Universidade Federal do ABC

1ª Avaliação de Cálculo Numérico

Nome: Lucas Moura de Almeida - 11201811415.

1) Represente o número $x_1 = 15,37$ no sistema de ponto flutuante $F(4,3,3,2)$. Que números na base decimal não são representados nesse sistema?

Resposta: $x_1 = 15,37 = (0,331 \times 4^2)_4$. Overflow: $(-\infty\ ,\ -15,75) \cup (15,75\ ,\ \infty)$. Underflow: $(-0,0039\ ,\ 0,0039)$.

2) Seja a função $f(x) = e^{-x} - 3x - 3$. Obtenha 2 funções iterativas do Método Iterativo Linear (MIL). Verifique, usando o critério de convergência, se essas funções irão convergir para a raiz de $f(x)$. Obtenha uma aproximação da raiz pelo MIL com erro relativo inferior à 0,1.

Resposta: $\psi_1(x) = -ln(3x+3)$ e $\psi_2(x) = \frac{e^{-x}-3}{3}$. Existe uma raiz $\xi \in (-1,0)$. Com $x_0 = -0,5$ e usando $\psi_2(x) = \frac{e^{-x}-3}{3}$, obtemos $\xi \approx x_2 = -0,4770$.

3) Sejam as funções $f_1(x) = e^{2x}$ e $f_2(x) = 1/x$. Determine, pelo método de Newton-Raphson, um ponto de interseção das duas funções com erro relativo inferior à 0,01.

Resposta: $x_{n+1} = x_n - \dfrac{e^{2x_n} - 1/x_n}{2e^{2x_n} + 1/x_n^2}$. Com $x_0 = 0,5$ obtemos $\xi \approx x_2 = 0,4263$.

4) Resolva o sistema linear abaixo pela decomposição LU.

$$\begin{cases} x & +4y & +z & = 7 \\ 3x & +y & -z & = 3 \\ -5x & +13y & -22z & = 48 \end{cases}$$

Resposta: $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ -5 & -3 & 1 \end{bmatrix}, U = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & -11 & -4 \\ 0 & 0 & -29 \end{bmatrix}.$

Solução: $\{(0\ ;\ 2\ ;\ -1)\}$

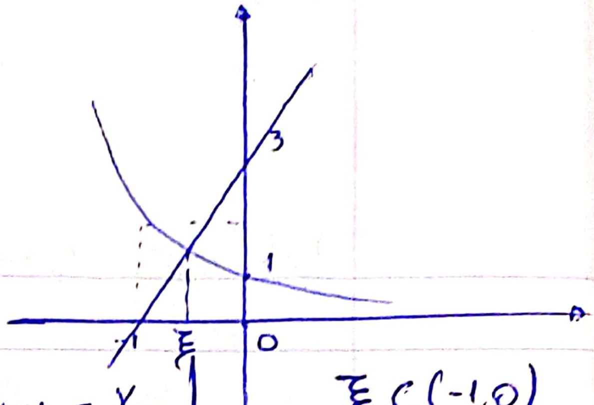
5) Resolva novamente o sistema linear do exercício anterior, mas desta vez por um método iterativo, com erro relativo inferior à $0,1$. É necessário permutar linhas ou colunas do sistema para garantir a convergência do método? Justifique.

Resposta: A permutação é necessária. Com duas iterações o método converge para aproximadamente $(x, y, z) = \{(0\ ;\ 2\ ;\ -1)\}$.

Utilize 4 casas decimais. Todas as contas devem ser justificadas !

Boa Prova !

P1. Exercício 2.



$f(x) = e^{-x} - 3x - 3$; $ER_x = \left| \dfrac{x_{n+1} - x_n}{x_{n+1}} \right|$ $\quad \xi \subset (-1,0)$

$\boxed{e^{-x} = 3x+3}$

$x = \psi(x) \Rightarrow$ (I) $3x = e^{-x} - 3$

$x = \dfrac{e^{-x} - 3}{3}$

(II) $e^{-x} = 3x+3$

$\ln e^{-x} = \ln(3x+3)$

$x = -\ln(3x+3)$

Critério de convergência:

