)dr$$

Para um par de cargas pontuais, tal equação resulta em (onde r_{12} é a distância entre as cargas):

$$U_{12} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}}$$

Vale aqui também o princípio da superposição.

POTENCIAL ELÉTRICO (TENSÃO ELÉTRICA)

Do mesmo modo que relacionamos campo elétrico com força, vamos relacionar potencial elétrico com energia potencial elétrica. Assim como no caso do campo-força, podemos obter a energia (ou o potencial) multiplicando (ou dividindo) por q:

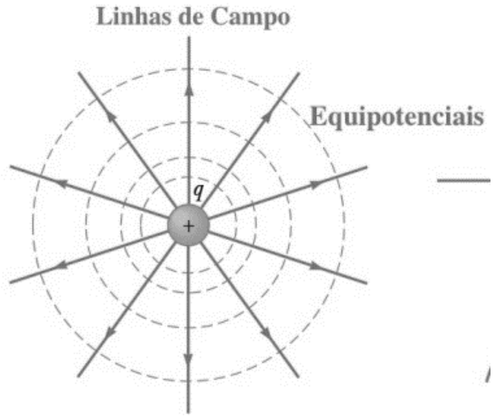
$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \Rightarrow U = qV$$

Se divirmos a expressão (integral) da energia potencial pela carga q, podemos escrever V como:

$$V_{final} - V_{inicial} = -\int_{Inicial}^{Final} \vec{E}.\vec{dl}$$

SUPERFÍCIES EQUIPOTENCIAIS

São as superfícies onde o potencial elétrico é constante. Por exemplo, para o caso de uma carga pontual, V só depende de r, então as superfícies são cascas esféricas concêntricas centradas na carga pontual que gera o potencial.



GRADIENTES

O gradiente do potencial elétrico é dado por:

$$\nabla V = grad\ V = \frac{\partial V}{\partial x}\hat{e}_x + \frac{\partial V}{\partial y}\hat{e}_y + \frac{\partial V}{\partial z}\hat{e}_z$$

O gradiente da energia potencial elétrica é dada por:

$$\nabla U = grad\ U = \frac{\partial U}{\partial x}\hat{e}_x + \frac{\partial U}{\partial y}\hat{e}_y + \frac{\partial U}{\partial z}\hat{e}_z$$

O gradiente é, formalmente, um operador vetorial que fala a direção e o sentido de máximo crescimento de um campo escalar. Podemos então relacionar a força elétrica e o campo elétrico aos gradientes do potencial e da energia através das seguintes equações:

$$\vec{F} = -\nabla U\ ;\ \ \vec{E} = -\nabla V$$

Assim, por exemplo, se sabemos que a direção do campo elétrico é $\hat{e}_z$, podemos calcular o potencial elétrico e determinar o campo elétrico através da igualdade:

$$E = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

Tal aproximação é muito útil nos casos em que o cálculo direto do campo elétrico é complicado, devido as integrais que aparecem. Podemos então determinar o potencial elétrico, que em geral é mais fácil, e derivá-lo. Assim obtemos o campo elétrico diretamente, sem a necessidade de integrar uma equação complicada.

CAPACITÂNCIA E CAPACITORES

Capacitores são dispositivos elétricos responsáveis por armazenar uma certa quantidade de carga quando submetidos a um potencial elétrico. Na maior parte das aplicações, a quantidade de carga elétrica armazenada é proporcional a tensão elétrica submetida. A constante de proporcionalidade é a chamada capacitância C do capacitor, podemos escrever, pois:

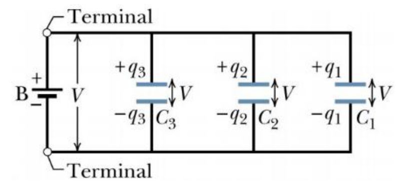
$$C = \frac{Q}{V}$$

Se o capacitor é de placas paralelas, então a capacitância é dada por (A é a área de uma das placas do capacitor e d é a distância entre as placas):

$$C = \frac{\epsilon_0 A}{d}$$

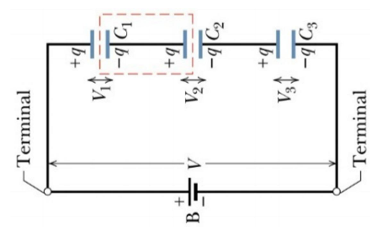
LIGAÇÃO EM SÉRIE E EM PARALELO DE CAPACITORES

A associação em paralelo de N capacitores pode ser substituída por um único capacitor equivalente de capacitância igual a soma das capacitâncias de cada um dos capacitores.



