BCJ0302
Fenômenos Eletromagnéticos

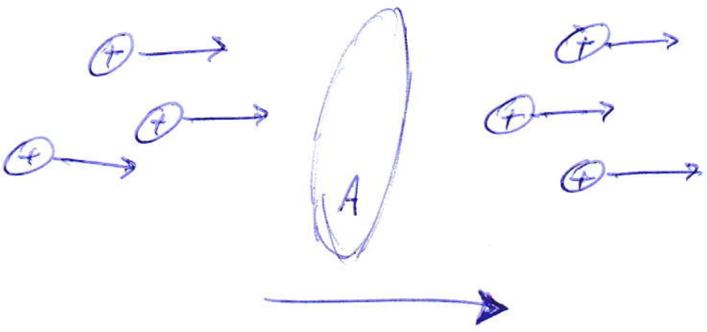
Semana V & VI

- Corrente Elétrica
- Circuitos e "Leis" de Kirchhoff
- Circuitos RC

Prof. Rinaldo J. Cavasso F.º

• Corrente Elétrica

→ Taxa c/ que a carga flui através de uma superfície



$$I_{med} = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$$

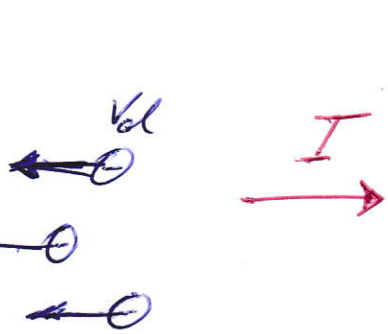
Corrente Instantânea

$$I = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{dq}{dt}$$

$$[I] = \frac{\text{Coulomb}}{\text{segundo}} = \text{Ampère} = A$$

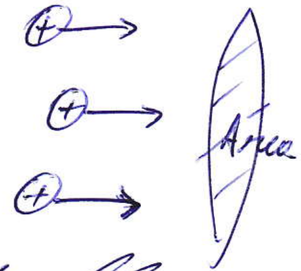
→ Convenção → O sentido da corrente é o sentido do fluxo de Carga Positiva

→ Em metais os portadores de carga são elétrons:



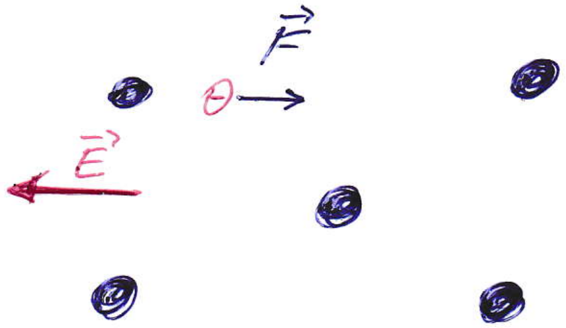
→ Densidade de Corrente

$$\boxed{I = \int \vec{J}\cdot d\vec{A}}$$



$$\boxed{J = \frac{I}{\text{Área}}} \qquad [J] = A/m^2$$

→ Modelo Microscópico em Metais



Desprezando Agitação Térmica

$\vec{v}_0 = 0$

$$\vec{F} = -e\vec{E} \rightarrow \vec{a} = \frac{-e\vec{E}}{m} \qquad \boxed{\vec{v} = \vec{a}t}$$

$$\boxed{\vec{d} = \vec{a}\,t^2/2}$$

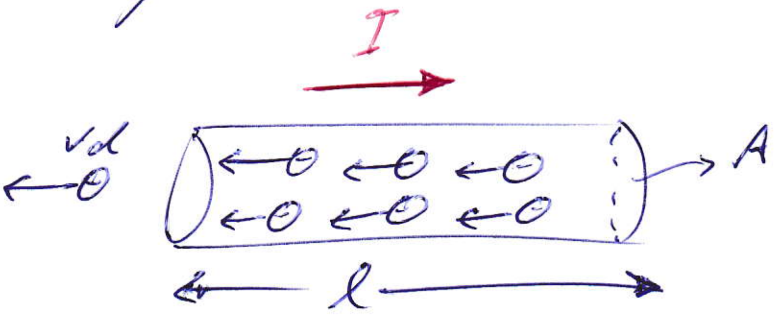
→ O elétron acelera até colidir com algo - ele faz isso durante um tempo médio τ (tempo médio entre colisões)

→ velocidade de deriva

$$\boxed{v_d = \left(\frac{eE}{m_e}\right)\tau}$$

comportamento Médio dos elétrons no Condutor

→ E o fluxo de carga (corrente)?



