Adição Binária

As quatro regras básicas para a adição de dígitos binários (bits) são:

Lembre-se de que, em binário, 1 + 1 = 10, e não 2.

0 + 0 = 0	Resultado: 0; carry: 0
0 + 1 = 1	Resultado: 1; carry: 0
1 + 0 = 1	Resultado: 1; carry: 0
1 + 1 = 10	Resultado: 0; carry: 1

Observe que nas primeiras três regras a soma resulta em um único bit e na quarta regra a soma de dois 1s resulta no número binário dois (10). Quando números binários são somados, o último caso acima gera um resultado 0 em uma dada coluna e um carry de 1 para a próxima coluna à esquerda, conforme ilustrado na adição a seguir (11 + 1):

$$
\begin{array}{rrr}
\text{Carry} & \text{Carry} & \\
1 & 1 & \\
0 & 1 & 1 \\
+0 & 0 & 1 \\
\hline
1 & 0 & 0
\end{array}
$$

Na coluna da direita, 1 + 1 = 0 com um carry de 1 para a próxima coluna à esquerda. Na coluna do meio, 1 + 1 + 0 = 0 com um carry de 1 para a próxima coluna à esquerda. Na última coluna, 1 + 0 + 0 = 1.

Quando existe um carry de 1, temos uma situação na qual três bits estão sendo somados (um bit de cada um dos dois números e um bit de carry). Essa situação é ilustrada a seguir:

bits de carry

1 + 0 + 0 = 01	Resultado: 1; carry: 0
1 + 1 + 0 = 10	Resultado: 0; carry: 1
1 + 0 + 1 = 10	Resultado: 0; carry: 1
1 + 1 + 1 = 11	Resultado: 1; carry: 1

EXEMPLO 2–7

Efetue as seguintes adições de números binários:

(a) 11 + 11 **(b)** 100 + 10 **(c)** 111 + 11 **(d)** 110 + 100

Solução A soma decimal equivalente também é mostrada para referência.

$$
\textbf{(a)}\ \begin{array}{r} 11 \\ \underline{+11} \\ \mathbf{110} \end{array} \quad \begin{array}{r} 3 \\ \underline{+3} \\ 6 \end{array}
\qquad
\textbf{(b)}\ \begin{array}{r} 100 \\ \underline{+10} \\ \mathbf{110} \end{array} \quad \begin{array}{r} 4 \\ \underline{+2} \\ 6 \end{array}
\qquad
\textbf{(c)}\ \begin{array}{r} 111 \\ \underline{+\ 11} \\ \mathbf{1010} \end{array} \quad \begin{array}{r} 7 \\ \underline{+3} \\ 10 \end{array}
\qquad
\textbf{(d)}\ \begin{array}{r} 110 \\ \underline{+100} \\ \mathbf{1010} \end{array} \quad \begin{array}{r} 6 \\ \underline{+4} \\ 10 \end{array}
$$

Problema relacionado Some 1111 com 1100.

Subtração Binária

As quatro regras básicas para a subtração de bits são:

Lembre-se de que, em binário, 10 – 1 = 1, e não 9.

0 – 0 = 0
1 – 1 = 0
1 – 0 = 1
10 – 1 = 1 sendo o empréstimo igual a 1

Quando subtraímos números, às vezes temos que fazer um empréstimo (borrow) da próxima coluna à esquerda. Em binário um borrow é necessário apenas quando tentamos subtrair 1 de 0. Nesse caso, quando um 1 é obtido como empréstimo da próxima coluna à esquerda, um 10 é criado na coluna que está ocorrendo a subtração e a última das quatro regras básicas apresentadas acima tem que ser aplicada. Os Exemplos 2–8 e 2–9 ilustram a subtração binária: as subtrações decimais equivalentes também são mostradas.

EXEMPLO 2–8

Efetue as seguintes subtrações binárias:

(a) 11 + 01 **(b)** 11 – 10

Solução

(a)
$$\begin{array}{r} 11 \\ -\ 01 \\ \hline \mathbf{10} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 3 \\ -\ 1 \\ \hline 2 \end{array}$$

(b)
$$\begin{array}{r} 11 \\ -\ 10 \\ \hline \mathbf{01} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 3 \\ -\ 2 \\ \hline 1 \end{array}$$

Nenhum empréstimo foi solicitado neste exemplo. O número binário 01 é o mesmo que 1.

Problema relacionado Efetue a subtração: 100 – 111.

EXEMPLO 2–9

Efetue a subtração de 011 a partir de 101.

