UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC

Lista 7 - Introdução à Probabilidade e Estatística

Variáveis Aleatórias Multidimensionais

Variáveis Aleatórias Multidimensionais Discretas

1 — Lança-se, simultaneamente, uma moeda e um dado. Os resultados possíveis são dados pela tabela abaixo:

Moeda\Dado	1	2	3	4	5	6
cara	(cara,1)	(cara,2)	(cara,3)	(cara,4)	(cara,5)	(cara,6)
coroa	(coroa,1)	(coroa,2)	(coroa,3)	(coroa,4)	(coroa,5)	(coroa,6)

Considere que tanto a moeda quanto o dado são honestos e, portanto, este espaço amostral é equiprovável.

a) Obtenha a distribuição conjunta das variáveis aleatórias X (número de caras no lançamento da moeda) e Y (número da face do dado voltada para cima);

b) Obtenha as distribuições marginais de X e de Y.

c) Verifique se X e Y são independentes;

d) Calcule, através das tabelas, P(X=2,Y=3), P(X=1), P(X<2), P(X>-1,Y<5), P(X=0,Y>0). (0, 1/2, 1, 2/3, 1/2)

2 — Considere a distribuição conjunta de X e Y.

Y\X	1	2	3
0	0,1	0,1	0,1
1	0,2	0	0,3
2	0	0,1	0,1

a) Determine as distribuições marginais de X e Y.

b) Obtenha as esperanças e variâncias de X e Y.

c) Verifique se X e Y são independentes.

d) Calcule P(X=1|Y=0) e P(Y=2|X=3)

3 — Suponha que 3 bolas sejam sorteadas de uma urna contendo 3 bolas vermelhas, 4 bolas brancas e 5 bolas azuis. Se X e Y representam, respectivamente, o número de bolas vermelhas e brancas escolhidas, calcule:

a) a distribuição conjunta das variáveis aleatórias X e Y;

b) a distribuição marginal de cada variável aleatória X e Y;

c) todas as distribuições condicionais entre X e Y.

4 — Com base nas tabelas obtidas nos itens anteriores, calcule:

a) a probabilidade de sortearmos 1 vermelha e 2 brancas;

b) a probabilidade de sortearmos 1 vermelha;

c) a probabilidade de sortearmos 2 brancas. As variáveis X e Y são independentes?

d) a probabilidade de sortearmos 1 vermelha e 2 brancas ou 1 branca e 2 vermelhas;

e) a probabilidade de sortearmos 1 vermelha ou 2 brancas;

f) a probabilidade de sortearmos 1 vermelha, dado que as outras 2 bolas sorteadas são brancas;

g) a probabilidade de sortearmos 2 brancas, dado que a outra bola sorteadas é vermelha;

h) o valor esperado de sortearmos bolas vermelhas;

i) o valor esperado de sortearmos bolas brancas;

j) o valor esperado de sortearmos bolas vermelhas, dado que sorteamos 2 brancas;

k) o valor esperado de sortearmos bolas brancas, dado que sorteamos 1 bola vermelha.
Definimos a variável aleatória S que é a soma do número de bolas vermelhas com o número de bolas brancas e a variável P que é o produto do número de bolas vermelhas com o número de bolas brancas. Calcule

l) o valor esperado da variável aleatória S;

m) o valor esperado da variável aleatória P;

n) a distribuição da variável aleatória S;

o) a distribuição da variável aleatória P.

p) Verifique que $\mathsf{E}[\mathsf{S}] = \mathsf{E}[\mathsf{X}] + \mathsf{E}[\mathsf{Y}]$

q) Verifique que $\mathsf{E}[\mathsf{P}] \neq \mathsf{E}[\mathsf{X}]\mathsf{E}[\mathsf{Y}]$. Porque isso já era esperado?

r) Calcule a correlação entre X e Y. X e Y se relacionam de forma linear?

