Matemática

AULA 1

Análise combinatória II e probabilidades

(FGV) O sistema de segurança de uma casa utiliza um teclado numérico, conforme ilustrado na figura. Um ladrão observa de longe e percebe que: (pado ropetr - pous mo este

• a senha utilizada possui 4 dígitos;

- o primeiro e o último dígitos encontram-se numa mesma linha;
- · o segundo e o terceiro dígitos encontram-se na linha imediatamente superior.

Calcule o número de senhas que deverão ser experimentadas pelo ladrão para que com certeza ele consiga entrar na casa.

02. (Insper) Considere a palavra IBMEC.

- a) Determine quantas palavras podem ser formadas utilizando, sem repetição, uma, duas, três, quatro ou as cinco letras dessa palavra. (Por exemplo, I, BC, MEC, CEM, IMEC e a própria palavra IBMEC devem ser incluídas nessa contagem).
- (b) Colocando todas as palavras consideradas no item anterior em ordem alfabética, determine a posição nessa lista da palavra IBMEC.
- (03) (Unicamp) Em uma festa para calouros estão presentes 50 calouros e 350 calouras. Para dançar, cada calouro escolhe uma caloura ao acaso formando um par. Pergunta-se:
- a) Quantos pares podem ser formados?
- b) Qual a probabilidade de que uma determinada caloura não esteja dançando no momento em que todos os 250 calouros estão dançando?
- 04) (PUC-SP) Serão sorteados 4 prêmios iguais entre os 20 melhores alunos de um colégio, dentre os quais estão Tales e Euler. Se cada aluno pode receber apenas um prêmio, a probabilidade de que Tales ou Euler façam parte do grupo sorteado é:

a) $\frac{3}{95}$ **b)** $\frac{1}{19}$ **c)** $\frac{3}{19}$ **d)** $\frac{7}{19}$ **e)** $\frac{38}{95}$

05. (FGV) Uma escola comprou computadores de 3 fabricantes: A, B e C. Trinta por cento foram comprados de A, trinta por cento de B, e o restante de C. A probabilidade de um computador fabricado por A apresentar algum tipo de problema, nos próximos 30 meses, é 0,1. As mesmas probabilidades dos fabricantes B e C são, respectivamente, 0,15 e 0,2.

- a) Qual a probabilidade de que um computador, escolhido ao acaso, seja fabricado por A e apresente algum problema nos próximos 30 meses?
- b) Se um computador apresentar algum problema nos próximos 30 meses, qual a probabilidade de que tenha sido fabricado por A?
 - 06. (Mack) Sempre que joga, um time tem probabilidade $\frac{2}{3}$ de vencer uma partida. Em quatro jogos, a probabilidade desse time vencer, exatamente dois deles, é:

b) $\frac{16}{81}$ $\sqrt{\frac{8}{27}}$ d) $\frac{4}{81}$ e) $\frac{16}{27}$

07. (FGV) Um sistema de controle de qualidade consiste em três inspetores A, B e C que trabalham em série e de forma independente, isto é, o produto é analisado pelos três inspetores trabalhando de forma independente.

O produto é considerado defeituoso quando um defeito é detectado, ao menos, por um inspetor. Quando o produto é defeituoso, a probabilidade de o defeito ser detectado por cada inspetor é 0,8. A probabilidade de uma unidade defeituosa ser detectada é:

a) 0,990

pessiblidade

\$10.992

c) 0.994 d) 0,996 e) 0,998

08. (ITA) Dez cartões estão numerados de 1 a 10. Depois de embaralhados, são formados dois conjuntos de 5 cartões cada. Determine a probabilidade de que os números 9 e 10 apareçam num mesmo conjunto.

09, (Insper) Para um voo realizado nesse pars em uma aerona-Ve de 20 lugares, foram emitidos 22 bilhetes. A empresa responsável pelo voo estima que a probabilidade de qualquer um dos 22 passageiros não comparecer no momento do embarque seja de 10%. Considerando que os comparecimentos de dois passageiros quaisquer sejam eventos independentes, a probabilidade de que compareçam exatamente 20 passageiros no embarque desse voo, de acordo com a estimativa da empresa, é igual a:

a) $(0,1)^2 \cdot (0,9)^{22}$

231 · (0.1)2 · (0.9)20

c) $190 \cdot (0,1)^2 \cdot (0,9)^{20}$

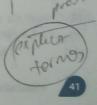
d) $190 \cdot (0.1)^2 \cdot (0.9)^{18}$

e) $153 \cdot (0.1)^2 \cdot (0.9)^{18}$

(ITA) Seja P uma probabilidade sobre um espaço amostral finito Ω . Se A e B são eventos de Ω tais que $P(A) = \frac{1}{2}$

