

VERÖFFENTLICHUNG
KÖNIGLICH PREUSZISCHEN GEODÄTISCHEN INSTITUTES
NEUE FOLGE N° 52

KONFORME ABBILDUNG
DES ERDELLIPSOIDS IN DER EBENE

von

PROF. DR. L. KRÜGER

ABTEILUNGSVORSTEHER IM KGL. PREUSZISCHEN GEODÄTISCHEN INSTITUT



POTSDAM

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG

1912

ALLE RECHTE, EINSCHLIESSLICH DES ÜBERSETZUNGSRECHTS, VORBEHALTEN

Vorwort.

Im Jahre 1816 erhielt H. C. SCHUMACHER vom König von Dänemark den Auftrag, eine von Skagen bis Lauenburg und von Kopenhagen bis zur Westküste Jütlands sich erstreckende Breiten- und Längengradmessung auszuführen. Die Anregung SCHUMACHERS, die dänische Breitengradmessung durch Hannover fortzusetzen, fand bei C. F. GAUSS bereitwillige Aufnahme. Der geschickten Vermittelung und der Geschäftsgewandtheit SCHUMACHERS gelang es, auch die hannoversche Regierung dafür zu interessieren: die Fortsetzung der dänischen Gradmessung durch das Königreich Hannover wurde 1820 bewilligt. Die dazu dienende vom Inselsberge bis zur Seite Hamburg—Lüneburg reichende Dreiecks-kette ist von 1821 bis 1823 durch GAUSS gemessen worden; sie fand 1824 und 1825, gleichfalls durch GAUSS selbst, eine westliche Fortsetzung bis zur Seite Varel—Jever des niederländischen Dreiecks-netzes des Generalleutnants v. KRAYENHOFF. An diese Gradmessungsketten schlossen sich dann unter GAUSS' Leitung 1828—1844 die ergänzenden Dreiecksketten für die Landesvermessung. Das gesamte Beobachtungsmaterial hat GAUSS allein bearbeitet. Während das Dreiecksnetz der Grad-messung und ihrer Fortsetzung nach Jever von ihm nach den Korrelaten ihrer Bedingungsgleichungen auf dem Erdellipsoid ausgeglichen wurde, erfolgte die Einfügung der Ketten der Landesvermessung und der zahlreichen Nebenpunkte mittels ebener rechtwinkliger Koordinaten, nachdem vorher die Punkte auf die Ebene übertragen waren. Durch diese Koordinaten geschah die Festlegung der Punkte der gesamten Vermessung.

Zur Übertragung der Punkte des Erdellipsoids in die Ebene bedient sich GAUSS der konformen Abbildung. Die Aufgabe: allgemein eine Fläche so auf einer andern abzubilden, daß das Bild dem Original in den kleinsten Teilen ähnlich werde, wird zuerst in seinem Briefe an SCHUMACHER vom 5. Juli 1816 erwähnt, der die Antwort auf die Mitteilung SCHUMACHERS von dem erhaltenen Auftrage zur dänischen Gradmessung ist; gleichzeitig wird diese Aufgabe als Thema einer Preisfrage für eine Akademie empfohlen. Der Kopenhagener Sozietät der Wissenschaften, die sie auf SCHUMACHERS Ver-anlassung dann zweimal als Preisarbeit gestellt hatte, schickte GAUSS Ende 1822 die Lösung ein; ver öffentlicht wurde diese zum ersten Male 1825 in den von SCHUMACHER herausgegebenen astrono-mischen Abhandlungen.

Wie aus dem GAUSS'schen geodätischen Nachlaß, Werke Band IX, S. 105 u. f., hervorgeht, hat GAUSS in der Zeit von etwa 1816 bis 1820 verschiedene konforme Abbildungen des Erdellipsoids für rein geodätische Zwecke in Betracht gezogen, ausführlicher als in der Preisschrift mitgeteilt wurde. Es gehört dazu besonders die konforme Doppelprojektion des Sphäroids auf die Kugel und von dieser auf die Ebene einmal mittels der stereographischen, das andere Mal durch die transversale Mercatorprojektion. Die erste Übertragung auf die Kugel ist noch diejenige, bei der ein Punkt auf dem Ellipsoid und

a*

sein Bildpunkt auf der Kugel gleiche geographische Länge haben; sie ist auch in der Preisarbeit behandelt. Später, 1843, wurde sie durch eine andere Darstellung in den „Untersuchungen über Gegenstände der höhern Geodäsie“ überholt. Diese letztere ist dann 1876, in Verbindung mit der transversalen Mercatorprojektion, durch O. SCHREIBER bei der preußischen Landesaufnahme eingeführt worden. Bei ihr weicht das Verhältnis der geographischen Längen entsprechender Punkte auf dem Ellipsoid und auf der Kugel etwas von der Einheit ab. Das Vergrößerungsverhältnis wird dadurch eine kleine Größe dritter Ordnung, ungerechnet noch des Quadrates der Exzentrizität als Faktor; während es bei der ersten Übertragung von der zweiten Ordnung ist. Doch würde dies bei der geringen Ausdehnung des Königreichs Hannover von Norden nach Süden nicht von großer Bedeutung gewesen sein. An den Grenzen würde bei der ersten Darstellung des Ellipsoids auf der Kugel der Logarithmus des Vergrößerungsverhältnisses noch nicht 3 Einheiten der siebenten Dezimalstelle oder die lineare Vergrößerung noch nicht 1:1470 000 betragen, wenn der Normalparallelkreis durch die Mitte des Landes geht. Sehr ausführlich hat GAUSS die für Messungen längs des Meridians zu benutzende transversale Mercatorprojektion der Kugel in der Ebene behandelt. Er hat auch bereits die für größere Entfernung von der Abszissenachse gelgenden Formeln für die Entfernungs- und Azimutreduktion eines größten Kreises auf die Gerade, die die Bilder seiner Endpunkte verbindet, entwickelt, die später von CH. SCHOLS und von O. SCHREIBER angegeben sind. Außer diesen Doppelprojektionen hat GAUSS noch die direkte stereographische Abbildung des Sphäroids in der Ebene, wenn der dem Augpunkte diametral gegenüberliegende Punkt eine gegebene Breite und Länge besitzt, und ferner die Übertragung des Sphäroids auf einen Kegelmantel und dessen Abwicklung in der Ebene in Untersuchung gezogen.

Zur Anwendung ist jedoch eine andere Abbildungsart gekommen, nämlich die direkte Übertragung des Erdellipsoids in die Ebene, die der transversalen Mercatorprojektion der Kugel analog ist.

Diese Projektionsmethode hat in neuerer Zeit mehrfach wieder Anwendung gefunden für Katastervermessungen, zuerst in Frankreich durch CH. LALLEMAND, und dann in Ägypten; dafür in Aussicht genommen ist sie in Sachsen, in Österreich, in Griechenland und in den deutschen Kolonien in Afrika.

GAUSS hat über die Theorie der hannoverschen Projektionsmethode nichts veröffentlicht. Er hat wohl in seinen Vorlesungen über höhere Geodäsie, wie ein von seinem Assistenten Prof. GOLDSCHMIDT ausgearbeitetes und im GAUSS-Archiv zu Göttingen befindliches Heft zeigt, die Gebrauchsformeln angegeben, aber nicht ihre Entwicklung. In weiteren Kreisen sind die Formeln erst durch den Briefwechsel zwischen C. F. GAUSS und H. C. SCHUMACHER, herausgegeben von C. A. F. PETERS, Band II 1860 und Band III 1861, bekannt geworden. Aus diesem wurden sie in übersichtlicher Weise für den Gebrauch zusammengestellt vom Wasserbau-Inspektor TAAKS, der auch mehrere Druck- oder Schreibfehler in ihnen berichtigte und sie durch Tafeln nach SCHMIDTS und nach WALBECKS Dimensionen des Erdellipsoids ergänzte. Eine Ableitung und auch Weiterentwicklung der GAUSS'schen Formeln gab zuerst der damalige hannoversche Hauptmann und spätere Generalleutnant und Chef der preußischen Landesaufnahme Dr. O. SCHREIBER. Eine andere einfache Entwicklung röhrt von Prof. F. R. HELMERT her.¹⁾

In GAUSS' Nachlaß, Werke Band IX, S. 141—194, haben sich nun zwar eine Reihe von Formeln und Entwicklungen zu seinem Abbildungsverfahren vorgefunden, aber eine zusammenhängende Darstellung fehlt, vgl. a. a. O. Bemerkungen S. 195. Das von GAUSS beabsichtigte Werk über die han-

¹⁾ TAAKS, Geodätische Tafeln für die Nord- und Ostsee-Küste, berechnet nach GAUSS'schen Formeln. Aurich 1865. — OSKAR SCHREIBER, Theorie der Projektionsmethode der hannoverschen Landesvermessung. Hannover 1866. — F. R. HELMERT, Näherungsformeln für die GAUSS'sche Projektion der hannoverschen Landesvermessung. Zeitschrift für Vermessungswesen, Band V (1876), S. 238—253.

noversche Triangulation ist über den Plan dazu und die Einleitung nicht hinausgekommen, vgl. a. a. O. S. 401—405. Mehrere Entwicklungen sind auch nicht zu Ende geführt worden oder auch wohl teilweise verloren gegangen.

Ich erhielt daher von dem Direktor des Königlichen Geodätischen Instituts, Herrn Geheimrat Prof. Dr. Dr.-Ing. F. R. HELMERT, auf meinen Wunsch den Auftrag, unter Zugrundelegung der GAUSS-schen Formeln eine Darstellung der konformen Abbildung des Erdellipsoids in der Ebene zu geben.

Es wurde aber von vornherein ins Auge gefaßt, die Entwicklungen soweit zu führen, daß ein größeres Gebiet, innerhalb 16—18 Längengraden etwa, auf ein einziges System ebener Koordinaten bezogen werden kann, ebenso wie dies durch die O. SCHREIBERSche konforme Doppelprojektion geschieht. Um sie auch praktisch brauchbar zu gestalten, waren Weiterentwicklungen und Umwandlungen der GAUSS-schen Formeln notwendig.

In der vorliegenden Veröffentlichung werden nun zunächst im Anschluß an GAUSS die allgemeine Abbildungsgleichung sowie Beziehungen für die Konvergenz des Meridians und für das Vergrößerungsverhältnis abgeleitet. Die erhaltenen Formeln sind darauf zuerst benutzt worden, die Gleichungen der transversalen Mercatorprojektion der Kugel zu entwickeln.

Die Anwendung der allgemeinen Formeln auf die dieser Mercatorprojektion entsprechende Abbildung des Erdellipsoids in der Ebene geschieht auf zwei Weisen. Bei der ersten Entwicklung, die von GAUSS unvollendet gelassen ist, vgl. a. a. O. S. 174—193, wird als Zwischenglied eine Kugel eingeschaltet, deren Meridianumfang gleich dem Umfange der Meridianellipse des Erdellipsoids ist. Es werden die Zusatzglieder hergeleitet, die den Formeln für die transversale Mercatorprojektion jener Kugel hinzuzufügen sind. Und zwar werden zuerst die geographischen Koordinaten aus den ebenen rechtwinkligen berechnet, einmal so wie es bereits im wesentlichen von GAUSS angegeben ist, dann ein zweites Mal in etwas anderer Form, die für die numerische Anwendung bequemer ist. An beide Auflösungen schließen sich die Formeln zur Berechnung der Konvergenz des Meridians und des Vergrößerungsverhältnisses, die bei GAUSS fehlen. Darauf erfolgt umgekehrt die Ableitung der ebenen rechtwinkligen Koordinaten und der andern genannten Größen aus den geographischen Koordinaten. Wie an Beispielen gezeigt wird, reichen die erhaltenen Übertragungsgleichungen viel weiter als sie für die Zwecke einer Landesvermessung gebraucht werden.