$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$$

$\Delta Q =$ Número de Portadores $\times\, e\; = \underbrace{n}_{\text{Densidade de Portadores}} (l A)\, e$

Δt = Tempo para toda a carga ΔQ atravessar o condutor.

$$v_d = l/\Delta t$$

$$\Delta t = l/v_d$$

Assim,

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{n\, l\, A\, e}{l} \cdot v_d$$

$$I = \frac{n e^2 \tau}{m_e} \underbrace{(E l)}_{\Delta V} \frac{A}{l}$$

→ **Lei de Ohm**

$$\Delta V = \underbrace{\left(\frac{m_e}{n\, e^2 \tau}\right) \frac{l}{A}}_{\text{Resistência } R}\, I$$

$$[R] = \frac{\text{Volt}}{\text{Ampère}} = \Omega$$

//

R depende do material e do formato do condutor:

$$R = \rho \frac{l}{A}$$

Resistividade

- Cobre $\rho = 1{,}7 \times 10^{-8}\,\Omega.m$
- Ferro $\rho = 10 \times 10^{-8}\,\Omega.m$

Condutores

- Silício $\rho = 640.\,\Omega.m$ Semi-condutor
- Quartzo $\rho = 75 \times 10^{16}\,\Omega.m$ - isolante

→ **Exemplo:**

Considere um fio de cobre c/ $l = 10m$ e $A = 1mm^2$.

(a) Determine R

$$R = 1{,}7 \times 10^{-8}\,\Omega.m \cdot \frac{10m}{(10^{-3}m)^2}$$

$$\boxed{R = 1{,}7 \times 10^{-1}\,\Omega}$$

(b) Aplicando uma ddp de 1V nos extremos desse fio, qual a corrente elétrica?

$$I = \frac{\Delta V}{R} = \frac{1\,V}{1{,}7 \times 10^{-1}\,\Omega} = 5{,}8\,A$$

c) Substituindo o cobre p/ Silício, qual R e a corrente?

$$R = 640 \cdot \frac{10m}{(10^{-3}m)^2} \Omega \cdot m = 640 \times 10^{7} \Omega$$

$$R = 6{,}4 G\Omega$$

$$\boxed{I = \frac{1V}{6{,}4 \times 10^{9}\Omega} = 156 pA}$$

Fluxo Aproximado de 10 milhões de e^-/segundo.

d) Se o fio fosse construído com Quartzo, qual seria o Nº de elétrons atravessando a área do fio/segundo?

$$R = 75 \times 10^{16} \Omega \cdot m \cdot 10^{7} m^{-1} = 75 \times 10^{23} \Omega$$

$$I = \frac{1V}{75 \times 10^{23}\Omega} = 1{,}3 \times 10^{-25} A = 1{,}3 \times 10^{-25} C/s$$

$\rightarrow$ $I = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$; Quando $\Delta Q = e$:

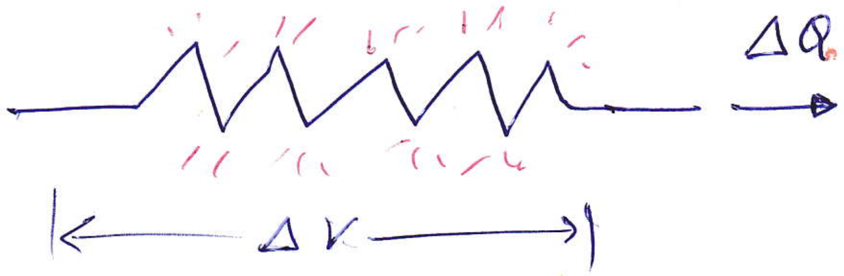
$$\Delta t = \frac{\Delta Q}{I} = \frac{e}{I}$$

$$\Delta t = \frac{1{,}6 \times 10^{-19} C}{1{,}3 \times 10^{-25} C/s} = 1{,}2 \times 10^{6} s \simeq \underline{\underline{14 \text{ dias}}}$$

Potência Dissipada em um Resistor

→ Quando há uma queda de potencial em um resistor, a energia se transforma em calor.

