BC0209–Fenômenos Eletromagnéticos

Segundo quadrimestre de 2016

Prof. José Kenichi Mizukoshi

Aula 19 (versão 22/07/2015)

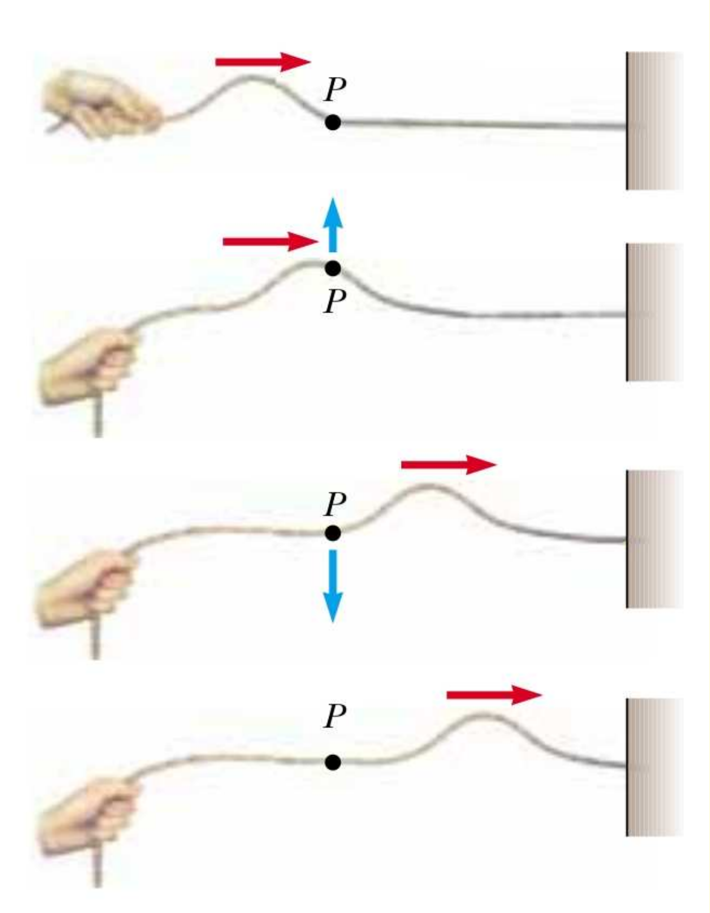
Ondas. Equação de onda. Princípio de superposição de ondas.

Equações de Maxwell e as ondas eletromagnéticas.

Ondas; Equação de Onda; Princípio de Superposição de Ondas; Equações de Maxwell e as Ondas Eletromagnéticas

Ondas Mecânicas – Conceito

- **Uma onda mecânica** é um sinal (perturbação) que se propaga através de um meio, como uma corda, o ar, a água, etc, à velocidade finita, sem o transporte de matéria. Para o caso de **ondas progressivas**, há a propagação de informação e de energia.
- Se a perturbação for um deslocamento na direção perpendicular à propagação da onda, tem-se uma **onda transversal** (*e.g.* um **pulso** em uma corda). Se o deslocamento ocorrer na direção paralela, tem-se uma **onda longitudinal** (*e.g.* ondas sonoras). Existem também ondas que não são nem transversais e nem longitudinais, como as ondas na superfície da água.



Função de onda progressiva

- Considere um exemplo específico de uma onda progressiva. No caso, a propagação de um pulso através de uma corda, com velocidade v.

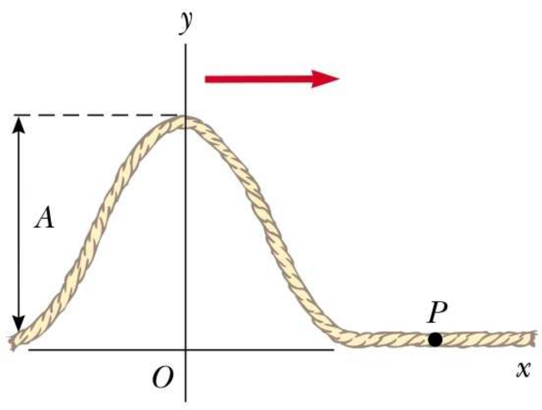
  O **perfil** (forma da corda) numa dada posição x e instante t é dada por uma função $f(x,t) = y(x,t)$. Se o perfil não muda, tem-se que