Für die numerische Rechnung einfacher sind jedoch die Formeln, die nach der zweiten Art, nämlich aus der Entwicklung der Abbildungsgleichung in eine Potenzreihe, erhalten werden. Wenn das Gebiet ihrer Anwendung sich gegen 700 km vom Hauptmeridian erstrecken soll, so müßten jedoch die Glieder dieser Reihe sehr weit berücksichtigt werden, weiter als es bei GAUSS und auch bei O. SCHREIBER geschehen ist. Dadurch würde aber die praktische Brauchbarkeit der Formeln herabgesetzt werden. Um mit weniger Gliedern auszukommen, habe ich die Reihen zur Berechnung der ebenen aus den geographischen Koordinaten und ihre Umkehrung nach dem Vorbilde der für die Mercatorprojektion der Kugel geltenden Formeln umgeformt, derart, daß das Hauptglied wie bei dieser erhalten wird, zu dem dann noch Zusatzglieder hinzutreten. Ebenso wurden auch die Ausdrücke für die Konvergenz des Meridians und für das Vergrößerungsverhältnis umgewandelt. Als Kugelradius diente für die ersten ein Querkrümmungsradius, für die letzteren ein mittlerer Krümmungsradius des Ellipsoids. Durch diese Umformungen wird erreicht, daß die Zusatzglieder ebenso wie die vernachlässigten Glieder mit dem Quadrat der Exzentrizität der Meridianellipse multipliziert sind. Die Berechnung der Zusatzglieder wird durch beigegebene Täfelchen erleichtert. Wenn man sich auf einen Abstand von etwa 2° vom Anfangsmeridian beschränkt, so braucht man in den Formeln nur je ein einziges Korrektionsglied, das man leicht berechnen kann, so daß dazu kaum Tafelwerte nötig sind.

Zur Ableitung der Unterschiede in der linearen Länge und im Azimut zwischen der geo-

dätischen Linie auf dem Erdellipsoid und der die Projektionen ihrer Endpunkte in der Ebene verbindenden Geraden ist von einer andern Differentialgleichung, als GAUSS benutzt hat (a. o. O. S. 159—168), ausgegangen worden, die geeigneter dazu erschien im Hinblick darauf, daß auch weit vom Anfangsmeridian abstehende Dreiecksseiten in Betracht kommen. Diese partielle Differentialgleichung für die Abhängigkeit der geodätischen Linie von den ebenen Koordinaten, die sich, ebenso wie die von GAUSS hergeleitete, an Entwicklungen in den Disquisitiones gen. c. superf. curv. Art. 24 anschließt, wurde zunächst für die konforme Abbildung irgendeiner krummen Fläche in der Ebene entwickelt. Sie wurde alsdann auf die transversale Mercatorprojektion der Kugel angewendet. Die hierbei sich ergebenden Resultate sind darauf benutzt worden, um die Korrekturen zu bestimmen, die das Ellipsoid erfordert. Die letztern sind immer sehr klein, wenn als Radius der Kugel der mittlere Krümmungsradius des Ellipsoids genommen wird, der der mittleren Abszisse entspricht. Für Hauptdreiecksseiten in einer Entfernung von 700 km vom Hauptmeridian beträgt der Fehler der entwickelten Formel für die Entfernungsreduktion noch nicht eine Einheit der achten Dezimalstelle im Logarithmus und für die Azimutreduktion höchstens eine Einheit der vierten Dezimalstelle der Sekunde. Bei Dreiecksseiten dritter Ordnung kann stets, auch bei der obigen Entfernung, wie bei der Mercatorprojektion gerechnet werden. Bei geringern Abständen bis etwa 200 km vom Hauptmeridian kann dies auch für Hauptdreiecksseiten geschehen. Nur ist immer anstatt eines konstanten Kugelradius der vorher angegebene mittlere Krümmungsradius zu nehmen. Das verursacht aber jetzt, wo eine Reihe von Tafelwerten existieren, die zu den von Minute zu Minute fortschreitenden geographischen Breiten die Meridianbogen und die Krümmungsradien angeben, wenig Mehrarbeit.

Nachdem weiter die Beziehung zwischen der GAUSS'schen und der in der Geodäsie gewöhnlich gebrauchten Meridankonvergenz entwickelt ist, so daß sich aus dem Azimut der geodätischen Linie mittels der GAUSS'schen Meridankonvergenz ihr Richtungswinkel und umgekehrt herstellen läßt, wird noch eine Ergänzung zu dem vorigen Abschnitte gegeben. Es erfolgt die direkte Herleitung erstens der linearen Länge der geodätischen Linie und ihrer Richtungswinkel aus den zu ihren Endpunkten gehörigen ebenen Koordinaten und zweitens der Koordinaten des Endpunktes aus der linearen Länge der geodätischen Linie, dem Richtungswinkel und den ebenen Koordinaten im Anfangspunkte.

Darauf wurde die Bildkurve der geodätischen Linie einer besondern Untersuchung unterworfen, um zu ersehen, wann sie die Verbindungslinie ihrer Endpunkte schneiden kann. Hierzu ist zunächst die Differentialgleichung dieser Bildkurve bei der konformen Abbildung irgendeiner krummen Fläche in der Ebene aufgestellt worden. Mittels ihrer konnte dann, wenn als Fläche das Rotationsellipsoid genommen wird, durch die TAYLORSche Reihe die Gleichung der Bildkurve erhalten werden. Aus dieser wurden noch einmal die Ausdrücke für die Winkel an den Endpunkten mit der verbindenden Geraden, die Richtungsreduktionen, abgeleitet.

Der Schluß der Arbeit beschäftigt sich mit der Transformation der ebenen Koordinaten. Dabei handelt es sich darum, ohne Vermittlung geographischer Koordinaten oder ohne Anwendung der Entferungs- und Richtungsreduktion, direkt aus den Koordinaten des Hauptsystems die eines Teilsystems, oder aus denen eines Teilsystems die eines benachbarten zu berechnen. Durch solche Teilsysteme werden gewöhnlich Meridianstreifen dargestellt. Die Grundgleichung nun, aus der zuerst die Transformationsgleichungen durch Reihenentwicklungen gefunden werden, läßt sich aus der Abbildungsgleichung ableiten. Sie ist auch bereits von GAUSS angegeben und zum Teil entwickelt worden, Band IX S. 168 u. 169. Durch Umänderung der Grundgleichung kann man eine etwas übersichtlichere Entwicklung der Koeffizienten in den Transformationsgleichungen erhalten. Die Koeffizienten ergeben sich beidemal als Potenzreihen der Ordinate des Anfangspunktes des zweiten Systems im ersten. Aber ihr Entwicklungsgesetz ist nicht ersichtlich, auch wird ihre Herleitung bei den höheren Potenzen, die für

größere Entfernungen der beiden Anfangspunkte zu berücksichtigen sind, sehr umständlich. Daher habe ich noch eine andere Entwicklung gewählt, indem ich von einer Differentialgleichung zwischen den komplexen Größen, die die Punkte zweier verschiedener Koordinatensysteme darstellen, ausging. Mit ihrer Hilfe konnten die aufeinander folgenden Differentialquotienten im Anfangspunkte des zweiten Systems hergeleitet werden. Ihre von der Exzentrizität freien Glieder ergeben sich vollständig, in geschlossenen Ausdrücken. Durch die TAYLORSche Reihe erhält man jetzt die Reihen für die neuen Koordinaten, die nach den Potenzen der alten fortschreiten. Die Transformationsgleichungen sind darauf in verschiedene Formen gebracht worden.

Wie aus den Zahlenbeispielen zu den Formeln der direkten Übertragung des Erdellipsoids ersichtlich ist, kann man diese ebenso gut zur einheitlichen Darstellung eines größeren Gebietes benutzen wie die konforme Doppelprojektion. Die Arbeit der Übertragung ist bei beiden im großen und ganzen gleich, vorausgesetzt, daß bereits Tafelwerte vorhanden sind; die Berechnung dieser letzteren erfordert jedoch bei der konformen Doppelprojektion mehr Mühe. Auch das Vergrößerungsverhältnis wird in beiden Fällen nahezu dasselbe, wenn man sich nicht zu weit vom Normalparallelkreis entfernt. Die direkte Abbildung hat aber den Vorzug größerer Beweglichkeit; da ihre Ausdehnung in Richtung des Meridians beliebig groß sein kann, so läßt sich der Anfangspunkt der ebenen Koordinaten von Norden nach Süden und umgekehrt durch Berücksichtigung des entsprechenden Meridianbogens beliebig verschieben. Ist dagegen bei der konformen Doppelprojektion der Normalparallelkreis einmal festgelegt, sind also darauf bezügliche Tafelwerte berechnet, so würde seine Verlegung einmal neue Tafeln und dann weiter eine vollständige Neurechnung der ebenen Koordinaten erfordern.

Bei der Drucklegung unterstützte mich Herr O. MEISSNER, wissenschaftlicher Hilfsarbeiter im Geodätischen Institute.

L. Krüger.

Inhaltsverzeichnis.

Grundformeln für die konforme Abbildung des Erdellipsoids in der Ebene.		Seite
§ 1. Die Abbildungsgleichung.	1
§ 2. Formeln für das Vergrößerungsverhältnis und für die Konvergenz des Meridians	4
Konforme Übertragung der Kugelfläche in die Ebene.		
§ 3. Berechnung von B , L , c und m aus x , y	6
§ 4. Berechnung von x , y , c und m aus B , L	9
Konforme Übertragung des Erdellipsoids in die Ebene.		
Erste Ableitung der Übertragungsformeln.		
§ 5. Entwicklung von $f(X)$	11
§ 6. Ableitung der geographischen Koordinaten, sowie der Konvergenz des Meridians und des Vergrößerungsverhältnisses aus den ebenen rechtwinkligen Koordinaten	15
§ 7. Andere Formeln für die geographischen Koordinaten, die Meridiankonvergenz und das Vergrößerungsverhältnis	17
§ 8. Ableitung der ebenen rechtwinkligen Koordinaten, der Konvergenz des Meridians und des Vergrößerungsverhältnisses aus den geographischen Koordinaten	20
§ 9. Zusammenstellung der Formeln	22
I. Gegeben B und L ; gesucht x , y , c und m	23
II. Gegeben x , y ; gesucht B , L , c und m	24
§ 10. Zahlenbeispiele	26
§ 11. Formeln für kurze Entfernungen vom Hauptmeridian	31
I. Berechnung von x , y , c und m aus B und L	32
II. Berechnung von B , L , c und m aus x , y	33
§ 12. Zahlenbeispiele	34
Zweite Ableitung der Übertragungsformeln des Erdellipsoids in die Ebene.		
§ 13. Ableitung der geographischen Koordinaten aus den ebenen rechtwinkligen Koordinaten	37
§ 14. Ableitung der ebenen rechtwinkligen Koordinaten aus den geographischen Koordinaten	41
§ 15. Berechnung der Konvergenz des Meridians	44
I. Aus den ebenen rechtwinkligen Koordinaten	44
II. Aus den geographischen Koordinaten	47
§ 16. Ableitung des Vergrößerungsverhältnisses	45
I. Aus den ebenen rechtwinkligen Koordinaten	47
II. Aus den geographischen Koordinaten	48
§ 17. Umformung der Ausdrücke für die Breitendifferenz $B - B'$ und für die Koordinatendifferenz $x - X$	50
I. Umformung von $B - B'$, (10) § 13.	50
II. Umformung von $x - X$, (16) § 14	52

	Inhaltsverzeichnis.	IX
	Seite	
§ 18. Zusammenstellung der Formeln	54	
I. Gegeben x, y . Gesucht B, L, c und m	54	
II. Gegeben B, L . Gesucht x, y, c und m	57	
§ 19. Zahlenbeispiele	60	
§ 20. Formeln für kleinere Entfernungen. Zahlenbeispiele	66	
I. Berechnung von B, L, c und m , wenn x und y gegeben sind	66	
II. Berechnung von x, y, c und m , wenn B und L gegeben sind	68	
§ 21. Formeln für Entfernungen bis zu 100 km vom Hauptmeridian. Zahlenbeispiele	71	
§ 22. Andere Reihenentwicklungen für die Übertragungsformeln	74	
§ 23. Ableitung einiger Werte für m_0	77	

Der Unterschied der geodätischen Linie auf dem Erdellipsoid und der die Projektionen ihrer Endpunkte in der Ebene verbindenden Geraden.