5 — Suponha que X e Y tenham a seguinte distribuição conjunta

Y\X	1	2	3
1	0,1	0,1	0,0
2	0,1	0,2	0,3
3	0,1	0,1	0,0

a) Determine a distribuição da variável $\mathsf{S} = \mathsf{X} + \mathsf{Y}$ e calcule E(S). Pode-se obter a mesma resposta de outra maneira?

b) Determine a distribuição da variável $\mathsf{P} = \mathsf{XY}$ e, em seguida, calcule $\mathsf{E}[\mathsf{P}]$.

c) Mostre que, embora $\mathsf{E}\,(XY) = \mathsf{E}.$, X e Y não são independentes.

d) Lançam-se dois dados perfeitos. X indica o número obtido no primeiro dado e Y o maior ou o número comum nos dois dados.

e) Determine a distribuição conjunta de X e Y.

f) As duas variáveis são independentes? Porque?

g) As duas variáveis são correlacionadas? Porque?

6 — O exemplo a seguir ilustra que correlação nula NÃO implica independência. Suponha que X e Y tenham a seguinte distribuição conjunta

Y\X	-1	0	1
-1	1/8	1/8	1/8
0	1/8	0	1/8
1	1/8	1/8	1/8

a) Mostre que $\mathsf{E}[XY] = \mathsf{E}[X]\,\mathsf{E}[Y]$, o que implica que $\mathsf{corr}[X, Y] = 0$.

b) Justifique porque X e Y não são independentes.

Variáveis Aleatórias Multidimensionais Contínuas

7 — A função densidade de probabilidade conjunta de X e Y é dada por $f(x, y) = c(x^2 - y^2)e^{-y} \quad -y \leq x \leq y \quad 0 < y < \infty$

a) Determine c.

b) Determine as densidades marginais de X e Y.

c) Determine $\mathsf{E}[X]$

8 — A função densidade de probabilidade conjunta de X e Y é dada por

$$f(x, y) = e^{-(x+y)} \quad 0 \leq x \leq \infty, \quad 0 \leq y \leq \infty$$

Determine

a) $P[X < Y]$

b) $P[X < a]$

9 — O vetor aleatório (X, Y) é chamado de uniformemente distribuído em uma região R do plano se, para alguma constante c, sua densidade conjunta é

$$f(x, y) = \begin{cases} c & \text{se}(x, y) \in R \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

caso contrário

a) Mostre que $1\frac{=}{c}$ área da região R. Suponha que (X, Y) seja uniformemente distribuído ao longo do quadrado centrado em (O, O) e com lados de comprimento 2.

b) Mostre que X e Y são independentes, com cada um sendo uniformemente distribuído ao longo de (-1,l). (c) Qual é a probabilidade de que (X, Y) esteja contido no círculo de raio 1 centrado na origem? Isto é, determine

$$P[x^2 + y^2 < 1]$$

10 — A pontuação de Carlos no boliche é normalmente distribuída com média 170 e desvio padrão 20, enquanto a de Sebastião é normalmente distribuída com média 160 e desvio padrão 15. Se Carlos e Sebastião jogam um jogo cada, obtenha, supondo que suas pontuações sejam variáveis aleatórias independentes, a probabilidade aproximada de que

a) a pontuação de Carlos seja maior.

b) o total de seus pontos supere 350.

Covariância

11 — Sejam X e Y duas variáveis aleatórias com $\mathbb{E}[X^2], \mathbb{E}[Y^2] < \infty$. Definimos a covariância entre X e Y por $Cov\,(X, Y) = \mathbb{E}\,[(X - \mathbb{E}\,[X])\,(Y - \mathbb{E}\,[Y])]$. Mostre que

1. $Cov\,(X, Y) = Cov\,(Y, X)$.
2. $Cov\,(X, X) \geq 0$.
3. $Cov\,(aX, bY) = abCov\,(X, Y)$.
4. $Cov\,(X + Y, Z) = Cov\,(X, Z) + Cov\,(Y, Z)$.
5. $Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y) + 2Cov(X, Y)$.
6. Se X e Y são independentes, então $Cov\,(X, Y) = 0$
7. $Cov\,(X, Y) = \mathbb{E}\,[XY] - \mathbb{E}\,[X]\,\mathbb{E}\,[Y]$.

