UFABC – UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC

CECS – CENTRO DE ENGENHARIA, MODELAGEM E CIÊNCIAS SOCIAIS APLICADAS

ENGENHARIA AEROESPACIAL

ESTS010-17 - TÉCNICAS DE ANÁLISE ESTRUTURAL E PROJETO

-Terceiro Quadrimestre – 2022 -

Prof. Dr. Wesley Góis – CECS - UFABC

São Bernardo do Campo, setembro de 2022

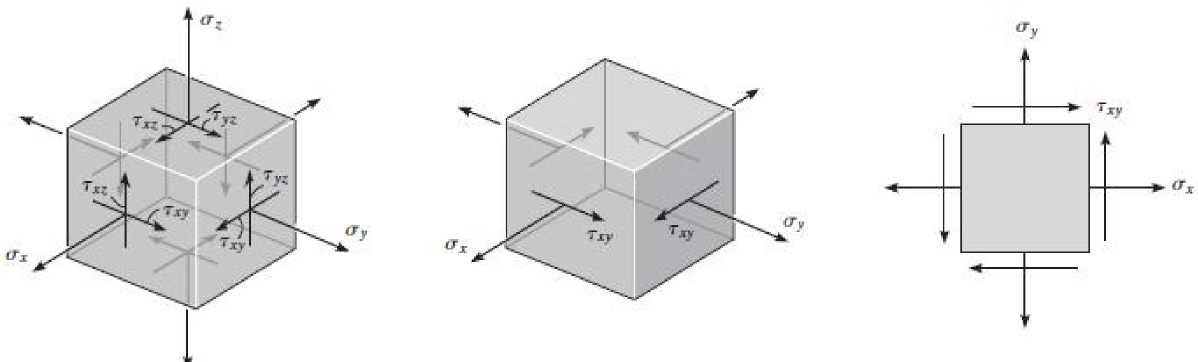
Estudo das Tensões e Deformações – Revisão

Universidade Federal do ABC

1. Estudo das Tensões – Transformações de Tensão no Plano

- O estado geral de tensão em um ponto é caracterizado por *seis* componentes independentes da tensão normal e de cisalhamento.

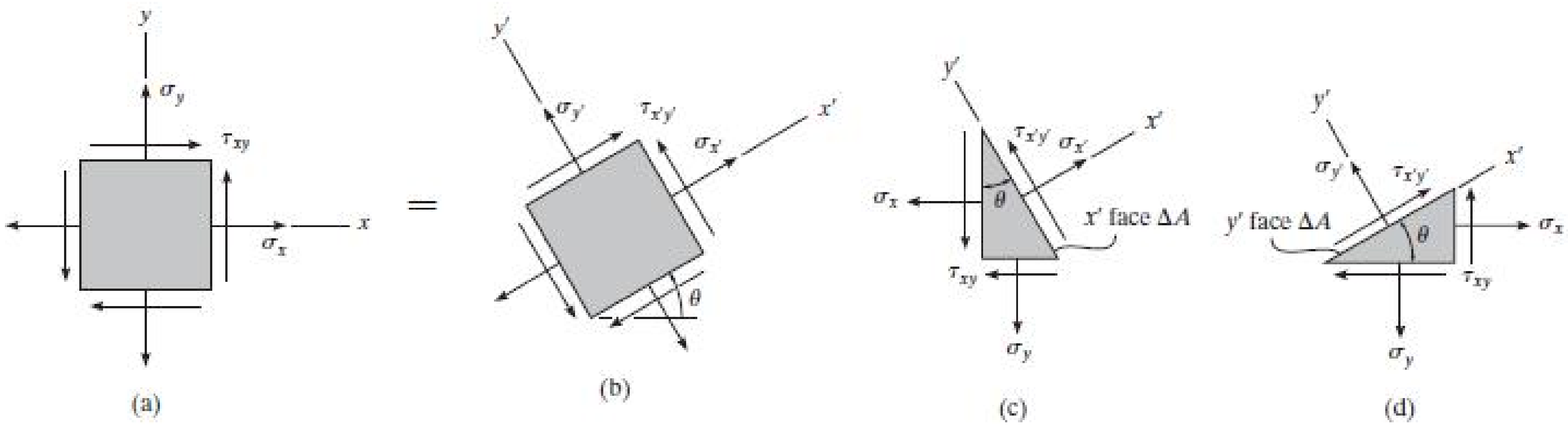
- A tensão produzida em um elemento estrutural ou mecânico pode ser analisada em um único plano. Quando isso ocorre, o material está sujeito a *tensões no plano.*



Estado geral de tensão (a) | Estado plano de tensão (b) | Estado plano de tensão (visão bidimensional) (c)

Estudo das Tensões e Deformações – Revisão

- Componentes de tensão podem se *transformar* em um elemento caso tenha uma orientação diferente.