 $P(B) = \frac{1}{3} e P(A \cap B) = \frac{1}{4}$, as probabilidades dos eventos

 $A \setminus B$, $A \cup B \in A^C \cup B^C$ são, respectivamente:



Trigonometria II

01. (FGV) Uma empresa exporta certo produto. Estima-se que a quantidade exportada Q, expressa em toneladas, para cada mês do ano 2011, seja dada pela função $Q = 40 + 4 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{6}\right)$, em

que x = 1 representa janeiro de 2011, x = 2 representa fevereiro de 2011 e assim por diante.

Em que meses a exportação será de 38 toneladas?

Dados: $\sqrt{3} = 1.7 \text{ e } \sqrt{2} = 1.4.$

- a) abril e agosto.
- b) maio e setembro.
- c) junho e outubro.
- julho e novembro.
- e) agosto e dezembro.
- 02. (Fuvest) Sejam α e β números reais com $\frac{-\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ $0 < \beta < \pi$. Se o sistema de equações, dado em notação matricial $|3 6| tg\alpha$

6 8 cos B

for satisfeito, então $\alpha + \beta$ e igual a:

- a) $-\frac{\pi}{3}$ c) 0 d) $\frac{\pi}{6}$

- (ITA) Seja $x \in [0; 2\pi]$ tal que $sen(x) \cdot cos(x) = \frac{2}{5\pi}$. Então, o produto e a soma de todos os possíveis valores de tg(x) são, respecti-
- a) 1 e 0. (b) 1 e $\frac{5}{2}$. c) -1 e 0. d) 1 e 5.

- **04.** Ø período e a imagem da função $f(x) = 1 + 2 \cos \left(\frac{x}{3} + \pi\right)$ são deslocamento:
- $6\pi e [-1; 3].$
 - **b)** 2π e [-2; 2].
- c) $3\pi \in [-1; 3]$.
- d) 6π e [-2; 2].
- e) $3\pi \in [-2; 2]$.
- (FGV) Se sen $x + \text{sen } y = \frac{\sqrt{15}}{3} \text{ e } \cos x + \cos y = 1$, então, $\sec(x y)$ é igual a: clovar dois
- b) $\frac{1}{2}$

- **06.** (Vunesp) Sabendo-se que $cos(2x) = cos^2x sen^2x$, para quais valores de x a função $f(x) = \cos x + \frac{1}{2} \cdot \cos(2x)$ assume seu valor mínimo no intervalo $0 \le x \le 2\pi$? A funcas province
- 07. (FGV) O valor de y no sistema de equações

 $sen 10^{\circ} x - cos 10^{\circ} y =$ sen 50° $sen 50^{\circ} x + cos 50^{\circ} y = \frac{1}{1}$ sen 10°

- b) √3
- c) 3√3
- d) $\frac{3}{\sqrt{3}}$
- (08.) O total de soluções reais no intervalo $[0; 2\pi]$ da equação $\log_{10} x = 1 + \text{sen } 2x \text{ \'e}$:
- a) 0

Números complexos

01. (Mack) Em C, o conjunto solução da equação

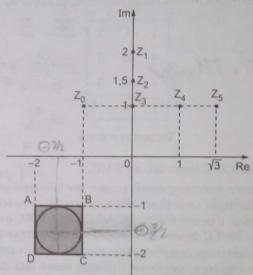
$$\begin{vmatrix} x+1 & x & x-1 \\ 2x & 2x & 2x \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = x^2 + 2x + 5 \text{ \'e}$$
:

- a) $\{2+2i, 2-2i\}$
- **b)** $\{-1 4i, -1 + 4i\}$ **e)** $\{2 2i, 1 + 2i\}$

- (-1 + 2i, -1 2i)
- 02. (Unicamp) Chamamos de unidade imaginária e denotamos por *i* o número complexo tal que $l^2 = -1$.

Então $p^0 + i^1 + i^2 + i^3 + ... + i^2$ vale:

- a) 0 b) 1 c) i
- 03. (FGV) No plano Argand-Gauss estão indicados um quadrado ABCD e os afixos dos números complexos Z_0 , Z_1 , Z_2 , Z_3 , Z_4 e Z_5 .