12 — Sejam X e Y duas variáveis aleatórias com $\mathbb{E}[X^2], \mathbb{E}[Y^2] < \infty$. Definimos o índice de correlação entre X e Y por

$$\rho\,(X, Y) = \mathbb{E}\left[\frac{(X - \mathbb{E}\,[X])}{\sqrt{Var(X)}}\frac{(Y - \mathbb{E}\,[Y])}{\sqrt{Var(Y)}}\right].$$

O índice correlação tem a seguinte propriedade

$$-1 \leq \rho\,(X, Y) \leq 1$$

Mostre que $\rho\,(X, Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)}\sqrt{Var(Y)}}$

1.

a)

b)

j / i	1	2	3	4	5	6	$P(X=i)$
0	$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$
1	$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$
$P(Y=j)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	

c) $Como\ pode\text{-}se\ perceber\ no\ gráfico,\ p_X(x)p_Y(y) = p(x,y)\ para\ todo\ x,y.$

$Portanto, X\ e\ Y\ são\ variáveis\ aleatórias$ ***independentes***.

d)

$$P(X=2, Y=3) = P(X=2)P(Y=3)$$

$$= \sum_j p(X=2, Y=j) \sum_i p(X=i, Y=3) = 0 \cdot \frac{1}{6} = \boxed{0}$$

$$P(X=1) = \sum_j p(X=1, Y=j) = \boxed{\frac{1}{2}}$$

$$P(X<2) = P(X=0) + P(X=1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \boxed{1}$$

$$P(X>-1, Y<5) = P(Y<5) = 1 - P(Y \geq 5) = 1 - [P(Y=5) + P(Y=6)]$$

$$= 1 - \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\right) = \frac{4}{6} = \boxed{\frac{2}{3}}$$

$$P(X=0, Y>0) = P(X=0) = \boxed{\frac{1}{2}}$$

2.

a)

Y \ X	1	2	3	$P(Y)$
0	0,1	0,1	0,1	0,3
1	0,2	0	0,3	0,5
2	0	0,1	0,1	0,2
$P(X)$	0,3	0,2	0,5	

b)

$$E[X] = \sum_{x=1}^{3} xp(x) = 1 \cdot 0{,}3 + 2 \cdot 0{,}2 + 3 \cdot 0{,}5 = \boxed{2{,}2}$$

$$VAR[X] = E[X^2] - (E[X])^2 = (1^2 \cdot 0{,}3 + 2^2 \cdot 0{,}2 + 3^2 \cdot 0{,}5) - 2{,}2^2 = \boxed{0{,}76}$$

$$E[Y] = \sum_{y=0}^{2} yp(y) = 0 \cdot 0{,}3 + 1 \cdot 0{,}5 + 2 \cdot 0{,}2 = \boxed{0{,}9}$$

$$VAR[Y] = E[Y^2] - (E[Y])^2 = (0^2 \cdot 0{,}3 + 1^2 \cdot 0{,}5 + 2^2 \cdot 0{,}2) - 0{,}9^2 = \boxed{0{,}49}$$

c) *Como* $P(X = 2, Y = 1) = 0 \neq P(X = 2)P(Y = 1) = 0{,}2 \cdot 0{,}5 = 0{,}1$, *segue que as variáveis aleatórias* X *e* Y *são* ***depententes***.

d)

$$P(X = 1|Y = 0) = \frac{P(X = 1, Y = 0)}{P(Y = 0)} = \frac{0{,}1}{0{,}3} = \boxed{\frac{1}{3}}$$

$$P(Y = 2|X = 3) = \frac{P(Y = 2, X = 3)}{P(X = 3)} = \frac{0{,}1}{0{,}5} = \boxed{\frac{1}{5}}$$

3.

a) b)