Solução

$$\begin{array}{r} 101 \\ -011 \\ \hline \mathbf{010} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 5 \\ -3 \\ \hline 2 \end{array}$$

Vamos analisar exatamente o que foi feito para subtrair os dois números binários visto que um empréstimo foi solicitado. Comece pela coluna à direita.

Coluna da esquerda:
Quando um 1 é emprestado, um
0 é deixado, assim 0 – 0 = 0.

Coluna do meio:
Pega emprestado 1 da próxima coluna,
sendo que essa coluna passa a ser 10,
então 10 – 1 = 1.

$$\begin{array}{r} {}^{0}\cancel{1}\,{}^{1}01 \\ -\ 0\ 11 \\ \hline 0\ 10 \end{array}$$

Coluna da direita
1 – 1 = 0

Problema relacionado Efetue a subtração: 101 – 110.

Multiplicação Binária

A multiplicação binária de dois bits é realizada da mesma forma que na multiplicação dos dígitos decimais 0 e 1.

As quatro regras básicas para a multiplicação de bits são:

$$0 \times 0 = 0$$
$$0 \times 1 = 0$$
$$1 \times 0 = 0$$
$$1 \times 1 = 1$$

A multiplicação é realizada com números binários da mesma maneira que com números decimais. Ela envolve a formação de produtos parciais, deslocamento de cada produto parcial sucessivo uma posição à esquerda, para então somar todos os produtos parciais. O Exemplo 2–10 ilustra o procedimento; as multiplicações decimais equivalentes são mostradas para referência.

EXEMPLO 2–10

Realize as seguintes multiplicações binárias:

(a) 11×11 **(b)** 101×111

Solução

(a)
$$\begin{array}{lr} & 11 \\ & \underline{\times\ 11} \\ \text{Produtos} & 11 \\ \text{parciais} & \underline{+11\ \ } \\ & \mathbf{1001} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 3 \\ \underline{\times\ 3} \\ 9 \end{array}$$

(b)
$$\begin{array}{lr} & 111 \\ & \underline{\times\ 101} \\ \text{Produtos} & 111 \\ \text{parciais} & 000\ \\ & \underline{+111\ \ \ } \\ & \mathbf{100011} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 7 \\ \underline{\times\ 5} \\ 35 \end{array}$$

Problema relacionado Efetue a multiplicação: 1011×1010.

Uma calculadora pode ser usada para realizar operações aritméticas com números binários enquanto a capacidade da calculadora não for excedida.

Divisão Binária

A divisão binária segue os mesmos procedimentos que a divisão decimal, como ilustra o Exemplo 2–11. As divisões decimais equivalentes também são mostradas.

EXEMPLO 2–4

Realize as seguintes divisões binárias:

(a) $110 \div 11$ **(b)** $110 \div 10$

Solução

(a)
$$\begin{array}{r} \mathbf{10} \\ 11\,\overline{)\,110} \\ \underline{11\ } \\ 000 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2 \\ 3\,\overline{)\,6} \\ \underline{6} \\ 0 \end{array}$$

(b)
$$\begin{array}{r} \mathbf{11} \\ 10\,\overline{)\,110} \\ \underline{10\ } \\ 10 \\ \underline{10} \\ 00 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 3 \\ 2\,\overline{)\,6} \\ \underline{6} \\ 0 \end{array}$$

Problema relacionado Efetue a divisão: $1100 \div 100$.

SEÇÃO 2-4 REVISÃO

1. Realize as seguintes adições binárias:
   (a) $1101 + 1010$ **(b)** $10111 + 01101$
2. Realize as seguintes subtrações binárias:
   (a) $1101 - 0100$ **(b)** $1001 - 0111$
3. Realize as operações binárias indicadas:
   (a) 110×111 **(b)** $1100 \div 011$

2-5 COMPLEMENTOS DE 1 E DE 2 DE NÚMEROS BINÁRIOS

O complemento de 1 e o complemento de 2 de um número binário são importantes porque eles permitem a representação de números negativos. O método da aritmética do complemento de 2 é geralmente usado em computadores na operação com números negativos.

Ao final do estudo desta seção você deverá ser capaz de:

■ Converter um número binário no seu complemento de 1 ■ Converter um número binário no seu complemento de 2 usando os dois métodos

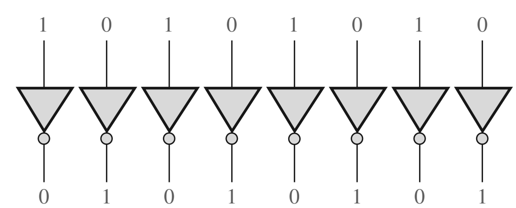
Determinação do Complemento de 1

Troque cada bit no número pelo seu complemento de 1.