Se o afixo do produto de Z_0 por um dos outros cinco números complexos indicados é o centro da circunferência inscrita no quadrado ABCD, então esse número complexo é:

- 04. (Unicamp) Dado um número complexo z = x + iy, o seu conjugado é o número complexo z = x - iy.
- a) Resolva as equações: $z \cdot z = 4 \text{ e } (z)^2 = z^2$
- b) Ache os pontos de intersecção dos lugares geométricos que representam as soluções dessas equações.
- (05.) (Unicamp) Um triângulo equilátero, inscrito em uma circunferência de centro na origem, tem como um de seus vértices o ponto do plano associado ao número complexo √3 + i.
 - a) Que números complexos estão associados aos outros dois vértices do mesmo triângulo? Faça a figura desse triângulo.
- b) Qual a medida do lado desse triângulo?
- **06**. (Uece) Os números complexos $z_1 = p + qi$ e $z_2 = m + ni$ são as raízes não reais da equação $x^3 - 1 = 0$. O resultado numérico da expressão |p| + |q| + |m| + |n| é:
- a) $2 + \sqrt{3}$
- b) $3 + \sqrt{2}$
- c) $1+\sqrt{2}$ d) $1+\sqrt{3}$

07. (PUC-SP) Seja $S_n = \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(3-n) \cdot i}{2}$, em que $n \in N^*$ e

i é a unidade imaginária, a expressão da soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética. Se a_n é o enésimo termo dessa progressão aritmética, então a forma trigonométrica da diferença a15 - a16 é:

a)
$$2\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i \cdot \sin\frac{3\pi}{4}\right)$$

b)
$$2\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i \cdot \sin\frac{5\pi}{4}\right)$$

c)
$$2\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i \cdot \sin\frac{7\pi}{4}\right)$$

d)
$$\sqrt{2} \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \cdot \operatorname{sen} \frac{5\pi}{4} \right)$$

e)
$$\sqrt{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \cdot \operatorname{sen} \frac{3\pi}{4} \right)$$

08. (ITA) Considere a equação em *C*, $(z - 5 + 3i)^4 = 1$. Se z_0 é a solução que apresenta o menor argumento principal dentre as quatro soluções, então o valor de $|z_0|$ é:

d)
$$4\sqrt{3}$$

09. (FGV) O número complexo z = a + bi, com $a \in b$ reais, satisfaz |z+|z|=2+8i, com $|a+bi|=\sqrt{a^2+b^2}$. Nessas condições, $|z|^2$ é igual a:

a) 68

b) 100

c) 169

d) 208

10) (Insper) Considere um número complexo z, de módulo 10, tal $z = (K + 1)^2$

em que K é um número real. A parte real desse número complexo é igual a:

b) 8 **c)** $5\sqrt{2}$

AULA 4

Polinômios e teoria das equações

01. (Unicamp) Considere o polinômio $p(x) = x^2 - 11x + k + 2$, em que x é variável real e k um parâmetro fixo, também real.

a) Para qual valor do parâmetro k o resto do quociente de p(x)

b) Supondo, agora, k = 4, e sabendo que $a \in b$ são raízes de p(x), calcule o valor de sen $\left(\frac{\pi}{a} + \frac{\pi}{b}\right) = -\frac{1}{2}$

02 (FGV) Sendo a, b, c, d, e, f, g constantes reais, o gráfico da função polinomial $P(x) = x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + \frac{e}{f-g}$, com $f \neq g$, tem 5 intersectos reais distintos com o eixo x, sendo um deles (0; 0). Nessas condições, necessariamente:

b) $b \neq 0$

 $(\mathcal{A})d\neq 0$

d) e # 0

e) $f \neq 0$

03 (IFSP) No polinômio $p(x) = x^4 + (m-3)x^3 + mx^2 + r$, para que x=0 seja raiz dupla e única raiz real de p(x), o conjunto de todos os pares de valores reais (m; r) deve ser:

a) $\{(m; n) \mid 1 < m < 8 \text{ e } r = 0\}$

 $M \{(m; n) | 1 < m < 9 e r = 0\}$

c) {(1; 0), (4; 0), (5; 0), (6; 0)}

d) $\{(m; r) \mid m < 1 \text{ ou } m > 9 \text{ e } r = 0\}$

e) {(2; 0), (4; 0), (5; 0), (6; 0), (7; 0)}

04. (Insper) Considere dois polinômios do 1º grau P(x) e Q(x), ambos de coeficientes reais, tais que