→ Trabalho realizado pela fonte para fazer uma carga ΔQ atravessar um resistor R.



$$\Delta U = \Delta Q (\Delta V)$$

→ A carga ΔQ é movida p/ um tempo Δt

$$P = \frac{\Delta U}{\Delta t} = \underbrace{\frac{\Delta Q}{\Delta t}}_{I} (\Delta V)$$

Variação de Energia p/ Unidade de Tempo

$$\boxed{P = I \Delta V}$$

// Potência dissipada no Resistor

- Alternativamente podemos escrever:

$$\mathcal{P} = I\Delta V = RI^2 = \frac{(\Delta V)^2}{R}$$

$[\mathcal{P}] = J/s = W$

- **Fontes de FEM (Força eletromotriz)**

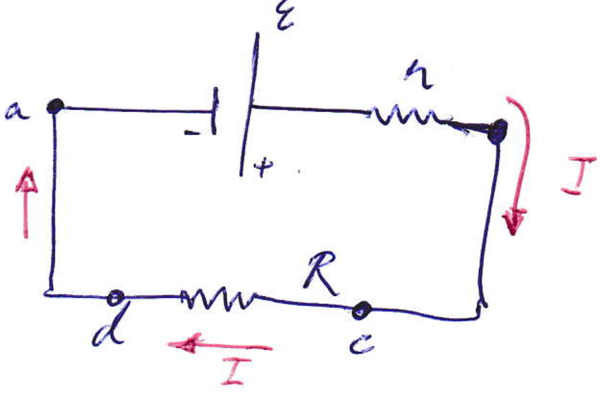
⤳ Uma fonte de fem é um dispositivo que mantém uma ddp em um circuito enquanto as cargas se movem através dele.

$$\mathcal{E} = \frac{dW}{dq}$$

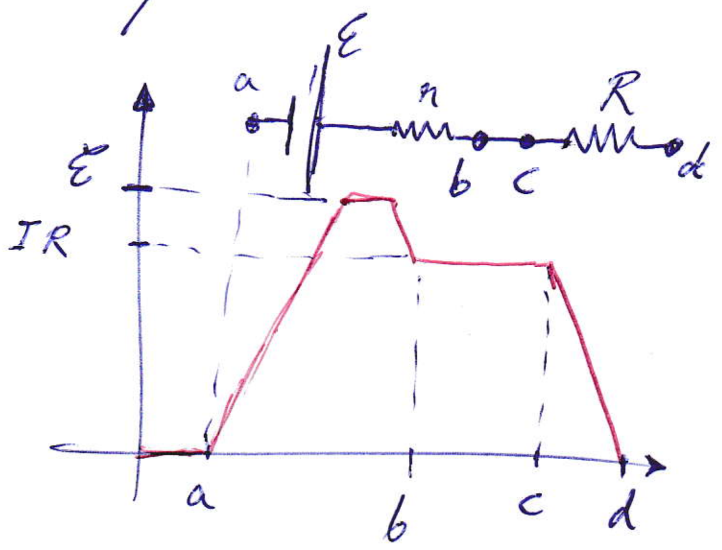
⤳ A fonte deve realizar um trabalho dW p/ transportar dq de $\underline{\underline{V_-}}$ p/ $\underline{\underline{V_+}}$

[Cuidado → ~~...~~ apesar do ~~...~~ nome, fem é um potencial, não uma força]

⤳ Toda bateria ou gerador REAL possui resistência interna r



→ Graficamente



→ ΔV fornecido pela bateria

$$\Delta V = IR$$

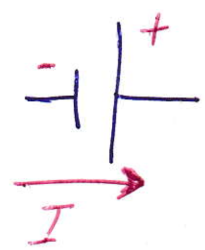
→ Analizando o circuito

$$\varepsilon - \underbrace{Ir}_{\text{Queda de potencial no resistor interno}} - IR = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \Delta V = \varepsilon - IR$$

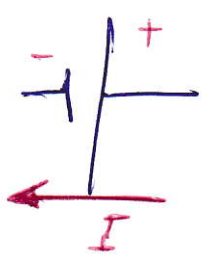
$$\rightsquigarrow \quad \boxed{I = \frac{\varepsilon}{r + R}}$$

