# UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC

# Lista 5 - Introdução à Probabilidade e Estatística

## Variáveis Aleatórias

**1** — Duas bolas são escolhidas aleatoriamente de uma urna que contém 8 bolas brancas, 4 pretas e 2 laranjas. Suponha que ganhemos $2,00$ para cada bola preta selecionada e percamos $1,00$ para cada bola branca selecionada. Suponha que X represente nosso ganho. Qual são os valores possíveis de X e quais são as probabilidades associadas a cada valor?

**2** — Suponha que um dado seja rolado duas vezes. Quais são os possíveis valores que as seguintes variáveis aleatórias podem assumir?: (a) o máximo valor que aparece nas duas vezes que o dado é jogado. (b) o mínimo valor que aparece nas duas vezes que o dado é jogado. (c) a soma das duas jogadas. (d) o valor da primeira jogada menos o valor da segunda jogada.

**3** — Se o dado do anterior é honesto, calcule as probabilidades associadas as variáveis aleatórias nas letras (a) a (d)

**4** — Calcule a esperança e variança das seguintes distribuições:

a) Variável Aleatória Binomial
b) Variável Aleatória Geométrica
c) Variável Aleatória Bernoulli

**5** — Dada a função de distribuição acumulada

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x < 1 \\ 0.1 & \text{se} \quad 1 \leq x < 2 \\ 0.3 & \text{se} \quad 2 \leq x < 3 \\ 0.7 & \text{se} \quad 3 \leq x < 4 \\ 0.8 & \text{se} \quad 4 \leq x < 5 \\ 1 & \text{se} \quad 5 \leq x \end{cases}$$

Calcule a função de probabilidade da variável cuja f.d.a. é $F(\cdot)$. Calcule ainda o valor esperado e a variância de X. Determine as seguintes probabilidades:

$$\mathbb{P}(1 \leq X < 2),\ \mathbb{P}(X = 4),\ \mathbb{P}(X > 3),\ \mathbb{P}(X \leq 4).$$

**6** — Um atirador acerta na mosca do alvo, 20% dos tiros. Qual a probabilidade de ele acertar na mosca pela primeira vez no $10^o$ tiro?

**7** — Uma urna contém $N$ bolas brancas e $M$ bolas pretas. A bolas são selecionadas aleatoriamente, uma de cada vez, até que saia uma bola preta. Se supormos que cada bola selecionada seja substituída antes que a próxima bola seja retirada, qual é a probabilidade de que

a) sejam necessárias exatamente n retiradas?
b) sejam necessárias pelo menos k retiradas?

**8** — Um livro de jogos de azar recomenda a seguinte "estratégia de vitória"para o jogo de roleta: aposte R$ 1,00 no vermelho. Se der vermelho (o que tem probabilidade de ocorrer), pegue o lucro de R$1,00 e desista. Se o vermelho não aparecer e você perder a aposta (o que tem probabilidade de de ocorrer), faça apostas adicionais de R$ 1,00 no vermelho em cada um dos próximos dois giros da roleta e então desista. Se X representa seu lucro quando você sair da mesa, (a) determine $P[X > O]$ (b) você está convencido de que a estratégia é de fato uma "estratégia de vitória"? Explique a sua resposta. (c) calcule $E[X]$.

**9** — A cada noite diferentes meteorologistas nos dão a probabilidade de chuva no dia seguinte. Para julgar quão boa é a pre- visão do tempo feita por essas pessoas, vamos classificá-las da forma a seguir: se um meteorologista diz que choverá com probabilidade p , então ele ou ela recebe- rá uma nota de $1-(1-p)^2$ se chover $1-p^2$ se não chover Vamos então anotar as notas ao longo de um determinado período de tempo e concluir que o meteorologista com a maior nota média é aquele que melhor prevê o tempo. Suponha agora que certo meteorologista esteja ciente de nosso mecanismo de notas e queira maximizar sua nota esperada. Se essa pessoa acredita verdadeiramente que choverá amanhã com probabilidade $p^*$, que valor de p ele ou ela deve declarar de forma a maximizar a nota esperada?

**10** — Suponha que, durante o voo, de forma independente, os motores de um avião tenham probabilidade $1-p$ de falharem. Se um avião precisa da maioria de seus motores operando para completar um voo de forma bem-sucedida, para que valores de $p$ um avião com 5 motores é preferível em relação ao um avião de 3 motores?

**11** — Joga-se um dado equilibrado. Qual é a probabilidade de serem necessários $10$ lançamentos até a primeira ocorrência de um seis?

**12** — Seja $X$ uma variável aleatória discreta com $\mathbb{P}(X = 0) = 0.25$, $\mathbb{P}(X = 1) = 0.125$, $\mathbb{P}(X = 2) = 0.125$, $\mathbb{P}(X = 3) = 0.5$. Faça um gráfico da função de probabilidade e da função de distribuição acumulada. Calcule o valor esperado e a variância de $X$. Determine as seguintes probabilidades:

$$\mathbb{P}(0 < X < 1),\ \mathbb{P}(X \leq 2),\ \mathbb{P}(X > 3),\ \mathbb{P}(X > 2.5).$$

**13** — Um alvo é feito com uma tábua quadrada pintada de branco, com exceção de um círculo no seu centro que é pintado de preto. As regras de uma prova são definidas da seguinte forma: o atirador que acertar no centro preto ganha 18 pontos, se acertar na parte branca da tábua ganha 8 pontos e se não acertar na tábua perde 2 pontos.

a) Um atirador atira no alvo: defina formalmente o espaço dos resultados deste experimento e a variável aleatória $X$ =número de pontos.
b) O desempenho do atirador pode ser assim resumido: $\mathbb{P}(\text{acertar no centro}) = 0.2$ e $\mathbb{P}(\text{acertar na parte branca}) = 0.7$. Calcule média e variância do número de pontos para o atirador.

**14** — O número médio mensal de acidentes aéreos envolvendo aviões comerciais em todo o mundo é igual a 3 3 . Qual é a probabilidade de que

a) ocorram pelo menos 2 acidentes desse tipo no próximo mês? (b) ocorra no máximo 1 acidente no próximo mês?

**15** — Um bit (0 ou 1) de informação é transmitido por um canal com ruído. Seja $p$ a probabilidade de que seja erradamente recebido. Para melhorar a transmissão uma alternativa é utilizar um decodificador de maioria de dois em três, ou seja, enviar de forma independente 3 vezes a mesma informação registrando como resultado aquela que foi recebida pelo menos duas vezes. Para quais valores de $p$ o decodificador de maioria de dois em três é melhor que a transmissão pela única vez?

**16** — Suponha que o número de vezes que uma pessoa fica resfriada durante um ano tem distribuição de Poisson com parâmetro $\lambda = 4$. Um novo remédio para prevenir resfriados reduz este parâmetro para $\lambda' = 2$ para $75\%$ das pessoas e não faz efeito em $25\%$ restantes. Se uma pessoa tomou este remédio durante um ano e pegou resfriado $2$ vezes, qual é a probabilidade de que o remédio funciona para esta pessoa?

**17** — A aplicação de fundo anti-corrosivo em chapas de aço de $1m^2$ é feita mecanicamente e pode produzir defeitos (pequenas bolhas na pintura), de acordo com uma variável aleatória Poisson com taxa $\lambda = 1$ por $m^2$. Uma chapa é escolhida ao acaso. Qual é a probabilidade de:

a) encontrarmos pelo menos 1 defeito;
b) encontrar no máximo 2 defeitos;
c) encontrar de 2 a 4 defeitos.

