Sumário

By: Louis Phillipe Dubois

Produto Escalar

$Sejam\ \vec{u}\ e\ \vec{v}\ dois\ vetores, o\ produto\ escalar$ é $definido\ por$:

$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v}\ ou\ (\vec{u}, \vec{v})}$$

Proposição:

(a) Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não são nulos, o ângulo θ formado por eles é definido por:

$$\boxed{\cos\theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{||\vec{u}||\,||\vec{v}||}}$$

(b) Qualquer que seja o vetor $\vec{u}$

$$\boxed{||\vec{u}|| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}}$$

(c) Quaisquer que sejam os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$

$$\boxed{\vec{u} \perp \vec{v} \leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0}$$

$Nota: \perp = Ortogonal = Perpendicular$

Propriedades:

(a) $\boxed{\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}}$

(b) $\boxed{\vec{u} \cdot (\lambda\vec{v}) = \vec{v} \cdot (\lambda\vec{u}) = \lambda(\vec{u} \cdot \vec{v})}$

(c) $\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}}$

Calculando o produto escalar:

Seja: $\vec{u} = (a_u, b_u, c_u)\ e\ \vec{v} = (a_v, b_v, c_v)$

$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = a_u a_v + b_u b_v + c_u c_v}$$

É assim que calcula produto escalar

Produto Vetorial

$Sejam\ \vec{u}\ e\ \vec{v}\ dois\ vetores, o\ produto\ vetorial\ é\ definido\ por:$
$\boxed{\vec{u} \wedge \vec{v}\ \ ou\ \vec{u} \times \vec{v}}$

Proposição:

(a) Se $\boxed{\vec{u} \times \vec{v} = 0}$ então os vetores são ***LD*** (Linearmente dependentes)

(b) $\boxed{\vec{u} \times \vec{u} = \vec{0}}$, para <u>qualquer</u> $\vec{u}$

(c) Seja θ um ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$

$$\boxed{sin(\theta) = \frac{\|\vec{u} \times \vec{v}\|}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|}}$$

Propriedades:

(a) $\boxed{\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}} \rightarrow \boldsymbol{Muda\ o\ sinal}$

(b) $\boxed{\vec{u} \times (\lambda\vec{v}) = (\lambda\vec{u}) \times \vec{v} = \lambda(\vec{u} \times \vec{v})}$

(c) $\boxed{\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}}$ e
$\boxed{(\vec{u} + \vec{v}) \times \vec{w} = \vec{u} \times \vec{w} + \vec{v} \times \vec{w}}$

(d) Para quaisquer vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$

$$\boxed{\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{w}}$$
$$\boxed{(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} = (\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v} - (\vec{v} \cdot \vec{w})\vec{u}}$$

Para memorizar:

$$\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) = (\square)\vec{v} - (\square)\vec{w}$$
$$\overbrace{(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} = (\square)\vec{v} - (\square)\vec{u}}$$

$Termos\ pra\ fora\ do\ parentêses$
$são\ os\ que\ estavam\ dentro\ antes$
$se\ o\ vetor\ que\ multiplica\ fora\ do$
$parentêses\ estiver\ à\ esquerda$
$o\ primeiro\ termo\ é\ o\ da\ esquerda$
$do\ parentêses, se\ estiver\ à\ direita$
$o\ primeiro\ termo\ é\ o\ da\ direita$

Calculando o produto vetorial:

Seja: $\vec{u} = (a_u, b_u, c_u)\ e\ \vec{v} = (a_v, b_v, c_v)$
e $\vec{c} = (j, i, k)$ o vetor resultante de $\vec{u} \times \vec{v}$

Temos que:

$$\boxed{\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_u & b_u & c_u \\ a_v & b_v & c_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_u & c_u \\ b_v & c_v \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} a_u & c_u \\ a_v & c_v \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} a_u & b_u \\ a_v & b_v \end{vmatrix} k}$$

