UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC

IEDO — 2013.1

Prova 1 — Diurno — horário: 8h-10h — tipo I

1. Resolva os Problemas de Valor Inicial abaixo:

   (a) $y' = \frac{2\cos(2x)}{3+2y}$, $\qquad y(0) = -1$

   RESOLUÇÃO:

   A equação é separável, de modo que obtemos: $\int(3+2y)dy = 2\int \cos(2x)dx + c$. Resolvendo as integrais, chegamos a $y^2 + 3y - \operatorname{sen}(2t) = c$. A condição inicial nos dá $c = -2$ e também implica que $y(t) = \frac{-3+\sqrt{4\operatorname{sen}(2t)+1}}{2}$.

   (b) $y' + (2/t)y = (\cos t)/t^2$, $\qquad y(\pi) = 0$, $\qquad t > 0$.

   RESOLUÇÃO:

   A equação é linear, tendo fator integrante $\mu(t) = \exp[\int \frac{2}{t}dt] = \exp[2\ln|t|] = t^2$. Sua solução é $y(t) = \frac{\int \cos(t)dt + c}{t^2} = \frac{\operatorname{sen}(t)+c}{t^2}$. A condição inicial implica $c = 0$, de modo que a solução do PVI é $y(t) = \frac{\operatorname{sen}(t)}{t^2}$.

2. Considere o seguinte Problema de Valor Inicial: $\operatorname{sen}(x)y' - y = 0$, $\quad y(0) = 0$.

   (a) Mostre que $y(x) = 0$ e $y(x) = \frac{\sin x}{1+\cos x}$ são soluções do PVI.

   RESOLUÇÃO:

   Se $y(x) = 0\ \forall x$, então $y'(x) = 0\ \forall x$ e a substituição de y e y' no lado esquerdo da equação resulta zero para todo x. Além disso, $y(0) = 0$. Portanto, $y(x) = 0$ é solução do PVI.

   Se $y(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{1+\cos x}$, então a regra de derivação do quociente resulta, após simplificações, $y'(x) = \frac{1}{1+\cos(x)}$. Desse modo, o lado esquerdo da equação fica $\frac{\operatorname{sen}(x)}{1+\cos(x)} - \frac{\operatorname{sen}(x)}{1+\cos x} = 0$. Ademais, $y(0) = 0$ nesse caso. Portanto, $y(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{1+\cos(x)}$ também é solução do PVI.

   (b) Isso contradiz o Teorema de Existência e Unicidade? Explique.

   RESOLUÇÃO:

   Não. O teorema requer a continuidade das funções $p(x)$ e $g(x)$ na equação escrita na forma $y' + p(x)y = g(x)$. O ponto em que a condição inicial é prescrita corresponde a $x_0 = 0$. Nesse ponto, a função $p(x) = \frac{-1}{\operatorname{sen}(x)}$ não é definida e, portanto, não é contínua.

3. Um novo produto é introduzido no mercado através de uma campanha publicitária cujo alvo são os N_0 habitantes de uma cidade X. A taxa com que a população fica sabendo sobre o produto é proporcional ao número de pessoas que ainda não ouviram falar sobre o produto. Supondo que, ao fim de um ano, metade da população tenha ouvido falar sobre o produto, qual será a fração da população que terá ouvido falar sobre o produto ao fim de dois anos?

   RESOLUÇÃO:

Chamando de $y(t)$ o número de pessoas que já ouviram falar sobre o produto no instante t, a equação que descreve o processo é $y' = k(N_0 - y)$. Essa equação separável tem como solução $\int \frac{dy}{y-N_0} = -\int kdt + c$, que resulta $\ln|y - N_0| = -kt + c$. Segue que $N_0 - y = c_1 e^{-kt}$. A condição inicial $y(0) = 0$ implica $c_1 = N_0$, donde $y(t) = N_0(1 - e^{-kt})$. Ao fim de um ano, metade da população terá ouvido falar sobre o produto, de modo que $N_0/2 = N_0(1 - e^k)$, o que implica $k = \ln 2$, de modo que $y(t) = N_0(1 - e^{-t\ln 2})$. Com isso, $y(2) = 3N_0/4$.

4. Considere a equação autônoma $\frac{dy}{dt} = 6y + 2y^2$. Esboce os gráficos das soluções dessa equação diferencial para diferentes condições iniciais $y(0) = y_0$. Determine os pontos críticos da equação e os classifique.

   Resolução:

   O gráfico do campo $\frac{dy}{dt}$ em função de y é o de uma parábola com concavidade para cima e interseção com o eixo horizontal em $y = 0$ e $y = -3$. Se $y(0) = y_0 < -3$, então $\frac{dy}{dt} > 0$ e a solução $y(t)$ cresce, tendendo assintoticamente ao ponto fixo estável -3. Se $-3 < y(0) = y_0 < 0$, então $\frac{dy}{dt} < 0$ e a solução $y(t)$ decresce, tendendo assintoticamente ao ponto fixo estável -3. Se $y(0) = y_0 > 3$, então $\frac{dy}{dt} > 0$ e a solução $y(t)$ cresce, tendendo assintoticamente ao infinito. Finalmente, -3 é ponto fixo estável e 0 é ponto fixo instável. Note que as funções $y(t)$ têm ponto de inflexão em $y = -1.5$. O esboço das funções $y(t)$ fica por sua conta.