§ 24. Allgemeine Formeln	82
§ 25. Entfernungs- und Richtungsreduktion bei der Mercator-Projektion der Kugel	84
I. Herleitung von $\log s - \log r$	84
II. Herleitung von ψ_2 und ψ_1	87
§ 26. Entfernungsreduktion beim Erdellipsoid	89
§ 27. Herleitung von $\log s - \log r$. Zahlenbeispiele und Genauigkeitsuntersuchungen	93
§ 28. Richtungsreduktionen beim Erdellipsoid. Zahlenbeispiele und Genauigkeitsuntersuchungen	97
§ 29. Numerische Prüfung der Genauigkeit der Korrektionsformeln für die Richtungen und für die Entfernung	104

Beziehungen zwischen der geodätischen Linie und den ebenen rechtwinkligen Koordinaten ihrer Endpunkte.

§ 30. Die GAUSSche und die geodätische Konvergenz des Meridians	111
§ 31. Ableitung der linearen Länge der geodätischen Linie und ihrer Richtungswinkel aus den ebenen rechtwinkligen Koordinaten	113
§ 32. Formeln mit einem mittleren Richtungswinkel	116
§ 33. Zahlenbeispiel	119
§ 34. Ableitung der Differenzen der ebenen Koordinaten aus der linearen Länge und der Richtung der geodätischen Linie	122
§ 35. Zahlenbeispiel	123

Die Bildkurve der geodätischen Linie.

§ 36. Der Lauf der Bildkurve	126
§ 37. Die Gleichung der Bildkurve. Ableitung der Formeln für die Richtungsreduktionen	129
§ 38. Die Schnittpunkte der Bildkurve mit der Verbindungslinie ihrer Endpunkte	134
§ 39. Fortsetzung; die Bildkurve wird von der Abszissenachse geschnitten	137
§ 40. Zusammenstellung	146

Transformation der Koordinaten.

§ 41. Aufstellung der Grundgleichung	149
§ 42. Erste Entwicklung der Transformationsgleichungen	151
§ 43. Zweite Entwicklung der Transformationsgleichungen	153
§ 44. Schärfere Form der Koeffizienten in den Transformationsgleichungen	157
§ 45. Verschiedene Formen der Transformationsgleichungen	160
§ 46. Verschiedene Berechnungen einer Koordinatentransformation	162
I. Durch Vermittlung der geographischen Koordinaten	163
II. Mit Hilfe der Richtungs- und Entfernungsreduktionen	164
III. Mittels der Transformationsgleichungen	167
§ 47. Zahlenbeispiele	169

b

Grundformeln für die konforme Abbildung des Erdellipsoids in der Ebene.

§ 1.

Die Abbildungsgleichung.

Bei der GAUSS'schen konformen Abbildung des abgeplatteten Rotationsellipsoids in der Ebene sind zwei Bedingungen zu erfüllen:

erstens soll ein Meridian, der Hauptmeridian, durch eine Gerade, die Abszissenachse, dargestellt werden;

zweitens muß jede Strecke auf der Abszissenachse dem elliptischen Bogen auf dem Hauptmeridian, dessen Bild sie ist, gleich sein.

Diese zweite Bedingung ersetzen wir durch die folgende, daß jede Strecke auf der Abszissenachse zu dem entsprechenden Bogen des Hauptmeridians in einem konstanten Verhältnis m_0 stehen soll.

Es seien

a die große Halbachse, e die Exzentrizität der Meridianellipse des Erdellipsoids und $\frac{e^2}{1-e^2} = e'^2$;

B und L die geographische Breite und Länge eines beliebigen Punktes P auf dem Ellipsoid;

\bar{x} und \bar{y} die rechtwinkligen Koordinaten des Bildpunktes p von P in der Ebene;

\bar{y} und L sollen dasselbe Vorzeichen haben, beide seien positiv nach Osten; \bar{x} sei positiv nach Norden.

Der Anfangspunkt des ebenen rechtwinkligen Koordinatensystems möge vorläufig dem Schnittpunkte des Hauptmeridians mit dem Äquator entsprechen. Für den Hauptmeridian wird $L = 0$ gesetzt. Zu dem Schnittpunkte des Parallelkreises in der Breite B mit dem Hauptmeridian gehöre die Abszisse \bar{X} , während dem Endpunkte der Abszisse \bar{x} die Breite B' entspreche.

Nach den oben festgesetzten Bedingungen muß

$$\bar{X} = m_0 \int_0^B \frac{a\sqrt{1+e'^2} dB}{\sqrt{(1+e'^2 \cos^2 B)^3}}, \quad \bar{x} = m_0 \int_0^{B'} \frac{a\sqrt{1+e'^2} dB}{\sqrt{(1+e'^2 \cos^2 B)^3}} \quad (1)$$

sein.

Für das Bogenelement ds auf dem Ellipsoid hat man:

$$ds^2 = R^2 dB^2 + N^2 \cos^2 B dL^2 = N^2 \cos^2 B \left\{ \left(\frac{dB}{Q \cos B} \right)^2 + dL^2 \right\},$$

mit

$$R = \frac{a\sqrt{1+e'^2}}{\sqrt{(1+e'^2 \cos^2 B)^3}}, \quad N = \frac{a\sqrt{1+e'^2}}{\sqrt{1+e'^2 \cos^2 B}}, \quad Q = 1 + e'^2 \cos^2 B = \frac{N}{R}, \quad (2)$$

oder wenn

gesetzt wird,

$$\frac{1}{Q \cos B} = \frac{dF(B)}{dB} \quad (3)$$

$$ds^2 = N^2 \cos^2 B \{ (dF(B))^2 + dL^2 \}.$$

Für das entsprechende Element dS in der Ebene ist:

$$dS^2 = d\bar{x}^2 + d\bar{y}^2.$$

Damit nun die Abbildung zunächst konform ist, muß für jedes vom Punkte p ausgehende Element dS das Verhältnis $\frac{dS}{ds}$ einen und denselben Wert m haben. m heißt das Vergrößerungsverhältnis. Dies darf also nur von der Lage des Punktes p , nicht aber von der Richtung von dS abhängen, oder mit anderen Worten: m darf nur von \bar{x}, \bar{y} , nicht aber von $d\bar{x}, d\bar{y}$ abhängen. Trifft das zu, so wird demnach ein von unendlich kleinen Seiten gebildetes Dreieck auf dem Ellipsoid seinem Bilde in der Ebene ähnlich sein. Es wird mithin der Winkel zwischen zwei Kurven der Fläche gleich sein dem Winkel zwischen den Bildkurven in der Ebene. Man nennt deswegen die konforme Abbildung auch isogonale Verwandtschaft.

Soll nun m die angegebene Bedingung erfüllen, so muß auch

$$\frac{1}{m^2} = \frac{dS^2}{dS^2} = N^2 \cos^2 B \frac{(dF(B))^2 + dL^2}{d\bar{x}^2 + d\bar{y}^2} = N^2 \cos^2 B \frac{d(F(B) + iL)}{d(\bar{x} + i\bar{y})} \cdot \frac{d(F(B) - iL)}{d(\bar{x} - i\bar{y})},$$

wobei $i = \sqrt{-1}$ ist, einen eindeutigen Wert haben. Das wird aber der Fall sein, wenn die letzten beiden Faktoren des vorstehenden Ausdrucks von den willkürlichen Änderungen $d\bar{x}$ und $d\bar{y}$ unabhängige Werte haben.

Nun ist aber

$$\frac{d(F(B) + iL)}{d(\bar{x} + i\bar{y})} = \frac{\left(\frac{\partial F(B)}{\partial \bar{x}} + i \frac{\partial L}{\partial \bar{x}} \right) d\bar{x} + \left(\frac{\partial F(B)}{\partial \bar{y}} + i \frac{\partial L}{\partial \bar{y}} \right) d\bar{y}}{d\bar{x} + id\bar{y}} = \frac{\frac{\partial F(B)}{\partial \bar{x}} + i \frac{\partial L}{\partial \bar{x}} + i \left(-i \frac{\partial F(B)}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial L}{\partial \bar{y}} \right) \frac{d\bar{y}}{d\bar{x}}}{1 + i \frac{d\bar{y}}{d\bar{x}}}.$$

Ist daher die Bedingung

$$\frac{\partial F(B)}{\partial \bar{x}} + i \frac{\partial L}{\partial \bar{x}} = -i \frac{\partial F(B)}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial L}{\partial \bar{y}},$$

oder

$$\frac{\partial F(B)}{\partial \bar{x}} = \frac{\partial L}{\partial \bar{y}} \quad \text{und} \quad \frac{\partial F(B)}{\partial \bar{y}} = -\frac{\partial L}{\partial \bar{x}} \quad (4)$$

erfüllt, so ist

$$\frac{d(F(B) + iL)}{d(\bar{x} + i\bar{y})} = \frac{d(F(B) + iL)}{d\bar{x}}, \quad (5)$$

also gleich dem in der Richtung der positiven reellen \bar{x} -Achse genommenen Differentialquotienten. Infolge (4) ist mithin $\frac{d(F(B) + iL)}{d(\bar{x} + i\bar{y})}$ nicht von der Richtung $\frac{d\bar{y}}{d\bar{x}}$, sondern allein von der Lage des Punktes $\bar{x} + i\bar{y}$ abhängig, hat also einen bestimmten eindeutigen Wert. Die Gl. (4) finden aber statt, wenn $F(B) + iL$ eine analytische Funktion von $\bar{x} + i\bar{y}$ ist. Diese Funktion kann vorläufig willkürlich gewählt werden:

$$F(B) + iL = \mathfrak{F}(\bar{x} + i\bar{y}). \quad (6)$$

Ebenso hat $\frac{d(F(B) - iL)}{d(\bar{x} - i\bar{y})}$ einen eindeutigen Wert, wenn die Gl. (4) statthaben, wenn also $F(B) - iL$ eine beliebige analytische Funktion von $\bar{x} - i\bar{y}$ ist:

$$F(B) - iL = \mathfrak{F}_1(\bar{x} - i\bar{y}). \quad (6*)$$

Nach (6) und (6*) würde nun

$$F(B) = \frac{1}{2} (\mathfrak{F}(\bar{x} + i\bar{y}) + \mathfrak{F}_1(\bar{x} - i\bar{y})), \quad L = \frac{1}{2i} (\mathfrak{F}(\bar{x} + i\bar{y}) - \mathfrak{F}_1(\bar{x} - i\bar{y}));$$

da aber $F(B)$ und L reelle Größen sind, so müssen $\mathfrak{F}(\bar{x} + i\bar{y})$ und $\mathfrak{F}_1(\bar{x} - i\bar{y})$ zueinander konjugiert, d. h. es muß $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1$ sein.