$$y(x,t) = f(x - vt)$$

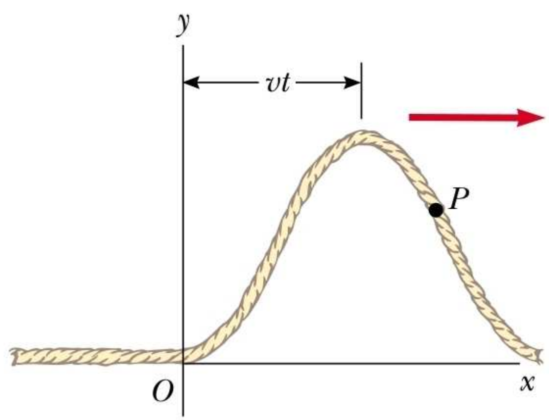
  para um pulso se propagando para à direita. Se estiver propagando para à esquerda, teríamos

$$y(x,t) = g(x + vt)$$

- $f(x - vt)$ e $g(x + vt)$ são conhecidas como **funções de onda**.

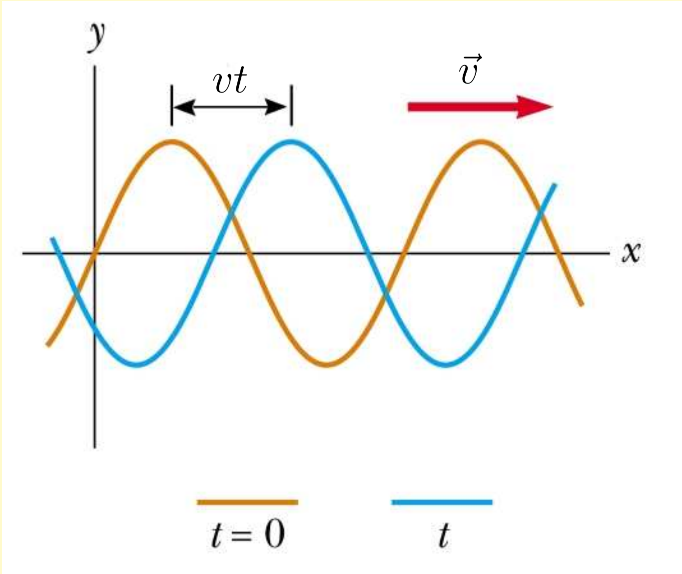


instante $t = 0$


instante t

Ondas harmônicas

- Para as **ondas harmônicas**, têm-se que
  - um dado elemento do meio (corda, por exemplo) executa um movimento harmônico simples (MHS);
  - o **perfil da onda** [gráfico da função $f(x,t)$ para um dado t fixo] é uma função senoidal.

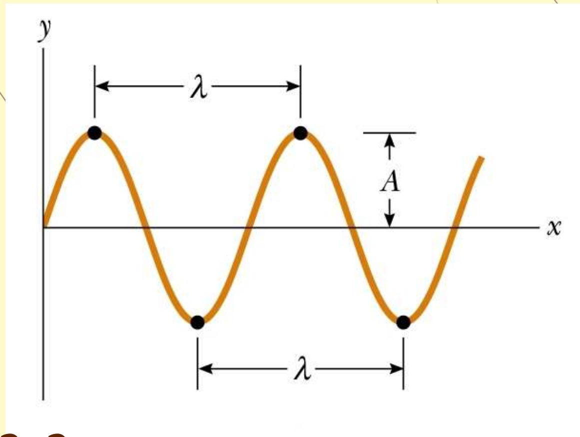


- Se a onda harmônica numa corda estiver se propagando para à direita, a sua função de onda será dada por

$$y(x,t) = f(x - vt) = A\cos[k(x - vt) + \delta] \qquad (\circledast)$$

A é a **amplitude da onda**, δ é a **constante de fase** e k uma constante, cujo significado será discutido mais adiante.