Cuidado com o sinal

Produto Misto

O produto misto dos vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$, **nessa ordem**, é $\vec{u} \times \vec{v} \cdot \vec{w}$, indicado por $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$

$$\boxed{[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \vec{u} \times \vec{v} \cdot \vec{w}}$$

Proposição:

(a) Em relação a uma base ortonormal positiva $B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, sejam, $\vec{u} = (a_u, b_u, c_u)$
$\vec{v} = (a_v, b_v, c_v)$ e $\vec{v} = (a_w, b_w, c_w)$

$$[\vec{u} \times \vec{v}] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_u & b_u & c_u \\ a_v & b_v & c_v \end{vmatrix}$$

$$\boxed{[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} a_u & b_u & c_u \\ a_v & b_v & c_v \\ a_w & b_w & c_w \end{vmatrix} = \vec{u} \times \vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v} \cdot \vec{w}}$$

(b) Uma tripla $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ é **LD**, se somente se, $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 0$
e **LI**, se somente se, $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] \neq 0$

(c) Seja $F = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$, se $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 0$ então F não é uma base.

Propriedades:

(a) O produto misto é *trilinear,* isto é, qualquer que sejam os vetores $\vec{u}, \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{v}, \vec{v}_1, \vec{v}_2$, $\vec{w}, \vec{w}_1$ e $\vec{w}_2$, e quaiquer que sejam os números reais, α e β

$$[\alpha\vec{u}_1 + \beta\vec{u}_2, \vec{v}, \vec{w}] = \alpha[\vec{u}_1, \vec{v}, \vec{w}] + \beta[\vec{u}_2, \vec{v}, \vec{w}]$$
$$[\vec{u}, \alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2, \vec{w}] = \alpha[\vec{u}, \vec{v}_1, \vec{w}] + \beta[\vec{u}, \vec{v}_2, \vec{w}]$$
$$[\vec{u}, \vec{v}, \alpha\vec{w}_1 + \beta\vec{w}_2] = \alpha[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}_1] + \beta[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}_2]$$

(b) O produto misto é *alternado*, isto é, permutar dois vetores altera o sinal

$$\boxed{[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = -[\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}] = [\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}] \ldots}$$

(c) $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$não se altera se somarmos a um dos vetores uma combinação linear dos outros dois, por exemplo:$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = [\vec{u}, \vec{v} + \alpha\vec{u} + \beta\vec{w}, \vec{w}]$

(d) Quaisquer que sejam $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$, vale a igualdade: $\boxed{\vec{u} \times \vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{v} \times \vec{w}}$

Sistema de Coordenadas

Na matéria de Geometria Analítica é estudado a Geometria Euclidiana, são conjuntos de pontos E^2 ou E^3, duas ou três dimensões, (retas, planos, curvas, superfícies, triângulos, etc) com auxílio de álgebra elementar e álgebra vetorial.
O Sistema de Coordenadas serve para descrever o espaço E^2 ou E^3 por meio de números. Sejam O um ponto e $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. O par ordenado $\sum = \ (\boldsymbol{O}, \boldsymbol{E})$ é chamado **sistema de coodenadas (em $\boldsymbol{E^3}$**), de origem O e base E.

Se i, j e k forem três vetores ortonormais, ou seja, ortogonais dois a dois e de norma 1, então o sistema de coordenadas $\sum = \ (O, B)$ onde $B = (i, j, k)$ é chamado de **sistema cartesiano de coordenadas**. Daqui em diante as letras i, j e k sempre denotarão vetores ortonormais.

Um sistema de coordenadas cujos vetores não são ortogonais é dito **sistema de coordenadas oblíquo**.