Ist also $F(B) + iL$ eine analytische Funktion von $\bar{x} + i\bar{y}$, gleich $\mathfrak{F}(\bar{x} + i\bar{y})$, so wird

$$\frac{1}{m^2} = N^2 \cos^2 B \mathfrak{F}'(\bar{x} + i\bar{y}) \mathfrak{F}'(\bar{x} - i\bar{y}) = N^2 \cos^2 B \left(\left(\frac{\partial F(B)}{\partial \bar{x}} \right)^2 + \left(\frac{\partial L}{\partial \bar{x}} \right)^2 \right), \quad (7)$$

und damit auch m , allein von der Lage des Punktes \bar{x}, \bar{y} abhängen.

Man hätte in dem zuerst angegebenen Ausdrucke für $\frac{1}{m^2}$ die Faktorenzerlegung auch so einrichten können, daß man schließlich zu der Gleichung $F(B) + iL = \mathfrak{F}(\bar{x} - i\bar{y})$ gelangt wäre. Die hierdurch vermittelte Abbildung ist auch konform, aber L und \bar{y} erhalten entgegengesetzte Vorzeichen.

Es handelt sich nun darum, die Funktion \mathfrak{F} näher zu bestimmen. Nach (1) ist

$$\frac{1}{m_0} d\bar{X} = \frac{a\sqrt{1+e'^2}}{\sqrt{Q^2}} dB;$$

folglich wird B eine bestimmte Funktion von $\frac{\bar{X}}{m_0}$ und daher auch $F(B) = \int_0^B \frac{dB}{Q \cos B}$ eine bestimmte Funktion von $\frac{\bar{X}}{m_0}$ sein. Es sei

$$F(B) = f\left(\frac{\bar{X}}{m_0}\right); \quad (8)$$

dann ist

$$f'\left(\frac{\bar{X}}{m_0}\right) = F'(B) \cdot m_0 \frac{dB}{d\bar{X}} = \frac{1}{Q \cos B} \cdot \frac{Q^2}{a\sqrt{1+e'^2}} = \frac{1}{N \cos B}. \quad (8*)$$

Für $L = 0$ wird, wenn man sich auf dem Parallelkreise mit der Breite B nach dem Hauptmeridian bewegt, $\bar{x} = \bar{X}$ und $\bar{y} = 0$; mithin folgt aus (6) und (8):

$$\mathfrak{F}(\bar{X}) = f\left(\frac{\bar{X}}{m_0}\right);$$

also muß

$$\mathfrak{F}(\bar{x} + i\bar{y}) = f\left(\frac{\bar{x} + i\bar{y}}{m_0}\right)$$

sein.

Setzt man

$$\bar{X} = m_0 X, \quad \bar{x} = m_0 x, \quad \bar{y} = m_0 y,$$

$$(9)$$

so geht demnach die Gl. (6) über in:

$$F(B) + iL = f(X) + iL = f(x + iy), \quad (10)$$

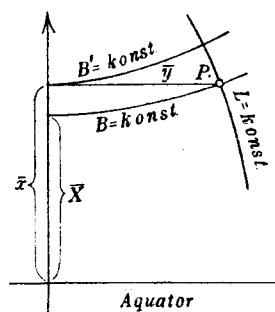


Fig. 1.

1*

wobei nach (8*)

$$f'(x) = \frac{1}{N' \cos B'}, \quad N' = \frac{a\sqrt{1+e'^2}}{\sqrt{1+e'^2 \cos^2 B'}}, \quad (8**)$$

und nach (1)

$$\frac{dB'}{dx} = \frac{\sqrt{(1+e'^2 \cos^2 B')^3}}{a\sqrt{1+e'^2}} = \frac{1}{R'}$$

wird.

Aus (10) folgt umgekehrt

$$x + iy = J(f(X) + iL), \quad (11)$$

wenn J die inverse Funktion von f bedeutet, also

$$J(f(X)) = X \quad (11*)$$

ist. Hierbei ist nach (8*)

$$\frac{dX}{df(X)} = \frac{1}{f'(X)} = N \cos B, \quad N = \frac{a\sqrt{1+e'^2}}{\sqrt{1+e'^2 \cos^2 B}},$$

und nach (8) und (3)

$$\frac{dB}{df(X)} = \frac{1}{f'(B)} = Q \cos B. \quad (12)$$

Die Gl. (10) ist die GAUSSsche Abbildungsgleichung (Werke, Band IX, S. 144).

Durch die Einführung von m_0 wird nach (9) nur eine Verkleinerung oder Vergrößerung des Bildes hervorgerufen.

§ 2.

Formeln für das Vergrößerungsverhältnis und für die Konvergenz des Meridians.

Für das Vergrößerungsverhältnis m ergibt sich aus (7):

$$\left(\frac{m_0}{m}\right)^2 = N^2 \cos^2 B f'(x+iy)f'(x-iy),$$

oder wenn man (8*) benutzt:

$$\left(\frac{m_0}{m}\right)^2 = \frac{f'(x+iy)f'(x-iy)}{(f'(X))^2}. \quad (13)$$

Nach (5) und (10) wird aber

$$f'(x+iy) = \frac{\partial f(X)}{\partial x} + i \frac{\partial L}{\partial x},$$

oder weil sich für die Bedingungen (4) auch

$$\frac{\partial f(X)}{\partial x} = \frac{\partial L}{\partial y}, \quad \frac{\partial f(X)}{\partial y} = -\frac{\partial L}{\partial x} \quad (4*)$$

schreiben lässt:

$$f'(x+iy) = f'(X) \left\{ \frac{\partial X}{\partial x} - i \frac{\partial X}{\partial y} \right\}; \quad (14)$$

entsprechend ist

$$f'(x-iy) = f'(X) \left\{ \frac{\partial X}{\partial x} + i \frac{\partial X}{\partial y} \right\}.$$

Man erhält daher aus (13):

$$\left(\frac{m_0}{m}\right)^2 = \left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial X}{\partial y}\right)^2. \quad (15)$$

Bei der konformen Abbildung des Erdellipsoids in der Ebene versteht GAUSS unter der Konvergenz c des Meridians den spitzen Winkel, den das Bild des Meridians $L = \text{konst.}$ mit einer Parallelen zur Abszissenachse bildet; c hat dasselbe Vorzeichen wie y .

Es ist

$$\tg c = -\frac{d\bar{y}}{d\bar{x}} = -\frac{dy}{dx},$$

wo $\frac{dy}{dx}$ aus der Gleichung

$$\frac{\partial L}{\partial x} dx + \frac{\partial L}{\partial y} dy = 0$$

zu entnehmen ist. Mithin wird, indem man (4*) berücksichtigt:

$$\tg c = \frac{\partial L}{\partial x} : \frac{\partial L}{\partial y} = -\frac{\partial f(X)}{\partial y} : \frac{\partial f(X)}{\partial x} = -\frac{\partial X}{\partial y} : \frac{\partial X}{\partial x}, \quad (16)$$

und hieraus weiter mittels (15):

$$\frac{m_0}{m} \sin c = -\frac{\partial X}{\partial y}, \quad \frac{m_0}{m} \cos c = \frac{\partial X}{\partial x}. \quad (17)$$

Zu diesen Gleichungen gelangt man auch leicht durch geometrische Anschauung. Vergrößert man \bar{x} um $d\bar{x}$, während \bar{y} konstant bleibt, so ist die dazu gehörige Änderung von \bar{X} gleich $\frac{\partial \bar{X}}{\partial \bar{x}} d\bar{x}$. Die Änderung in dem zugehörigen Meridianbogen ist dann $\frac{1}{m_0} \frac{\partial \bar{X}}{\partial \bar{x}} d\bar{x}$. Diese ist aber auch gleich $\frac{1}{m} d\bar{x} \cos c$. Folglich wird $\frac{1}{m_0} \frac{\partial \bar{X}}{\partial \bar{x}} = \frac{1}{m} \cos c$ oder $\frac{m_0}{m} \cos c = \frac{\partial X}{\partial x}$; ebenso findet man die andere Gleichung.

Führt man die Werte aus (17) in (14) ein, so erhält man die Gleichung von GAUSS (Werke, Band IX, S. 153):

$$\frac{f'(x+iy)}{f'(X)} = \frac{m_0}{m} (\cos c + i \sin c) = \frac{m_0}{m} e^{ic}, \quad (18)$$

oder

$$\ln \frac{m}{m_0} - ic = \ln f'(X) - \ln f'(x+iy).$$

Bildet man hierzu die konjugierte Gleichung

$$\ln \frac{m}{m_0} + ic = \ln f'(X) - \ln f'(x-iy),$$

so folgt aus beiden Gleichungen:

$$c = \frac{1}{2i} \ln \frac{f'(x+iy)}{f'(x-iy)}. \quad (19)$$

Aus der ersten Gl. (18) ergibt sich folgendes: Ist

$$f'(x+iy) = p + iq, \quad (20)$$

so hat man

$$\tg c = \frac{q}{p} \quad \text{und} \quad \frac{m}{m_0} = \frac{f'(X)}{\sqrt{p^2 + q^2}} = \frac{f'(X)}{|f'(x+iy)|}. \quad (21)$$

Die Bedingungen (4*) dafür, daß $f(X) + iL$ eine analytische Funktion von $x + iy$ ist, lassen sich auch so darstellen:

$$\frac{\partial^2 f(X)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(X)}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = 0. \quad (22)$$

Da nun nach der zweiten Gl. (18) auch $\ln\left(\frac{m}{m_0}\right) - ic$ eine analytische Funktion von $x + iy$ sein wird, so müssen die beiden Gleichungen:

$$\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left\{ \ln \frac{m}{m_0} - \ln f'(X) \right\} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left\{ \ln \frac{m}{m_0} - \ln f'(X) \right\} = 0 \quad (23)$$

erfüllt sein. Aus der letzteren folgt nach (8*):

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln \left(\frac{m}{m_0} r \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \ln \left(\frac{m}{m_0} r \right) = 0, \quad (24)$$

wenn r den Radius des Parallelkreises in der Breite B bezeichnet. Nun wird aber mit (15)

$$\frac{\partial^2 \ln r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \ln r}{\partial y^2} = \left(\frac{m_0}{m} \right)^2 \frac{\partial^2 \ln r}{\partial X^2} + \frac{\partial \ln r}{\partial X} \left(\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 X}{\partial y^2} \right),$$

oder da nach der ersten Gl. (22) mit Hilfe von (15) und (8*)

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 X}{\partial y^2} = - \left(\frac{m_0}{m} \right)^2 \frac{f''(X)}{f'(X)} = \left(\frac{m_0}{m} \right)^2 \frac{\partial \ln r}{\partial X}$$

wird:

$$\frac{\partial^2 \ln r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \ln r}{\partial y^2} = \left(\frac{m_0}{m} \right)^2 \left\{ \frac{\partial^2 \ln r}{\partial X^2} + \left(\frac{\partial \ln r}{\partial X} \right)^2 \right\} = \left(\frac{m_0}{m} \right)^2 \frac{1}{r} \frac{\partial^2 r}{\partial X^2}.$$

Nach (1) und (9) ist $\frac{d B}{d X} = \frac{1}{R}$; aus $r = N \cos B$ ergibt sich daher $\frac{\partial r}{\partial X} = - \sin B$ und $\frac{\partial^2 r}{\partial X^2} = - \frac{\cos B}{R}$; also wird $\frac{1}{r} \frac{\partial^2 r}{\partial X^2} = - \frac{1}{RN}$. Die Gleichung (24) geht hiermit über in:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln \frac{m}{m_0} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \ln \frac{m}{m_0} = \left(\frac{m_0}{m} \right)^2 \frac{1}{RN}. \quad (24*)$$

Diese Gleichung ist von GAUSS angegeben (Werke, Band IX, S. 155).

Konforme Übertragung der Kugelfläche in die Ebene.

§ 3.

Berechnung von B , L , c und m aus x , y .

Die im vorhergehenden entwickelten Formeln sollen zunächst zur Darstellung der Kugelfläche in der Ebene benutzt werden. Man wird alsdann die Formeln für die transversale Mercatorprojektion erhalten, bei der ein Meridian, der Hauptmeridian, längentreu abgebildet wird.