→ Uma fonte de fem pode:

→ Fornecer energia ao circuito (quando está descarregando)

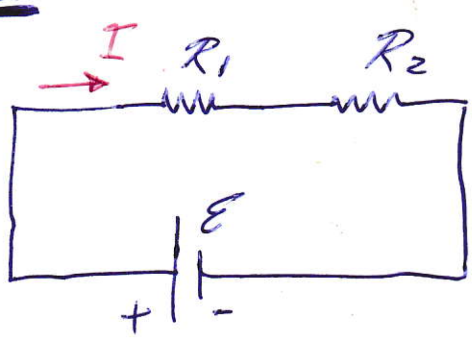


→ Retirar energia do circuito (quando está sendo carregada)



Associações de Resistores

Série



Por conservação de carga, a corrente que flui nos dois é a mesma.

$$\mathcal{E} = \underbrace{IR_1}_{\text{Queda de potencial em } R_1} + IR_2$$

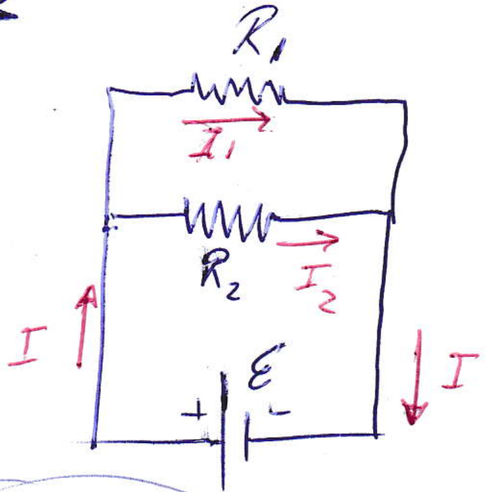
$$\mathcal{E} = I R_{eq} \longrightarrow \boxed{R_{eq} = R_1 + R_2}$$

Num condutor cilíndrico Ohmico

$$R = \rho \frac{l}{A}$$

$$l = l_1 + l_2 \Rightarrow R = R_1 + R_2$$

Paralelo



A mesma ddp cai nos terminais de R_1 e R_2

$$\mathcal{E} = R_1 I_1 = R_2 I_2$$

→ Conservação de carga

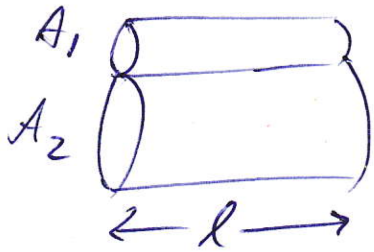
$$I = I_1 + I_2$$

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R_1} + \frac{\mathcal{E}}{R_2}$$

→ Resistor Equivalente $\mathcal{E} = R I$

$$\boxed{\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}$$

- Pensando num condutor de comprimento ℓ



$$R_1 = \rho \frac{\ell}{A_1}$$

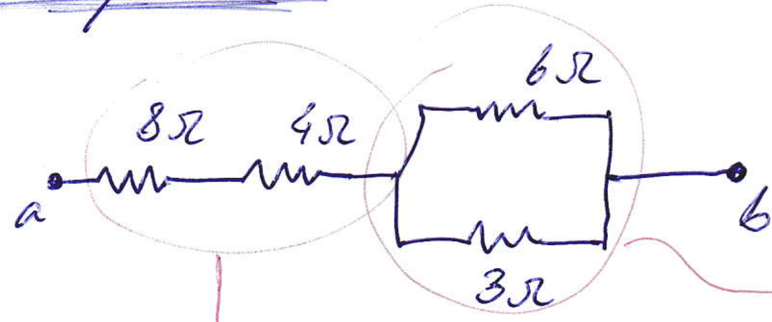
$$R_2 = \rho \frac{\ell}{A_2}$$

$$R = \rho \frac{\ell}{A} = \rho \frac{\ell}{(A_1 + A_2)}$$

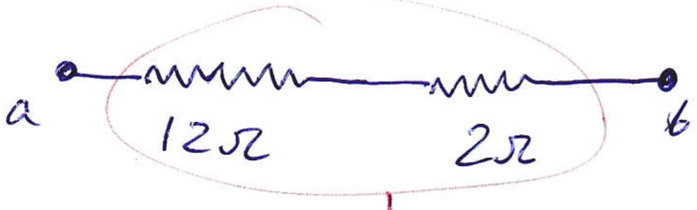
$$\frac{1}{R} = \frac{A_1}{\rho \ell} + \frac{A_2}{\rho \ell} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

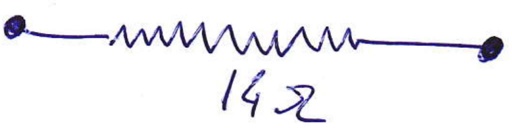
Aumentando a Área, aumentamos o nº de portadores e R cai.

