

# 3

# Conversão de Bases e Aritmética Computacional

# 3.1 NOTAÇÃO POSICIONAL — BASE DECIMAL

Desde os primórdios da civilização o Homem vem adotando formas e métodos específicos para representar números, tornando possível, com eles, contar objetos e efetuar operações aritméticas (de soma, subtração etc.).

A forma mais empregada de representação numérica é a chamada notação posicional. Nela, os algarismos componentes de um número assumem valores diferentes, dependendo de sua posição relativa no número. O valor total do número é a soma dos valores relativos de cada algarismo. Desse modo, é a posição do algarismo ou dígito que determina seu valor.

A formação de números e as operações com eles efetuadas dependem, nos sistemas posicionais, da quantidade de algarismos diferentes disponíveis no referido sistema. Há muito tempo a cultura ocidental adotou um sistema de numeração que possui dez diferentes algarismos — 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 — e, por essa razão, foi chamado de *sistema decimal*. (Ver mais detalhes no Apêndice A — Sistemas de Numeração.)

A quantidade de algarismos disponíveis em um dado sistema de numeração é chamada de **base**; a base serve para contarmos grandezas maiores, indicando a noção de grupamento. O sistema de dez algarismos, mencionado anteriormente, tem base 10; um outro sistema que possua apenas dois algarismos diferentes (0 e 1) é de base 2, e assim por diante.

Vamos exemplificar o conceito de sistema posicional. Seja o número 1303, representado na base 10, escrito da seguinte forma:

130310

Em base decimal, por ser a mais usual, costuma-se dispensar o indicador da base, escrevendo-se apenas o número: 1303

Neste exemplo, o número é composto de quatro algarismos:

1, 3, 0 e 3

e cada algarismo possui um valor correspondente à sua posição no número.

Assim, o primeiro 3 (algarismo mais à direita) representa 3 unidades. Neste caso, o valor absoluto do algarismo (que é 3) é igual ao seu valor relativo (que também é 3), por se tratar da 1.ª posição (posição mais à direita, que é a ordem das unidades). Considerando-se o produto três vezes a potência 0 da base 10 ou



$$3 \times 10^{0} = 3$$

enquanto o segundo 3 vale três vezes a potência 2 da base 10 ou

$$3 \times 10^2 = 300$$

E o último à esquerda vale uma vez a potência 3 da base 10, ou  $1 \times 10^3 = 1000$ .

O valor total do número seria então:

$$1000 + 300 + 0 + 3 = 1303_{10}$$

$$1 \times 10^3 + 3 \times 10^2 + 0 \times 10^1 + 3 \times 10^0 = 1303_{10}$$

Generalizando, num sistema qualquer de numeração posicional, um número N é expresso da seguinte forma:

$$N = (d_{n-1} d_{n-2} d_{n-3} ... d_1 d_0)_b$$
(3.1)

onde:

d indica cada algarismo do número;

n-1, n-2, 1, 0 (índice) indicam a posição de cada algarismo;

b indica a base de numeração;

n indica o número de dígitos inteiros.

O valor do número pode ser obtido do seguinte somatório:

$$N = d_{n-1} \times b^{n-1} + d_{n-2} \times b^{n-2} + ... + d_1 \times b^1 + d_0 \times b^0$$
(3.2)

Desse modo, na base 10, podemos representar um número:

$$N = 3748$$

onde:

n = 4 (quatro dígitos inteiros).

Utilizando a fórmula indicada na Eq. 3.1:

$$d_{n-1} = 3$$
 ou  $d_3 = 3$ ;  $d_2 = 7$ ;  $d_1 = 4$ ;  $d_0 = 8$ 

ou obtendo seu valor de acordo com a fórmula mostrada em (3.2):

$$N = 3 \times 10^{3} + 7 \times 10^{2} + 4 \times 10^{1} + 8 \times 10^{0} =$$

$$= 3000 + 700 + 40 + 8 = 3748_{10}$$

Observação: Números fracionários são apresentados em detalhe no Apêndice A.

# 3.2 OUTRAS BASES DE NUMERAÇÃO

Vejamos, em seguida, como representar números em outra base de numeração.