Die geographischen Koordinaten eines beliebigen Punktes der Kugeloberfläche seien B und L , und die rechtwinkligen Koordinaten des entsprechenden Punktes in der Ebene \bar{x} , \bar{y} . Die Breite B' gehört zum Endpunkte der Abszisse \bar{x} , während die Abszisse \bar{X} der Breite B entspricht. Ferner ist

$$\bar{x} = m_0 x, \quad \bar{y} = m_0 y, \quad \bar{X} = m_0 X; \quad (1)$$

x und X sind die Meridianbögen vom Äquator bis zu den Breiten B' und B .

Für die Kugel, deren Radius A sein soll, ist $e^2 = e'^2 = 0$, $Q = 1$. In Bogenmaß ist, (1) S. 1:

$$B = \frac{X}{A}; \quad (2)$$

nach (3) S. 2 wird nun

$$F(B) = \int_0^B \frac{dB}{\cos B} = \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{B}{2} \right); \quad (3)$$

mithin ist nach (8) S. 3

$$f(X) = \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \frac{X}{A} \right). \quad (3^*)$$

Dementsprechend wird

$$f(x + iy) = \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \frac{x + iy}{A} \right). \quad (3^{**})$$

Die Übertragungsgleichung für die Kugel lautet daher nach (10) S. 3:

$$\ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{B}{2} \right) + i L = \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \frac{x + iy}{A} \right), \quad (4)$$

oder wenn man

$$\frac{x}{A} = \xi, \quad \frac{y}{A} = \eta \quad (5)$$

setzt:

$$\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{B}{2} \right) (\cos L + i \sin L) = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} (\xi + i \eta) \right) = \frac{\cos \xi + \sin i \eta}{\cos i \eta - \sin \xi}. \quad (4^*)$$

Um ξ und η in Winkelmaß zu erhalten, hat man in (5) linker Hand mit $\rho'' = \frac{1}{\operatorname{arc} 1}$ zu multiplizieren.

Aus (4*) ergeben sich die beiden Gleichungen:

$$\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{B}{2} \right) \cos L = \frac{\cos \xi}{\cos i \eta - \sin \xi},$$

$$\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{B}{2} \right) \sin L = \frac{\frac{1}{i} \sin i \eta}{\cos i \eta - \sin \xi};$$

folglich ist

$$\operatorname{tg} L = \frac{\frac{1}{i} \sin i \eta}{\cos \xi} \quad .. \quad (6)$$

und

$$\operatorname{tg}^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{B}{2} \right) = \frac{\cos^2 \xi - \sin^2 i \eta}{(\cos i \eta - \sin \xi)^2} = \frac{\cos i \eta + \sin \xi}{\cos i \eta - \sin \xi}$$

oder

$$\frac{\operatorname{tg}^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{B}{2} \right) - 1}{\operatorname{tg}^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{B}{2} \right) + 1} = \sin B = \frac{\sin \xi}{\cos i \eta}. \quad (7)$$

Sind also die ebenen rechtwinkligen Koordinaten $x = \frac{\bar{x}}{m_0}$ und $y = \frac{\bar{y}}{m_0}$ gegeben, so findet man die entsprechenden geographischen Koordinaten B , L , da nach (1) S. 1 ξ auch gleich B' ist, aus den Gleichungen:

$$\begin{aligned} \sin B &= \frac{\sin B'}{\cos i \eta} = \frac{\sin B'}{\operatorname{tg} \eta}, \\ \operatorname{tg} L &= \frac{\frac{1}{i} \sin i \eta}{\cos B'} = \frac{\operatorname{tg} \eta}{\cos B'}, \end{aligned} \quad (8)$$

für die man auch leicht eine Reihenentwicklung angeben kann. Da

$$B - B' = \frac{1}{\cos B'} (\sin B - \sin B') + \frac{1}{2} \frac{\sin B'}{\cos^3 B'} (\sin B - \sin B')^2 + \frac{1}{6} \frac{\cos^2 B' + 3 \sin^2 B'}{\cos^5 B'} (\sin B - \sin B')^3 + \dots$$

und

$$\sin B - \sin B' = \sin B' \left(\frac{1}{\cos i\eta} - 1 \right) = \sin B' \left(-\frac{1}{2} \eta^2 + \frac{5}{24} \eta^4 - \frac{61}{720} \eta^6 + \dots \right)$$

ist, so wird in Sekunden erhalten:

$$B - B' = -\frac{1}{2} \rho'' \eta^2 \operatorname{tg} B' \left\{ 1 - \frac{5 + 3 \operatorname{tg}^2 B'}{12} \eta^2 + \frac{61 + 90 \operatorname{tg}^2 B' + 45 \operatorname{tg}^4 B'}{360} \eta^4 - \dots \right\}. \quad (8*)$$

Aus der zweiten Gl. (8) folgt, gleichfalls in Sekunden:

$$L \cos B' = \rho'' \eta \left\{ 1 - \frac{1 + 2 \operatorname{tg}^2 B'}{6} \eta^2 + \frac{5 + 28 \operatorname{tg}^2 B' + 24 \operatorname{tg}^4 B'}{120} \eta^4 - \dots \right\}. \quad (8**)$$

Zur Bestimmung der Konvergenz c des Meridians und des Vergrößerungsverhältnisses m hat man aus (3*) zunächst

$$f'(X) = \frac{1}{A} - \frac{1}{\cos \frac{X}{A}};$$

also ist

$$f'(x + iy) = \frac{1}{A} \frac{1}{\cos(\xi + i\eta)},$$

daher wird, wenn man (18) § 2 S. 5 anwendet:

$$\frac{m}{m_0} (\cos c - i \sin c) = \frac{\cos(\xi + i\eta)}{\cos \frac{X}{A}}.$$

Daraus ergibt sich

$$\frac{m}{m_0} \cos c = \frac{\cos \xi \cos i\eta}{\cos \frac{X}{A}}, \quad \frac{m}{m_0} \sin c = \frac{\sin \xi \cdot \frac{1}{i} \sin i\eta}{\cos \frac{X}{A}},$$

und weiter

$$\operatorname{tg} c = \operatorname{tg} \xi \cdot \frac{1}{i} \operatorname{tg} i\eta = \operatorname{tg} B' \cdot \frac{1}{i} \operatorname{tg} i\eta = \operatorname{tg} B' \operatorname{Tg} \eta \quad (9)$$

und

$$\left(\frac{m}{m_0} \right)^2 = \frac{1}{\cos^2 \frac{X}{A}} (\cos^2 i\eta - \sin^2 \xi).$$

Da nun nach (7)

$$\cos^2 B = \cos^2 \frac{X}{A} = \frac{\cos^2 i\eta - \sin^2 \xi}{\cos^2 i\eta}$$

ist, so geht die Gleichung für $\frac{m}{m_0}$ über in

$$\frac{m}{m_0} = \cos i\eta = \operatorname{Cof} \eta. \quad (10)$$

Will man c und $\frac{m_0}{m}$ nach § 2, (16) S. 5 und (15) S. 4, berechnen, so hat man hierzu aus der ersten Gl. (8):

$$\frac{\partial X}{\partial x} = \frac{\cos B'}{\cos B \cos i\eta} \quad \text{und} \quad \frac{\partial X}{\partial y} = -\frac{\sin B' \cdot \frac{1}{i} \operatorname{tg} i\eta}{\cos B \cos i\eta}.$$

In Reihen entwickelt geben (9) und (10):

$$c = \rho'' \eta \operatorname{tg} B' \left\{ 1 - \frac{1}{3} (1 + \operatorname{tg}^2 B') \eta^2 + \frac{1}{15} (1 + \operatorname{tg}^2 B') (2 + 3 \operatorname{tg}^2 B') \eta^4 - \dots \right\}, \quad (9*)$$

$$\frac{m}{m_0} = 1 + \frac{1}{2} \eta^2 + \frac{1}{24} \eta^4 + \frac{1}{720} \eta^6 + \dots \quad (10*)$$

Das Vergrößerungsverhältnis hat auf den Parallelen zur Abszissenachse konstante Werte. Ist $m_0 = 1$, so wächst m von der Abszissenachse an, auf der es 1 ist, bis zur äußersten Parallelen zu dieser. Durch Einführung anderer Werte von m_0 kann m auch kleinere Werte als 1 erhalten. Setzt man fest, daß m auf der Abszissenachse so viel kleiner als 1 sein soll, als es auf der äußersten Parallelen zu dieser größer als 1 ist, so muß

$$m_0 = 1 - \frac{1}{4} \eta_\lambda^2 + \frac{1}{24} \eta_\lambda^4 - \frac{17}{2880} \eta_\lambda^6 + \dots = 1 - \frac{1}{4} \left(\frac{\bar{y}_\lambda}{A} \right)^2 - \frac{1}{12} \left(\frac{\bar{y}_\lambda}{A} \right)^4 - \frac{19}{360} \left(\frac{\bar{y}_\lambda}{A} \right)^6 - \dots$$

gesetzt werden, wo \bar{y}_λ der Abstand der Grenzparallelen und $\eta_\lambda = \frac{\bar{y}_\lambda}{A}$ ist. Der Wert von m_0 ist zugleich der Wert von m auf der Abszissenachse. Auf der äußersten Parallelen ist

$$m_\lambda = 1 + \frac{1}{4} \eta_\lambda^2 - \frac{1}{24} \eta_\lambda^4 + \frac{17}{2880} \eta_\lambda^6 \dots = 1 + \frac{1}{4} \left(\frac{\bar{y}_\lambda}{A} \right)^2 + \frac{1}{12} \left(\frac{\bar{y}_\lambda}{A} \right)^4 + \frac{19}{360} \left(\frac{\bar{y}_\lambda}{A} \right)^6 \dots$$

Jetzt gibt es 2 Parallelen zur Abszissenachse, auf denen m gleich 1 ist, und zwar ist ihre Entfernung von der letzteren:

$$y = \pm \bar{y}_\lambda \sqrt{\frac{1}{2} \left\{ 1 + \frac{1}{48} \left(\frac{\bar{y}_\lambda}{A} \right)^2 - \frac{7}{7680} \left(\frac{\bar{y}_\lambda}{A} \right)^4 \dots \right\}}$$

oder

$$\bar{y} = \pm \bar{y}_\lambda \sqrt{\frac{1}{2} \left\{ 1 + \frac{1}{48} \left(\frac{\bar{y}_\lambda}{A} \right)^2 + \frac{73}{7680} \left(\frac{\bar{y}_\lambda}{A} \right)^4 \dots \right\}}.$$

Setzt man dagegen fest, daß $m = 1$ für $y = \pm \frac{1}{2} \bar{y}_\lambda$ werden soll, so ist

$$m_0 = 1 - \frac{1}{8} \eta_\lambda^2 + \frac{5}{384} \eta_\lambda^4 \dots = 1 - \frac{1}{8} \left(\frac{\bar{y}_\lambda}{A} \right)^2 - \frac{7}{384} \left(\frac{\bar{y}_\lambda}{A} \right)^4 \dots$$

zu setzen. Mit diesem Werte findet man für das Vergrößerungsverhältnis auf der Grenzparallelen:

$$m_\lambda = 1 + \frac{3}{8} \eta_\lambda^2 - \frac{1}{128} \eta_\lambda^4 \dots = 1 + \frac{3}{8} \left(\frac{\bar{y}_\lambda}{A} \right)^2 + \frac{11}{128} \left(\frac{\bar{y}_\lambda}{A} \right)^4 \dots$$

Vgl. hierzu § 23.

§ 4.

Berechnung von x , y , c und m aus B , L .

