Resumo de Derivadas

por César Morad

Definição:

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

$$f'(a) = \frac{df}{dx}(a) = \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=a}$$

h = x - a

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Propriedades:

Números (a, c e p são números)

1) y = c → y' = 0
2) y = x → y' = 1
3) y = x^p → y' = px^{p-1}
4) y = e^x → y' = e^x
5) y = ln x → y' = $\frac{1}{x}$
6) y = a^x → y = $a^x \cdot \ln a$
7) y = $\log_a x$ → y' = $\frac{1}{x \ln a}$
8) y = sen x → y' = cos x
9) y = cos x → y' = - sen x
10) y = tg x → y' = $\sec^2 x$
11) y = arc sen x → y' = $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
12) y = arc cos x → y' = $\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
13) y = arc tg x → y' = $\frac{1}{1+x^2}$

Funções (u e v são funções)

1) y = c · u → y' = c · u'
2) y = u + v → y' = u' + v'
3) y = u – v → y' = u' – v'
4) y = u · v → y' = u' · v + u · v'
5) y = $\frac{u}{v}$ → y' = $\frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$
6) y = u(v) → y' = u' · v' (Regra da Cadeia)
7) y = u^n → y' = $n \cdot u^{n-1} \cdot u'$
8) y = $\log_a u$ → y' = $\frac{u'}{u' \cdot \ln a}$
9) y = ln u → y' = $\frac{u'}{u}$
10) y = a^u → y' = $a^u \cdot \ln a \cdot u'$
11) y = e^u → y' = $e^u \cdot u'$

12) $y = u^p \rightarrow y' = pu^{p-1} \cdot u'$
13) $y = \text{sen } u \rightarrow y' = (\cos u) \cdot u'$
14) $y = \cos u \rightarrow y' = (-\text{ sen } u) \cdot u'$
15) $y = \text{tg } u \rightarrow y' = (\sec^2 u) \cdot u'$
16) $y = \text{arc sen } u \rightarrow y' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
17) $y = \text{arc cos } u \rightarrow y' = \frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$
18) $y = \text{arc tg } u \rightarrow y' = = \frac{u'}{\sqrt{1+u^2}}$

Como usar a Regra da Cadeia

Começar pelo função mais externa e seguir derivando até a mais interna. Exemplo:

$r = \cos^2(2x^3 - 1)$

$f = [\cos(2x^3 - 1)]^2 \rightarrow f' = 2[\cos(2x^3 - 1)]$ | $y = x^p \rightarrow y' = px^{p-1}$
$g = \cos(2x^3 - 1) \rightarrow g' = -\text{ sen }(2x^3 - 1)$ | $y = \cos x \rightarrow y' = -\text{ sen } x$
$h = 2x^3 - 1 \rightarrow h' = 6x^2$ | $(y = x^p \rightarrow y' = px^{p-1})$ & $(y = c \rightarrow y' = 0)$

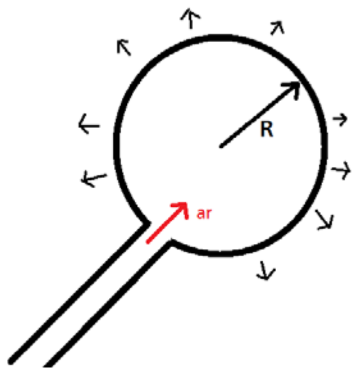
$r' = f' \cdot g' \cdot h'$
$r' = 2[\cos(2x^3 - 1)] \cdot [-\text{ sen }(2x^3 - 1)] \cdot 6x^2$
$r' = -12\, x^2 \cdot \cos(2x^3 - 1) \cdot \text{sen }(2x^3 - 1)$

Taxas Relacionadas:

1) **Identificar as variáveis**
2) **Achar uma relação entre as variáveis**
3) **Derivar em relação a variável de referência**
4) **Substituir os valores conhecidos**
5) **Isolar o que se quer calcular**

Exemplo 1:

O volume do balão esférico abaixo cresce a uma taxa de 100 centímetros cúbicos por segundo. Qual é a taxa de crescimento do raio quando o mesmo mede 50 cm?