Estudo das Tensões e Deformações – Revisão

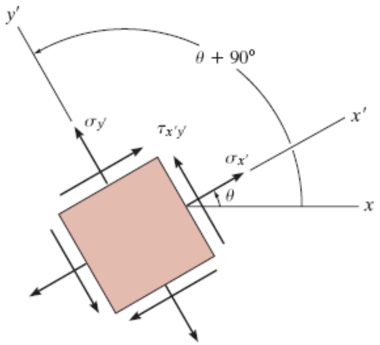
Universidade Federal do ABC

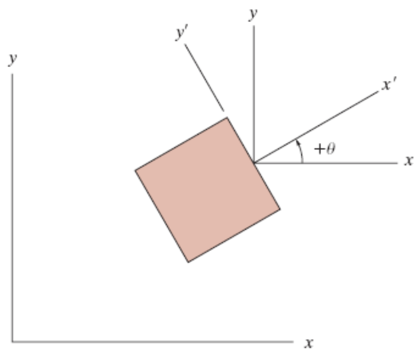
1.1 Equações gerais de transformação de tensão no plano

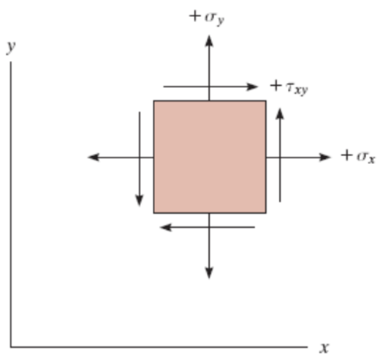
- A tensão normal positiva age para fora de todas as faces e a tensão de cisalhamento positiva age para cima na face direita do elemento.

$$\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\theta + \tau_{xy}\,\mathrm{sen}\,2\theta$$

$$\tau_{x'y'} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\,\mathrm{sen}\,2\theta + \tau_{xy}\cos 2\theta$$





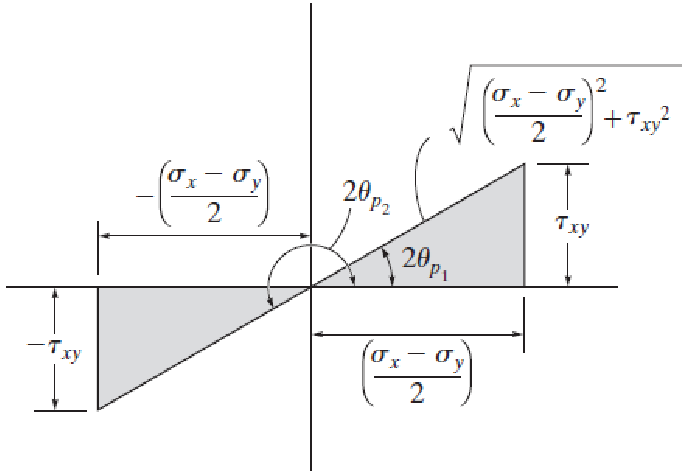


1.2 Tensões principais e tensão de cisalhamento máxima no plano

Tensões principais no plano

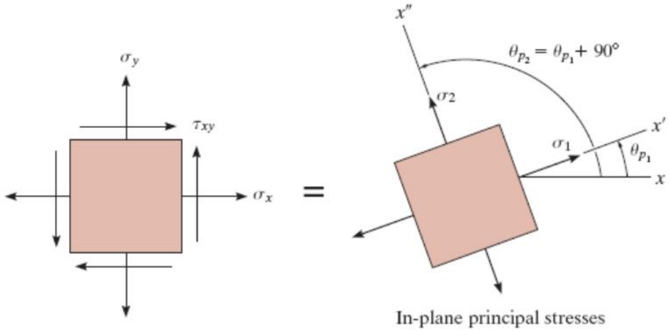
- A orientação dos planos irá determinar se a tensão normal é *máxima* ou *mínima*.

$$\mathrm{tg}\,2\theta_p = \frac{\tau_{xy}}{(\sigma_x - \sigma_y)/2}$$



- A solução tem duas raízes, portanto temos a tensão principal.