O **complemento** de 1 de um número binário é determinado trocando-se todos os 1s por 0s e todos os 0s por 1s, conforme ilustrado a seguir:

1	0	1	1	0	0	1	0	Número binário
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	
0	1	0	0	1	1	0	1	Complemento de 1

A forma mais simples de obter o complemento de 1 de um número binário com um circuito digital é usar inversores em paralelo (circuitos NOT), conforme mostra a Figura 2–2 para um número binário de 8 bits.



▶ **FIGURA 2–2**

Exemplo do uso de inversores para obter o complemento de 1 de um número binário.

Determinação do Complemento de 2

Some 1 ao complemento de 1 para obter o complemento de 2.

O complemento de 2 de um número binário é determinado somando 1 ao LSB do complemento de 1.

complemento de 2 = (complemento de 1) + 1

EXEMPLO 2–12

Determine o complemento de 2 de 10110010.

Solução

10110010	Número binário
01001101	Complemento de 1
+ 1	Soma-se 1
01001110	Complemento de 2

Problema relacionado Determine o complemento de 2 de 11001011.

Um método alternativo para determinar o complemento de 2 de um número binário é:

1. Comece à direita com o LSB e escreva os bits como eles aparecem até o primeiro 1 (inclusive).
2. Tome o complemento de 1 dos bits restantes.

Troque todos os bits à esquerda do bit 1 menos significativo para obter o complemento de 2.

EXEMPLO 2–13

Determine o complemento de 2 de 10111000 usando o método alternativo.

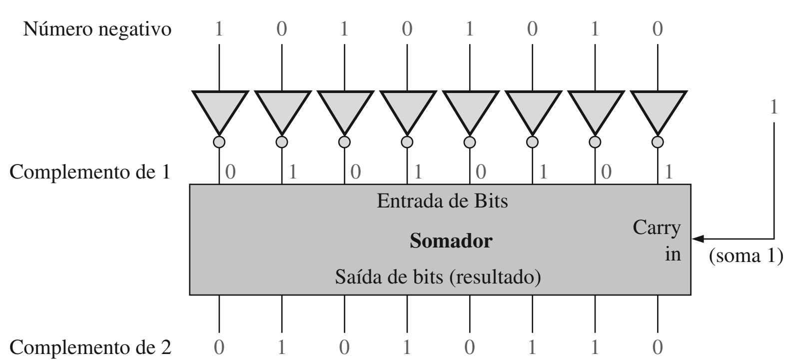
Solução

	10111000	Número binário
Complemento de 1 dos bits originais →	**01001000**	Complemento de 2

Estes bits permanecem os mesmos

Problema relacionado Determine o complemento de 2 de 11000000.

O complemento de 2 de um número binário negativo pode ser obtido usando inversores e um somador, conforme indicado na Figura 2–3. Essa figura ilustra como um número de 8 bits pode ser convertido no seu complemento de 2 invertendo primeiro cada bit (tomando o complemento de 1) e em seguida somando 1 ao complemento de 1 com um circuito somador.



◄ **FIGURA 2–3**

Exemplo da obtenção do complemento de 2 de número binário negativo.

Para converter a partir do complemento de 1 ou de 2 de volta para a forma binária verdadeira (não complementada), usamos os mesmos dois procedimentos descritos anteriormente. Para passar do complemento de 1 de volta para o binário verdadeiro, inverta todos os bits. Para passar do complemento de 2 de volta para a forma binária verdadeira, tome o complemento de 1 do número na forma do complemento de 2 e some 1 ao bit menos significativo.

SEÇÃO 2–5 REVISÃO

1. Determine o complemento de 1 e cada número binário a seguir:
(a) 00011010 **(b)** 11110111 **(c)** 10001101

2. Determine o complemento de 2 de cada número binário a seguir:
(a) 00010110 **(b)** 11111100 **(c)** 10010001

2-6 NÚMEROS SINALIZADOS

Os sistemas digitais, como o computador, têm que ser capazes de operar com números positivos e negativos. Um número binário sinalizado é constituído de duas informações: sinal e magnitude. O sinal indica se um número é positivo ou negativo e a magnitude é o valor do número. Existem três formas por meio das quais os números inteiros podem ser representados em binário: sinal-magnitude, complemento de 1 e complemento de 2. Dentre esses, a forma do complemento de 2 é a mais importante e a forma sinal-magnitude é a menos usada. Os números fracionários (não-inteiros) e muito grandes ou muito pequenos podem ser expressos na forma de ponto flutuante.