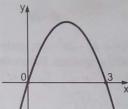
$$P(3) = Q(3) = 0, P(6) > 0 e Q(6) < 0.$$

Sendo f a função definida, para todo $x \in R$, por

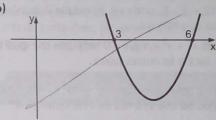
$$f(x) = P(x) \cdot Q(x),$$

a única figura, dentre as apresentadas a seguir, que pode representar o gráfico de f é:

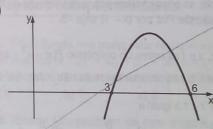
a)



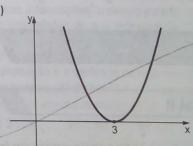
b)

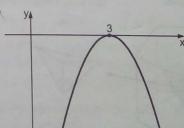


c)



d)



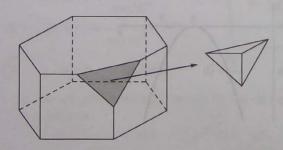


- 05. (ITA) Com respeito à equação polinomial $2x^4 3x^3 3x^2 + 6x 2$ = 0 e correto afirmar que:
- a) todas as raízes estão em Q.
- b) uma única raiz está em Z e as demais estão em Q\Z.
- c) duas raízes estão em \mathcal{Q} e as demais têm parte imaginária não
- d) não é divisível por 2x 1.
- e) uma única raiz está em Q\Z e pelo menos uma das demais está em R\Q.
- 06. (AFA) Seja P(x) um polinômio de grau 4 com coeficientes reais. Na divisão de P(x) por x-2, obtém-se um quociente Q(x)e resto igual a 26. Na divisão de P(x) por $x^2 + x - 1$, obtém-se um quociente H(x) e resto 8x - 5. Se Q(0) = 13 e Q(1) = 26, então H(2) + H(3) é igual a:
- a) 0
- **b)** 16
- c) -47
- **07.** (Fuvest) As raízes do polinômio $P(x) = x^3 3x^2 + m$, onde m é um número real, estão em progressão aritmética. Determine:
- a) o valor de m. (M=2)- relocosa de Grand
- b) as raizes desse polinomio profil vo fini
- 08. (FGV) a) Um polinômio P do 3º grau com coeficientes reais é tal que P(2) = 0 e P(2 + i) = 0, onde i é a unidade imaginária. Obtenha P, sabendo-se que P(1) = 4.
- **b)** A equação polinomial $x^3 + x^2 + x + k = 0$ tem uma raiz igual a -1. Obtenha o valor de k e as outras raízes.
- **09.** (Vunesp) Considere o polinômio $P(x) = x^3 mx^2 + m^2x m^3$ em que $m \in R$. Sabendo-se que 2i é raiz de P(x), determine:
- a) os valores que m pode assumir.
- **b)** dentre os valores de m encontrados em a, o valor de m tal que o resto da divisão de P(x) por (x-1) seja -5.
- **10.** (Unicamp) Sejam r, s e t as raízes do polinômio $P(x) = x^3 + ax^2$ $+bx+\left(\frac{b}{a}\right)^3$, em que a e b são constantes reais não nulas. Se s^2
- = $r \cdot t$, então a soma de r + t é igual a:
- **a)** $\frac{b}{a} + a$ **b)** $-\frac{b}{a} a$ **c)** $a \frac{b}{a}$ **d)** $\frac{b}{a} a$

AULA 5

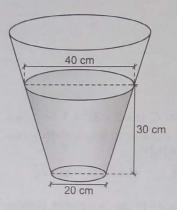
Geometria Espacial II

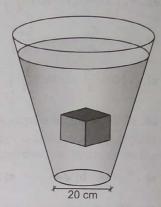
01. (Insper) De cada vértice de um prisma hexagonal regular foi retirado um tetraedro, como exemplificado para um dos vértices do prisma desenhado a seguir.



- O plano que definiu cada corte feito para retirar os tetraedros passa pelos pontos médios das três arestas que concorrem num mesmo vértice do prisma. O número de faces do poliedro obtido depois de terem sido retirados todos os tetraedros é:

- a) 24 b) 20 c) 18 d) 16
- 02. (UFT) Em uma aula de Matemática, o professor fez uma demonstração prática de como o nível da água de um recipiente sobe ao introduzir um objeto em seu interior. O professor utilizou um recipiente que tinha o formato do tronco de um cone reto e imergiu totalmente um cubo maciço nesse recipiente. Essa demonstração está representada nas figuras a seguir.