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad \text{onde } \sigma_1 > \sigma_2$$

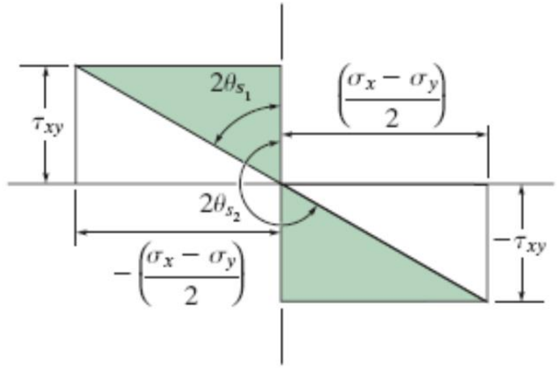


In-plane principal stresses

Tensão de cisalhamento máxima no plano

- A orientação de um elemento irá determinar a máxima e a mínima da tensão de cisalhamento.

$$\mathrm{tg}\,2\theta_s = \frac{-(\sigma_x - \sigma_y)/2}{\tau_{xy}}$$



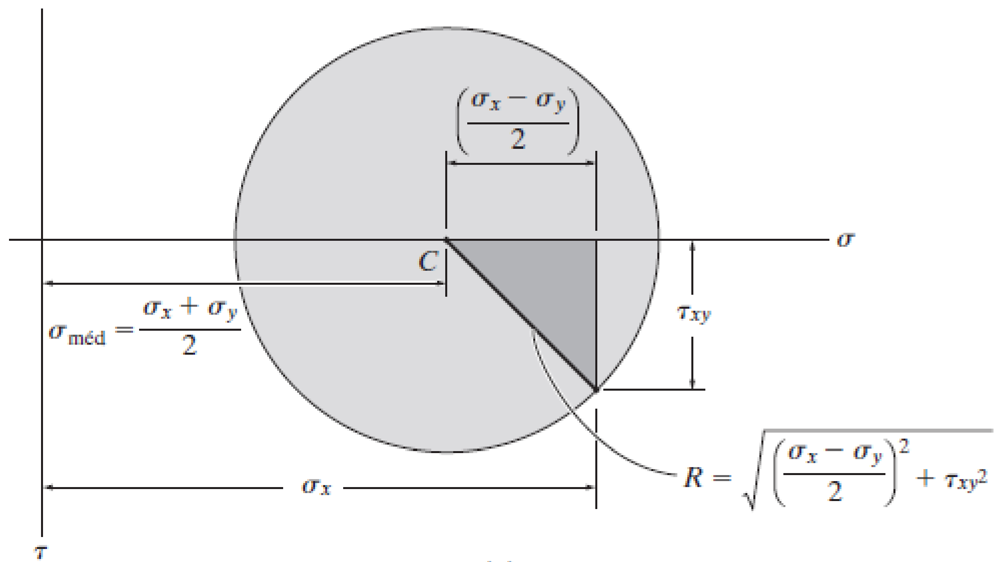
- A solução possui duas raízes, portanto nós temos ***tensão de cisalhamento máxima no plano e a tensão normal média***.

$$\tau_{\text{máx no plano}} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\sigma_{\text{méd}} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}$$

1.3 Círculo de Mohr — tensão no plano

- A transformação da tensão no plano têm uma solução gráfica que é fácil de lembrar.