- O **comprimento de onda** λ é o período espacial, *i.e.*, o movimento se repete com o deslocamento $x \to x + \lambda$. Ou seja,



$$y(x,t) = y(x+\lambda, t)$$

Para $y(x,t)$ dada pela Eq. (⊛), a equação acima leva a

$$A\cos[\underbrace{k(x-vt)+\delta}_{\equiv \phi}] = A\cos[k((x+\lambda)-vt)+\delta] = A\cos[\underbrace{k(x-vt)+\delta}_{=\phi} + k\lambda]$$

Utilizando a relação $\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \text{sen}\, a\, \text{sen}\, b$, obtemos

$$\cos\phi = \cos\phi\cos(k\lambda) - \text{sen}\,\phi\,\text{sen}\,(k\lambda)$$

o que implica que $\cos(k\lambda) = 1$ (o que automaticamente satisfaz $\text{sen}\,(k\lambda) = 0$) e portanto

$$k\lambda = 2\pi \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{2\pi}{k}$$

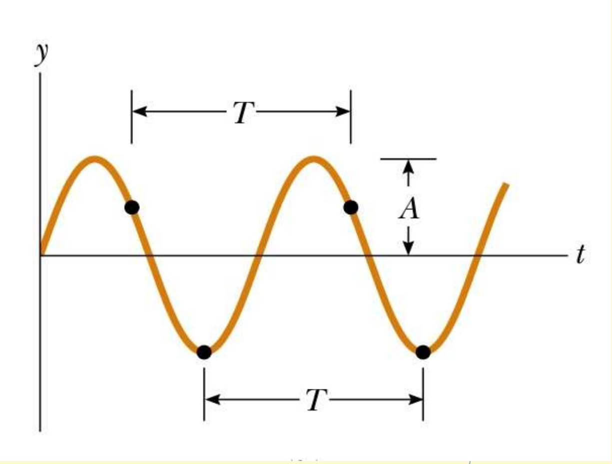
- À partir de λ, definimos o **número de onda angular**, k:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

No sistema internacional (SI) de unidades, $[\lambda] = \text{m}$ e $[k] = \text{rad/m}$.

- O **período temporal** T é definido como sendo o menor intervalo de tempo $\Delta t \neq 0$, tal que o movimento se repete. Ou seja,

$$y(x,t) = y(x,t+T)$$



Analogamente ao caso do comprimento de onda, a relação acima é satisfeita se

$$T = \frac{2\pi}{kv}$$

Ondas harmônicas

Como o período se relaciona com a **frequência angular** ω, a saber $T = 2\pi/\omega$, tem-se que

$$kv \equiv \omega$$

- A **frequência** é definida como

$$f = \frac{1}{T}$$

Segue que $\omega = 2\pi f$.

- Como $\omega = kv$, tem-se que

$$\frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{\lambda}v \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{T} = \frac{v}{T} \quad \Rightarrow \quad v = \frac{\lambda}{T}$$

Ou seja, a onda se desloca de $\Delta x = \lambda$ em um intervalo de tempo $\Delta t = T$.

- No SI, $[T] =$ s e $[f] =$ s$^{-1} \equiv$ hertz (Hz).

Equação da onda: caso unidimensional

- Conforme visto, a função de onda de uma onda progressiva propagando-se em uma dimensional com velocidade v é dada por

$$y(x,t) = f(x'); \quad x' = x - vt$$

- Vamos primeiro derivar $y(x,t)$ em relação a t duas vezes. Temos que

$$\frac{\partial y(x,t)}{\partial t} = \frac{df(x')}{dx'}\frac{\partial x'}{\partial t}$$

Como $\dfrac{\partial x'}{\partial t} = -v$, obtém-se

$$\frac{\partial y(x,t)}{\partial t} = -v\frac{df(x')}{dx'}$$

Derivando a expressão acima em t, lembrando que v é constante, temos

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = -v\frac{d^2 f(x')}{dx'^2}\underbrace{\frac{\partial x'}{\partial t}}_{=-v} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = v^2\frac{d^2 f(x')}{dx'^2} \qquad (*)$$

Equação da onda: caso unidimensional

- Por outro lado, podemos derivar $y(x,t)$ em relação à x duas vezes. Como $\dfrac{\partial x'}{\partial x} = 1$, segue que

$$\frac{\partial y(x,t)}{\partial x} = \frac{df(x')}{dx'}\frac{\partial x'}{\partial x} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial y(x,t)}{\partial x} = \frac{df(x')}{dx'}$$