**18** — Numa central telefônica, o número de chamadas chega segundo uma distribuição de Poisson, com media de 8 chamadas por minuto. Determinar qual é a probabilidade de receber (durante um minuto):

a) 10 ou mais chamadas;
b) menos do que 9 chamadas;

**19** — Uma urna contém 3 bolas numeradas (1, 2 e 3). Primeiro uma bola é retirada da urna. Se sair a bola $i$, seleciona-se $i$ peças com reposição de um lote contendo $60\%$ de peças defeituosas. Seja $X$ o número de peças defeituosas na amostra.

a) Ache o conjunto de valores possíveis de $X$ e a sua distribuição de probabilidade.
b) Porque não temos distribuição binomial em a)?
c) Calcule $\mathbb{E}[X]$.

**20** — Um banco de sangue necessita sangue tipo 0-Rh negativo. Suponha que a probabilidade de uma pessoa ter este tipo de sangue seja $0.1$. Doadores permanentes chegam ao hemocentro para fazer sua doação rotineira. Calcule:

a) a probabilidade de que o terceiro doador com sangue tipo 0-Rh negativo seja o sétimo a chegar;

b) a probabilidade de que o primeiro doador com sangue tipo 0-Rh negativo apareça no máximo em 5 tentativas;

c) a probabilidade de que 3 doadores com sangue tipo 0-Rh negativo apareçam antes de 4 doadores com outros tipos de sangue.

**21** — Um supermercado vende uma caixa com 20 lâmpadas, das quais 4 são defeituosas e as restantes boas. Um comprador decide testar 5 das lâmpadas (obviamente sem reposição) escolhidas ao acaso e comprar a caixa caso haja no máximo duas defeituosas entre as lâmpadas testadas. Qual é a probabilidade de comprar a caixa? Qual é a distribuição do número de itens defeituosos?

**22** — Para cada item a seguir diga se o problema pode ser modelado por uma variável aleatória binomial, geométrica ou de Poisson. Justifique

a) Suponha que 40% da classe é do sexo feminino. Qual é a probabilidade de que 6 de 10 estudantes a serem sorteados seja feminino?

b) Se dois dados são lançados até que um duplo seis é obtido, qual é a probabilidade que será necessário (a), no máximo, 24 lançamentos (b) pelo menos 10 lançamentos?

c) Número de itens defeituosos em um lote de 5 itens.

d) Número de clientes que chegam em 20 minutos numa loja.

e) Número de vermelhos em 15 rodadas de uma roleta.

f) Suponha que temos dados que sugerem que 3% das unidades de uma empresa de discos rígidos são defeituoso. Qual a probabilidade de que o primeiro disco rígido defeituoso seja a quinta unidade testada?

g) Vinte e cinco por cento dos clientes que entram numa mercearia entre usam o caixa expresso. Considere cinco clientes selecionados aleatoriamente e seja $X$ o número entre as cinco que usam o caixa expresso. Qual é a probabilidade de que dois clientes tenham usado o caixa expresso?

h) Número de greves por ano no Brasil.

i) Suponha que um cliente em uma loja de animal de estimação quer comprar dois hamsters para sua filha, mas ele quer dois machos ou duas fêmeas (ou seja, ele quer apenas dois hamsters em alguns meses) Se há 10 hamsters, cinco do sexo masculino e cinco do sexo feminino, que é a probabilidade de tirarmos os dois do mesmo sexo da gaiola?

j) Número de defeitos por lote de DVD

k) Ao tirar 5 cartas de um baralho embaralhado, a probabilidade de uma mão ter exatamente um par é de cerca de $0,42257$. Se você quiser que a probabilidade de tirar um par dentro de $n$ retiradas independentes seja pelo menos $0,99$, então quantas retiradas devem ser feita?

**23** — Ao tirar 5 cartas de um baralho embaralhado, a probabilidade de uma mão ter exatamente um par é de cerca de $0,42257$. Se você quiser que a probabilidade de tirar um par dentro de $n$ retiradas independentes seja pelo menos $0,99$, então quantas retiradas devem ser feita?

**24** — Suponha que sejam necessários pelo menos 9 votos de um júri formado por 12 jurados para que um réu seja condenado. Suponha também que a probabilidade de que um jurado vote na inocência de uma pessoa culpada seja de $0,2$, enquanto a probabilidade de que o jurado vote na culpa de uma pessoa inocente seja de $0,1$. Se cada jurado age independentemente e se $65\%$ dos réus são culpados, determine a probabilidade de que o júri chegue a conclusão correta. Que percentual de réus é condenado?

# Respostas dos Exercícios

**1**

$$P\{X=-2\}=4/13$$
$$P\{X=-1\}=16/91$$
$$P\{X=0\}=1/91$$
$$P\{X=1\}=32/91$$
$$P\{X=2\}=8/91$$
$$P\{X=3\}=0$$
$$P\{X=4\}=6/91$$

**2** **a.)**$X \in \{1,2,3,4,5,6\}$ **b.)**$X \in \{1,2,3,4,5,6\}$ **c.)**$X \in \{2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$ **d.)**$X \in \{-5,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5\}$

**3** **a.)**

$$P\{X=1\}=1/36$$
$$P\{X=2\}=3/36$$
$$P\{X=3\}=5/36$$
$$P\{X=4\}=7/36$$
$$P\{X=5\}=1/4$$
$$P\{X=6\}=11/36$$

**b.)**

$$P\{X=1\}=11/36$$
$$P\{X=2\}=1/4$$
$$P\{X=3\}=7/36$$
$$P\{X=4\}=5/36$$
$$P\{X=5\}=7/36$$
$$P\{X=6\}=1/36$$

**c.)**

$$P\{X=2\}=1/36$$
$$P\{X=3\}=1/18$$
$$P\{X=4\}=1/12$$
$$P\{X=5\}=1/9$$
$$P\{X=6\}=5/36$$
$$P\{X=7\}=1/6$$
$$P\{X=8\}=5/36$$
$$P\{X=9\}=1/9$$
$$P\{X=10\}=1/12$$
$$P\{X=11\}=1/18$$
$$P\{X=12\}=1/36$$

**4** Ver Ross.

**7** Exemplo 8.a do Ross. página 195.

**8** **a.)**$0.5917$ **b.)**Não. Calcule a esperança. **c.)**$-0.108$

**9** $E[S;p]=p^*(1-(1-p)2)+(1-p^*)(1-p2)$
Derivando e igualando a zero temos $p=p^*$
Faça o teste da segunda derivada e veja que $p=p^*$ é um máximo local.

**10** O número de motores que falham é uma variável aleatória binomial com probabilidade $1-p$ e $p$, respectivamente. Para um avião de três motores a probabilidade de que ele faça um voo bem sucedido é igual a probabilidade de que três ou dois motores funcionem. Esta probabilidade é

$$p^2(3-2p)$$

Para um avião de cinco motores a probabilidade de que ele faça um voo bem sucedido é igual a probabilidade de que três, quatro ou cinco motores funcionem. Esta probabilidade é

$$p^3(6p^2-15p+10)$$

Logo queremos que $p^3(6p^2-15p+10)\geq p^2(3-2p)$ que resolvendo temos:

$$1/2\leq p\leq 1$$

**11** dica: geométrica. $P\approx 0,032$

**14** Suponha que $N$ o número de acidentes de avião mensal é dado por uma variável aleatória de Poisson. então uma vez que $E[N]=\lambda$ sabemos o parâmetro $\lambda$ da distribuição. A partir disso, podemos calcular as probabilidades pedidas.