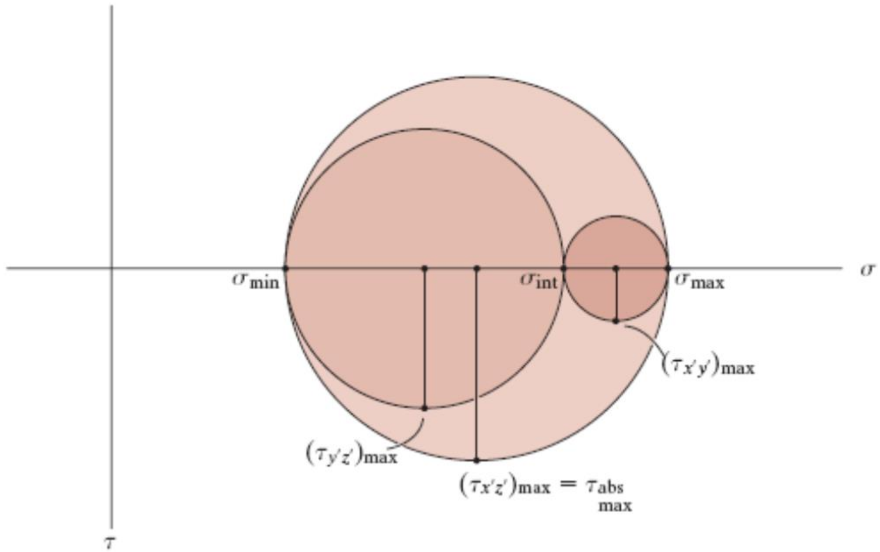


(b)

1. 4 Tensão de cisalhamento máxima absoluta

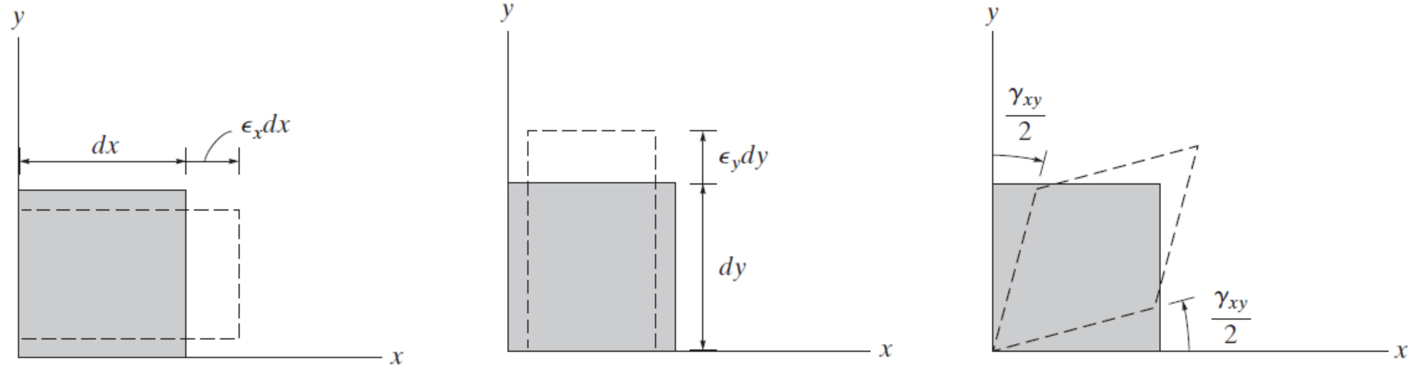
- A tensão de cisalhamento máxima e a tensão normal média associada podem também ser localizadas usando o círculo de Mohr.

$$\tau^{abs}_{máx} = \frac{\sigma_{máx} - \sigma_{mín}}{2} \qquad \sigma_{méd} = \frac{\sigma_{máx} + \sigma_{mín}}{2}$$



2. Deformação Plana

- Estado geral de deformação em um ponto em um corpo é representado por uma combinação de três componentes de deformação normal, $(\epsilon_x \quad \epsilon_y \quad \epsilon_z)$ e três de deformação por cisalhamento $(\gamma_x \quad \gamma_y \quad \gamma_z)$.
- As componentes da deformação normal e por cisalhamento no ponto variarão de acordo com a orientação do elemento.