$|\psi_1'(x)| < 1$

$\left| \dfrac{-1 \cdot e^{-x}}{3} \right| < 1$

$\therefore \left| \dfrac{-1}{3e^x} \right| < 1 \Rightarrow \dfrac{1}{|3e^x|} < 1$

$|3e^x| > 1$

$3e^x > 1$ ou $\cancel{3e^x < -1}$

$e^x > \dfrac{1}{3}$

$\ln e^x > \ln(1/3)$

$x > \ln(1/3) \Rightarrow \boxed{x > -1{,}0986}$

$\boxed{I = (-1{,}0986 ; +\infty)}$

Como $\xi \in I$, esta formulação converge

$|\psi_2'(x)| < 1$

$\left| \dfrac{-3}{3x+3} \right| < 1 \Rightarrow \left| \dfrac{-1}{x+1} \right| < 1$

$\dfrac{1}{|x+1|} < 1 \Rightarrow |x+1| > 1$

$x+1 > 1$ ou $x+1 < -1$

$\boxed{x > 0 \text{ ou } x < -2}$

$\xi \notin I$

Nada podemos afirmar.

Utilizando $x_0 = -0,5$, temos:

$x_0 = -0,5$ $\quad \varphi_1(x) = \dfrac{e^{-x}-3}{3}$

~~$x_1 = -0,45010$ $ER = 0,05$~~
~~$x_2 = -0,47700$ como é menor que 0,1~~

$x_1 = -0,45043$ $\quad ER_x = 0,1100$

$\boxed{x_2 = -0,47700}$ $\quad ER_x = 0,056$

Com $ER_{x_2} < 0,1$, temos

$\boxed{\xi \approx x_2 = -0,47700}$

P1. Exercício 4

Resolva pela decomposição L.U

$$\begin{cases} x + 4y + z = 7 \\ 3x + y - z = 3 \\ -5x + 13y - 22z = 48 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ -5 & 13 & -22 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} \\ 0 & U_{22} & U_{23} \\ 0 & 0 & U_{33} \end{bmatrix}$$

1) 1° Linha de U.

$U_{11} = 1$; $U_{12} = 4$; $U_{13} = 1$

2) 1° coluna de L

$l_{21} . U_{11} = 3 \Rightarrow l_{21} = 3$

$l_{31} . U_{11} = -5 \Rightarrow l_{31} = -5$

3) 2° linha de U

$l_{21} . U_{12} + U_{22} = 1 \Rightarrow U_{22} = -11$

$l_{21} . U_{13} + U_{23} = -1 \Rightarrow U_{23} = -4$

4) 2° coluna de L

$l_{31} . U_{12} + l_{32} . U_{22} = 13$

$-5 . 4 + l_{32} . -11 = 13 \Rightarrow l_{32} . -11 = 13 + 20 = 33$

$l_{32} = \frac{33}{11} = -3$

5) 3° Linha de U

$\overset{-5}{l_{31}} . \overset{1}{U_{13}} + \overset{-3}{l_{32}} . \overset{-4}{U_{23}} + U_{33} = -22 \Rightarrow U_3 = -22 + 5 - 12 = -29$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ -5 & -3 & 1 \end{bmatrix} ; \quad U = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & -11 & -4 \\ 0 & 0 & -29 \end{bmatrix}$$

$$AX = b \rightarrow \underbrace{LU}_{K}X = b$$

K - variável auxiliar.

1) $LK = b$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ -5 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \\ 48 \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} K_1 &= 7 \\ K_2 &= -18 \\ K_3 &= 29 \end{aligned}$$

2) $UX = K$

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & -11 & -4 \\ 0 & 0 & -29 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ -18 \\ 29 \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} z &= -1 \\ y &= 2 \\ x &= 0 \end{aligned}$$

$\therefore S = \{(0; 2; -1)\}$

P1. Exercício 1.

Base

$x_1 = 15,37$; $F(4,3,3,2)$; underflow ; overflow.

mantissa.