Ao final do estudo desta seção você deverá ser capaz de:

■ Expressar números positivos e negativos na forma sinal-magnitude ■ Expressar números positivos e negativos na forma do complemento de 1 ■ Expressar números positivos e negativos na forma do complemento de 2 ■ Determinar o valor decimal de números binários sinalizados ■ Expressar um número binário na forma de ponto flutuante

O Bit de Sinal

O bit mais à esquerda em um número binário sinalizado é o **bit de sinal**, o qual nos diz se o número é positivo ou negativo.

Um bit de sinal 0 indica um número positivo e um bit de sinal 1 indica um número negativo.

Forma Sinal-Magnitude

Quando um número binário sinalizado é representado na forma sinal-magnitude, o bit mais à esquerda é o bit de sinal e os bits restantes são os bits de magnitude. Os bits de magnitude estão na forma de binário verdadeiro (não-complementado) tanto para números positivos quanto para negativos. Por exemplo, o número decimal +25 é expresso como um número binário sinalizado de 8 bits usando a forma sinal-magnitude como a seguir:

$$\underset{\text{Bit de sinal}}{0}\underbrace{0011001}_{\text{Bits de magnitude}}$$

O número decimal –25 é expresso como

10011001

Observe que a diferença entre +25 e –25 é apenas o bit de sinal porque os bits de magnitude estão na forma de binário verdadeiro tanto para números positivos quanto negativos.

Na forma sinal-magnitude, um número negativo tem os mesmos bits de magnitude como o número positivo correspondente mas o bit de sinal é 1 em vez de zero.

NOTA: COMPUTAÇÃO

Os computadores usam a representação em complemento de 2 para os números inteiros negativos em todas as operações aritméticas. A razão para isso é que a subtração de um número é o mesmo que a adição com o complemento de 2 do número. Os computadores geram o complemento de 2 invertendo os bits e somando 1, usando instruções especiais que geram o mesmo resultado que o somador visto na Figura 2–3.

Forma do Complemento de 1

Números positivos na forma do complemento de 1 são representados da mesma forma que números positivos expressos como sinal-magnitude. Entretanto, os números negativos estão na forma do complemento de 1 do número positivo correspondente. Por exemplo, usando oito bits, o número decimal –25 é expresso como o complemento de 1 de +25 (00011001) como a seguir:

11100110

Na forma do complemento de 1, um número negativo é o complemento de 1 do número positivo correspondente.

Forma do Complemento de 2

Os números positivos na forma do complemento de 2 são expressos da mesma forma que as representações sinal-magnitude e complemento de 1. Os números negativos são expressos em complemento de 2 dos números positivos correspondentes. Exemplificando novamente, usando 8 bits, vamos tomar o número decimal –25 e expressá-lo como complemento de 2 de +25 (00011001).

11100111

Na forma do complemento de 2, um número negativo é o complemento de 2 do correspondente número positivo.

EXEMPLO 2–14

Expresse o número decimal –39 como um número de 8 bits nas formas sinal-magnitude, complemento de 1 e complemento de 2.

Solução Primeiro escreva o número de 8 bits para +39.

00100111

Na *forma sinal-magnitude*, –39 é gerado alterando o bit de sinal para 1 e deixando os bits de magnitude como estavam. O número é

10100111

Na *forma do complemento de 1*, –39 é gerado tomando o complemento de 1 de +39 (00100111).

11011000

Na *forma do complemento de 2*, –39 é gerado tomando o complemento de 2 de +39 (00100111) como a seguir:

11011000	Complemento de 1
+ 1	
11011001	Complemento de 2

Problema relacionado Expresse +19 e –19 nas formas sinal-magnitude, complemento de 1 e complemento de 2.

O Valor Decimal de Números Sinalizados

Sinal-magnitude Os valores decimais de números positivos e negativos na forma sinal-magnitude são determinados somando os pesos de todos os bits de magnitude que são 1s e ignorando aqueles que são zeros. O sinal é determinado pela análise do bit de sinal.

EXEMPLO 2–15

Determine o valor decimal do número binário que vem a seguir expresso na forma sinal-magnitude: 10010101.

Solução Os sete bits de magnitude e os pesos em potências de dois são:

2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
0	0	1	0	1	0	1

Somando os pesos dos bits que são 1s temos:

$$16 + 4 + 1 = 21$$

O bit de sinal é 1; portanto, o número decimal é –21.

Problema relacionado Determine o valor decimal do número 01110111 dado na forma sinal-magnitude.