- Exemplo 21.8



$$\frac{1}{R_x} = \frac{1}{3\Omega} + \frac{1}{6\Omega} = \frac{9}{18\Omega}$$

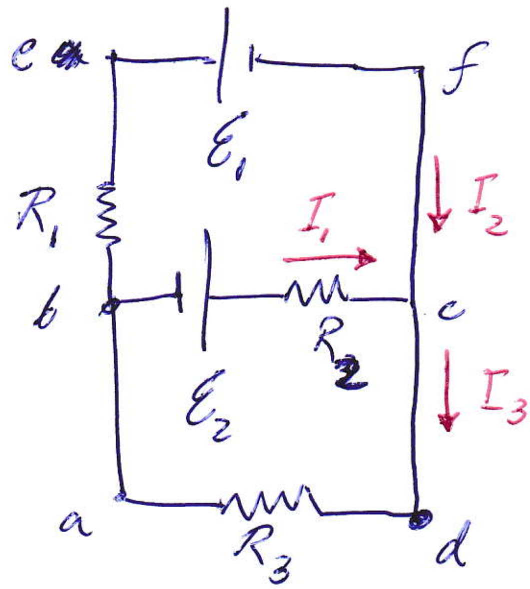




$$R_{eq} = 14\Omega$$

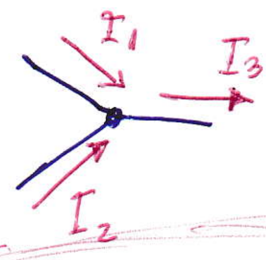
Circuitos com mais de uma Fonte de F.e.m.

○ Como resolver circuitos como esse???



→ Primeiro Passo:

Lembrar da Conservação de Carga!



Tudo que entra em ponto, deve sair

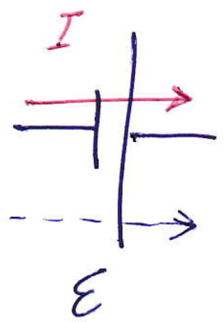
Nesse caso $I_1 + I_2 = I_3$

→ 1ª "Lei" de Kirchoff

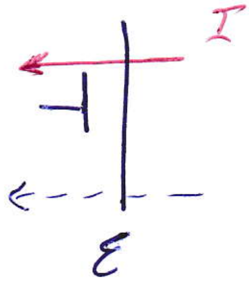
→ Segundo Passo

Lembrar da Conservação de Energia

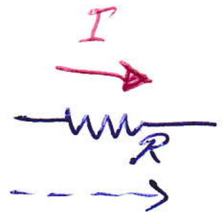
$$\Delta U = q_0 \Delta V$$



$\Delta V = +\mathcal{E}$

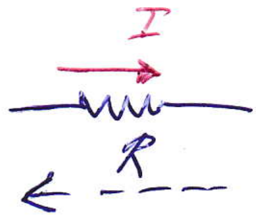


$\Delta V = -\mathcal{E}$



$\Delta V = -RI$

Sentido em que você está percorrendo o circuito na Análise



$\Delta V = RI$

A soma de todas as d.d.p em uma malha fechada deve ser igual a ZERO

2ª "Lei" de Kirchoff

No nosso circuito exemplo conseguimos identificar quantas malhas fechadas?