Deformação normal ϵ_x (a) — Deformação normal ϵ_y (b) — Deformação por cisalhamento γ_{xy} (c)

Estudo das Tensões e Deformações – Revisão

Universidade Federal do ABC

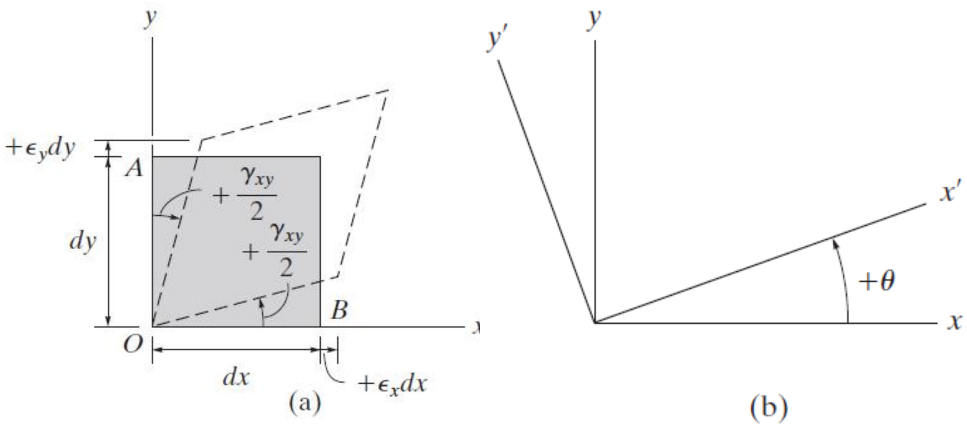
2.1 Equações gerais de transformação no plano de deformação

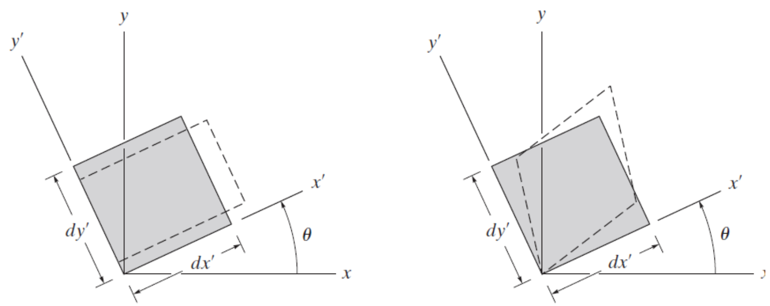
- **Equações de Transformação:**

$$\epsilon_{x'} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} + \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\cos 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2}\operatorname{sen} 2\theta$$

$$\frac{\gamma_{x'y'}}{2} = -\left(\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\right)\operatorname{sen} 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2}\cos 2\theta$$

$$\epsilon_{y'} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} - \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\cos 2\theta - \frac{\gamma_{xy}}{2}\operatorname{sen} 2\theta$$





Deformação normal positiva, $\epsilon_{x'}$

(a)

Deformação por cisalhamento positiva, $\gamma_{x'y'}$

(b)

2.2 Equações gerais de transformação no plano de deformação

Transformações principais

$$\operatorname{tg} 2\theta_p = \frac{\gamma_{xy}}{\epsilon_x - \epsilon_y}$$

$$\epsilon_{1,2} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2}$$

Deformação por cisalhamento máxima no plano.

- Deformação por cisalhamento máxima no plano e a deformação normal média são as seguintes:

$$\operatorname{tg} 2\theta_s = -\left(\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{\gamma_{xy}}\right)$$

$$\epsilon_{\text{méd}} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2}$$

$$\frac{\gamma_{\substack{\text{máx}\\ \text{no plano}}}}{2} = \sqrt{\left(\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2}$$

Universidade Federal do ABC

2.3 Círculo de Mohr — plano de deformação

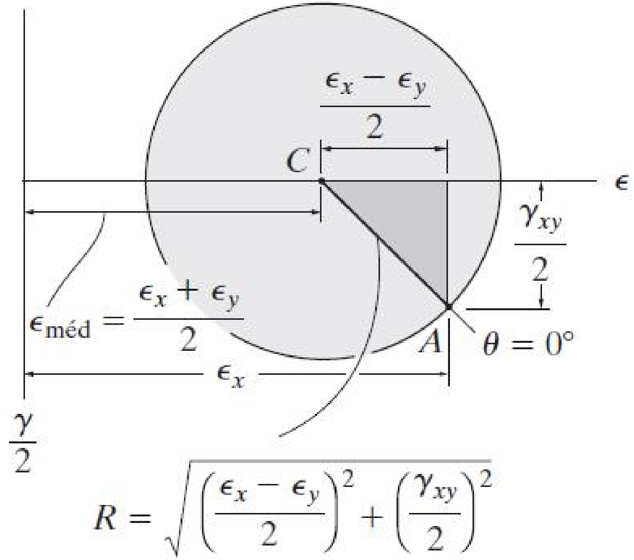
- Também podemos resolver problemas que envolvem a transformação da deformação usando o círculo de Mohr.