Sind nun umgekehrt B und L gegeben und x und y zu bestimmen, so hat man die Gl. (6) und (7) nach ξ und η aufzulösen. Man erhält aus ihnen zunächst

$$\begin{aligned} \sin L &= \frac{\frac{1}{i} \sin i\eta}{\sqrt{\cos^2 i\eta - \sin^2 \xi}}, & \cos L &= \frac{\cos \xi}{\sqrt{\cos^2 i\eta - \sin^2 \xi}}, \\ \cos B &= \frac{\sqrt{\cos^2 i\eta - \sin^2 \xi}}{\cos i\eta}, & \operatorname{tg} B &= \frac{\sin \xi}{\sqrt{\cos^2 i\eta - \sin^2 \xi}}; \end{aligned}$$

daraus ergibt sich:

$$\sin L \cos B = \frac{1}{i} \operatorname{tg} i\eta = \operatorname{Tg} \eta, \quad (11)$$

$$\frac{\operatorname{tg} B}{\cos L} = \operatorname{tg} \xi. \quad (12)$$

Aus (11) folgt:

$$\eta = \frac{y}{A} = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \sin L \cos B}{1 - \sin L \cos B} = \sin L \cos B \left\{ 1 + \frac{1}{3} (\sin L \cos B)^2 + \frac{1}{5} (\sin L \cos B)^4 + \dots \right\}. \quad (11^*)$$

Will man (12) in eine Reihe entwickeln, so hat man zunächst, indem man gleichzeitig B' für ξ schreibt:

$$B' - B = \cos^3 B (\operatorname{tg} B' - \operatorname{tg} B) - \sin B \cos^3 B (\operatorname{tg} B' - \operatorname{tg} B)^2 + (\cos^4 B - \frac{4}{3} \cos^6 B) (\operatorname{tg} B' - \operatorname{tg} B)^3 \dots;$$

da nun nach (12)

$$\operatorname{tg} B' - \operatorname{tg} B = \operatorname{tg} B (\sec L - 1) = \operatorname{tg} B \left(\frac{1}{2} L^2 + \frac{5}{24} L^4 + \frac{61}{720} L^6 + \dots \right)$$

ist, so wird, wenn man noch

$$\frac{L}{\rho''} \cos B = L'$$

setzt, wo L in Sekunden vorausgesetzt ist:

$$B' - B = \frac{x - X}{A} = \frac{1}{2} L'^2 \operatorname{tg} B \left\{ 1 + \frac{5 - \operatorname{tg}^2 B}{12} L'^2 + \frac{61 - 58 \operatorname{tg}^2 B + \operatorname{tg}^4 B}{360} L'^4 + \dots \right\}. \quad (12^*)$$

Werden in Gl. (9) die Werte aus (11) und (12) eingeführt, so geht sie über in die Gleichung

$$\operatorname{tg} c = \operatorname{tg} L \sin B. \quad (13)$$

Da nach (11) und (13)

$$\frac{1}{\cos^2 i\eta} = 1 - \sin^2 L \cos^2 B = \cos^2 L (1 + \operatorname{tg}^2 L \sin^2 B) = \frac{\cos^2 L}{\cos^2 c}$$

ist, so wird nach (10):

$$\frac{m}{m_0} = \frac{\cos c}{\cos L}. \quad (14)$$

Es sei nun u die Kurve auf der Kugel, deren Bild in der Ebene die Ordinate \bar{y} ist; dann ist nach (10):

$$du = \frac{d\bar{y}}{m} = \frac{m_0}{m} dy = \frac{dy}{\cos i \frac{y}{A}}$$

oder

$$\frac{u}{A} = \frac{1}{i} \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + i \frac{1}{2} \frac{y}{A} \right)$$

oder

$$\frac{1}{i} \cdot \frac{e^{\frac{u}{A}} - 1}{e^{\frac{u}{A}} + 1} = \operatorname{tg} \frac{1}{2} \frac{u}{A} = \frac{1}{i} \operatorname{tg} i \frac{1}{2} \frac{y}{A}. \quad (15)$$

Hiernach wird

$$\frac{1}{i} \operatorname{tg} i \frac{y}{A} = \sin \frac{u}{A}, \quad \frac{1}{i} \sin i \frac{y}{A} = \operatorname{tg} \frac{u}{A}, \quad \cos i \frac{y}{A} = \frac{1}{\cos \frac{u}{A}}, \quad \frac{y}{A} = \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \frac{u}{A} \right). \quad (16)$$

Ersetzt man mit Hilfe dieser Beziehungen in den vorhergehenden Gleichungen y durch u , so erhält man:

$$\sin B = \sin B' \cos \frac{u}{A}, \quad \operatorname{tg} L \cos B' = \operatorname{tg} \frac{u}{A}, \quad \operatorname{tg} c = \operatorname{tg} B' \sin \frac{u}{A}, \quad \text{usw.}$$

Das sind aber die Formeln, die für das sphärische Dreieck gelten, dessen Seiten $\frac{\pi}{2} - B$, $\frac{\pi}{2} - B'$, $\frac{u}{A}$ und dessen Winkel $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2} - c$, L sind; mithin ist die Ordinate \bar{y} das Bild von dem Stück u eines größten Kreises, der auf dem Hauptmeridian senkrecht steht. Daraus ergibt sich weiter, daß die Parallelen zur Abszissenachse, $\bar{y} = \text{konst.}$, zum Hauptmeridian parallele Kugelkreise darstellen.

Setzt man umgekehrt in die Gleichungen, die für das angegebene sphärische Dreieck gelten, die Beziehungen (15) und (16) ein, so ergeben sich die Formeln der transversalen Mercatorprojektion. Man hat daher z. B. für (8) auch die folgenden Formeln:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{1}{2} (B' - B) &= \operatorname{tg} \frac{1}{2} c \cdot \frac{1}{i} \operatorname{tg} \frac{1}{2} i\eta, \\ \operatorname{tg} \frac{1}{2} L &= \operatorname{tg} \frac{1}{2} c \cdot \frac{\cos \frac{1}{2} (B' - B)}{\sin \frac{1}{2} (B' + B)}, \end{aligned} \tag{8*}$$

wobei c nach (9) zu berechnen oder aus

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} c = \operatorname{tg} \frac{1}{2} (B' + B) \cdot \frac{1}{i} \operatorname{tg} \frac{1}{2} i\eta$$

abzuleiten ist.

Konforme Übertragung des Erdellipsoids in die Ebene.

Erste Ableitung der Übertragungsformeln.

§ 5.

Entwicklung von $f(X)$.

Um die Abbildungsgleichung (10) § 1 S. 3 anwenden zu können, muß man $f(X)$ bzw. $f(x + iy)$ erkennen. Die Funktion $f(X)$, die sich hier nicht wie bei der Mercatordarstellung der Kugel in einfacher geschlossener Form darstellen lässt, erhält man, indem man in der aus (3) § 1 S. 2 folgenden Gleichung

$$F(B) = (1 - e^2) \int_0^B \frac{dB}{\cos B (1 - e^2 \sin^2 B)} = \ln \left\{ \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{B}{2} \right) \left(\frac{1 - e \sin B}{1 + e \sin B} \right)^{\frac{1}{2} e} \right\} \tag{1}$$

das Argument B durch X nach (1) § 1 S. 1 mittels der Gleichung

$$X = a(1 - e^2) \int_0^B \frac{dB}{V(1 - e^2 \sin^2 B)^{\frac{3}{2}}} \tag{2}$$

2*

ersetzt. Es ist also auch, wenn man

$$\frac{(1 - e^2) dB}{\cos B(1 - e^2 \sin^2 B)} = \frac{db}{\cos b} \quad (3)$$

setzt:

$$F(B) = \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{b}{2} \right) = f(X), \quad (4)$$

worin b durch X auszudrücken ist.

Zunächst ist demnach eine Beziehung zwischen b und X herzustellen. Dazu braucht man aber eine Gleichung zwischen B und X .

Nun folgt aus (2) bekanntlich, wenn

$$n = \frac{1 - \sqrt{1 - e^2}}{1 + \sqrt{1 - e^2}},$$

also

$$e^2 = 4n - 8n^3 + 12n^5 - 16n^7 + \dots$$

eingeführt wird, und wenn man Glieder mit n^5 vernachlässigt¹⁾:

$$X = \frac{a}{1+n} \left\{ \left(1 + \frac{1}{4} n^2 + \frac{1}{64} n^4 \right) B - \frac{3}{2} \left(n - \frac{1}{8} n^3 \right) \sin 2B + \frac{15}{16} \left(n^2 - \frac{1}{4} n^4 \right) \sin 4B - \frac{35}{48} n^3 \sin 6B + \frac{315}{512} n^4 \sin 8B \right\}.$$

Für $B = \frac{\pi}{2}$ ergibt sich hieraus als Länge des Meridianquadranten:

$$\mathfrak{M} = \frac{a\pi}{2(1+n)} \left(1 + \frac{1}{4} n^2 + \frac{1}{64} n^4 + \dots \right).$$

Wird

$$A = \frac{2\mathfrak{M}}{\pi}, \quad \rho'' \frac{X}{A} = \frac{\psi}{\text{Sek.}} \quad (5)$$

gesetzt, so erhält man mithin bis auf Glieder von der Ordnung n^5 , wenn B , das vorher im ersten Klammern glied als Arcus zu verstehen war, jetzt in Winkelmaß vorausgesetzt wird:

$$\frac{\psi - B}{\rho''} = - \left(\frac{3}{2} n - \frac{9}{16} n^3 \right) \sin 2B + \left(\frac{15}{16} n^2 - \frac{15}{32} n^4 \right) \sin 4B - \frac{35}{48} n^3 \sin 6B + \frac{315}{512} n^4 \sin 8B. \quad (6)$$

Nun ist die Umkehrung der Gleichung

$$u = v - g_1 \sin 2v - g_2 \sin 4v - g_3 \sin 6v - g_4 \sin 8v - \dots,$$

worin g_1 eine kleine Größe erster, g_2 eine kleine Größe zweiter Ordnung usw. ist:

$$v = u + h_1 \sin 2u + h_2 \sin 4u + h_3 \sin 6u + h_4 \sin 8u + \dots$$

mit

$$h_1 = g_1 - g_1 \left(g_2 + \frac{1}{2} g_1^2 \right) - \dots, \quad h_2 = g_2 + g_1^2 - 4g_1^2 g_2 - 2g_1 \left(g_3 + \frac{2}{3} g_1^3 \right) - \dots,$$

$$h_3 = g_3 + 3g_1 \left(g_2 + \frac{1}{2} g_1^2 \right) + \dots, \quad h_4 = g_4 + 2g_2^2 + 8g_1^2 g_2 + 4g_1 \left(g_5 + \frac{2}{3} g_1^3 \right) + \dots;$$

vernachlässigt sind hierbei Glieder 5. Ordnung.

1) F. R. HELMERT, Die mathem. u. physik. Theorien d. höheren Geodäsie. Leipzig 1880. Band I, S. 46/47.

Danach findet man aus (6):

$$\frac{B - \Psi}{\rho''} = \left(\frac{3}{2} n - \frac{27}{32} n^3 \right) \sin 2\Psi + \left(\frac{21}{16} n^2 - \frac{55}{32} n^4 \right) \sin 4\Psi + \frac{151}{96} n^3 \sin 6\Psi + \frac{1097}{512} n^4 \sin 8\Psi. \quad (7)$$

Eine ähnliche Reihe stellen wir nun aus (3) zwischen b und B her und eliminieren darauf B mittels der letzten Gleichung.