abcda
aefda
bcfeb

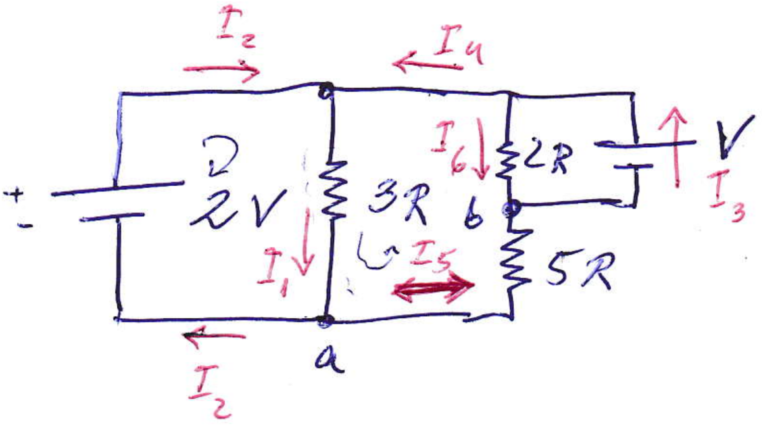
$$\begin{cases} \mathcal{E}_2 - I_1 R_2 - I_3 R_3 = 0 \\ -I_2 R_1 - \mathcal{E}_1 - I_3 R_3 = 0 \\ \mathcal{E}_2 - I_1 R_2 + \mathcal{E}_1 + I_2 R_1 = 0 \end{cases}$$

Uma dessas eqs é redundante.

Se pegarmos as primeiras duas e a conservação de carga: $I_1 + I_2 = I_3$:

$$\begin{cases} \mathcal{E}_2 - I_1 R_2 - (I_1 + I_2) R_3 = 0 \\ -I_2 R_1 - \mathcal{E}_1 - (I_1 + I_2) R_3 = 0 \end{cases}$$

2013.2 P1A - Questão 3



ⓐ Corrente que passa em 2R

ⓑ ddp entre os pontos a e b

ⓒ Potência dissipada pelos 3 resistores

$$\begin{cases} 2V - I_1 3R = 0 \\ -3I_1R - 5I_5R + 2I_6R = 0 \\ V - 2I_6R = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} I_1 = I_2 + I_5 \\ I_1 = I_2 + I_4 \\ I_3 = I_4 + I_6 \\ I_3 = I_5 + I_6 \end{cases}$$

Da conservação de carga $I_4 = I_5$

ficamos c/ 5 eqs e 5 incógnitas

$$\boxed{I_1 = \frac{2}{3}\frac{V}{R}}$$

$$\boxed{I_6 = \frac{1}{2}\frac{V}{R}}$$

$$-2V - 5I_5R + V = 0$$

$$\boxed{I_5 = -\frac{1}{5}\frac{V}{R}}$$

Sentido contrário ao suposto

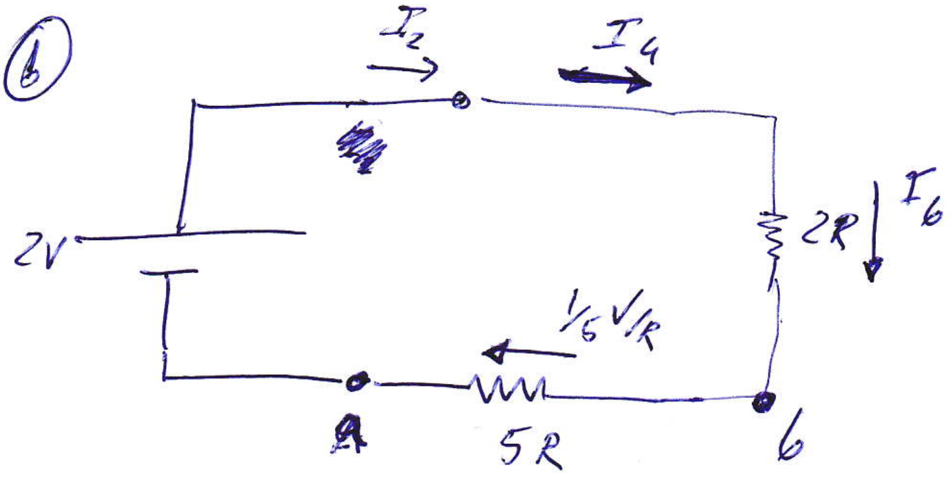
$$I_3 = \frac{V}{R}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5}\right)$$

$$\boxed{I_3 = \frac{3}{10}\frac{V}{R}}$$

$$I_2 = I_1 - I_5 = \frac{V}{R}\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{5}\right)$$

$$\boxed{I_2 = \frac{13}{15}\frac{V}{R}}$$

(b) (14)



Analizando esta malha fechada.