Entre as bases diferentes de 10, consideremos apenas as bases 2 e potências de 2, visto que todo computador digital representa internamente as informações em algarismos binários, ou seja, trabalha em base 2. Como os números representados em base 2 são muito extensos (quanto menor a base de numeração, maior é a quantidade de algarismos necessários para indicar um dado valor) e, portanto, de dificil manipulação visual, costuma-se representar externamente os valores binários em outras bases de valor mais elevado. Isso permite maior compactação de algarismos e melhor visualização dos valores. Em geral, usam-se as bases octal ou hexadecimal, em vez da base decimal, por ser mais simples e rápido converter valores binários (base 2) para valores em bases múltiplas de 2.

Utilizando-se a notação posicional indicada na Eq. 3.1, representam-se números em qualquer base:

$$(1011)_2$$
 — na base 2

#### 56 / Conversão de Bases e Aritmética Computacional

No entanto, nas bases diferentes de 10, o valor relativo do algarismo (valor dependente de sua posição no número) é normalmente calculado usando-se os valores resultantes de operações aritméticas em base 10 e não na base do número (ver Apêndice A para mais detalhes) e, portanto, o valor total do número na base usada será expresso em termos de grandeza na base 10.

#### Exemplo 3.1

Seja o número na base 2: (1011)<sub>2</sub> (usou-se a descrição da Eq. 3.1).

Se aplicássemos a Eq. 3.2, teríamos:

$$1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0 =$$
  
= 8 + 0 + 2 + 1 = (11)<sub>10</sub>

Este valor 11 está expresso na base 10 e não na base 2. Portanto, será (11)10-

#### Exemplo 3.2

$$(1043)_5 = 1 \times 5^3 + 0 \times 5^2 + 4 \times 5^1 + 3 \times 5^0 =$$
  
=  $125 + 0 + 20 + 3 = (148)_{10}$ 

Sobre o assunto, podemos concluir:

a) O número máximo de algarismos diferentes de uma base é igual ao valor da base.

Exemplo:

- · na base 10 temos 10 dígitos: de 0 a 9;
- na base 2 temos apenas dois dígitos: 0 e 1;
- na base 5 temos cinco dígitos: de 0 a 4.
- b) O valor do algarismo mais à esquerda (mais significativo) de um número de n algarismos inteiros é obtido pela multiplicação de seu valor absoluto (algarismo d<sub>n-1</sub>) pela base elevada à potência (n − 1), ou seja, (d<sub>n-1</sub> × b<sup>n-1</sup>).
- c) O valor total do número é obtido somando-se n valores, cada um expressando o valor relativo de um dos n algarismos componentes do número.

#### Exemplo 3.3

A base do sistema binário é 2 e, conseqüentemente, qualquer número, quando representado nesse sistema, consiste exclusivamente em dígitos 0 e 1. O termo dígito binário é chamado *bit*, contração do termo inglês *bin*ary digit.

Por exemplo, o número binário 11011 possui cinco dígitos, ou algarismos binários. Diz-se que o referido número é constituído de 5 bits.

Em bases de valor superior a 10, usam-se letras do alfabeto para a representação de algarismos maiores que Uma dessas bases é especialmente importante em computação — trata-se da base 16 ou hexadecimal, por ser de valor potência de 2 (como a base 8).

Nessa base, os "algarismos" A, B, C, D, E e F representam, respectivamente, os valores (da base 10): 10, 11, 12, 13, 14 e 15.

Na base 16 (hexadecimal), dispomos de 16 algarismos (não números) diferentes:

Um número nessa base é representado na forma da Eq. 3.1:

 $(1A7B)_{16}$ 

O seu valor na base 10 será obtido usando-se a Eq. 3.2:

$$1 \times 16^{3} + 10 \times 16^{2} + 7 \times 16^{1} + 11 \times 16^{0} = 4096 + 2560 + 112 + 11 = 6779_{10}$$

Observemos que na Eq. 3.2 foram usados os valores 10 (para o algarismo A) e 11 (para o algarismo B) para multiplicar as potências de 16. Por isso, obtivemos o valor do número na base 10.

Em outras palavras, utilizamos valores e regras de aritmética da base 10 e, por isso, o resultado encontrado é um valor decimal. A Tabela 3.1 mostra a representação de números nas bases 2, 8, 10 e 16.