Derivando a expressão acima em relação à x,

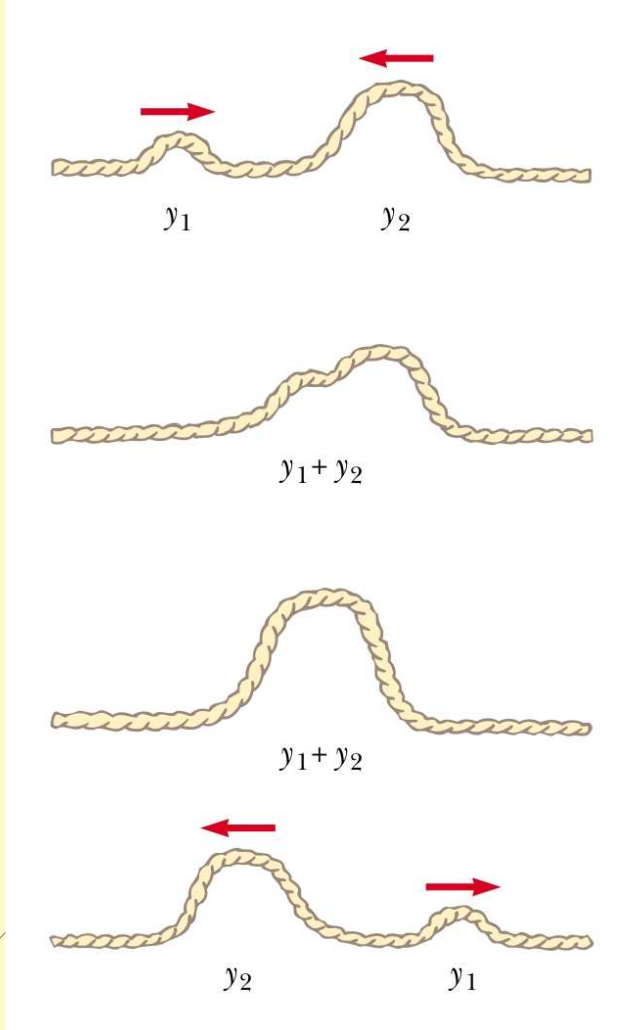
$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = \frac{d^2 f(x')}{dx'^2}\frac{\partial x'}{\partial x} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = \frac{d^2 f(x')}{dx'^2} \qquad (**)$$

- Comparando as Eqs. (*) e (**), obtemos a chamada **equação de onda**:

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}$$

O princípio da superposição

- Verifica-se que muitas ondas na natureza obedecem o **princípio de superposição**, *i.e.*, uma combinação linear qualquer de ondas é também uma onda.
  - É importante ressaltar que a superposição de ondas não altera as características de cada uma das ondas.



- Como exemplo, vamos supor que $y_1(x,t) = f(x-vt)$ e $y_2(x,t) = g(x+vt)$ são duas funções de onda, descrevendo pulsos que viajam em sentidos contrários. O pulso resultante é dado por

$$y(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t) = f(x-vt) + g(x+vt)$$

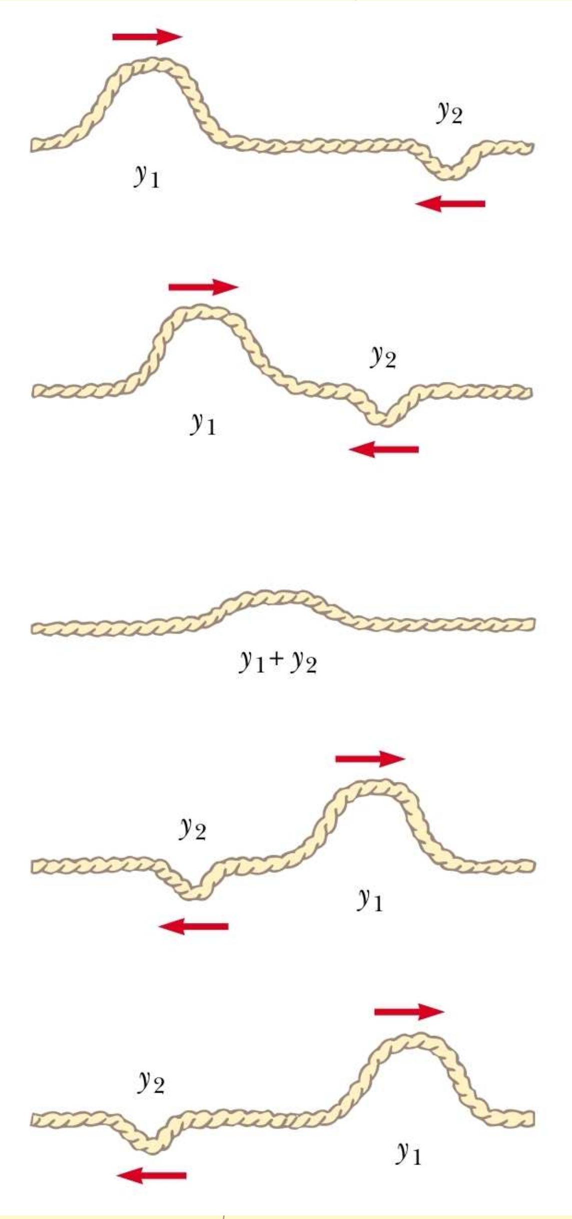
Neste exemplo, há um aumento na amplitude quando os pulsos se cruzam, ou seja, ocorre uma **interferência construtiva**.