$$C_{eq} = \sum_{i=1}^{N} C_i$$

Já a associação em série de N capacitores pode ser substituída por um único capacitor de capacitância dada por:



$$\frac{1}{C_{eq}} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{C_i}$$

ARMAZENAMENTO DE ENERGIA EM CAPACITORES

A energia armazenada num capacitor de placas paralelas é dada por:

$$U = \frac{1}{2} C V^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

ENERGIA DO CAMPO ELÉTRICO

A partir da equação da energia armazenada num capacitor, podemos chegar numa outra equação, que nos diz que a energia armazenada no capacitor não se encontra na carga elétrica, mas sim no campo elétrico confinado dentro das placas. Como para placas paralelas, V = E . d, temos:

$$U = \frac{1}{2} C V^2 = \frac{1}{2} C E^2 d^2, usando\ C = \frac{\epsilon_0 A}{d} \Rightarrow U = \frac{1}{2} \epsilon_0 A d E^2$$

Observamos que Ad é igual ao volume confinado entre as placas, define-se, pois, a densidade de energia elétrica u (energia/volume) e outra forma de se calcular a energia potencial elétrica U:

$$u = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \,; U = \int_V u dV$$

Aqui vemos que a energia não está mais associada a V, mas sim ao campo E.

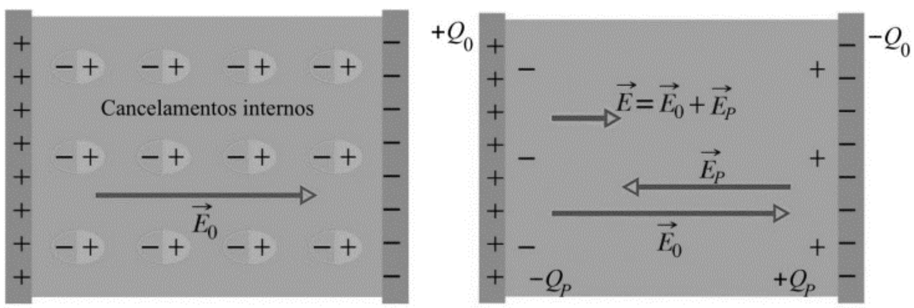
CAPACITORES E DIELÉTRICOS

Dielétricos são materiais isolantes colocados entre as placas de um capacitor. Utilizamos dielétricos para aumentar o valor da Capacitância, assim conseguimos armazenar mais carga para uma mesma tensão elétrica, ou ainda, armazenar o mesmo valor de carga com tensões menores, o que é ideal para aplicações de baixa potência.

MODELO MOLECULAR DA CARGA INDUZIDA (*)

*OBS: As equações com * são as equações realmente importantes de saber.*

Inicialmente consideremos um capacitor de placas paralelas com vácuo no meio (ou ar). O campo elétrico entre as placas (nessa condição) será chamado de $\vec{\boldsymbol{E}}_{\boldsymbol{0}}$. Agora vamos colocar entre as placas um material isolante, que chamaremos de **dielétrico**. Como vimos, num material isolante as partículas estão confinadas, elas não tem muita mobilidade. Mas o nosso campo, perto delas, é muito forte, o que acaba "esticando" um pouco as moléculas. Essa esticada é a **polarização**, que faz com que as moléculas fiquem mais positivamente carregadas de um lado e negativamente carregadas de outro.



Agora temos que imaginar que são muitas moléculas. Todas polarizadas pra mesma direção, de modo que a ponta positiva de uma se cancela com a ponta negativa da outra. Mas e nas bordas? Nas bordas não há com quem cancelar, de modo que sobra um resto de carga negativa de um lado e positiva do outro. A essa carga que sobra damos o nome de carga de polarização q_{pol}. O acúmulo dessa carga na superfície do dielétrico gera um campo elétrico de polarização $\vec{E}_p$, de sentido oposto ao nosso campo $\vec{E}_0$. A soma vetorial desses campos nos fornece o campo elétrico dentro do dielétrico $\vec{\boldsymbol{E}} = \vec{\boldsymbol{E}}_{\boldsymbol{p}} + \vec{\boldsymbol{E}}_{\boldsymbol{0}} (*)$, cujo módulo é menor que o do campo inicial no vácuo. Observa-se também que como o campo é diretamente proporcional ao potencial elétrico, o potencial diminui, o que, para um mesmo número de cargas, aumenta a capacitância (CV = q).

Vamos então definir um vetor chamado **vetor de Polarização** (cuja direção é a mesma do campo no vácuo $\vec{E}_0$, que é quem polariza as moléculas), de magnitude igual a densidade de carga de polarização na superfície $P = \sigma_{pol}$.