Y \ X	0	1	2	3	$P(Y)$
0	$\binom{5}{3}/\binom{12}{3} = 1/22$	$\binom{3}{1}\binom{5}{2}/\binom{12}{3} = 3/22$	$\binom{3}{2}\binom{5}{1}/\binom{12}{3} = 3/44$	$\binom{3}{3}/\binom{12}{3} = 1/220$	14/55
1	$\binom{4}{1}\binom{5}{2}/\binom{12}{3} = 2/11$	$\binom{3}{1}\binom{4}{1}\binom{5}{1}/\binom{12}{3} = 3/11$	$\binom{3}{2}\binom{4}{1}/\binom{12}{3} = 3/55$	0	28/55
2	$\binom{4}{2}\binom{5}{1}/\binom{12}{3} = 3/22$	$\binom{3}{1}\binom{4}{2}/\binom{12}{3} = 9/110$	0	0	12/55
3	$\binom{4}{3}/\binom{12}{3} = 1/55$	0	0	0	1/55
4	0	0	0	0	0
$P(X)$	21/55	27/55	27/220	1/220	

c)

P(X| Y)	0	1	2	3
0	5/28	15/28	15/56	1/56
1	5/14	15/28	3/28	0
2	5/8	3/8	0	0
3	1	0	0	0
4	0	0	0	0

P(Y| X)	0	1	2	3
0	5/42	5/18	5/9	1
1	10/21	5/9	4/9	0
2	5/14	1/6	0	0
3	1/21	0	0	0
4	0	0	0	0

4.

a) $P(X=1,Y=2)=\boxed{9/110}$

b) $P(X=1)=\boxed{27/55}$

c) $P(Y=2)=\boxed{12/55}$

$X \text{ e } Y \text{ são } \textit{depentes} \rightarrow P(X=1,Y=3)=0 \neq P(X=1)P(Y=3)=\frac{27}{55}\cdot\frac{1}{55}=\frac{1}{112}$

d) $P(\{X=1,Y=2\}\cup\{X=2,Y=1\})=P(X=1,Y=2)+(X=2,Y=1)=\boxed{3/22}$

e) $P(X=1\cup Y=2)=P(X=1)+P(Y=2)-P(X=1,Y=2)=\boxed{69/110}$

f) $P(X=1|Y=2)=\boxed{3/8}$

g) $P(Y=2|X=1)=\boxed{1/6}$

h) $E[X]=0\cdot 21/55+1\cdot 27/55+2\cdot 27/220+3\cdot 1/220=3/4=\boxed{0{,}75}$

i) $E[Y]=0\cdot 14/55+1\cdot 28/55+2\cdot 12/55+3\cdot 1/55+4\cdot 0=\boxed{1}$

j) $E[X|Y=2]=0\cdot P(X=0|Y=2)+1\cdot P(X=1|Y=2)=\boxed{3/8}$

k) $E[Y|X=1]=0\cdot P(Y=0|X=1)+1\cdot P(Y=1|X=1)+2\cdot P(Y=2|X=1)$
$=\boxed{8/9}$

l) $E[S]=E[X+Y]=0\cdot 1/22+1\cdot 7/22+2\cdot 21/44+3\cdot 7/44=7/4=\boxed{1{,}75}$

m) $E[P]=E[XY]=0\cdot\frac{13}{22}+1\cdot\frac{3}{11}+2\cdot\frac{3}{22}+3\cdot 0+4\cdot 0+6\cdot 0+9\cdot 0=\frac{6}{11}$
$=\boxed{0,\overline{54}}$

n)

S	P(S)
0	1/22
1	7/22
2	21/44
3	7/44

o)