Pela tabela, podemos observar que os dígitos octais e hexadecimais correspondem a combinações de 3 (octais) e 4 (hexadecimais) bits (algarismos binários). Sendo a base desses sistemas de valor maior que a base 2 e tendo em vista essa particularidade na representação de números nas bases 8 e 16 em relação à base 2, verifica-se que é possível converter rapidamente números da base 2 para as bases 8 ou 16, ou vice-versa.

Por exemplo, o número (101111011101), na base 2, possui 12 algarismos (bits), mas pode ser representado com quatro algarismos octais ou com apenas três algarismos hexadecimais:

Tabela 3.1

Base 2	Base 8	Base 10	Base 16
0	0	0	0
1	1	1	1
10	2	2	
11	3	3	2 3
100	4	4	
101	5	5	4 5
110	6	6	
111	7	7	7
1000	10	8	6 7 8 9
1001	11	9	9
1010	12	10	A
1011	13	11	В
1100	14	12	C
1101	15	13	D
1110	16	14	E
1111	17	15	F
10000	20	16	10
10001	21	17	11



### 3.3 CONVERSÃO DE BASES

Uma vez entendido como representar números em notação posicional e como esta notação é aplicável em qualquer base inteira, podemos exercitar a conversão de números de uma base para outra.

Interessa-nos, principalmente, verificar o processo de conversão entre bases múltiplas de 2, e entre estas e a base 10, e vice-versa.

#### 3.3.1 Conversão entre Bases Potência de 2

#### 3.3.1.1 Entre as Bases 2 e 8

Como 8 = 2<sup>3</sup>, um número binário (base 2) pode ser facilmente convertido para o seu valor equivalente na base 8 (octal). Se o número binário for inteiro, basta dividi-lo, da direita para a esquerda, em grupos de 3 bits (o último grupo, à esquerda, não sendo múltiplo de 3, preenche-se com zeros à esquerda). Então, para cada grupo, acha-se o algarismo octal equivalente, conforme mostrado na Tabela 3.1.

A conversão de números da base 8 para a 2 é realizada de forma semelhante, no sentido inverso; substituise cada algarismo octal pelos seus 3 bits correspondentes (ver Tabela 3.1).

#### Exemplo 3.4

1) 
$$(111010111)_2 = ()_8$$
  
 $(111) (010) (111)_2 = (727)_8$   
7 2 7

3) 
$$(327)_8 = (\ )_2$$
  $(011) (010) (111)_2 = (011010111)_2$  ou  $(11010111)_2$  Obs.: Naturalmente, despreza-se o(s) zero(s)  $3 \ 2 \ 7$  à esquerda do número.

#### 3.3.1.2 Entre as Bases 2 e 16

O procedimento de conversão entre números binários e hexadecimais (base 16) é idêntico ao da conversão entre as bases 2 e 8, exceto que, neste caso, a relação é 16 = 24.

Desse modo, um algarismo hexadecimal é representado por 4 bits (ver Tabela 3.1). Converte-se um número binário em hexadecimal dividindo-se este número em grupos de 4 bits da direita para a esquerda.

A conversão de hexadecimal para binário é obtida substituindo-se o algarismo hexadecimal pelos 4 bits correspondentes, de acordo com os valores indicados na Tabela 3.1.

#### Exemplo 3.5

2) 
$$(10011100101101)_2 = ( )_{16}$$
  
 $(0010)$   $(0111)$   $(0010)$   $(1101)_2 = (272D)_{16}$   
2 7 2 D

3) 
$$(306)_{16} = ( )_2$$
  
 $(0011) (0000) (0110)_2 = (1100000110)_2$   
3 0 6

#### 3.3.1.3 Entre as Bases 8 e 16

O processo de conversão utiliza os mesmos princípios antes apresentados. No entanto, como a base de referência para as substituições de valores é a base 2, esta deve ser empregada como intermediária no processo. Ou seja, convertendo-se da base 8 para a base 16, deve-se primeiro efetuar a conversão para a base 2 (como mostrado nos subitens anteriores) e depois para a base 16. E o mesmo ocorre se a conversão for da base 16 para a base 8.