$-3 \leq e \leq 2$

$15 \,\underline{|\,4}$ 3   3

$$\begin{array}{r} 0,37 \\ \times\ 4 \\ \hline 1,48 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 0,48 \\ \times\ 4 \\ \hline 1,92 \end{array}$$

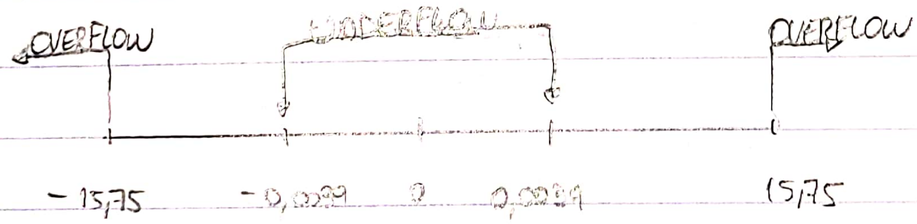
$\therefore\ x_1 = (0,331 \cdot 4^2)_4$

base 4: 0 1 2 3

Maior valor positivo: $0,333 \cdot 4^2 = (33,3)_4 = 3 \cdot 4^1 + 3 \cdot 4^0 + 3 \cdot 4^{-1} = (15,75)_{10}$

Menor valor positivo: $0,100 \cdot 4^{-3} = (0,000100)_4 = 1 \cdot 4^{-4} = (0,0039)_{10}$

Portanto:



UNDERFLOW: $(-0,0039\ ;\ +0,0039)$

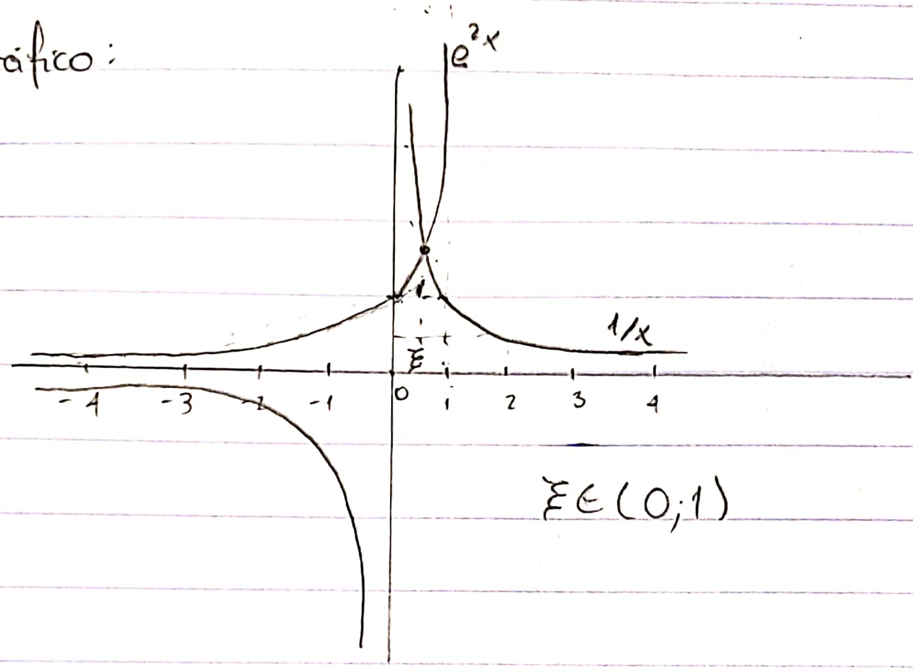
OVERFLOW: $(-\infty\ ;\ -15,75) \cup (15,75\ ;\ +\infty)$

P1. Exercício 3.

$f_1(x) = e^{2x}$ e $f_2(x) = 1/x$; $ER_x < 0{,}01$

$e^{2x} = 1/x$

Gráfico:



$\xi \in (0;1)$

$f(x) = e^{2x} - \frac{1}{x}$

$f'(x) = 2e^{2x} + 1/x^2$

$ER_x : \left| \frac{x_{n+1} - x_n}{x_{n+1}} \right|$

Pelo método de Newton: $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$; chutando $x_0 = 0{,}5$, temos:

$x_0 = 0{,}5$ — ER_x

$x_1 = 0{,}5 - \left[\frac{e^{2(0,5)} - 1/0{,}5}{2e^{2(0,5)} + 1/(0{,}5)^2} \right] = 0{,}4239$ — $ER_{x_1} \cong 0{,}18$

$\boxed{x_2 = 0{,}4263}$ — $ER_{x_2} = 0{,}006$

$\therefore \boxed{\xi \cong x_2 = 0{,}4263}$