P	P(P)
0	13/22
1	3/11
2	3/22
3	0
4	0
6	0
9	0

p) $E[X] + E[Y] = 0{,}75 + 1 = 1{,}75 = E[S]$ ■

q) $E[X]E[Y] = 0{,}75 \cdot 1 = 0{,}75 \neq 0{,}\overline{54} = E[P]$ ■

$Isso\ já\ era\ esperado\ pois\ as\ variáveis\ aleatórias\ X\ e\ Y\ são\ depentes.$

r) $\rho_{X,Y} = corr[X,Y] = \frac{E[XY]-E[X]E[Y]}{DP[X]DP[Y]} = \frac{E[P]-E[X]E[Y]}{DP[X]DP[Y]}$

$$= \frac{\frac{6}{11} - 0{,}75 \cdot 1}{\sqrt{0^2 \cdot \frac{21}{55} + 1^2 \cdot \frac{27}{55} + 2^2 \cdot \frac{27}{220} + 3^2 \cdot \frac{1}{220} - 0{,}75^2}\ \sqrt{0^2 \cdot \frac{14}{55} + 1^2 \cdot \frac{28}{55} + 2^2 \cdot \frac{12}{55} + 3^2 \cdot \frac{1}{55} + 4^2 \cdot 0 - 1^2}}$$

$\approx \boxed{-0{,}41}$

$Pelo\ fato\ do\ módulo\ do\ valor\ do\ resultado\ não\ estar\ tão\ próximo\ de\ 1, podemos\ dizer\ que\ as\ variáveis\ aleatórias\ X\ e\ Y\ possuem\ uma\ fraca\ dependência\ linear.$

5.

Y \ X	1	2	3	$P(Y)$
1	0,1	0,1	0	0,2
2	0,1	0,2	0,3	0,6
3	0,1	0,1	0	0,2
$P(X)$	0,3	0,4	0,3	

a) $E[S] = 2 \cdot 0{,}1 + 3 \cdot 0{,}2 + 4 \cdot 0{,}3 + 5 \cdot 0{,}4 + 6 \cdot 0 = \boxed{4}$

$$E[S] = E[X+Y] = E[X] + E[Y]$$
$$= (1 \cdot 0{,}3 + 2 \cdot 0{,}4 + 3 \cdot 0{,}3) + (1 \cdot 0{,}2 + 2 \cdot 0{,}6 + 3 \cdot 0{,}2) = 2 + 2$$
$$= \boxed{4}$$

S	P(S)
2	0,1
3	0,2
4	0,3
5	0,4
6	0

b) $E[P] = 1 \cdot 0{,}1 + 2 \cdot 0{,}2 + 3 \cdot 0{,}1 + 4 \cdot 0{,}2 + 6 \cdot 0{,}4 + 9 \cdot 0 = \boxed{4}$

P	P(P)
1	0,1
2	0,2
3	0,1
4	0,2
6	0,4
9	0

c) $E[P] = E[XY] = E[X]E[Y]$

$No\ entanto:$

$P(X = 3, Y = 3) = 0 \neq P(X = 3)P(Y = 3) = 0{,}3 \cdot 0{,}2 = 0{,}06$

$Logo, X\ e\ Y$ $não\ são\ independentes$, $mesmo\ quando\ E[XY] = E[X]E[Y].$

d)

e)

Y \ X	1	2	3	4	5	6	P(Y)
1	1/36	0	0	0	0	0	1/36
2	1/36	1/18	0	0	0	0	1/12
3	1/36	1/36	1/12	0	0	0	5/36
4	1/36	1/36	1/36	1/9	0	0	7/36
5	1/36	1/36	1/36	1/36	5/36	0	1/4
6	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/6	11/36
P(X)	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	

f) $Como\ temos\ que\ P(X = 2, Y = 1) = 0 \neq P(X = 2)P(Y = 1) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{36} = \frac{1}{216}$,

$as\ variáveis\ X\ e\ Y\ são$ $dependentes$.