$$(\epsilon_{x'} - \epsilon_{méd})^2 + \left(\frac{\gamma_{x'y'}}{2}\right)^2 = R$$

onde

$$\epsilon_{méd} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2}$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2}$$



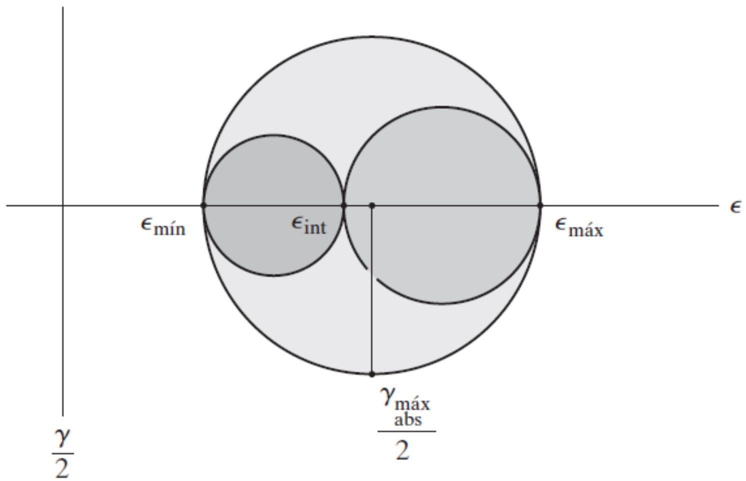
- Com centro sobre o eixo ε no ponto C($\varepsilon_{méd}$, 0) e raio *R*.

2.4 Deformação por cisalhamento máxima absoluta

- ***Deformação por cisalhamento máximo absoluto*** é determinada pelo círculo que tem maior raio.
- Ela ocorre no elemento orientado a 45º em torno do eixo em relação ao elemento mostrado em sua posição original.

$$\gamma_{\substack{\text{máx}\\ \text{abs}}} = \epsilon_{\text{máx}} - \epsilon_{\text{mín}}$$

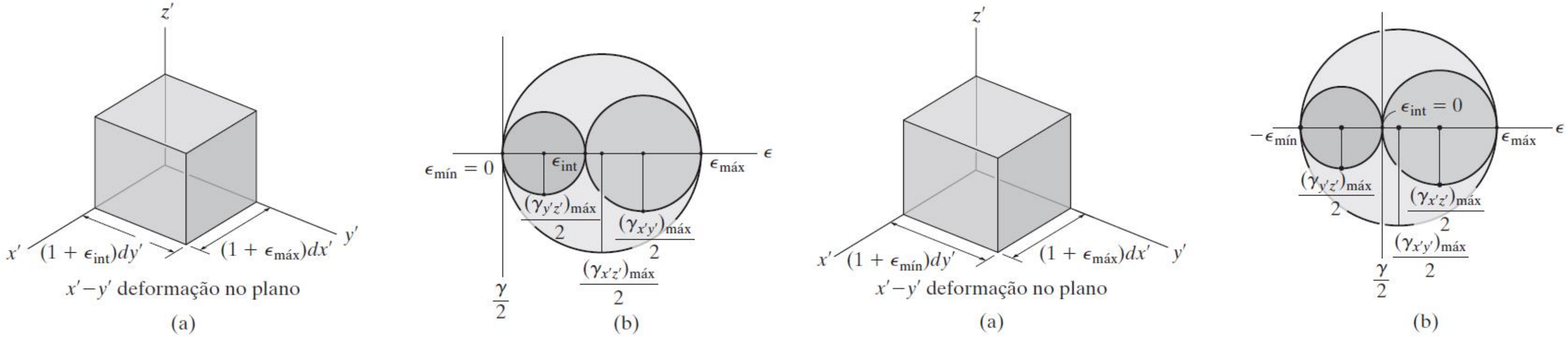
$$\epsilon_{\text{méd}} = \frac{\epsilon_{\text{máx}} + \epsilon_{\text{mín}}}{2}$$



2.5 Deformação por cisalhamento máxima absoluta

Deformação plana

- Para deformação plana, nós temos,



- Este valor representa a *deformação por cisalhamento máxima absoluta* para o material.