$$P(N\geq 2)=1-P(N<2)=1-P(N=0)-P(N=1)$$

Logo

$$P(N\geq 2)=1-e^{0.35}-\frac{e^{0.35}0.35}{1!}\approx 0.86$$

**b.)**

$$P(N\leq 1)=P(0)+P(1)$$

**22** **a.)**Binomial **b.)**Geométrica **c.)**Binomial **d.)**Poisson **e.)**Binomial **f.)**Geométrica **g.)**Binomial **h.)**Poisson **i.)**Nenhuma, hipergeométrica **j.)**Poisson **k.)**Geométrica

**24** Seja $E$ o evento que um júri torna uma decisão correta e seja G o caso de um pessoa é culpada. então

$$P(E) = P(E|G)P(G) + P(E|Gc)P(GC)$$

A partir da enunciado do problema, sabemos que $P(G) = 0,65$ e $P(G^C) = 0,35$

Seja $P(E|G)$ é a probabilidade de chegarmos a decisão correta, dado que o réu é culpado. Para alcançar o decisão correta, devemos ter nove ou mais votos culpados assim

$$P(E|G) = \sum_{i=9}^{12} \binom{12}{i} 0.8^i 0.2^{12-i}$$

que é o caso em que a pessoa é culpada e pelo menos nove membros votam culpado.

Isto acontece porque

$$P(\text{Votar Cul.}|G) = 1 - P(\text{Votar Ino.}|G) = 1 - 0,2 = 0,8.$$

Assim, pode-se calcular P (E | G) usando a soma acima. Encontramos

$$P(E|G) = 0,79457$$

Agora

$$P(E|G^C) = 1 - P(E^C|G^C)$$

ou um menos a probabilidade de o júri cometer um erro e condenar um homem inocente. Isto é,

$$P(E|G^C) = \sum_{i=9}^{12} \binom{12}{i} 0.1^i 0.9^{12-i}$$

Logo igual a$P(E|G^C) \approx 1,0$, de modo que

$$P(E) = 0,79457(0,65) + 1,0(0,35) = 0,86647,$$

como a probabilidade de que o júri toma a decisão correta. Para calcular o percentual de réus que estão convecção precisamos computar

$$P(E|G)P(G) + P(E^C|G^C)P(G^C) = 0,79457(0,65) + 0,0(0,35) = 0,$$

*1.*

$$\mathbb{P}(x) = \begin{cases} 28/91 & se \quad x = -2 \\ 16/91 & se \quad x = -1 \\ 1/91 & se \quad x = 0 \\ 32/91 & se \quad x = 1 \\ 8/91 & se \quad x = 2 \\ 0 & se \quad x = 3 \\ 6/91 & se \quad x = 4 \end{cases}$$

---

*2.*

*a)* $\boxed{\boldsymbol{X} \in \{\mathbf{1,2,3,4,5,6}\}}$

*b)* $\boxed{\boldsymbol{X} \in \{\mathbf{1,2,3,4,5,6}\}}$

*c)* $\boxed{\boldsymbol{X} \in \{\mathbf{2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12}\}}$

*d)* $\boxed{\boldsymbol{X} \in \{\mathbf{-5,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5}\}}$

---

*3.*

*a)* $$\mathbb{P}(x) = \begin{cases} 1/36 & se \quad x = 1 \\ 3/36 & se \quad x = 2 \\ 5/36 & se \quad x = 3 \\ 7/36 & se \quad x = 4 \\ 9/36 & se \quad x = 5 \\ 11/36 & se \quad x = 6 \end{cases}$$

*b)* $$\mathbb{P}(x) = \begin{cases} 11/36 & se \quad x = 1 \\ 9/36 & se \quad x = 2 \\ 7/36 & se \quad x = 3 \\ 5/36 & se \quad x = 4 \\ 3/36 & se \quad x = 5 \\ 1/36 & se \quad x = 6 \end{cases}$$

c) $$\mathbb{P}(x) = \begin{cases} 1/36 & se \quad x = 2 \\ 2/36 & se \quad x = 3 \\ 3/36 & se \quad x = 4 \\ 4/36 & se \quad x = 5 \\ 5/36 & se \quad x = 6 \\ 6/36 & se \quad x = 7 \\ 5/36 & se \quad x = 8 \\ 4/36 & se \quad x = 9 \\ 3/36 & se \quad x = 10 \\ 2/36 & se \quad x = 11 \\ 1/36 & se \quad x = 12 \end{cases}$$

d) $$\mathbb{P}(x) = \begin{cases} 1/36 & se \quad x = -5 \\ 1/36 & se \quad x = -4 \\ 1/36 & se \quad x = -3 \\ 1/36 & se \quad x = -2 \\ 1/36 & se \quad x = -1 \\ 1/36 & se \quad x = 0 \\ 1/36 & se \quad x = 1 \\ 1/36 & se \quad x = 2 \\ 1/36 & se \quad x = 3 \\ 1/36 & se \quad x = 4 \\ 1/36 & se \quad x = 5 \end{cases}$$

---

4.

a) $E[X^k] =$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} {x_i}^k \cdot p(x_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} i^k \left[ \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} \right]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} i^k \frac{n!}{i!\,(n-i)!} p^i (1-p)^{n-i}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} i^{k-1}\, i \frac{n(n-1)!}{i(i-1)!\,\big((n-1)-(i-1)\big)!} p^{i-1}\, p\, (1-p)^{n-i}$$

$$= np \sum_{i=1}^{n} i^{k-1} \binom{n-1}{i-1} p^{i-1} (1-p)^{n-i}$$

$$= np \sum_{j=0}^{m} (j+1)^{k-1} \binom{m}{j} p^j (1-p)^{m-j} \quad ; \quad j = i-1 \quad e \quad m = n-1$$

$$= np\, E[(Y+1)^{k-1}]$$

$Logo, para\ se\ encontrar\ a\ esperança, tomamos\ k = 1$:

$\boxed{\boldsymbol{E[X] = np}}$

$E\ para\ se\ encontrar\ a\ variância, tomamos\ k = 2$:

$VAR(X) = E[X^2] - (E[X])^2$

$= np\ E[(Y+1)] - (np)^2$

$= np\ [(n-1)p + 1] - (np)^2$

$= (np)^2 - np^2 + np - (np)^2$

$= \boxed{\boldsymbol{np(1-p)}}$

b) $E[X] =$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} x_i \cdot p(x_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} ipq^{i-1} \quad ; \quad q = 1 - p$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} (i + 1 - 1)pq^{i-1}$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} (i - 1)pq^{i-1} + \sum_{i=1}^{\infty} pq^{i-1}$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} jpq^{j} \ + 1 \quad ; \quad j = i - 1$$

$$= q\sum_{j=0}^{\infty} jpq^{j-1} \ + 1$$

$$= q\sum_{j=1}^{\infty} jpq^{j-1} \ + 1$$

$$= qE[X] + 1$$

$\therefore\ E[X] = qE[X] + 1$

$\Rightarrow\ E[X](1 - q) = 1$

$\Rightarrow\ E[X]\,p = 1$

$$\Rightarrow \boxed{\boldsymbol{E[X]} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{p}}}$$

$$VAR(X) =$$

$$= E[X^2] - (E[X])^2$$

$$E[X^2] =$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} {x_i}^2 \cdot p(x_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} i^2 pq^{i-1} \quad ; \quad q = 1 - p$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \big((i-1)+1\big)^2 pq^{i-1}$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} (i-1)^2 pq^{i-1} + \sum_{i=1}^{\infty} 2(i-1)pq^{i-1} + \sum_{i=1}^{\infty} pq^{i-1}$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} j^2 pq^j + 2\sum_{j=0}^{\infty} jpq^j \ + \ 1 \quad ; \quad j = i - 1$$