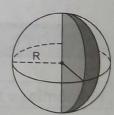


Durante a demonstração verificou-se que o volume do objeto é $\frac{3}{2}$ do volume de água já existente no recipiente.

Tomando por base a demonstração prática realizada pelo professor de Matemática, conclui-se que a aresta do objeto introduzido no recipiente é:

Dado: $\pi = 3$.

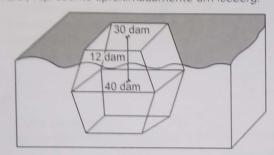
- a) 3 cm
- **b)** 9 cm **c)** $\sqrt[3]{9}$ cm
- **d)** $10^3\sqrt{9}$ cm **e)** $100^3\sqrt{9}$ cm
- 03, (Vunesp) Uma quitanda vende fatias de melancia embaladas em plástico transparente. Uma melancia com forma esférica de raio de medida R cm foi cortada em 12 fatias iguais, onde cada fatia tem a forma de uma cunha esférica, como representada na figura.



Sabendo-se que a área de uma superfície esférica de raio R cm é $4\pi R^2$ cm², determine, em função de π e de R:

- a) a área da casca de cada fatia da melancia (fuso esférico).
- b) quantos cm² de plástico foram necessários para embalar cada fatia (sem nenhuma perda e sem sobrepor camadas de plástico), ou seja, qual é a área da superfície total de cada fatia.
- 04. (Fuvest) As bases de um tronco de cone circular reto são círculos de raio 6 cm e 3 cm. Sabendo-se que a área lateral do tronco é igual à soma das áreas das bases, calcule;
- a altura do tronco do cone. 4 cm AT TIS RT
- b) to volume do tronco do cone. VT=TTh (72+ (R-1) 05. (Vunesp) Uma circunferência contida na superfície de uma esfera diz-se circunferência máxima da esfera se seu raio é igual ao raio da esfera. Assim, pode-se afirmar que:
- a) toda circunferência contida na superfície de uma esfera é uma circunferência máxima da esfera.

- b) um plano e uma esfera que se cortam ou têm um único ponto em comum ou sua intersecção contém uma circunferência máxima da esfera.
- c) os planos determinados por duas circunferências máximas distintas de uma mesma esfera são necessariamente secantes e sua intersecção contém um diâmetro comum às duas.
- d) dadas duas esferas concêntricas distintas, uma circunferência máxima de uma e uma circunferência máxima da outra são necessariamente circunferências concêntricas coplanares.
- e) duas circunferências máximas de uma mesma esfera estão necessariamente contidas em planos perpendiculares.
- **06.** (Vunesp) Com o fenômeno do efeito estufa e consequente aumento da temperatura média da Terra, há o desprendimento de *icebergs* (enormes blocos de gelo) das calotas polares terrestres. Para calcularmos o volume aproximado de um *iceberg*, podemos compará-lo com sólidos geométricos conhecidos. Supondo que o sólido da figura, formado por dois troncos de pirâmides regulares de base quadrada simétricos e justapostos pela base maior, represente aproximadamente um *iceberg*.

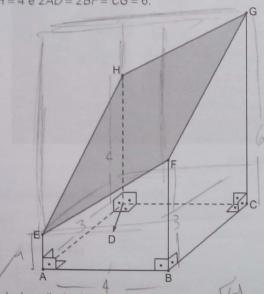


As arestas das bases maior e menor de cada tronco mede, respectivamente, 40 dam e 30 dam e a altura mede 12 dam. Sabendo que o volume V_S da parte submersa do *iceberg* corresponde a aproximadamente $\frac{7}{8}$ do volume total V_S , determine V_S .

07. (FGV) Um reservatório tem a forma de uma esfera. Se aumentarmos o raio da esfera em 20%, o volume do novo reservatório, em relação ao volume inicial, aumentará:

- a) 60%
- b) 63,2%
- c) 66,4%
- d) 69,6%
- el 72,8%

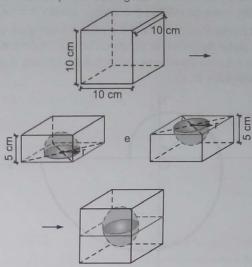
08. (FGV) No poliedro ABCDEFGH, as arestas \overline{AE} , \overline{BF} , \overline{CG} e \overline{RH} são perpendiculares ao plano que contém a face retangular ABCD, conforme indica a figura. Sabe-se ainda que AE = 1, AB = DH = 4 e 2AD = 2BF = CG = 6.



a) Calcule a distância entre os pontos A e G.