O princípio da superposição

- Se tivermos um dos pulsos invertido em relação ao outro, o pulso resultante, dado por

$$y(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t) = f'(x - vt) + g'(x + vt)$$

apresentará um cancelamento parcial entre as ondas. Neste caso, ocorre uma **interferência destrutiva**.



Ondas estacionárias

- Considere duas ondas harmônicas que se propagam em sentidos contrários em uma corda:

$$y_1(x,t) = A\,\text{sen}\,(kx - \omega t)$$
$$y_2(x,t) = A\,\text{sen}\,(kx + \omega t)$$

A onda resultante é dada por

$$y(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t) = A[\text{sen}\,(kx - \omega t) + \text{sen}\,(kx + \omega t)]$$

Lembrando que $\text{sen}\,(a \pm b) = \text{sen}\,a \cos b \pm \cos a\,\text{sen}\,b$, temos que

$$y(x,t) = A[\text{sen}\,kx \cos\omega t - \cos\cancel{kx}\,\text{sen}\,\omega t + \text{sen}\,kx \cos\omega t + \cos\cancel{kx}\,\text{sen}\,\omega t]$$

$$\therefore \quad y(x,t) = 2A\,\text{sen}\,kx \cos\omega t \qquad \text{(onda estacionária)}$$

- Os **antinodos** ocorrem na posição de máxima amplitude, ou seja,

$$|\text{sen}\, kx_A| = 1 \quad \Rightarrow \quad kx_A = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi, \; n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Como $k\lambda = 2\pi$,

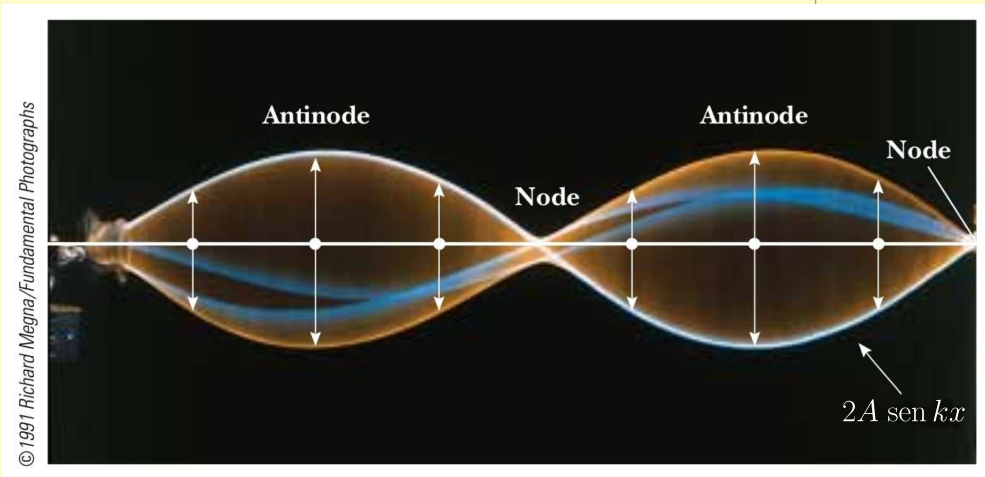
$$x_A = \left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{2}$$

- Os **nodos** ocorrem nos pontos de amplitude nula, em qualquer instante de tempo t:

$$\text{sen}\, kx_N = 0 \quad \Rightarrow \quad kx_N = n\pi$$

onde $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Logo,

$$x_N = \frac{n\lambda}{2}$$



Ondas estacionárias em cordas: modos normais de vibração

- Considere uma corda esticada de comprimento L, com uma extremidade em $x = 0$ e outra em $x = L$.
  - As ondas estacionárias estabelecidas na corda possuem vários padrões de vibração, conhecidos como **modos normais**. Cada um desses modos possui uma frequência característica.
  - Se as extremidades da corda estão fixas, as ondas estacionárias obedecem às seguintes **condições de contorno**:

$$y(0, t) = y(L, t) = 0$$

  - Fazendo $x_N = L$ na última equação da página anterior, obtemos a condição para os comprimentos de onda presentes na corda:

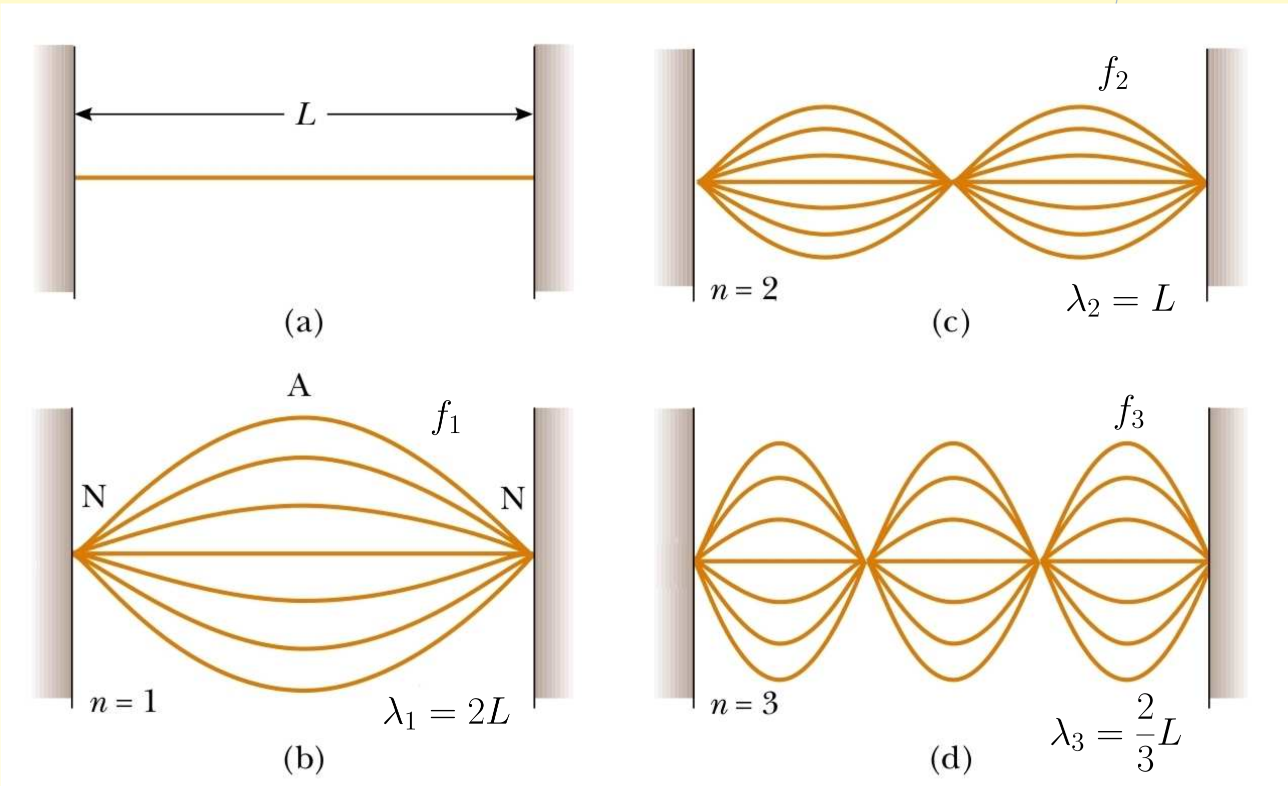
$$\lambda_n = \frac{2L}{n} \ \ (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

Ondas estacionárias em cordas: modos normais de vibração

Como $v = \dfrac{\lambda}{T} = \lambda f$, temos que **as frequências naturais de vibração** são

$$f_n = \frac{n}{2L}v \ \ (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

- Os três primeiros modos normais de vibração de uma corda de comprimento L:



Ondas estacionárias em cordas: modos normais de vibração

- A função de onda do n-ésimo mode normal de vibração é dada por (lembrando que $\omega = 2\pi f$):

$$y_n(x,y) = b_n \, \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\cos\left(\frac{n\pi vt}{L} + \delta_n\right) \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

- Pelo princípio de superposição, uma onda qualquer pode ser escrita em termos da combinação linear de todos os modos:

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n(x,y)$$

- Os princípios básicos dos **fenômenos eletromagnéticos** podem ser descritos por um conjunto de quatro equações, as chamadas **Equações de Maxwell**, que foram vistas em detalhes ao longo do curso. Na forma **integral**, válidas no vácuo, são elas:

$$(i) \quad \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\varepsilon_0} \qquad \text{(lei de Gauss)}$$

$$(ii) \quad \oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0 \qquad \text{(lei de Gauss para o magnetismo)}$$

$$(iii) \quad \oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d}{dt}\int \vec{B} \cdot d\vec{A} \qquad \text{(lei de Faraday)}$$

$$(iv) \quad \oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I + \mu_0\varepsilon_0\frac{d}{dt}\int \vec{E} \cdot d\vec{A} \qquad \text{(lei de Ampère-Maxwell)}$$

Equações de Maxwell – forma diferencial

- Utilizando-se os **teoremas de Gauss e de Stokes**, essas equações de Maxwell podem ser escritas na forma **diferencial**, também chamada de **local**:

$$(i) \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$(ii) \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$(iii) \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$(iv) \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

onde ρ é a densidade de carga, $\rho = \dfrac{dQ}{d\mathcal{V}}$, e $\vec{J}$ a densidade de corrente, que está relacionada com a corrente I por (veja Aula 9, p. 4)

$$I = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{A}$$

Equações de Maxwell no vácuo: ondas eletromagnéticas

- Vamos assumir que estamos considerando o vácuo, sem cargas e correntes elétricas, o que implica que $\rho = 0$ e $\vec{J} = 0$;
- Por simplicidade, vamos assumir que os campos elétrico e magnético só dependem da coordenada z:

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}(z,t) = E_x(z,t)\,\hat{\imath} + E_y(z,t)\,\hat{\jmath} + E_z(z,t)\,\hat{k}$$

$$\vec{B}(\vec{r},t) = \vec{B}(z,t) = B_x(z,t)\,\hat{\imath} + B_y(z,t)\,\hat{\jmath} + B_z(z,t)\,\hat{k}$$

- Com as suposições acima e lembrando que

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\,\hat{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\,\hat{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\,\hat{k}$$

as equações de Maxwell nos fornecem

$$(i) \qquad \underbrace{\frac{\partial E_x}{\partial x}}_{=0} + \underbrace{\frac{\partial E_y}{\partial y}}_{=0} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$$

$$(ii)\quad \underbrace{\frac{\partial B_x}{\partial x}}_{=0} + \underbrace{\frac{\partial B_y}{\partial y}}_{=0} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0$$

$$(iii)\quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{\partial E_y}{\partial z}\,\hat{\imath} + \frac{\partial E_x}{\partial z}\,\hat{\jmath} + 0\,\hat{k} = -\frac{\partial}{\partial t}[B_x\,\hat{\imath} + B_y\,\hat{\jmath} + B_z\,\hat{k}]$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial B_z}{\partial t} = 0$$

$$(iv)\quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad -\frac{\partial B_y}{\partial z}\,\hat{\imath} + \frac{\partial B_x}{\partial z}\,\hat{\jmath} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}[E_x\,\hat{\imath} + E_y\,\hat{\jmath} + E_z\,\hat{k}]$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial E_z}{\partial t} = 0$$

Equações de Maxwell no vácuo: ondas eletromagnéticas

- As equações anteriores mostram que E_z e B_z são constantes, *i.e*, não dependem nem de z e nem de t. Sem perda de generalidade, podemos tomar

$$E_z = B_z = 0$$

- Da componente y da equação (iii) e componente x da equação (iv), obtemos

$$\begin{cases} \dfrac{\partial E_x}{\partial z} = -\dfrac{\partial B_y}{\partial t} \quad (*) \\[2ex] -\dfrac{\partial B_y}{\partial z} = \mu_0 \varepsilon_0 \dfrac{\partial E_x}{\partial t} \quad (**) \end{cases}$$

Derivando a equação $(*)$ em relação ao tempo,

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial E_x}{\partial z}\right) = -\frac{\partial^2 B_y}{\partial t^2}$$

Como

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial E_x}{\partial z}\right) = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial E_x}{\partial t}\right)$$

temos que [usando a equação ($\circledast\circledast$)]:

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[-\frac{1}{\mu_0\varepsilon_0}\frac{\partial B_y}{\partial z}\right] = -\frac{\partial^2 B_y}{\partial t^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 B_y}{\partial z^2} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2 B_y}{\partial t^2}$$