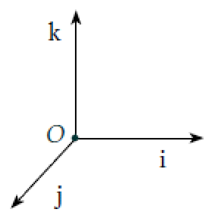

Figura 2.1: Sistema de Coordenadas Ortonormais

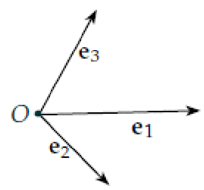

Figura 2.2: Sistema de Coordenadas Oblíquo

Operações Vetoriais em Coordenadas

Proposição:

Se $u = (a_1, a_2, a_3)_E, v = (b_1, b_2, b_3)_E$ e $P = (p_1, p_2, p_3)_E$

1. $u + v = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)_E$
2. $\lambda u = (\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3)_E$
3. $P + u = (a_1 + p_1, a_2 + p_2, a_3 + p_3)_E$

Coordenadas entre pontos:

Dados os pontos $P = (p_1, p_2, p_3)$ e $X = (x_1, x_2, x_3)$

$\overrightarrow{PX} = X - P = (x_1 - p_1, x_2 - p_2, x_3 - p_3)$

Ponto Médio

Dados os pontos $P = (p_1, p_2, p_3)$ e $X = (x_1, x_2, x_3)$

No vetor $\overrightarrow{PX}$ o ponto Médio M é dado por

$$M = \left(\frac{(x_1 + p_1)}{2}; \frac{(x_2 + p_2)}{2}; \frac{(x_3 + p_3)}{2}\right)$$

Equações da Reta

Um dos postulados da geometria Euclidiana nos diz que, dados dois pontos no espaço existe uma única reta contendo estes pontos. Isso nos leva ao seguinte problema: dados dois pontos A e B, determinar a equação da reta r que passa por estes dois pontos.
Considerando A um ponto inicial $A = (a, b, c)$ e v um vetor diretor, vemos que um ponto $X = (x, y, z)$ só pertence a reta se:

$$\boxed{\boldsymbol{r\colon X = A + vt}}$$

Equação vetorial de reta

$r\colon X = A + vt$

$$\begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a \\ b \\ c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{vmatrix} t$$

Equação paramétrica da reta

$$r\colon \begin{cases} x = a + v_1 t \\ y = b + v_2 t \\ z = c + v_3 t \end{cases}$$

Equação da reta na forma simétrica

$$\frac{x-a}{v_1} = \frac{y-b}{v_2} = \frac{z-c}{v_3}$$

Interseção de Retas

Comecemos com o estudo da posição relativa de duas retas no plano. Lembremos primeiro que duas retas em um mesmo plano podem ser:
• coincidentes, i.e., são a mesma reta;
• paralelas;
• concorrentes, ou seja, se interceptam em um único ponto.

Então, dada as equações das retas:
r: $X = A + vt$
s: $X_2 = A_2 + v_2t$

- Se $v\ e\ v_2$ forem //, ou seja, multiplos um do outro e o ponto A_2 estiver contido em r, então as retas são coincidentes
- Se $v\ e\ v_2$ forem //, ou seja, multiplos um do outro e o ponto A_2 **não** estiver contido em r, então as retas são paralelas
- Se $v\ e\ v_2$ não forem // ou seja, não forem paralelos, as retas são concorrentes.

Se duas retas não estiverem contidas no mesmo plano elas são chamadas **reversas**.

Equações do Plano

Passemos agora a um novo problema: determinar uma equação (ou conjunto de equações) que representem um dado plano no espaço euclidiano.
Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são **LI** e paralelos a um plano π, o par $(\vec{u},\vec{v})$ é chamado de **par de vetores diretores** de π.
Para que o vetor $\overrightarrow{AP}$ seja então complanar aos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ ele precisa ser representado como uma combinação dos dois.

Equação vetorial do plano

$\boxed{\overrightarrow{AP} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}}$

Como $\overrightarrow{AP} = P - A$, podemos reescrever a equação da seguinte maneira:

$\boxed{P = A + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}}$

Equação paramétrica do plano

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda u_x + \mu v_x \\ y = y_0 + \lambda u_y + \mu v_y \\ z = z_0 + \lambda u_z + \mu v_z \end{cases}$$

Equação geral ou cartesiana do plano

$$P \epsilon \pi \leftrightarrow \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = 0$$

$$Portanto\ temos\ que: \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_y & u_z \\ v_y & v_z \end{vmatrix}(x - x_0) - \begin{vmatrix} u_x & u_z \\ v_x & v_z \end{vmatrix}(y - y_0) + \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix}(z - z_0)$$