#### Exemplo 3.6

1) 
$$(3174)_8 = ()_{16}$$

Primeiro, converte-se o número da base 8 para a base 2:

$$(011)$$
  $(001)$   $(111)$   $(100)_2 = (0110011111100)_2$ 

Em seguida, converte-se da base 2 para a base 16, separando-se os algarismos de 4 em 4, da direita para a esquerda:

$$(0110)$$
  $(0111)$   $(1100) = (67C)_{16}$   
6 7 C

2) 
$$(254)_8 = ()_{16}$$
  
=  $(010) (101) (100)_2 = (010101100)_2$   
=  $(1010) (1100)_2 = (AC)_{16}$ 

3) 
$$(2E7A)_{16} = ()_8$$
  
=  $(0010) (1110) (0111) (1010)_2 = (0010111001111010)_2 =$   
=  $(010) (111) (001) (111) (010)_2 = (27172)_8$ 

## 3.3.2 Conversão de Números de uma Base B para a Base 10

A conversão de um número, representado em uma base B qualquer, para seu correspondente valor na base 10 é realizada empregando-se a Eq. 3.2. A melhor maneira de compreender o processo de conversão consiste na realização de alguns exemplos práticos, onde se indica, detalhadamente, a aplicação da referida equação.

#### 60 / Conversão de Bases e Aritmética Computacional

Os exemplos apresentados referem-se apenas a números inteiros. No Apêndice A — Sistemas de Numeração, são detalhados os diversos processos de conversão de números inteiros e fracionários.

#### Exemplo 3.7

1) 
$$(101101)_2 = ()_{10}$$

Substituindo, na Eq. 3.2, as letras pelos valores do exemplo, teremos:

$$n-1=5$$
 (expoente do 1.º produto mais à esquerda)

$$d_{n-1} = 1$$
 (algarismo mais à esquerda)

1.° produto: 
$$d_{n-1} \times b^{n-1} = 1 \times 2^5$$

Os demais produtos seguem a seqüência da Eq. 3.2, resultando em:

$$1 \times 2^5 + 0 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 =$$

$$= 32 + 0 + 8 + 4 + 0 + 1 = (45)_{10}$$

2) 
$$(27)_8 = ()_{10}$$

Da mesma maneira, substitui-se na Eq. 3.2:

$$b = 8$$

$$n = 2$$

$$n-1=1 \qquad \begin{vmatrix} d_{n-1} \times |B^{n-1}| + |d_0| \times |B^0| \\ 2 \times |8^1| + |7| \times |8^0| \end{vmatrix}$$

$$d_{n-1} = 2$$

Valor total:

$$2 \times 8^{1} + 7 \times 8^{0} = 16 + 7 = (23)_{10}$$

3) 
$$(2A5)_{16} = ()_{10}$$

$$2 \times 16^2 + 10 \times 16^1 + 5 \times 16^0 =$$

$$= 512 + 160 + 5 = (677)_{10}$$

4) 
$$(6734)_8 = ()_{10}$$

$$6 \times 8^3 + 7 \times 8^2 + 3 \times 8^1 + 4 \times 8^0 =$$

$$= 3072 + 448 + 24 + 4 = (3548)_8$$

5) 
$$(27)_8 = ()_{10}$$

$$2 \times 8^{1} + 7 \times 8^{0} = 23_{10}$$

Observação: No desenvolvimento foram suprimidos os produtos em que os algarismos eram 0, visto que o resultado seria também sempre zero.

6) 
$$(457)_9 = ()_{10}$$

$$4 \times 9^2 + 5 \times 9^1 + 7 \times 9^0 =$$

$$= 324 + 45 + 7 = (376)_{10}$$

7) 
$$(243)_5 = ()_{10}$$

$$2 \times 5^2 + 4 \times 5^1 + 3 \times 5^0 =$$

$$= 50 + 20 + 3 = (73)_{10}$$



#### 3.3.3 Conversão de Números Decimais para uma Base B

A conversão de números, representados na base 10, para seus valores equivalentes em uma base B qualquer é efetuada através de um processo inverso ao do subitem anterior (base B para base 10).