$$\gamma_{\substack{\text{máx}\\ \text{abs}}} = (\gamma_{x'z'})_{\text{máx}} = \epsilon_{\text{máx}} \qquad\qquad \gamma_{\substack{\text{máx}\\ \text{abs}}} = (\gamma_{x'y'})_{\text{máx}} = \epsilon_{\text{máx}} - \epsilon_{\text{mín}}$$

Estudo das Tensões e Deformações – Revisão

Universidade Federal do ABC

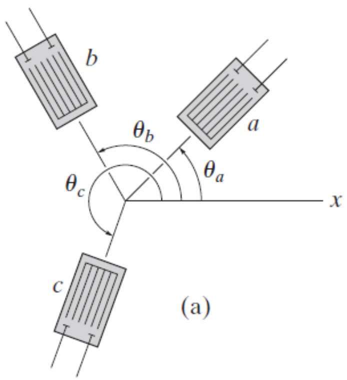
2.6 Rosetas de deformação

- A deformação normal em um corpo de prova de tração pode ser medida com a utilização de um **extensômetro de resistência elétrica**.
- A equação de transformação da deformação para cada extensômetro são as seguintes:

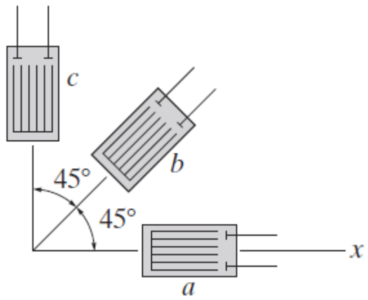
$$\epsilon_a = \epsilon_x \cos^2\theta_a + \epsilon_y \operatorname{sen}^2\theta_a + \gamma_{xy} \operatorname{sen}\theta_a \cos\theta_a$$

$$\epsilon_b = \epsilon_x \cos^2\theta_b + \epsilon_y \operatorname{sen}^2\theta_b + \gamma_{xy} \operatorname{sen}\theta_b \cos\theta_b$$

$$\epsilon_c = \epsilon_x \cos^2\theta_c + \epsilon_y \operatorname{sen}^2\theta_c + \gamma_{xy} \operatorname{sen}\theta_c \cos\theta_c$$

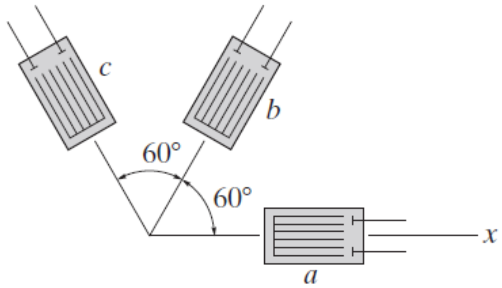


(a)



roseta de deformação a 45°

(b)



roseta de deformação a 60°

(c)

Universidade Federal do ABC

2.7 Relações entre o material e suas propriedades

Lei de Hooke Generalizada

- Para um estado de tensão triaxial, a lei de Hooke generalizada é como a seguir:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu\left(\sigma_y + \sigma_z\right)\right] \quad , \quad \varepsilon_y = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu\left(\sigma_x + \sigma_z\right)\right] \quad , \quad \varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu\left(\sigma_x + \sigma_y\right)\right]$$

- Eles são válidos somente para materiais lineares elásticos.
- A lei de Hooke para tensão de cisalhamento e deformação por cisalhamento pode ser escrita como:

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G}\tau_{xy} \qquad \gamma_{yz} = \frac{1}{G}\tau_{yz} \qquad \gamma_{xz} = \frac{1}{G}\tau_{xz}$$

Estudo das Tensões e Deformações – Revisão

Universidade Federal do ABC

Relações que envolvem E, *v*, e G

$$\boxed{G = \frac{E}{2(1 + \nu)}}$$

- **Dilatação e Módulo de compressibilidade**
- *Dilatação*, ou *deformação volumétrica*, é causada somente por deformação normal, não por deformação de cisalhamento.
- *Módulo de compressibilidade* é uma medida de rigidez do volume de um material.
- Escoamento plástico ocorre à *v* = 0.5.

$$\boxed{k = \frac{E}{3(1 - 2\nu)}}$$