$\frac{dV}{dt} = 100\ \text{cm}^3/\text{s}$ $\qquad \frac{dR}{dt} = ?$ $\qquad R = 50\ \text{cm}$

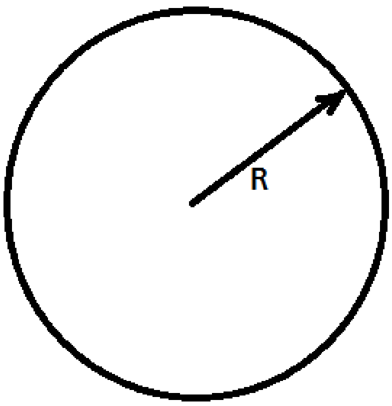
Resolução:

1) Volume (V) e Raio (R)
2) $V = \frac{4}{3}\pi R^3$
3) $1\ \frac{dV}{dt} = \frac{4\pi}{3}\ 3R^2\frac{dR}{dt} \rightarrow \frac{dV}{dt} = 4\pi R^2\frac{dR}{dt}$
4) $100 = 4\pi(50)^2\frac{dR}{dt} \rightarrow 100 = 4\pi 2500\frac{dR}{dt}$
5) $\frac{dR}{dt} = \frac{100}{4\pi 2500} \rightarrow \boldsymbol{\frac{dR}{dt} = \frac{1}{100\pi}\ cm/s}$

Exemplo 2:

Uma mancha de óleo expande-se em forma de círculo onde a área cresce a uma taxa constante de 26 kilometros quadrados por hora. Com que rapidez estará variando o raio da mancha quando a área for de 9 kilometros quadrados?

$\frac{dA}{dt} = 26\ {km^2}/{h}$ $\qquad \frac{dR}{dt} = ?$ $\qquad A = 9\ \text{km}^2 \rightarrow R = \frac{3}{\sqrt{\pi}}\ \text{km}$

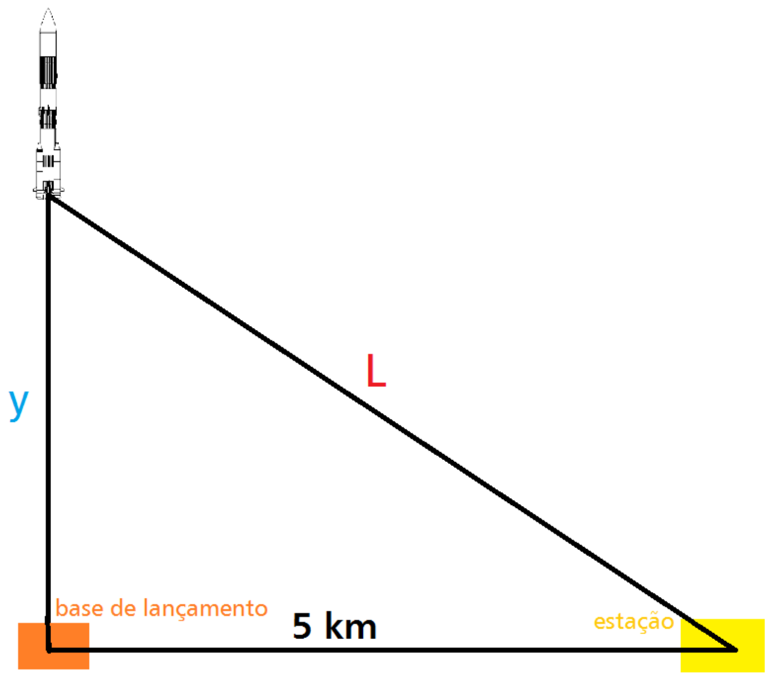


Resolução:

1) Área (A) e Raio (R)
2) A = πR^2
3) $\frac{dA}{dt} = \pi 2R\frac{dR}{dt}$
4) $26 = 2\pi\frac{3}{\sqrt{\pi}}\frac{dR}{dt} \rightarrow 26\sqrt{\pi} = 6\pi\frac{dR}{dt}$
5) $\frac{dR}{dt} = \frac{26\sqrt{\pi}}{6\pi} \rightarrow \boldsymbol{\frac{dR}{dt} = \frac{13\sqrt{\pi}}{3\pi}\ km/h}$

Exemplo 3:

Um foguete sobe verticalmente e é acompanhado por uma estação no solo a 5 km da base de lançamento. Com que rapidez o foguete estará subindo, quando a sua altura for 4 km e a sua distância da estação estiver crescendo a 2000 km/h.



$\frac{dy}{dt} = ?$ $\frac{dL}{dt} = 2000\ km/h$ y = 4 km → L = $\sqrt{41}\ km$ ($L^2 = y^2 + 5^2$)

Resolução:

1) Distância do foguete à base (y) e distância até a estação (L)
2) $L^2 = y^2 + 5^2$ → $L^2 = y^2 + 25$
3) $2L\frac{dL}{dt} = 2y\frac{dy}{dt} + 0$
4) $2\sqrt{41}(2000) = 2(4)\frac{dy}{dt}$
5) $\frac{dy}{dt} = \frac{4000\sqrt{41}}{8}$ → $\boldsymbol{\frac{dy}{dt} = 500\sqrt{41}\ km/h}$

Boa sorte!