In die Gleichung (3):

$$\frac{db}{dB} = \frac{\cos b}{\cos B} (1 - e^2)(1 + e^2 \sin^2 B + e^4 \sin^4 B + \dots)$$

setzen wir

$$b = B + c_1 \sin B \cos B + c_2 \sin^3 B \cos B + c_3 \sin^5 B \cos B + c_4 \sin^7 B \cos B + \dots,$$

worin die c zu bestimmende Koeffizienten sind. Alsdann ist

$$\frac{db}{dB} = 1 + c_1 + (3c_2 - 2c_1) \sin^2 B + (5c_3 - 4c_2) \sin^4 B + (7c_4 - 6c_3) \sin^6 B + \dots$$

und

$$\cos b = \cos B \left\{ 1 - (b - B) \operatorname{tg} B - \frac{1}{2}(b - B)^2 + \frac{1}{4}(b - B)^3 \operatorname{tg} B + \frac{1}{24}(b - B)^4 + \dots \right\}$$

oder

$$\frac{\cos b}{\cos B} = 1 - C_1 \sin^2 B - C_2 \sin^4 B - C_3 \sin^6 B - \dots$$

mit

$$C_1 = c_1 + \frac{1}{2} c_1^2, \quad C_2 = c_2 + c_1 c_2 - \frac{1}{2} c_1^2 - \frac{1}{6} c_1^3 - \frac{1}{24} c_1^4,$$

$$C_3 = c_3 + c_1 c_3 - c_1 c_2 + \frac{1}{2} c_2^2 - \frac{1}{2} c_1^2 c_2 - \frac{1}{6} c_1^3 c_2 + \frac{1}{6} c_1^3 + \frac{1}{12} c_1^4 + \frac{1}{120} c_1^5 + \frac{1}{720} c_1^6, \dots$$

Die rechte Seite der obigen Differentialgleichung geht damit über in

$$(1 - e^2)(1 + D_1 \sin^2 B + D_2 \sin^4 B + D_3 \sin^6 B + \dots),$$

wobei

$$D_1 = e^2 - C_1, \quad D_2 = e^2 D_1 - C_2, \quad D_3 = e^2 D_2 - C_3, \dots$$

ist. Vergleicht man diesen Wert mit dem Ausdrucke für $\frac{db}{dB}$, so ergeben sich zur Bestimmung der c die Gleichungen:

$$c_1 = -e^2, \quad 3c_2 - 2c_1 = (1 - e^2)D_1, \quad 5c_3 - 4c_2 = (1 - e^2)D_2; \quad 7c_4 - 6c_3 = (1 - e^2)D_3 \text{ usw.},$$

aus denen der Reihe nach folgt:

$$C_1 = -\frac{1}{2}(2e^2 - e^4) \quad c_2 = -\frac{1}{6}(5e^4 - e^6)$$

$$C_2 = -\frac{1}{24}(32e^4 - 28e^6 + 5e^8) \quad c_3 = -\frac{1}{120}(104e^6 - 45e^8 + 5e^{10})$$

$$C_3 = -\frac{1}{720}(1344e^6 - 1624e^8 + 566e^{10} - 61e^{12}) \quad c_4 = -\frac{1}{720}(4948e^8 - 3360e^{10} + 777e^{12} - 61e^{14}), \text{ usw.}$$

Mithin ist, wenn $b - B$ in Sekunden vorausgesetzt wird:

$$\begin{aligned} \frac{b - B}{\rho''} &= -e^2 \sin B \cos B - \frac{1}{6}(5e^4 - e^6) \sin^3 B \cos B - \frac{1}{120}(104e^6 - 45e^8 + 5e^{10}) \sin^5 B \cos B \\ &\quad - \frac{1}{720}(4948e^8 - 3360e^{10} + 777e^{12} - 61e^{14}) \sin^7 B \cos B - \dots \end{aligned}$$

oder wenn man zu den Sinus der mehrfachen Winkel übergeht und gleichzeitig n einführt:

$$\begin{aligned} \frac{b - B}{\rho''} = & - \left(2n - \frac{2}{3}n^2 - \frac{4}{3}n^3 + \frac{82}{45}n^4 \right) \sin 2B + \left(\frac{5}{3}n^2 - \frac{16}{15}n^3 - \frac{13}{9}n^4 \right) \sin 4B \\ & - \left(\frac{26}{15}n^3 - \frac{34}{21}n^4 \right) \sin 6B + \frac{1237}{630}n^4 \sin 8B. \end{aligned} \quad (8)$$

Umgekehrt ist hiernach:

$$\begin{aligned} \frac{B - b}{\rho''} = & \left(2n - \frac{2}{3}n^2 - 2n^3 + \frac{116}{45}n^4 \right) \sin 2b + \left(\frac{7}{3}n^2 - \frac{8}{5}n^3 - \frac{227}{45}n^4 \right) \sin 4b \\ & + \left(\frac{56}{15}n^3 - \frac{136}{35}n^4 \right) \sin 6b + \frac{4279}{630}n^4 \sin 8b. \end{aligned} \quad (9)$$

Dabei sind wie vorher und wie auch stets weiterhin Glieder mit n^5 vernachlässigt.

In der Reihe (8) wird nun nach (7) B durch Ψ ersetzt. Dazu bilden wir noch mittels des TAYLORSchen Satzes

$$\begin{aligned} \sin 2B &= \left(1 - \frac{33}{16}n^2 \right) \sin 2\Psi + \left(\frac{3}{2}n - \frac{13}{3}n^3 \right) \sin 4\Psi + \frac{39}{16}n^2 \sin 6\Psi + \frac{197}{48}n^3 \sin 8\Psi + \{n^4\} \\ \sin 4B &= -3n \sin 2\Psi + (1 - 9n^2) \sin 4\Psi + 3n \sin 6\Psi + \frac{57}{8}n^2 \sin 8\Psi + \{n^3\} \\ \sin 6B &= -\frac{9}{2}n \sin 4\Psi + \sin 6\Psi + \frac{9}{2}n \sin 8\Psi + \{n^2\} \\ \sin 8B &= \sin 8\Psi + \{n\}. \end{aligned}$$

Hiermit geht (8) über in:

$$\begin{aligned} \frac{b - \Psi}{\rho''} = & - \left(\frac{1}{2}n - \frac{2}{3}n^2 + \frac{37}{96}n^3 - \frac{1}{360}n^4 \right) \sin 2\Psi - \left(\frac{1}{48}n^2 + \frac{1}{15}n^3 - \frac{437}{1440}n^4 \right) \sin 4\Psi \\ & - \left(\frac{17}{480}n^3 - \frac{37}{840}n^4 \right) \sin 6\Psi - \frac{4397}{161280}n^4 \sin 8\Psi. \end{aligned} \quad (10)$$

Die Umkehrung dieser Gleichung, die später ebenfalls gebraucht wird, liefert:

$$\begin{aligned} \frac{\Psi - b}{\rho''} = & \left(\frac{1}{2}n - \frac{2}{3}n^2 + \frac{5}{16}n^3 + \frac{41}{180}n^4 \right) \sin 2b + \left(\frac{13}{48}n^2 - \frac{3}{5}n^3 + \frac{557}{1440}n^4 \right) \sin 4b \\ & + \left(\frac{61}{240}n^3 - \frac{103}{140}n^4 \right) \sin 6b + \frac{49561}{161280}n^4 \sin 8b. \end{aligned} \quad (11)$$

Der Wert von b aus (10) ist nun endlich in $\ln \operatorname{tg}(45^\circ + \frac{1}{2}b)$ einzutragen, um $f(X)$ nach (4) zu erhalten. Es ist aber nach dem TAYLORSchen Satze:

$$\begin{aligned} \ln \operatorname{tg}(45^\circ + \frac{1}{2}b) &= \ln \operatorname{tg}(45^\circ + \frac{1}{2}\Psi) + \frac{b - \Psi}{\rho'' \cos \Psi} + \frac{1}{2} \left(\frac{b - \Psi}{\rho'' \cos \Psi} \right)^2 \sin \Psi + \frac{1}{6} \left(\frac{b - \Psi}{\rho'' \cos \Psi} \right)^3 (1 + \sin^2 \Psi) \\ & + \frac{1}{24} \left(\frac{b - \Psi}{\rho'' \cos \Psi} \right)^4 (5 + \sin^2 \Psi) \sin \Psi + \dots \end{aligned}$$

Aus (10) ergibt sich zunächst:

$$\begin{aligned} \frac{b - \Psi}{\rho'' \cos \Psi} = & - \left(n - \frac{11}{8}n^2 + \frac{17}{24}n^3 + \frac{1057}{2304}n^4 \right) \sin \Psi - \left(\frac{1}{24}n^2 + \frac{1}{16}n^3 - \frac{1783}{3840}n^4 \right) \sin 3\Psi \\ & - \left(\frac{17}{240}n^3 - \frac{1643}{11520}n^4 \right) \sin 5\Psi - \frac{4397}{80640}n^4 \sin 7\Psi, \end{aligned}$$

1) Diese Übertragung ist auch von E. HAMMER, Zur Abbildung des Erdellipsoids, Zeitschrift für Vermessungs-wesen, Band XX (1891), behandelt worden.

womit man weiter findet:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left(\frac{b - \Psi}{\rho'' \cos \Psi} \right)^2 \sin \Psi = & \left(\frac{3}{8} n^2 - \frac{25}{24} n^3 + \frac{5711}{4608} n^4 \right) \sin \Psi - \left(\frac{1}{8} n^2 - \frac{35}{96} n^3 + \frac{1097}{2560} n^4 \right) \sin 3\Psi \\ & - \left(\frac{1}{96} n^3 - \frac{791}{23040} n^4 \right) \sin 5\Psi - \frac{413}{23040} n^4 \sin 7\Psi, \end{aligned}$$

$$\frac{1}{6} \left(\frac{b - \Psi}{\rho'' \cos \Psi} \right)^3 (1 + \sin^2 \Psi) = - \left(\frac{11}{48} n^3 - \frac{245}{256} n^4 \right) \sin \Psi + \left(\frac{3}{32} n^3 - \frac{311}{768} n^4 \right) \sin 3\Psi - \left(\frac{1}{96} n^3 - \frac{41}{768} n^4 \right) \sin 5\Psi - \frac{1}{768} n^4 \sin 7\Psi,$$

$$\frac{1}{24} \left(\frac{b - \psi}{\rho'' \cos \psi} \right)^4 (5 + \sin^2 \psi) \sin \psi = \frac{235}{1536} n^4 \sin \psi - \frac{121}{1536} n^4 \sin 3\psi + \frac{9}{512} n^4 \sin 5\psi - \frac{1}{1536} n^4 \sin 7\psi.$$

Folglich wird:

$$f(X) = \ln \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{1}{2} b \right) \quad (12)$$

$$= \ln \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{1}{2} \Psi \right) - \alpha_1 \sin \Psi - \alpha_2 \sin 3\Psi - \alpha_3 \sin 5\Psi - \alpha_4 \sin 7\Psi - \dots$$

mit

$$\Psi_{\text{Sek.}} = \rho'' \frac{X}{A}, \quad A = \frac{2\mathfrak{M}}{\pi}, \quad (13)$$

und

$$\alpha_1 = n - \frac{7}{4}n^2 + \frac{95}{48}n^3 - \frac{121}{64}n^4 \dots$$

$$\alpha_2 = -\frac{1}{6}n^2 + \frac{19}{48}n^3 + \frac{43}{96}n^4 \dots$$

$$\alpha_3 = \frac{11}{120} n^3 - \frac{119}{480} n^4 \dots$$

$$\alpha_4 = \frac{25}{326} n^4 \dots$$

s 6.

Ableitung der geographischen Koordinaten, sowie der Konvergenz des Meridians und des Vergrößerungsverhältnisses aus den ebenen rechtwinkligen Koordinaten.