A conversão é obtida dividindo-se o número decimal pelo valor da base desejada; o resto encontrado é o algarismo menos significativo do valor na base B (mais à direita). Em seguida, divide-se o quociente encontrado pela base B; o resto é o algarismo seguinte (à esquerda); e assim, sucessivamente, vão-se dividindo os quocientes pelo valor da base até se obter quociente de valor zero. Em cada divisão, o resto encontrado é um algarismo significativo do número na nova base; o primeiro resto encontrado é o valor do algarismo menos significativo (mais à direita), e o último resto será o algarismo mais significativo (mais à esquerda).

Na realidade, o algoritmo de conversão pode ser definido com vários critérios de parada, tais como:

- a) Enquanto o quociente for diferente de zero:
  - · dividir dividendo por divisor;
  - · extrair resto como algarismo e colocá-lo à esquerda do anterior;
  - · repetir.

Quando o quociente for igual a zero, parar.

- b) Enquanto o dividendo for maior que o divisor:
  - · dividir dividendo por divisor;
  - extrair resto como algarismo e colocá-lo à esquerda do anterior;
  - · repetir.

Usar o dividendo (que agora é menor que o divisor) como último algarismo à esquerda (algarismo mais significativo).

No Apêndice A — Sistemas de Numeração, são detalhados os procedimentos de conversão de números inteiros e fracionários.

#### Exemplo 3.8

1) 
$$(3964)_{10} = ( )_8$$
  
 $3964/8 = 495$  resto<sub>0</sub> = 4 (algarismo menos significativo)  
 $495/8 = 61$  resto<sub>1</sub> = 7  
 $61/8 = 7$  resto<sub>2</sub> = 5  
 $7/8 = 0$  resto<sub>3</sub> = 7 (algarismo mais significativo)

Observa-se que o primeiro resto encontrado (algarismo 4) é o algarismo mais à direita do número.

O número é, então, (7574)s.

rara verificar, raçamos o processo inverso, isto e: converter 
$$(743)_8$$
 para a base 10.  
 $7 \times 8^2 + 4 \times 8^1 + 3 \times 8^0 =$ 

$$= 448 + 32 + 3 = (483)_{10}$$



#### 62 / Conversão de Bases e Aritmética Computacional

```
3) (45)_{10} = ( )_2

45/2 = 22 resto<sub>0</sub> = 1 (algarismo menos significativo, mais à direita)

22/2 = 11 resto<sub>1</sub> = 0

11/2 = 5 resto<sub>2</sub> = 1

5/2 = 2 resto<sub>3</sub> = 1

2/2 = 1 resto<sub>4</sub> = 0

1/2 = 0 resto<sub>5</sub> = 1 (algarismo mais significativo, mais à esquerda)

O número é 101101<sub>2</sub>.
```

4) 
$$(97)_{10} = ( )_2$$
  
 $97/2 = 48$  resto<sub>0</sub> = 1 (algarismo menos significativo)  
 $48/2 = 24$  resto<sub>1</sub> = 0  
 $24/2 = 12$  resto<sub>2</sub> = 0  
 $12/2 = 6$  resto<sub>3</sub> = 0  
 $6/2 = 3$  resto<sub>4</sub> = 0  
 $3/2 = 1$  resto<sub>5</sub> = 1  
 $1/2 = 0$  resto<sub>6</sub> = 1 (algarismo mais significativo)  
O número é (1100001)<sub>2</sub>.

5) 
$$(2754)_{10} = ($$
  $)_{16}$   
 $2754/16 = 172$  resto $_0 = 2$  algarismo  $2_{16}$  (algarismo menos significativo)  
 $172/16 = 10$  resto $_1 = 12$  algarismo  $C_{16}$   
 $10/16 = 0$  resto $_2 = 10$  algarismo  $A_{16}$  (algarismo mais significativo)  
O número é (AC2) $_{16}$ .

6) 
$$(490)_{10} = ( )_{16}$$
  
 $490/16 = 30$  resto<sub>0</sub> =  $10_{10}$  algarismo  $A_{16}$  (algarismo menos significativo)  
 $30/16 = 1$  resto<sub>1</sub> =  $14_{10}$  algarismo  $E_{16}$   
 $1/16 = 0$  resto<sub>2</sub> =  $1_{10}$  algarismo  $1_{16}$  (algarismo mais significativo)  
O número é  $(1EA)_{16}$ .