Partindo do ponto a.

$$\Delta V = 2V - 2R I_6 = 2V - \cancel{2}\cancel{R}\frac{1}{\cancel{2}}\frac{V}{\cancel{R}}$$

$$\Delta V = V$$

ou, a queda de potencial em $5R$ é V

(c) Considerando as correntes que passam nas fontes:

$$P = (2V) I_2 + V \cdot I_3$$

$$P = 2V \cdot \frac{13}{15}\frac{V}{R} + V \cdot \frac{3}{10}\frac{V}{R} =$$

$$P = \frac{V^2}{R}\left(\frac{26}{15} + \frac{3}{10}\right) = \frac{V^2}{R}\left(\frac{260 + 45}{150}\right)$$

$$\boxed{P = \frac{V^2}{R} \cdot \frac{305}{150}}$$

$$P = \frac{61}{30}\frac{V^2}{R}$$

→ Alternativamente, podemos calcular a Potência em cada resistor:

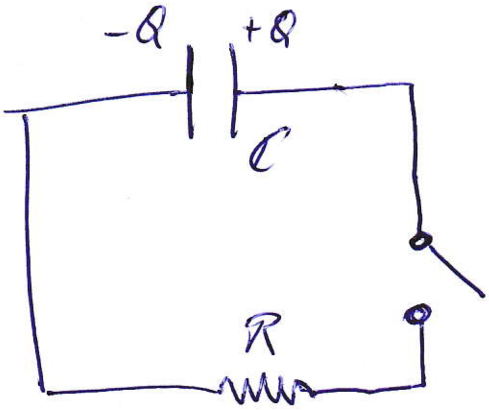
$$\mathcal{P} = \frac{(2V)^2}{3R} + \frac{(V)^2}{2R} + \frac{V^2}{5R}$$

$$\mathcal{P} = \frac{V^2}{R}\,\frac{1}{30}\left(4.10 + 15 + 6\right)$$

$$\boxed{\mathcal{P} = \frac{V^2}{R}\,\frac{61}{30}}$$

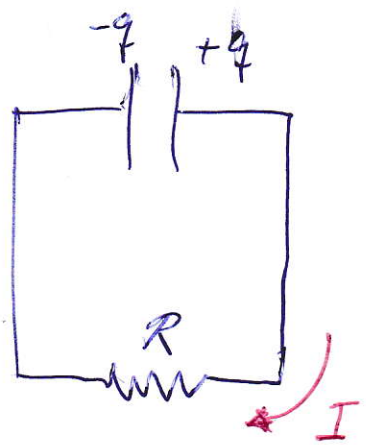
• Circuito RC

→ Descarga de um Capacitor



em $t=0$ $\Delta V_0 = \frac{Q}{C}$

Instantaneamente, ao fecharmos a chave:



$$I = -\frac{dq}{dt}$$

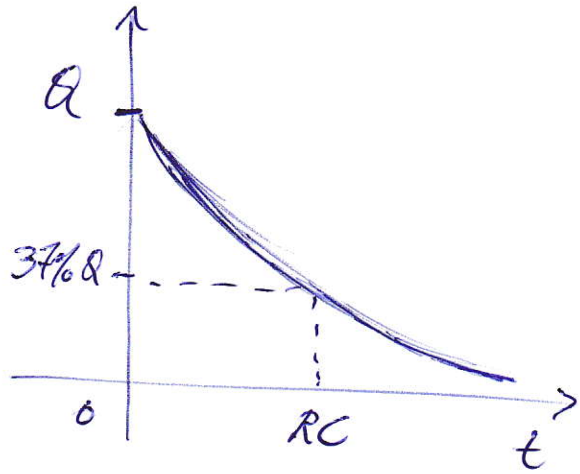
(dq/dt é negativo pois capacitor está descarregando, mas:

$$\Delta V = RI$$

$$\Delta V = q/C$$

$$\frac{q}{C} = -\frac{dq}{dt} \cdot R$$

$$\int_0^t dt = -RC \int_Q^q \frac{dq}{q}$$



$$t = -RC \ln\left(\frac{q}{Q}\right)$$

$$\boxed{q(t) = Q\, e^{-t/RC}}$$

Decaimento Exponencial

$$\Delta V(t) = \frac{q(t)}{C} = \Delta V_0\, e^{-t/RC}$$

Observar Vídeo do Youtube (Profrcavasso)