$$= q\sum_{j=0}^{\infty} j^2 pq^{j-1} + 2q\sum_{j=0}^{\infty} jpq^{j-1} \ + \ 1$$

$$= qE[X^2] + 2qE[X] + 1$$

$$\therefore E[X^2] = qE[X^2] + 2qE[X] + 1$$

$$\Rightarrow E[X^2](1-q) = \frac{2q}{p} + 1$$

$$\Rightarrow E[X^2]\,p = \frac{2q}{p} + 1$$

$$\Rightarrow E[X^2] = \frac{2q + p}{p^2}$$

$$\Rightarrow E[X^2] = \frac{2q + (1-q)}{p^2}$$

$$\Rightarrow E[X^2] = \frac{q + 1}{p^2}$$

$\therefore VAR(X) =$

$= E[X^2] - (E[X])^2$

$= \dfrac{q+1}{p^2} - \dfrac{1}{p^2}$

$= \dfrac{q}{p^2}$

$= \boxed{\dfrac{\mathbf{1-p}}{\mathbf{p^2}}}$

c) *Como a variável aleatória de Bernoulli é uma variável aleatória binomial de parâmetros* $(n,p) = (1,p)$, *temos*:

$E[X] = np = \boxed{\boldsymbol{p}}$

$VAR(X) = np(1-p) = \boxed{\boldsymbol{p(1-p)}}$

---

5.

*Premissas*:

$$E[X] = \sum_i x_i \cdot p(x_i)$$

$$VAR(X) = E[X^2] - (E[X])^2 = \sum_i {x_i}^2 \cdot p(x_i) - (E[X])^2$$

$$\text{Função de probabilidade } \mathbb{P}(x) = \begin{cases} 0 & se \quad x = 0 \\ 0{,}1 - 0{,}0 \ = 0{,}1 & se \quad x = 1 \\ 0{,}3 - 0{,}1 \ = 0{,}2 & se \quad x = 2 \\ 0{,}7 - 0{,}3 \ = 0{,}4 & se \quad x = 3 \\ 0{,}8 - 0{,}7 \ = 0{,}1 & se \quad x = 4 \\ 1 \ - 0{,}8 \ = 0{,}2 & se \quad x = 5 \end{cases}$$

$\mathrm{E[X]} =$

$= 0 \cdot \mathbb{P}(0) + 1 \cdot \mathbb{P}(1) + 2 \cdot \mathbb{P}(2) + 3 \cdot \mathbb{P}(3) + 4 \cdot \mathbb{P}(4) + 5 \cdot \mathbb{P}(5)$

$= 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0{,}1 + 2 \cdot 0{,}2 + 3 \cdot 0{,}4 + 4 \cdot 0{,}1 + 5 \cdot 0{,}2$

$= \boxed{\mathbf{3{,}1}}$

$\mathrm{VAR(X)} =$

$= 0^2 \cdot \mathbb{P}(0) + 1^2 \cdot \mathbb{P}(1) + 2^2 \cdot \mathbb{P}(2) + 3^2 \cdot \mathbb{P}(3) + 4^2 \cdot \mathbb{P}(4) + 5^2 \cdot \mathbb{P}(5) - 3{,}1^2$

$= 0^2 \cdot 0 + 1^2 \cdot 0{,}1 + 2^2 \cdot 0{,}2 + 3^2 \cdot 0{,}4 + 4^2 \cdot 0{,}1 + 5^2 \cdot 0{,}2 - 3{,}1^2$

$$= \boxed{\mathbf{1,49}}$$

$$\mathbb{P}(1 \leq X < 2) =$$

$$= \mathbb{P}(X < 2) - \mathbb{P}(X < 1)$$

$$= [\mathbb{P}(X = 1) + \mathbb{P}(X = 0)] - \mathbb{P}(X = 0)$$

$$= \mathbb{P}(X = 1)$$

$$= \boxed{\mathbf{0,1}}$$

$$\mathbb{P}(X = 4) =$$

$$= \boxed{\mathbf{0,1}}$$

$$\mathbb{P}(X > 3) =$$

$$= \mathbb{P}(X = 4) + \mathbb{P}(X = 5)$$

$$= 0{,}1 + 0{,}2$$

$$= \boxed{\mathbf{0,3}}$$

$$\mathbb{P}(X \leq 4) =$$

$$= 1 - \mathbb{P}(X > 4)$$

$$= 1 - \mathbb{P}(X = 5)$$

$$= 1 - 0{,}2$$

$$= \boxed{\mathbf{0,8}}$$

---

*6.*

$Eventos:$

$$A = i: \{acertou\ na\ mosca\ somente\ na\ i - ézima\ vez\}$$

$Premissa:$

$$\mathbb{P}(A = i) = 0{,}20 \cdot 0{,}80^{i-1}$$

$$\mathbb{P}(A = 10) =$$

$$= 0{,}20 \cdot 0{,}80^{10-1}$$

$$= \boxed{\mathbf{0,0268}}$$

---

7.

$Eventos$:

$N: \{saiu\ bola\ branca\}$

$M: \{saiu\ bola\ preta\}$

$M = i: \{saiu\ bola\ preta\ somente\ na\ i - ézima\ bola\ retirada\}$

$Premissa$:

$$\mathbb{P}(M = i) = \left(\frac{M}{N+M}\right)\left(\frac{N}{N+M}\right)^{i-1}$$

a) $\mathbb{P}(M = n) =$

$$= \left(\frac{M}{N+M}\right)\left(\frac{N}{N+M}\right)^{n-1}$$

$$= \boxed{\frac{\boldsymbol{M \cdot N^{n-1}}}{\boldsymbol{(N+M)^n}}}$$

b) $\mathbb{P}(M \geq k) =$

$$= \sum_{j=k}^{\infty} \mathbb{P}(M = j)$$

$$= \left(\frac{M}{N+M}\right)\sum_{j=k}^{\infty}\left(\frac{N}{N+M}\right)^{j-1}$$

$$\begin{cases} t = \dfrac{N}{N+M} \\ r = j - 1 \\ \\ \quad \Sigma = t^r + t^{r+1} + t^{r+2} + \cdots \\ \underline{\Sigma t = t^{r+1} + t^{r+2} + t^{r+3} + \cdots} \\ \qquad \Sigma - \Sigma t = t^r \\ \\ \qquad \therefore \Sigma = \dfrac{t^r}{1-t} \end{cases}$$

$$= \left(\frac{M}{N+M}\right)\frac{\left(\frac{N}{N+M}\right)^{k-1}}{\left(1-\frac{N}{N+M}\right)}$$

$$= \left(\frac{M}{N+M}\right)\frac{\left(\frac{N}{N+M}\right)^{k-1}}{\left(\frac{N+M}{N+M}-\frac{N}{N+M}\right)}$$

$$= \left(\frac{M}{N+M}\right)\frac{\left(\frac{N}{N+M}\right)^{k-1}}{\left(\frac{M}{N+M}\right)}$$

$$= \boxed{\left(\frac{\boldsymbol{N}}{\boldsymbol{N+M}}\right)^{\boldsymbol{k-1}}}$$

---

*8.*

$Eventos$:

$X = i: \{lucrou\ i\ reais\}$

$Premissas$:

$$p = \frac{18}{38}$$

$$\mathbb{P}(X \leq -4) = 0$$

$$\mathbb{P}(X = -3) = (1-p)^3 = \left(\frac{20}{38}\right)^3 \approx 0{,}1458$$

$$\mathbb{P}(X = -2) = 0$$

$$\mathbb{P}(X = -1) = \binom{2}{1}p(1-p)^2 = \binom{2}{1}\frac{18}{38}\cdot\left(\frac{20}{38}\right)^2 \approx 0{,}2624$$

$$\mathbb{P}(X = 1) = p + p^2(1-p) = \frac{18}{38} + \left(\frac{18}{38}\right)^2\frac{20}{38} \approx 0{,}5918$$

$$\mathbb{P}(X = 2) = 0$$

*a)* $\mathbb{P}(X > 0) =$

$$= \mathbb{P}(X = 1) + \mathbb{P}(X = 2) + \mathbb{P}(X \geq 3)$$

$$\approx \boxed{\mathbf{0{,}5918}}$$

*b)* $N\tilde{a}o, pois, de\ acordo\ com\ o\ item\ c, a\ esperança\ é\ negativa. Ou\ seja, na\ média$

$o\ jogador\ irá\ perder.$

c) $E[X] =$

$= (-3) \cdot \mathbb{P}(X = -3) + (-1) \cdot \mathbb{P}(X = -1) + 1 \cdot \mathbb{P}(X = 1)$

$\approx -3 \cdot 0{,}1458 - 1 \cdot 0{,}2624 + 1 \cdot 0{,}5918$

$\approx \boxed{\mathbf{-0,108}}$

---

9.

$Eventos$:

$C$: $\{pontuação\ recebida\ por\ acertar\ que\ choveu\}$

$N$: $\{pontuação\ recebida\ por\ erra\ que\ não\ choveu\}$

$Premissa$:

$C = 1 - (1-p)^2$

$N = 1 - p^2$

$\mathbb{P}(C) = p^*$

$\mathbb{P}(N) = 1 - p^*$

$E[X] = C \cdot \mathbb{P}(C) + N \cdot \mathbb{P}(N) = (1-(1-p)^2)p^* + (1-p^2)(1-p^*)$

$$\frac{dE[X]}{dp} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dp}\left((1-(1-p)^2)p^* + (1-p^2)(1-p^*)\right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dp}\left((-p^2+2p)p^* + 1 - p^* - p^2 + p^*p^2\right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dp}(-p^*p^2 + 2p^*p + 1 - p^* - p^2 + p^*p^2) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dp}(p^2 - 2p^*p + p^* - 1) = 0$$

$$\Rightarrow 2p - 2p^* = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\boldsymbol{p = p^*}}$$

$ou$

$$\frac{dE[X]}{dp} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dp}\big((1-(1-p)^2)p^* + (1-p^2)(1-p^*)\big) = 0$$

$$\Rightarrow 2p^*(1-p) - 2p(1-p^*) = 0$$

$$\Rightarrow 2p^* - 2p^*p - 2p + 2p^*p = 0$$

$$\Rightarrow 2p - 2p^* = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\boldsymbol{p = p^*}}$$

---

*10.*

$Eventos$:

$$M_n = i: \{avião\ de\ n\ motores\ com\ i\ em\ funcionamento\}$$

$Premissa$:

$$\mathbb{P}(M_n = i) = \binom{n}{i} p^i\,(1-p)^{n-i}$$

$$\mathbb{P}(M_5 \geq 3) > \mathbb{P}(M_3 \geq 2)$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(M_5 = 3) + \mathbb{P}(M_5 = 4) + \mathbb{P}(M_5 = 5) \geq \mathbb{P}(M_3 = 2) + \mathbb{P}(M_3 = 3)$$

$$\Rightarrow \binom{5}{3} p^3\,(1-p)^2 + \binom{5}{4} p^4\,(1-p) + \binom{5}{5} p^5 \geq \binom{3}{2} p^2(1-p) + \binom{3}{3} p^3$$

$$\Rightarrow 10p\,(1-p)^2 + 5p^2(1-p) + p^3 \geq 3(1-p) + p$$

$$\Rightarrow 10p\,(1-p)^2 + 5p^2(1-p) + p^3 - p \geq 3(1-p)$$

$$\Rightarrow 10p\,(1-p)^2 + 5p^2(1-p) + p(p^2-1) \geq 3(1-p)$$

$$\Rightarrow 10p\,(1-p)^2 + 5p^2(1-p) + p(p+1)(p-1) \geq 3(1-p)$$

$$\Rightarrow 10p\,(1-p)^2 + 5p^2(1-p) - p(p+1)(1-p) \geq 3(1-p)$$

$$\Rightarrow 10p(1-p) + 5p^2 - p(p+1) \geq 3$$

$$\Rightarrow 10p - 10p^2 + 5p^2 - p^2 - p \geq 3$$

$$\Rightarrow 6p^2 - 9p + 3 \leq 0$$

$$\Rightarrow 2p^2 - 3p + 1 \leq 0$$

$$\therefore (2p-1)(p-1) = 0 \quad \Rightarrow \quad p_1 = 1/2 \quad e \quad p_2 = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{2} \leq p \leq 1}$$

---

11.

*Eventos*:

$D^k{}_n = i: \{n \text{ lançamentos de um dado com } i \text{ vezes saído o lado } k\}$

*Premissa*:

$$\mathbb{P}(D^k{}_n = i) = \binom{n}{i}\left(\frac{1}{6}\right)^i \left(\frac{5}{6}\right)^{n-i}$$

$$\mathbb{P}(D^6{}_{10} = 1) =$$

$$= \binom{10}{1}\left(\frac{1}{6}\right)^1 \left(\frac{5}{6}\right)^{10-1}$$

$$= 10 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5^9}{6^9}$$

$$\approx \boxed{0{,}323}$$

---

12.

*Eventos*:

$D^k{}_n = i: \{n \text{ lançamentos de um dado com } i \text{ vezes saído o lado } k\}$

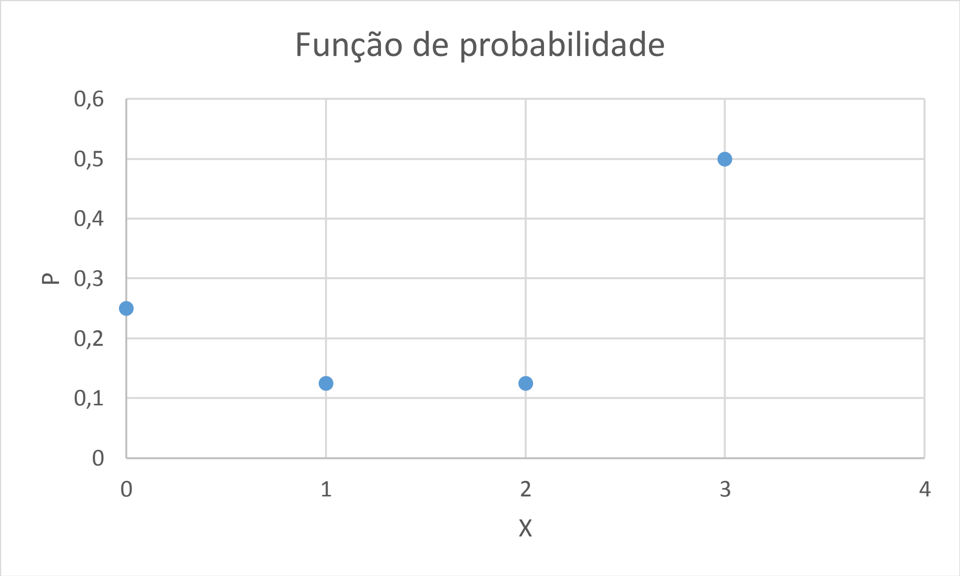
*Premissas*:

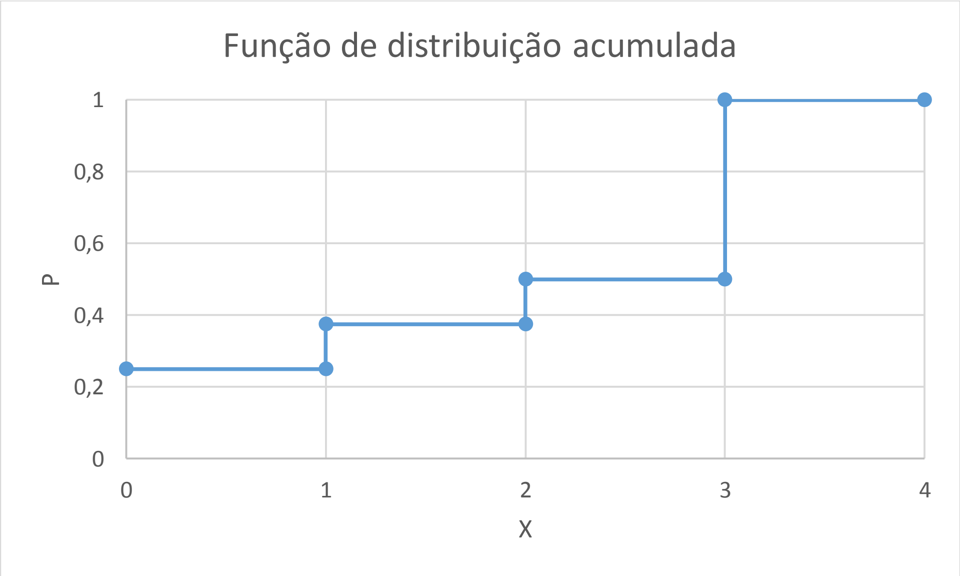
$\mathbb{P}(X = 0) = 0{,}25$

$\mathbb{P}(X = 1) = 0{,}125$

$\mathbb{P}(X = 2) = 0{,}125$

$\mathbb{P}(X = 3) = 0{,}5$




$E(X) =$

$= \sum_i x_i \, p(x_i)$

$= 0 \cdot p(0) + 1 \cdot p(1) + 2 \cdot p(2) + 3 \cdot p(3)$

$= 0 \cdot 0{,}25 + 1 \cdot 0{,}125 + 2 \cdot 0{,}125 + 3 \cdot 0{,}5$

$= \boxed{\mathbf{1{,}875}}$

$VAR(X) =$

$= E[X^2] - (E[X])^2$

$= \sum_i {x_i}^2 \, p(x_i) - (1{,}875)^2$

$= 0^2 \cdot p(0) + 1^2 \cdot p(1) + 2^2 \cdot p(2) + 3^2 \cdot p(3) - 3{,}515625$

$= 0^2 \cdot 0{,}25 + 1^2 \cdot 0{,}125 + 2^2 \cdot 0{,}125 + 3^2 \cdot 0{,}5 - 3{,}515625$

$\approx \boxed{\mathbf{1,609}}$

$\mathbb{P}(0 < X < 1) =$

$= \mathbb{P}(X < 1) - \mathbb{P}(X < 0)$

$= \mathbb{P}(X = 0) - 0$

$= \boxed{\mathbf{0,25}}$

$\mathbb{P}(X \leq 2) =$

$= \mathbb{P}(X = 0) + \mathbb{P}(X = 1) + \mathbb{P}(X = 2)$

$= 0{,}25 + 0{,}125 + 0{,}125$

$= \boxed{\mathbf{0,50}}$

$\mathbb{P}(X > 3) =$

$= 1 - \mathbb{P}(X \leq 3)$

$= 1 - \big(\mathbb{P}(X = 0) + \mathbb{P}(X = 1) + \mathbb{P}(X = 2) + \mathbb{P}(X = 3)\big)$

$= 1 - (0{,}25 + 0{,}125 + 0{,}125 + 0{,}5)$

$= \boxed{\mathbf{0}}$

$\mathbb{P}(X > 2{,}5) =$

$= 1 - \mathbb{P}(X \leq 2{,}5)$

$= 1 - \mathbb{P}(X \leq 2)$

$= 1 - 0{,}50$

$= \boxed{\mathbf{0,50}}$

---

*13.*

*a)* $x_c : \{acerta\ o\ centro\} = 18$

$x_b : \{acerta\ o\ branco\} = 8$

$x_e : \{erra\} = -2$

$espaço\ amostral\ S = \{x_c, x_b, x_e\}$

b) $E[X] =$

$$= \sum_i x_i \, p(x_i)$$

$$= x_c \, p(x_c) + x_b \, p(x_b) + x_e \, p(x_e)$$

$$= 18 \cdot 0{,}2 + 8 \cdot 0{,}7 + (-2)\big(1 - (0{,}2 + 0{,}7)\big)$$

$$= 3{,}6 + 5{,}6 - 0{,}2$$

$$= \boxed{\mathbf{9,0}}$$

$VAR(X) =$

$$= E[X^2] - (E[X])^2$$

$$= \sum_i {x_i}^2 \, p(x_i) - (9{,}0)^2$$

$$= {x_c}^2 \; p(x_c) + {x_b}^2 \, p(x_b) + {x_e}^2 \, p(x_e) - 81$$

$$= 18^2 \cdot 0{,}2 + 8^2 \cdot 0{,}7 + (-2)^2\big(1 - (0{,}2 + 0{,}7)\big) - 81$$

$$= \boxed{\mathbf{29}}$$

---

14.

a) $\mathbb{P}(X \geq 2) =$

$$= 1 - P(X < 2)$$

$$= 1 - \big(P(X = 0) + P(X = 1)\big)$$

$Assuma\ que\ a\ variância\ seja\ muito\ pequena, de\ tal\ modo\ que\ a\ média\ \lambda = np.$

$\therefore \mathbb{P}(X = i) =$

$$= \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$$

$$= \frac{n!}{i!\,(n-i)!} p^i (1-p)^{n-i}$$

$$= \frac{n!}{i!\,(n-i)!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^i \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-i}$$

$$= \frac{n\,(n-1)\cdots(n-i+1)\,(n-i)!}{i!\,(n-i)!} \frac{\lambda^i}{n^i} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-i}$$

$$= \frac{n(n-1)\cdots(n-i+1)}{i!}\frac{\lambda^i}{n^i}\frac{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n}{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^i}$$

$$= \frac{n(n-1)\cdots(n-i+1)}{n^i}\frac{\lambda^i}{i!}\frac{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n}{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^i}$$

$Para\ n\ muito\ grande, onde\ n^{-1} \approx 0, temos\ que:$

$$\frac{n(n-1)\cdots(n-i+1)}{n^i} = \frac{n^i - n^{i-1} - 2n^{i-1} - \cdots}{n^i} = \frac{n^i}{n^i} - \frac{n^{i-1}}{n^i} - \frac{2n^{i-1}}{n^i} - \cdots$$

$$= 1 - \frac{1}{n} - \frac{2}{n} - \cdots \approx 1 - 0 - 0 - \cdots = 1$$

$$\left(1 + \frac{-\lambda}{n}\right)^n \approx e^{-\lambda}$$

$$\left(1 + \frac{-1}{n}\right)^i \approx (1-0)^i = 1$$

$Portanto:$

$\mathbb{P}(X = i) =$

$$= \frac{n(n-1)\cdots(n-i+1)}{n^i}\frac{\lambda^i}{i!}\frac{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n}{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^i}$$

$$\approx 1 \cdot \frac{\lambda^i}{i!} \cdot \frac{e^{-\lambda}}{1}$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(X = i) \approx e^{-\lambda}\frac{\lambda^i}{i!}$$