Calcule o volume do poliedro ABCDEFGH

09. (Vunesp) Para confeccionar um porta-joias a partir de um cubo maciço e homogêneo de madeira com 10 cm de aresta, um marceneiro dividiu o cubo ao meio, paralelamente às duas faces horizontais. De cada paralelepípedo resultante extraiu uma semiesfera de 4 cm de raio, de modo que seus centros ficassem localizados no cruzamento das diagonais da face de corte, conforme mostra a sequência de figuras.



Sabendo que a densidade da madeira utilizada na confecção do porta-joias era de 0,85 g/cm³ e admitindo $\pi \cong 3$, a massa aproximada do porta-joias, em gramas, é:

- a) 636
- **b)** 634
- **c)** 630
- **d)** 632
- e) 638

AULA 6

Tópicos complementares

- **01.** (FGV) Sendo m o maior valor real que x pode assumir na equação analítica $(x-2)^2+4(y+5)^2=36$, e n o maior valor real que y pode assumir nessa mesma equação, então, m+n é igual a:
- a) 8
- **b)** 7
- c) 6
- **d)** 4
- e) 3
- **02.** (Enem) Um produtor de café irrigado em Minas Gerais recebeu um relatório de consultoria estatística, constando, entre outras informações, o desvio-padrão das produções de uma safra dos talhões de sua propriedade. Os talhões têm a mesma área de 30 000 m² e o valor obtido para o desvio-padrão foi de 90 kg/talhão. O produtor deve apresentar as informações sobre a produção e a variância dessas produções em sacas de 60 kg por hectare (10 000 m²). A variância das produções dos talhões expressa em (sacas/hectare)² é:
- a) 20,25
- **b)** 4,50
- c) 0,71
- d) 0,50
- e) 0,25
- **03**. (FGV) Seja *x* um inteiro positivo menor que 21. Se a mediana dos números 10, 2, 5, 2, 4, 2 e *x* é igual a 4, então o número de possibilidades para *x* é:
- a) 13
- **b)** 14
- c) 15
- **d)** 16
- e) 17
- **04.** (UFTM) A função f(x) = |x + 3| |x + 1| tem valor maior que zero, para x real obedecendo à condição:
- a) x < -3
- **b)** -3 < x < 3
- c) x > 3
- **d)** x < 2
- **e)** x > -2
- **05**. (Fuvest) Determine para quais valores reais de x é verdadeira a desigualdade:

$$|x^2 - 10x + 21| \le |3x - 15|$$

06. Em quantos pontos do plano cartesiano os gráficos de $f(x) = |x^2 - 6x + 5|$ e de g(x) = x - 1 se interceptam?

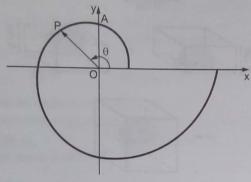
a) 1

b) 2

c) 3

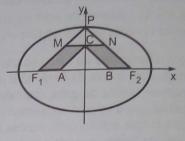
d) 4

07. (UFTM) A espiral logarítmica é uma curva plana que aparece com frequência na natureza: nos braços de galáxias, no formato de ciclones e nas conchas de moluscos. A espiral, na figura, é definida por meio da relação $\theta=\pi\log_b r$, onde r é a medida OP para cada ponto P da espiral e θ é o valor em radianos do ângulo medido a partir do semieixo positivo Ox no sentido anti-hórario. O número b é uma constante real positiva. O ponto A da espiral tem coordenadas $(0;\sqrt{2})$.



- a) Determine o valor de b.
- **b)** Determine o ângulo θ para o qual r vale $8^{0,25}$.

08. (AFA) Na figura a seguir, F_1 e F_2 são focos da elipse $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9}$ = 1. O ponto C, de coordenadas $\left(0; \frac{3}{2}\right)$, pertence ao segmento \overline{MN} . Os segmentos \overline{AC} , \overline{CB} e \overline{MN} são, respectivamente, paralelos aos segmentos $\overline{F_1P}$, $\overline{PF_2}$ $\overline{F_1F_2}$. A área da figura sombreada, em unidades de área, é:



a) 3

b) 6

c) 9

d) 12