→ No vídeo $R = 100\, k\Omega$
$C = 1\, mF$
$\Delta V_0 = 10\, V$

Quando $t = RC = 100\,s$, observamos $\Delta V = 4{,}00\, V$
(começando a descarregar em 0:22,
100s corresponde a 2:02)

Em tese, $\Delta V(t = RC) = e^{-1} \Delta V_0$

No caso do experimento, $\Delta V(100s) = 3{,}7\, V$

Observamos um valor 7,5% diferente, consistente com as incertezas de R e C (5% cada uma)

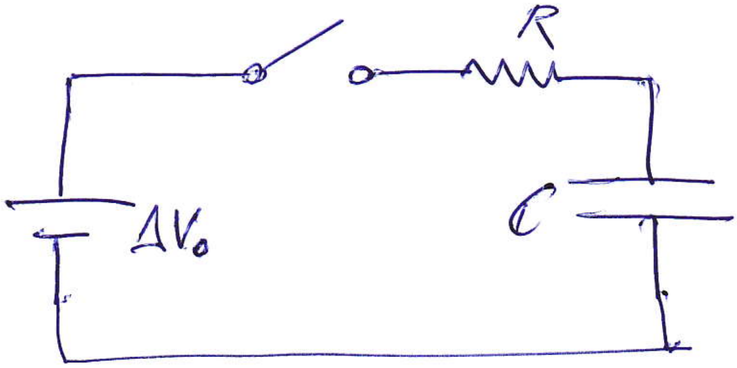
- A corrente também apresenta um decaimento exponencial

$$\boxed{I = -\frac{dq}{dt} = \frac{Q}{RC}\, e^{-t/RC}}$$

Observe que $\Delta V_0 = \frac{Q}{C}$

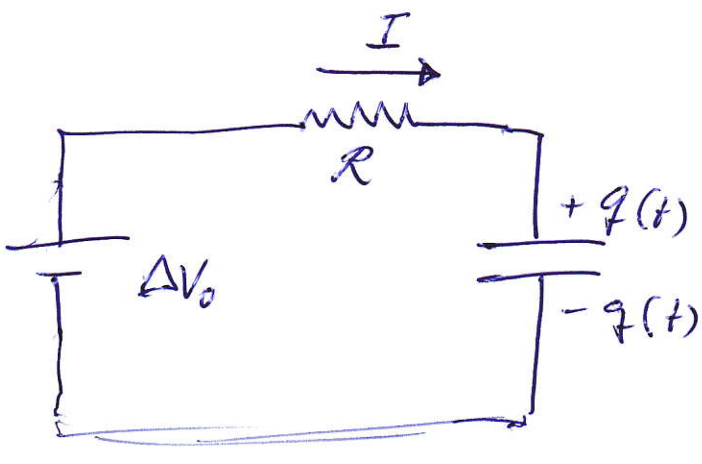
Assim $I_0 = \frac{\Delta V_0}{R}$

Carregando um Capacitor



- em $t=0$

$q(0) = 0$



Analizando a malha.

$$\boxed{\Delta V_0 - RI - \frac{q}{C} = 0}$$

Agora $I = \frac{dq}{dt}$ (o capacitor está carregando, $\frac{dq}{dt}$ é positivo)

$$\boxed{\Delta V_0 - R\frac{dq}{dt} - \frac{q}{C} = 0}$$

EDO a resolver

∘ Derivando a EDO (Lembrando que $\frac{dq}{dt} = I$)

$$-R\frac{dI}{dt} - \frac{I}{C} = 0 \rightsquigarrow dt = -RC\,\frac{dI}{I}$$

$$\boxed{I(t) = I_0\, e^{-t/RC}}$$

Quando $t=0,\ q=0$

Logo $I_0 = \frac{\Delta V_0}{R}$

⇝ Retornando à EDO:

$$\Delta V_0 - R\left(\frac{\Delta V_0}{R}\right)e^{-t/RC} - \frac{q(t)}{C} = 0$$

$$\boxed{q(t) = \underbrace{C\,\Delta V_0}_{\text{Valor da carga p/ } t \to \infty}\left(1 - e^{-t/RC}\right)}$$