Utilizando: $\begin{vmatrix} u_y & u_z \\ v_y & v_z \end{vmatrix} = a, -\begin{vmatrix} u_x & u_z \\ v_x & v_z \end{vmatrix} = b, \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = c$

Temos:$-ax_0 - by_0 - cz_0 = d$

E finalmente podemos obter a equação:

$\boxed{ax + by + cz + d = 0}$

Proposições:

(a) π contém ou é paralelo a um dos eixos coordenados se e somente se o coeficiente correspondente a esse eixo é nulo.
(b) π é paralelo a um dos planos coordenados se e somente se os coeficientes das duas váriaveis correspondentes a esse plano forem nulos.

Posição entre Retas e Planos

Passemos agora para o estudo da posição de uma reta e um plano. Dado um plano p e uma reta r temos três possibilidades:

• a intersecção de r e π é vazia. Nesse caso a reta r é dita paralela a π.
• a intersecção de π e r é um único ponto. Nesse caso dizemos que a reta r é transversal a π
• a intersecção de π e r tem pelo menos dois pontos. Nesse caso temos que todos os pontos da reta r pertencem ao plano π e dizemos que a reta r está contida em π.

Vetor normal a um plano

Seja π um plano de equação $ax + by + cz + d = 0$, o vetor $\vec{n} = (a, b, c)$ é ortogonal a π, ou seja, $\vec{n}$ é o vetor normal de π.

Vetor transversal a um plano

Dada a equação $r\colon\ X = A + vt$
Se $v \cdot n \neq 0$ o vetor de equação r é transversal ao plano π

Vetor contido a um plano

Dada a equação $r\colon\ X = A + vt$
Se $v \cdot n = 0$ e A estiver contido em π o vetor de equação r está contido no plano π

Vetor paralelo a um plano

Dada a equação $r\colon\ X = A + vt$
Se $v \cdot n = 0$ e A **não** estiver contido em π o vetor de equação r é paralelo ao plano π

Posição entre planos

Sejam π_1 e π_2 dois planos de equações $a_1x + b_1y + c_1 = d_1$ e $a_2x + b_2y + c_2z = d_2$ respectivamente. então:

- Os planos são paralelos se $(a_1, b_1, c_1) = \lambda(a_2, b_2, c_2)$
  - Se (a_1, b_1, c_1, d_1) for proporcional a (a_2, b_2, c_2, d_2) então são planos coincidentes
  - Se (a_1, b_1, c_1, d_1) **não** for proporcional a (a_2, b_2, c_2, d_2) então são planos paralelos distintos

- Os planos são transversais se (a_1, b_1, c_1) não for proporcional a (a_2, b_2, c_2)

Ângulo entre dois planos:

$$\cos(\theta) = \frac{|n_1 \cdot n_2|}{\|n_1\|\|n_2\|}$$

Distância

Tuesday, December 1, 2015 9:39 PM

Distância entre ponto e reta

$$h = d(P,r) = \frac{\left\|\overrightarrow{AP} \times \overrightarrow{AB}\right\|}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|}$$

Distância entre ponto e plano

$$d(P,\pi) = \left\|Proj_n\overrightarrow{AP}\right\| = \frac{\left\|\overrightarrow{AP} \cdot n\right\|}{\|n\|}$$

Distância entre duas retas

Dadas as retas: $r : A + ut$ e $s : B + vt$

Escolhemos um ponto P na reta r e um ponto Q na reta s. Projetamos o vetor $\overrightarrow{PQ}$ sobre o vetor $n = u \times v$ que é ortogonal as retas r e s. Assim obtendo a equação

$$d(r,s) = \frac{\left|\overrightarrow{PQ} \cdot n\right|}{\|n\|}$$

$$d(r,s) = \frac{\left|\overrightarrow{PQ} \cdot n\right|}{\|u \times v\|}$$