$Que\ é\ a\ variável\ aleatória\ de\ Poisson.$

$Assim:$

$\mathbb{P}(X \geq 2) =$

$$= 1 - \big(P(X=0) + P(X=1)\big)$$

$$\approx 1 - \left(e^{-3,3}\frac{3{,}3^0}{0!} + e^{-3,3}\frac{3{,}3^1}{1!}\right)$$

$$= 1 - (e^{-3,3} + 3{,}3e^{-3,3})$$

$$\approx \boxed{\mathbf{0{,}84}}$$

*b)* $\mathbb{P}(X \leq 1) =$

$= 1 - \mathbb{P}(X \geq 2)$

$= P(X = 0) + P(X = 1)$

$\approx e^{-3,3} + 3,3e^{-3,3}$

$\approx \boxed{\mathbf{0,16}}$

---

*15.*

*Eventos:*

$B_n = i: \{n\ bits\ sucessivos\ com\ i\ resultados\ corretos\}$

*Premissa:*

$$\mathbb{P}(B_n = i) = \binom{n}{i} p^i\,(1-p)^{n-i}$$

$\mathbb{P}(B_3 \geq 2) > \mathbb{P}(B_1 \geq 1)$

$\Rightarrow \mathbb{P}(B_3 = 2) + \mathbb{P}(B_3 = 3) \geq \mathbb{P}(B_1 = 1)$

$\Rightarrow \binom{3}{2} p^2\,(1-p) + \binom{3}{3} p^3 \geq \binom{1}{1} p^1$

$\Rightarrow 3p\,(1-p) + p^2 \geq 1$

$\Rightarrow 2p^2 - 3p + 1 \leq 0$

$\therefore (2p-1)(p-1) = 0 \quad \Rightarrow \quad p_1 = 1/2 \quad e \quad p_2 = 1$

$\Rightarrow \boxed{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \leq \boldsymbol{p} \leq \mathbf{1}}$

---

*16.*

*Eventos:*

$D = i: \{pessoa\ ficou\ doente\ i\ vezes\ em\ um\ ano\}$

*Premissa:*

$$\mathbb{P}(D = i) = 0,75 \cdot e^{-2}\frac{2^i}{i!} + 0,25 \cdot e^{-4}\frac{4^i}{i!}$$

$\mathbb{P}(D = 2) =$

$= 0{,}75 \cdot e^{-2} \frac{2^2}{2!} + 0{,}25 \cdot e^{-4} \frac{4^2}{2!}$

$\approx \boxed{\mathbf{0,240}}$

---

*17.*

$Eventos$:

$D = i: \{chapa\ com\ i\ defeitos\ encontrados\ por\ m^2\}$

$Premissa$:

$\mathbb{P}(D = i) = e^{-1} \frac{1^1}{i!} = \frac{1}{i!\,e}$

*a)* $\mathbb{P}(D \geq 1) =$

$= 1 - \mathbb{P}(D < 1)$

$= 1 - 0$

$= \boxed{\mathbf{1}}$

$= \frac{1}{1!\,e}$

$= \boxed{\mathbf{0,368}}$

*b)* $\mathbb{P}(D \leq 2) =$

$= \mathbb{P}(D = 1) + \mathbb{P}(D = 2)$

$= \frac{1}{1!\,e} + \frac{1}{2!\,e}$

$= \boxed{\mathbf{0,552}}$

*c)* $\mathbb{P}(2 \leq D \leq 4) =$

$= \mathbb{P}(D \leq 4) - \mathbb{P}(D \leq 2)$

$$= \big(\mathbb{P}(D = 0) + \mathbb{P}(D = 1) + \mathbb{P}(D = 2) + \mathbb{P}(D = 3) + \mathbb{P}(D = 4)\big) - \big(\mathbb{P}(D = 0) + \mathbb{P}(D = 1) + \mathbb{P}(D = 2)\big)$$

$= \mathbb{P}(D = 3) + \mathbb{P}(D = 4)$

$$= \frac{1}{3!\,e} + \frac{1}{4!\,e}$$

$$= \boxed{\mathbf{0,077}}$$

---

18.

$Eventos$:

$C = i: \{recebeu\ i\ chamadas\ em\ um\ minuto\}$

$Premissa$:

$$\mathbb{P}(C = i) = e^{-8}\frac{8^i}{i!}$$

a) $\mathbb{P}(C \geq 10) =$

$$= 1 - \mathbb{P}(C < 10)$$

$$= 1 - \big(\mathbb{P}(C = 0) + \mathbb{P}(C = 1) + \mathbb{P}(C = 2) + \mathbb{P}(C = 3) + \mathbb{P}(C = 4) + \mathbb{P}(C = 5) + \mathbb{P}(C = 6) + \mathbb{P}(C = 7) + \mathbb{P}(C = 8) + \mathbb{P}(C = 9)\big)$$

$$= 1 - e^{-8}\left(0 + \frac{8^1}{1!} + \frac{8^2}{2!} + \frac{8^3}{3!} + \frac{8^4}{4!} + \frac{8^5}{5!} + \frac{8^6}{6!} + \frac{8^7}{7!} + \frac{8^8}{8!} + \frac{8^9}{9!}\right)$$

$$= \boxed{\mathbf{0,284}}$$

b) $\mathbb{P}(C < 9) =$

$$= \mathbb{P}(C = 0) + \mathbb{P}(C = 1) + \mathbb{P}(C = 2) + \mathbb{P}(C = 3) + \mathbb{P}(C = 4) + \mathbb{P}(C = 5) + \mathbb{P}(C = 6) + \mathbb{P}(C = 7) + \mathbb{P}(C = 8)$$

$$= e^{-8}\left(0 + \frac{8^1}{1!} + \frac{8^2}{2!} + \frac{8^3}{3!} + \frac{8^4}{4!} + \frac{8^5}{5!} + \frac{8^6}{6!} + \frac{8^7}{7!} + \frac{8^8}{8!}\right)$$

$$= \boxed{\mathbf{0,592}}$$

---

19.

$Eventos$:

$X = i: \{i\ peças\ com\ defeitos\}$

$Premissa$:

$$\mathbb{P}(X=1)=\frac{0{,}60}{3}=0{,}200$$

$$\mathbb{P}(X=2)=\frac{0{,}60^2}{3}=0{,}120$$

$$\mathbb{P}(X=3)=\frac{0{,}60^3}{3}=0{,}072$$

$$\mathbb{P}(X=i)=\frac{0{,}60^i}{3}$$

*a)* $X=\{1,2,3\}$

$$P(X=1)=\frac{0{,}60}{3}=0{,}200$$

$$P(X=2)=\frac{0{,}60^2}{3}=0{,}120$$

$$P(X=3)=\frac{0{,}60^3}{3}=0{,}072$$

*b)* *Porque estamos tirando apenas uma bolinha da urna. Não a necessidade de combinação, uma vez que o número de peças com defeitos depende apenas do número da bolinha.*

*c)* $E[X]=$

$$=1\cdot\mathbb{P}(X=1)+2\cdot\mathbb{P}(X=2)+3\cdot\mathbb{P}(X=3)$$

$$=1\cdot 0{,}200+2\cdot 0{,}120+3\cdot 0{,}072$$

$$=\boxed{\mathbf{0{,}656}}$$

---

*20.*

*Eventos*:

$S:\{sangue\ desejado\}$

$N:\{sangue\ não\ desejado\}$

$S^k=i:\{k-ésimo\ doador\ possui\ o\ i-ésimo\ sangue\ desejado\}$

*Premissa*:

$$\mathbb{P}(S^k=i)=\binom{k}{i}0{,}1^i\,0{,}9^{k-i}$$

*a)* $\mathbb{P}(S^7 = 3) =$

$= \binom{7}{3} 0{,}1^3\ 0{,}9^{7-3}$

$= \boxed{\mathbf{0{,}023}}$

*b)* $\mathbb{P}(S^5 = 1) =$

$= \binom{5}{1} 0{,}1^1\ 0{,}9^{5-1}$

$= \boxed{\mathbf{0{,}328}}$

*c)* $\mathbb{P}(\{N, N, N, S, S, S, N^*\}) =$ ; $N^*$ é $fixo$

$= \binom{7-1}{3} 0{,}1^3\ 0{,}9^{7-3}$

$= \boxed{\mathbf{0{,}013}}$

---

*21.*

$Eventos$:

$D = i: \{i \text{ lâmpadas com defeito}\}$

$Premissa$:

$$\mathbb{P}(D = i) = \binom{5}{i}\left(\frac{4}{20}\right)^i \left(\frac{16}{20}\right)^{5-i} = \binom{5}{i}\frac{1}{5^i}\left(\frac{4}{5}\right)^5\left(\frac{5}{4}\right)^i = \binom{5}{i}\left(\frac{4}{5}\right)^5\frac{1}{4^i}$$

$\mathbb{P}(D \leq 2) =$

$= \mathbb{P}(D = 0) + \mathbb{P}(D = 1) + \mathbb{P}(D = 2)$

$= \left(\frac{4}{5}\right)^5 \left(\binom{5}{0}\frac{1}{4^0} + \binom{5}{1}\frac{1}{4^1} + \binom{5}{2}\frac{1}{4^2}\right)$

$= \left(\frac{4}{5}\right)^5 \left(1 + \frac{5}{4} + \frac{10}{16}\right)$

$\approx \boxed{\mathbf{0{,}942}}$

$$\mathbb{P}(D = 0) = \binom{5}{0}\left(\frac{4}{5}\right)^5\frac{1}{4^0} \approx \boxed{\mathbf{0{,}328}}$$

$$\mathbb{P}(D=1)=\binom{5}{1}\left(\frac{4}{5}\right)^5\frac{1}{4^1}\approx\boxed{\mathbf{0,410}}$$

$$\mathbb{P}(D=2)=\binom{5}{2}\left(\frac{4}{5}\right)^5\frac{1}{4^2}\approx\boxed{\mathbf{0,205}}$$

$$\mathbb{P}(D=3)=\binom{5}{3}\left(\frac{4}{5}\right)^5\frac{1}{4^3}\approx\boxed{\mathbf{0,051}}$$

$$\mathbb{P}(D=4)=\binom{5}{4}\left(\frac{4}{5}\right)^5\frac{1}{4^4}\approx\boxed{\mathbf{0,006}}$$

---

22.

a) ***Binomial***, *pois está se analizando qual a probabilidade de 6 dos 10 estudantes serem femininos.*

b) ***Geométrica***, *pois espera-se apenas um sucesso de duplo 6.*

c) ***Binomial***, *pois está se analizando a quantidade de itens com uma certa probabilidade de serem defeituosos em lote pequeno de 5 itens.*

d) ***Poisson***, *pois 20 minutos é bastante tempo se comparado a possibilidade de aparecer um cliente em um segundo qualquer, que é presumida baixa.*

e) ***Binomial***, *pois está se analizando o número de vermelhos com uma certa probabilidade de acontecerem em poucas rodadas.*

f) ***Geométrica***, *pois espera-se apenas um único disco defeituoso.*

g) ***Binomial***, *pois está se analizando a quantidade de clientes que usaram o caixa expresso com uma certa probabilidade em um número pequeno de clientes.*

h) ***Poisson***, *pois a quantidade de dias em um ano é grande quando presumimos que a possibilidade de ocorrer uma greve em um dia qualquer é baixa.*

i) ***Hipergeométrica***, *pois há um certo número de hamster com sexos definidos e se deseja saber a probabilidade de tirar exatamente dois do mesmo sexo.*

j) ***Poisson***, *pois a quantidade de discos é muito grande e podemos presumir que a chance de um DVD vir com defeito é baixa.*

k) ***Geométrica***, *pois espera-se apenas um único par aparecer.*

---

23.

24.

*Eventos*:

$I$: {réu inocente}

$C: \{réu\ culpado\}$

$N: \{réu\ declarado\ inocente\}$

$P: \{réu\ declarado\ culpado\}$

$P_C = i: \{i\ júris\ declaram\ o\ réu\ culpado\ corretamente\}$

$P_I = i: \{i\ júris\ declaram\ o\ réu\ culpado\ erroneamente\}$

*Premissa*:

$\mathbb{P}(I) = 0{,}35$

$\mathbb{P}(C) = 0{,}65$

$\mathbb{P}(P|I) = 0{,}1$

$\mathbb{P}(N|C) = 0{,}2$

$$\mathbb{P}(P_C = i) = \binom{12}{i}\mathbb{P}(P|C)^i\mathbb{P}(N|C)^{12-i} = \binom{12}{i}\big(1 - \mathbb{P}(N|C)\big)^i\mathbb{P}(N|C)^{12-i} = \binom{12}{i}0{,}8^i \cdot 0{,}2^{12-i}$$

$$\mathbb{P}(P_I = i) = \binom{12}{i}\mathbb{P}(P|I)^i\mathbb{P}(N|I)^{12-i} = \binom{12}{i}\mathbb{P}(P|I)^i\big(1 - \mathbb{P}(P|I)\big)^{12-i} = \binom{12}{i}0{,}1^i \cdot 0{,}9^{12-i}$$

$\mathbb{P}(P|C) =$

$= \mathbb{P}(P_C \geq 9)$

$$= \binom{12}{9}0{,}8^9 \cdot 0{,}2^{12-9} + \binom{12}{10}0{,}8^{10} \cdot 0{,}2^{12-10} + \binom{12}{11}0{,}8^{11} \cdot 0{,}2^{12-11} + \binom{12}{12}0{,}8^{12} \cdot 0{,}2^{12-12}$$

$\approx \boxed{\mathbf{0{,}79457}}$

$\mathbb{P}(P) =$

$= \mathbb{P}\big(P \cap (C \cup C^C)\big)$

$= \mathbb{P}\big(P \cap (C \cup I)\big)$

$= \mathbb{P}\big((P \cap C) \cup (P \cap I)\big)$

$= \mathbb{P}(P \cap C) + \mathbb{P}(P \cap I)$

$= \mathbb{P}(P|C)\mathbb{P}(C) + \mathbb{P}(P|I)\mathbb{P}(I)$

*Temos que*:

$\mathbb{P}(P|I) =$

$= \mathbb{P}(P_I \geq 9)$

$= \binom{12}{9} 0{,}1^9 \cdot 0{,}9^{12-9} + \binom{12}{10} 0{,}1^{10} \cdot 0{,}9^{12-10} + \binom{12}{11} 0{,}1^{11} \cdot 0{,}9^{12-11} + \binom{12}{12} 0{,}1^{12} \cdot 0{,}9^{12-12}$

$\approx 1{,}6584 \times 10^{-7}$

$Portanto, conclui\text{-}se\ que$:

$\mathbb{P}(P) =$

$= \mathbb{P}(P|C)\mathbb{P}(C) + \mathbb{P}(P|I)\mathbb{P}(I)$

$\approx 0{,}79457 \cdot 0{,}65 + 1{,}6584 \times 10^{-7} \cdot 0{,}35$

$\approx \boxed{\mathbf{0{,}51647}}$