Assim, como $dq = \sigma_{pol} dA$, podemos multiplicar os dois lados da equação por dA e obtemos:

$$PdA = \sigma_{pol} dA = dq \xRightarrow{Integrando} q_{pol} = -\oint_S \vec{P}.\overrightarrow{dA}$$

O sinal negativo ocorre porque se dividimos por ϵ_0 ambos os lados, resulta a Lei de Gauss, e o vetor campo elétrico que está sendo integrado (que é o campo elétrico de polarização) tem sentido contrário ao campo $\vec{E}_0$:

$$q_{pol} = -\oint_S \vec{P}.\overrightarrow{dA} \xrightarrow{Dividindo} \frac{q_{pol}}{\epsilon_0} = -\oint_S \frac{\vec{P}}{\epsilon_0}.\overrightarrow{dA} \xrightarrow{Comparando\ com\ Gauss} \vec{E}_p = -\frac{\vec{P}}{\epsilon_0}\ (I)$$

Observa-se também, na prática, que o vetor de polarização é proporcional ao campo $\vec{E}$ (soma do campo no vácuo e do campo de polarização):

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E}\ (II)$$

χ_e é a chamada **susceptibilidade elétrica**, que depende do meio. Ela é uma medida do grau de polarização em determinado isolante quando submetido a um campo elétrico. Da definição do campo $\vec{E}$, podemos escrever usando I e II que:

$$\vec{E} = \vec{E}_p + \vec{E}_0 \overset{I}{\Rightarrow} \vec{E} = -\frac{\vec{P}}{\epsilon_0} + \vec{E}_0 \overset{II}{\Rightarrow} \vec{E} = -\frac{\epsilon_0 \chi_e \vec{E}}{\epsilon_0} + \vec{E}_0$$

Assim achamos uma relação direta entre o campo dentro do dielétrico e o campo no vácuo (sem precisarmos explicitamente do campo devido a polarização):

$$\boldsymbol{\vec{E}_0 = (1 + \chi_e)\vec{E} = \kappa\vec{E}}\ (*)$$

Onde κ é a **constante dielétrica do meio**, que é igual a 1 + a susceptibilidade. Como o potencial V = E.d, para essa nova configuração obtemos as seguintes equações em relação a capacitância e ao potencial antigo (representados pelo índice 0):

$$\boldsymbol{C_{nova} = \kappa C_0\,;\, V_{nova} = \frac{V_0}{\kappa}}\ (*)$$

LEI DE GAUSS EM DIELÉTRICOS (*)

*OBS: As equações com * são as equações realmente importantes de saber.*

Do modelo molecular da carga induzida, podemos reescrever a Lei de Gauss para o campo dentro do dielétrico, agora considerando a carga de polarização que aparece na superfície do dielétrico devido ao campo elétrico entre as placas. Jogando o termo ϵ_0 para o lado e fazendo a q_{in} como a soma da carga livre na superfície da placa e a carga de polarização, obtemos:

$$\oint_S \vec{E}.\overrightarrow{dA} = \frac{q_{in}}{\epsilon_0} \Rightarrow \epsilon_0 \oint_S \vec{E}.\overrightarrow{dA} = q_{livre} + q_{pol}$$

Da relação entre q_{pol} e o vetor de polarização podemos escrever:

$$\oint_S \epsilon_0 \vec{E}.\overrightarrow{dA} = q_{livre} - \oint_S \vec{P}.\overrightarrow{dA} \xrightarrow{Juntando} \oint_S (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}).\overrightarrow{dA} = q_{livre}$$

Define-se, aqui, o vetor **deslocamento elétrico** como $\vec{D} = (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P})$, o que resulta na Lei de Gauss para dielétricos, que tem como principal vantagem depender apenas da carga livre, que conhecemos, já que em geral é difícil determinar q_{pol}:

$$\boldsymbol{\oint_S \vec{D}.\overrightarrow{dA} = q_{livre}}\ (*)$$

Usando a relação entre $\vec{P}$ e o campo elétrico dentro do dielétrico, podemos reescrever o vetor deslocamento elétrico como:

$$\vec{D} = (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = (\epsilon_0 \vec{E} + \epsilon_0 \chi_e \vec{E}) = \epsilon_0 \vec{E}(1 + \chi_e) = \kappa \epsilon_0 \vec{E} = \epsilon \vec{E}$$

$$\boldsymbol{\vec{D} = \epsilon \vec{E}}\ (*)$$

ϵ é a **permissividade relativa do meio**. Assim a Lei de Gauss é reescrita, para dielétricos, como:

$$\oint_{\boldsymbol{S}} \boldsymbol{\vec{E}.\overrightarrow{dA}} = \frac{\boldsymbol{q_{livre}}}{\boldsymbol{\epsilon}}\ (*)$$

Tal lei permite que determinemos o campo elétrico entre as placas do capacitor simplesmente conhecendo a carga livre na superfície das placas e o meio em que o campo elétrico está inserido, sendo idêntica a Lei de Gauss na forma de usar.