Analogamente, das equações ($\circledast$) e ($\circledast\circledast$), obtemos

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2}$$

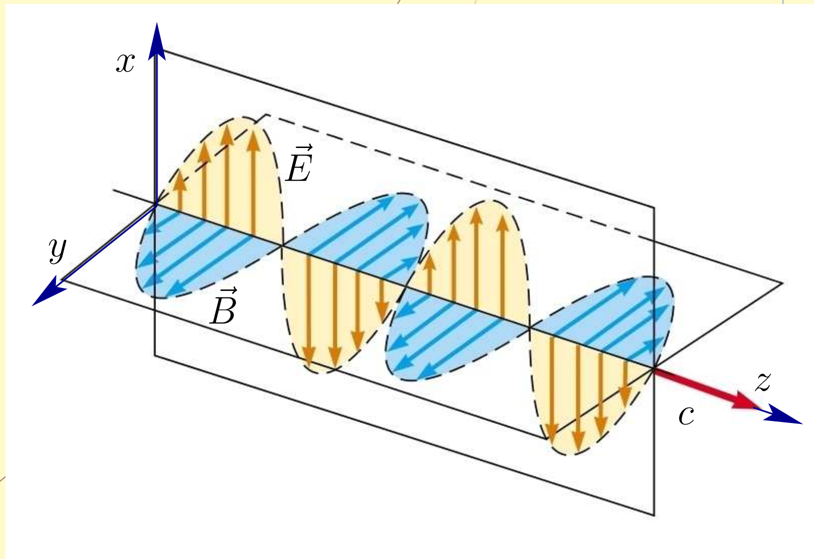
Equações de Maxwell no vácuo: ondas eletromagnéticas

- Os campos E_x e B_y satisfazem simultaneamente a equação da onda, onde a velocidade de propagação é

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} \equiv c$$

- De acordo com as lei de Faraday, um campo magnético variável com o tempo cria um campo elétrico. E pela lei de Àmpere, o campo elétrico variável com o tempo cria um campo magnético.

- Os campos variáveis criam um ao outro e se propagam como ondas eletromagnéticas, visto que eles obededem às equações de onda. Como os mesmos oscilam em direções perpendiculares à direção da propagação da onda (direção z), ondas eletromagnéticas são ondas transversais.



Equações de Maxwell no vácuo: ondas eletromagnéticas

- Tomando os valores experimentais $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ T·m/A e $\varepsilon_0 = 8{,}85419 \times 10^{-12}$ C^2/N·m^2, obtemos $c = 2{,}99792 \times 10^8$ m/s.
- Final do século XIX: a luz foi considerada como uma onda eletromagnética propagando-se com velocidade c num meio hipotético que permeava todo o universo, denominado "éter".
- Um referencial em movimento relativo ao éter observaria a velocidade da luz como sendo diferente de c. O "éter" é um referencial inercial privilegiado.
- Experimento de Michelson-Morley: a Terra estando em movimento em relação ao Sol, haveria alguma direção em que o "vento do éter" mudaria a velocidade da luz. O resultado negativo, sem qualquer sentido na época, mostrou que a Terra estava sempre em repouso em relação ao "éter".
- Postulado da **teoria especial da relatividade**, desenvolvida por Einstein: a onda eletromagnética se propaga com velocidade c no vácuo, em **qualquer referencial inercial**. Compatibilidade com as equações de Maxwell.

Problemas Propostos

P1 As soluções mais simples das equações de onda para E e B são as chamadas **ondas harmônicas planas**, dadas por

$$E(z,t) = E_{\text{max}} \cos(kz - \omega t)$$

$$B(z,t) = B_{\text{max}} \,\text{sen}\,(kz - \omega t)$$

Mostre que

$$\frac{E_{\text{max}}}{B_{\text{max}}} = c$$

o que leva a $E/B = c$. Ou seja, em qualquer instante a razão entre as magnitudes dos campos elétrico e magnético é igual à velocidade da luz.

Referências

- R. A. Serway, e J. W. Jewett Jr., *Princípios de Física, Vol. 2*, Cengage Learning;
- R. A. Serway, e J. W. Jewett Jr., *Princípios de Física, Vol. 3*, Cengage Learning;
- D. Halliday, R. Resnick e K. S. Krane, *Física, Vol. 3*, LTC.