Complemento de 1 Valores decimais de números positivos na forma do complemento de 1 são determinados somando os pesos de todos os bits 1s e ignorando os pesos relativos aos zeros. Os valores decimais de números negativos são determinados atribuindo um valor negativo ao peso do bit de sinal, somando os pesos relativos aos bits 1s e somando 1 ao resultado.

EXEMPLO 2–16

Determine os valores decimais dos números binários sinalizados expressos em complemento de 1:

(a) 00010111 **(b)** 11101000

Solução **(a)** Os bits e os respectivos pesos em potências de dois são:

-2^7	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
0	0	0	1	0	1	1	1

Somando os pesos correspondentes aos bits 1, temos:

$$16 + 4 + 2 + 1 = +\mathbf{23}$$

(b) Os bits e os respectivos pesos em potências de dois para o número negativo são mostrados a seguir. Observe que o bit de sinal negativo tem um peso de -2^7 ou –128.

-2^7	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
1	1	1	0	1	0	0	0

Somando os pesos em que os bits são 1s, temos:

$$-128 + 64 + 32 + 8 = -24$$

Somando 1 ao resultado, o número decimal final é

$$-24 + 1 = \mathbf{-23}$$

Problema relacionado Determine o valor decimal do número 11101011 expresso na forma do complemento de 1.

Complemento de 2 Valores decimais de números positivos e negativos na forma do complemento de 2 são determinados somando os pesos das posições de todos os bits 1s e ignorando as posições em que os bits são zeros. O peso do bit de sinal em números negativos é dado com um valor negativo.

EXEMPLO 2–17

Determine os valores decimais dos números binários sinalizados a seguir expressos na forma do complemento de 2:

(a) 01010110 **(b)** 10101010

Solução **(a)** Os bits e seus respectivos pesos em potências de dois para números positivos são:

-2^7	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
0	1	0	1	0	1	1	0

Somando-se os pesos relativos aos bits 1s, temos:

$$64 + 16 + 4 + 2 = +\mathbf{86}$$

(b) Os bits e seus respectivos pesos em potências de dois para números positivos são os seguintes. Observe que o bit de sinal negativo tem um peso de -2^7 ou -128.

-2^7	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
1	0	1	0	1	0	1	0

Somando-se os pesos relativos aos bits 1s, temos:

$$-128 + 32 + 8 + 2 = \mathbf{-86}$$

Problema relacionado Determine o valor decimal do número 11010111 expresso na forma do complemento de 2.

A partir desses exemplos, podemos ver por que a forma do complemento de 2 é a preferida para representar números inteiros sinalizados: para converter para decimal, é necessário simplesmente somar os pesos independente se o número é positivo ou negativo. O sistema do complemento de 1 requer somar 1 ao resultado da soma dos pesos para números negativos, porém não para números positivos. Além disso, a forma do complemento de 1 não é muito usada porque existem duas representações possíveis para o zero (00000000 ou 11111111).

Faixa de Números Inteiros que Pode ser Representada

A faixa da magnitude de um número binário depende do número de bits(n).

Temos usado números de 8 bits para ilustração porque os grupos de 8 bits são comuns na maioria dos computadores, conhecidos como **byte**. Com um byte ou oito bits, podemos representar 256 números diferentes. Com dois bytes ou dezesseis bits, podemos representar 65.536 números diferentes. Com quatro bytes ou 32 bits, podemos representar $4{,}295 \times 10^9$ números diferentes. A fórmula para encontrar o número de combinações diferentes de n bits é

$$\text{Total de combinações} = 2^n$$

Para números sinalizados na forma do complemento de 2, a faixa de valores para números de n bits é

$$\text{Faixa} = -(2^{n-1}) \text{ a } +(2^{n-1} - 1)$$

onde existe em cada caso um bit de sinal e $n - 1$ bits de magnitude. Por exemplo, com quatro bits podemos representar números em complemento de 2 desde $-(2^3) = -8$ até $2^3 - 1 = +7$. De forma similar, com oito bits podemos representar desde -128 até $+127$, e com dezesseis bits podemos representar desde -32.768 até $+32.767$, e assim por diante.

Números em Ponto Flutuante

Para representar números **inteiros** muito grandes, são necessários muitos bits. Existe também um problema quando números que têm parte inteira e fracionária, como 23,5618, precisam ser representados. O sistema de numeração de ponto flutuante*, baseado em notação científica, é capaz de representar números muito grandes e muito pequenos sem o aumento do número de bits e também representa números que têm parte inteira e fracionária.

* N. de T.: A denominação ponto flutuante é mantida por ser de uso comum. O ponto em inglês equivale à vírgula em português. Então, o que vai se mover (flutuar) na representação numérica é a vírgula decimal.