g) $corr[X, Y] = \frac{E[XY] - E[X]E[Y]}{DP[X]DP[Y]}$

$$E[XY] = (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) \cdot \frac{1}{6} = \frac{21}{6} = 3{,}5$$

$$E[X] = (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) \cdot \frac{1}{6} = \frac{21}{6} = 3{,}5$$

$$DP[X] = \sqrt{VAR[X]} = \sqrt{E[X^2] - (E[X])^2}$$

$$= \sqrt{(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2) \cdot \frac{1}{6} - 3{,}5^2} \approx 1{,}708$$

$$E[Y] = 1 \cdot \frac{1}{36} + 2 \cdot \frac{1}{12} + 3 \cdot \frac{5}{36} + 4 \cdot \frac{7}{36} + 5 \cdot \frac{1}{4} + 6 \cdot \frac{11}{36} = 4{,}47\overline{2}$$

$$DP[Y] = \sqrt{VAR[Y]} = \sqrt{E[Y^2] - (E[Y])^2}$$

$$= 1^2 \cdot \frac{1}{36} + 2^2 \cdot \frac{1}{12} + 3^2 \cdot \frac{5}{36} + 4^2 \cdot \frac{7}{36} + 5^2 \cdot \frac{1}{4} + 6^2 \cdot \frac{11}{36} - 4{,}47\overline{2}^2$$

$$\approx 1{,}404$$

$$E[XY] = E[P] = 1 \cdot \frac{1}{36} + 2 \cdot \frac{1}{36} + 3 \cdot \frac{1}{36} + 4 \cdot \frac{1}{12} + 5 \cdot \frac{1}{36} + 6 \cdot \frac{1}{18}$$

$$+8 \cdot \frac{1}{36} + 9 \cdot \frac{1}{12} + 10 \cdot \frac{1}{36} + 12 \cdot \frac{1}{18} + 15 \cdot \frac{1}{36} + 16 \cdot \frac{1}{9}$$

$$+18 \cdot \frac{1}{36} + 20 \cdot \frac{1}{36} + 24 \cdot \frac{1}{36} + 25 \cdot \frac{5}{36} + 30 \cdot \frac{1}{36} + 36 \cdot \frac{1}{6} =$$

$$= 17{,}\overline{1}$$

P	P(P)	P	P(P)	P	P(P)
1	1/36	8	1/18	18	7/36
2	1/36	9	5/36	20	1/9
3	1/36	10	5/36	24	1/9
4	1/12	12	1/12	25	1/4
5	1/12	15	1/12	30	5/36
6	1/18	16	7/36	36	11/36

$$corr[X,Y] = \frac{E[XY] - E[X]E[Y]}{DP[X]DP[Y]}$$

$$= \frac{17{,}\overline{1} - 3{,}5 \cdot 4{,}47\overline{2}}{1{,}708 \cdot 1{,}404}$$

$$\approx \boxed{0{,}61}$$

$$Pelo\ valor\ obtido, podemos\ dizer\ que\ as\ variáveis\ possuem\ correlação\ linear\ positiva.$$

6.

X \ Y	-1	0	1	$P(Y)$
-1	1/8	1/8	1/8	3/8
0	1/8	0	1/8	1/4
1	1/8	1/8	1/8	3/8
$P(X)$	3/8	1/4	3/8	

a)

$$E[X] = -1 \cdot \frac{3}{8} + 0 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{3}{8} = 0$$

$$E[Y] = -1 \cdot \frac{3}{8} + 0 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{3}{8} = 0$$

$$E[X]E[Y] = 0 \cdot 0 = 0$$

$$E[XY] = E[P] = -1 \cdot \frac{1}{4} + 0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{4} = 0$$

$$\therefore E[XY] = E[X]E[Y]$$

$$corr[X,Y] = \frac{E[XY] - E[X]E[Y]}{DP[X]DP[Y]} = \frac{E[XY] - E[XY]}{DP[X]DP[Y]} = 0 \ \blacksquare$$

P	P(P)
-1	1/4
0	1/2
1	1/4

b) X *e* Y *são* *dependentes* *pois* $P(X, = 0, Y = 0) = 0 \neq P(X = 0)P(Y = 0) = \frac{1}{4}\frac{1}{4} = \frac{1}{16}$.

7.

8.

9.

10.

11.

12.