É possível simplificar o processo de conversão de valores da base 2 para a base 10 e vice-versa. Para tanto, basta considerar o seguinte:

- a) A Eq. 3.2 estabelece o valor de um número pela soma de produtos:
   d<sub>n-1</sub> × b<sup>n-1</sup> + ...
- Cada produto é constituído de duas parcelas: a primeira é o algarismo correspondente à posição em que se encontra e a segunda é a potência da base, cujo índice indica a posição.
- c) No caso de a base ser 2, os algarismos só podem assumir o valor 0 ou 1. Dessa forma, o resultado do produto somente pode ser 0 ou o próprio valor da potência de 2.

Exemplos:

$$101 = 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0$$

O primeiro produto,  $1 \times 2^2$ , tem valor igual a  $2^2 = 4$ . Isto é, como o algarismo é 1, então  $1 \times 2^2$  ou apenas  $2^2$  tem mesmo valor. No caso do segundo produto,  $0 \times 2^1$  é igual a zero. O terceiro produto, igual ao primeiro, é  $1 \times 2^0$  ou  $2^0 = 1$ .

d) As potências de 2, da direita para a esquerda, crescem da seguinte forma:

2" = 1 (potência zero, correspondente à posição mais à direita)

$$2^1 = 2$$
;  $2^2 = 4$ ;  $2^3 = 8$ ;  $2^4 = 16$  etc.

Ou seja:

... 6 5 4 3 2 1 0 ← posição  
... 
$$2^6$$
  $2^5$   $2^4$   $2^3$   $2^2$   $2^1$   $2^0$  ← potência  
... 64 32 16 8 4 2 1 ← valor

Em consequência, converter um número da base 2 para a base 10 consiste essencialmente em somar as potências de 2 correspondentes às posições onde o algarismo é igual a 1, desprezando as potências onde o algarismo é zero.

#### Exemplo 3.9

Efetuar as seguintes conversões:

1) 
$$(110011)_2 = ( )_{10}$$
  
5 4 3 2 1 0  $\leftarrow$  posição  
1 1 0 0 1 1  $\leftarrow$  algarismo  
2<sup>5</sup> 2<sup>4</sup>  $-$  2<sup>1</sup> 2<sup>0</sup>  $\leftarrow$  potências válidas para somar  
32 16  $-$  2 1  $\leftarrow$  valores

Valor em base 10:  $32 + 16 + 2 + 1 = (51)_{10}$ 

Valor em base 10: somam-se as potências válidas, correspondentes à posição onde o algarismo é 1.

$$32 + 4 + 2 + 1 = (39)_{10}$$

# 3.4 ARITMÉTICA NÃO-DECIMAL

Neste item serão apresentados procedimentos para realização das quatro operações aritméticas (adição, subtração, multiplicação e divisão) de números não-decimais (qualquer outro sistema de base diferente de 10), essencialmente os de base 2 e potência de 2, que interessam aos sistemas de computação.

Os números serão inteiros, sem limite de tamanho e positivos (sem sinal).

No Apêndice A — Sistemas de Numeração, são detalhados procedimentos para execução de operações aritméticas, com números binários, octais e hexadecimais, incluindo valores inteiros e fracionários, porém ainda sem sinal.

No Cap. 7, são detalhados procedimentos para execução de operações aritméticas com números positivos e negativos (inclusão do sinal nos números), inteiros e fracionários, bem como aqueles expressos na forma BCD (Binary Coded Decime). Os procedimentos estão relacionados ao processo efetivamente realizado no interior da unidade de processamento dos computadores. Já, neste capítulo, procura-se descrever procedimentos apenas matemáticos, para familiarizar o leitor com operações matemáticas não-decimais.

Finalmente, não se está levando em conta qualquer limite dos números, ou seja, a quantidade máxima de algarismos permitida para um dado número, o que é uma efetiva preocupação no caso dos computadores. Trata-se do problema de *overflow* ou estouro do limite, quando uma operação aritmética resulta em um valor acima do limite máximo possível (ver Cap. 7).