I. Nachdem im vorhergehenden eine Darstellung von $f(X)$ erhalten ist, läßt sich nun auch leicht $f(x + iy)$ bilden. Setzt man

$$\rho'' \frac{x}{A} = \xi, \quad \rho'' \frac{y}{A} = \eta, \quad \text{mit} \quad A = \frac{2\mathfrak{M}}{\pi}, \quad (15)$$

so wird entsprechend (12):

$$f(x+iy) = \ln \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{1}{2}(\xi + i\eta) \right) - \alpha_1 \sin(\xi + i\eta) - \alpha_2 \sin 3(\xi + i\eta) - \alpha_3 \sin 5(\xi + i\eta) - \alpha_4 \sin 7(\xi + i\eta) - \dots \quad (16)$$

Wird

$$\operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{1}{2} (\xi + i\eta) \right) = \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{1}{2} \beta \right) e^{i\lambda} \quad (17)$$

gesetzt, so ist aber nach (4*), (6) und (7), § 3 S. 7:

$$\begin{aligned} \frac{\frac{1}{i} \sin i\eta}{\cos \xi} &= \frac{\text{Sin } \eta}{\cos \xi} = \operatorname{tg} \lambda \\ \frac{\sin \xi}{\cos i\eta} &= \frac{\sin \xi}{\operatorname{Cos } \eta} = \sin \beta. \end{aligned} \quad (17*)$$

Wenn demnach β und λ die in (17*) gegebene Bedeutung haben, so ist

$$\begin{aligned} f(x + iy) &= \ln \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{1}{2} \beta \right) - \alpha_1 \sin \xi \cos i\eta - \alpha_2 \sin 3\xi \cos 3i\eta - \alpha_3 \sin 5\xi \cos 5i\eta - \dots \\ &\quad + i \left\{ \lambda - \alpha_1 \cos \xi \frac{\sin i\eta}{i} - \alpha_2 \cos 3\xi \frac{\sin 3i\eta}{i} - \alpha_3 \cos 5\xi \frac{\sin 5i\eta}{i} - \dots \right\}. \end{aligned} \quad (18)$$

Andererseits ist nach (10) § 1 S. 3, sowie nach (4):

$$f(x + iy) = F(B) + iL = \ln \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{1}{2} b \right) + iL.$$

Mithin muß

$$\left. \begin{aligned} \log \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{1}{2} b \right) &= \log \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{1}{2} \beta \right) \\ &\quad - M \{ \alpha_1 \sin \xi \operatorname{Cos } \eta + \alpha_2 \sin 3\xi \operatorname{Cos } 3\eta + \alpha_3 \sin 5\xi \operatorname{Cos } 5\eta + \alpha_4 \sin 7\xi \operatorname{Cos } 7\eta + \dots \} \\ L - \lambda &= - \rho'' \{ \alpha_1 \cos \xi \operatorname{Sin } \eta + \alpha_2 \cos 3\xi \operatorname{Sin } 3\eta + \alpha_3 \cos 5\xi \operatorname{Sin } 5\eta + \alpha_4 \cos 7\xi \operatorname{Sin } 7\eta + \dots \} \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

sein. M = Modul der BRIGGSchen Logarithmen. Das zu b gehörige B erhält man durch die Gl. (9).

Die Gl. (19) stimmen mit den von GAUSS (Werke, Band IX S. 193) gegebenen überein, wenn für die α die dort benutzten Zahlenwerte eingesetzt werden. Da zwischen β , λ und ξ , η die für die Mercatorprojektion geltenden Beziehungen bestehen, so kann man statt (17*) auch die folgenden Formeln anwenden:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} c &= \operatorname{tg} \xi \operatorname{Tg } \eta \\ \operatorname{tg} \frac{1}{2} (\xi - \beta) &= \operatorname{tg} \frac{1}{2} c \operatorname{Tg } \frac{1}{2} \eta \\ \operatorname{tg} \frac{1}{2} \lambda &= \operatorname{tg} \frac{1}{2} c \frac{\cos \frac{1}{2} (\xi - \beta)}{\sin \frac{1}{2} (\xi + \beta)}. \end{aligned} \quad (17**)$$

Sind also die ebenen rechtwinkligen Koordinaten x, y gegeben, so liefern die Gl. (15), (17*), bzw. (17**), (19) und (9) die geographischen Koordinaten L und B .

II. Zur Berechnung der Konvergenz c des Meridians und des Vergrößerungsverhältnisses m benutzen wir die Formeln (20) und (21), § 2 S. 5.

Nach (12) und (13) ist:

$$f'(X) = \frac{1}{A} \left(\frac{1}{\cos \Psi} - \alpha_1 \cos \Psi - 3\alpha_2 \cos 3\Psi - 5\alpha_3 \cos 5\Psi - 7\alpha_4 \cos 7\Psi - \dots \right); \quad (20)$$

hiernach oder auch nach (15) und (16) wird:

$$\begin{aligned} f'(x + iy) &= \frac{1}{A} \left(\frac{1}{\cos (\xi + i\eta)} - \alpha_1 \cos (\xi + i\eta) - 3\alpha_2 \cos 3(\xi + i\eta) - 5\alpha_3 \cos 5(\xi + i\eta) - \dots \right) \\ &= p + iq. \end{aligned}$$

Da

$$\cos^2 \xi \cos^2 i\eta - \sin^2 \xi \sin^2 i\eta = \cos^2 i\eta - \sin^2 \xi = \cos^2 \xi - \sin^2 i\eta = \cos^2 i\eta \cos^2 \beta = \frac{\cos^2 \xi}{\cos^2 \lambda}$$

ist, so hat man demnach:

$$Ap = \frac{\cos \xi \operatorname{Cof} \eta}{\operatorname{Cof}^2 \eta \cos^2 \beta} - \alpha_1 \cos \xi \operatorname{Cof} \eta - 3\alpha_2 \cos 3\xi \operatorname{Cof} 3\eta - 5\alpha_3 \cos 5\xi \operatorname{Cof} 5\eta - 7\alpha_4 \cos 7\xi \operatorname{Cof} 7\eta - \dots \quad (21)$$

$$Aq = \frac{\sin \xi \operatorname{Sin} \eta}{\operatorname{Cof}^2 \eta \cos^2 \beta} + \alpha_1 \sin \xi \operatorname{Sin} \eta + 3\alpha_2 \sin 3\xi \operatorname{Sin} 3\eta + 5\alpha_3 \sin 5\xi \operatorname{Sin} 5\eta + 7\alpha_4 \sin 7\xi \operatorname{Sin} 7\eta + \dots$$

Nach (21) § 2 S. 5 ist nun

$$\operatorname{tg} c = \frac{q}{p} \quad (22)$$

und

$$\frac{m}{m_0} = \frac{f'(X)}{\sqrt{p^2 + q^2}}.$$

Zur Berechnung von $f'(X)$ in der letzten Gleichung könnte man die Gl. (20) benutzen, nachdem man vorher φ aus B nach (6) oder aus b nach (11) berechnet hätte; das wäre aber ein Umweg, denn der auf diese Weise erhaltene Wert ist nach (8*) § 1 S. 3:

$$f'(X) = \frac{1}{N \cos B}.$$

Es ist hiernach auch:

$$\frac{m}{m_0} = \frac{1}{N \cos B \sqrt{p^2 + q^2}} = \frac{1}{N \cos B} \cdot \frac{\cos c}{p} = \frac{1}{N \cos B} \cdot \frac{\sin c}{q}. \quad (22*)$$

§ 7.

Andere Formeln für die geographischen Koordinaten, die Meridiankonvergenz und das Vergrößerungsverhältnis.

Die im vorhergehenden Paragraphen entwickelten Formeln lassen sich durch andere ersetzen, die für die numerische Rechnung etwas bequemer sind.

I. Nach S. 16 war:

$$f(x + iy) = \ln \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{1}{2} b \right) + iL; \quad (23)$$

setzt man nun andererseits

$$f(x + iy) = \ln \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{1}{2} (\xi' + i\eta') \right), \quad (24)$$

wobei

$$\rho'' \frac{x'}{A} = \xi', \quad \rho'' \frac{y'}{A} = \eta', \quad A = \frac{2\pi}{\pi},$$

sein soll, so bestehen zwischen b , L und ξ' , η' infolge der Gleichung

$$\operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{1}{2} (\xi' + i\eta') \right) = \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{1}{2} b \right) \cdot e^{iL}$$

nach (4) S. 7 die für die Mercatorprojektion der Kugel geltenden Formeln. Nach (6) und (7), § 3 S. 7 wird mithin

$$\operatorname{tg} L = \frac{\operatorname{Sin} \eta'}{\cos \xi'}, \quad \sin b = \frac{\sin \xi'}{\operatorname{Cof} \eta'}. \quad (25)$$

Statt dessen kann man auch die folgenden Formeln benutzen, vgl. (8*) S. 11:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} c' &= \operatorname{tg} \xi' \operatorname{Tg} \eta' \quad \text{oder} \quad \operatorname{tg} \frac{1}{2} c' = \operatorname{tg} \frac{1}{2} (\xi' + b) \operatorname{Tg} \frac{1}{2} \eta' \\ \operatorname{tg} \frac{1}{2} (\xi' - b) &= \operatorname{tg} \frac{1}{2} c' \operatorname{Tg} \frac{1}{2} \eta' \\ \operatorname{tg} \frac{1}{2} L &= \operatorname{tg} \frac{1}{2} c' \frac{\cos \frac{1}{2} (\xi' - b)}{\sin \frac{1}{2} (\xi' + b)}. \end{aligned} \quad (25*)$$

Verbindet man nun, um zu Gleichungen für ξ' und η' zu gelangen, mit Gl. (24) die Gl. (16), so hat man:

$$\begin{aligned} \ln \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{1}{2} (\xi' + i\eta') \right) &= \ln \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{1}{2} (\xi + i\eta) \right) - \alpha_1 \sin(\xi + i\eta) - \alpha_2 \sin 3(\xi + i\eta) \\ &\quad - \alpha_3 \sin 5(\xi + i\eta) - \alpha_4 \sin 7(\xi + i\eta) - \dots \end{aligned}$$

Aus dieser Gleichung folgt aber, der Gl. (10) entsprechend, wie die Entwicklung von (12) zeigt, die auf (10) beruht:

$$\frac{\xi' + i\eta'}{\rho''} = \frac{\xi + i\eta}{\rho''} - \beta_1 \sin 2(\xi + i\eta) - \beta_2 \sin 4(\xi + i\eta) - \beta_3 \sin 6(\xi + i\eta) - \beta_4 \sin 8(\xi + i\eta) - \dots, \quad (26)$$

wobei

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \frac{1}{2} n - \frac{2}{3} n^2 + \frac{37}{96} n^3 - \frac{1}{360} n^4 \dots \\ \beta_2 &= \frac{1}{48} n^3 + \frac{1}{15} n^5 - \frac{437}{1440} n^6 \dots \\ \beta_3 &= \frac{17}{480} n^5 - \frac{37}{840} n^7 \dots \\ \beta_4 &= \frac{4397}{161280} n^7 \dots \end{aligned} \quad (26*)$$

ist.

Aus (26) ergibt sich weiter:

$$\begin{aligned} \xi' - \xi &= -\rho'' \beta_1 \sin 2\xi \operatorname{Sek} 2\eta - \rho'' \beta_2 \sin 4\xi \operatorname{Sek} 4\eta - \rho'' \beta_3 \sin 6\xi \operatorname{Sek} 6\eta - \rho'' \beta_4 \sin 8\xi \operatorname{Sek} 8\eta - \dots \\ \eta' - \eta &= -\beta_1 \cos 2\xi \operatorname{Sin} 2\eta - \beta_2 \cos 4\xi \operatorname{Sin} 4\eta - \beta_3 \cos 6\xi \operatorname{Sin} 6\eta - \beta_4 \cos 8\xi \operatorname{Sin} 8\eta - \dots \end{aligned} \quad (27)$$

Die erste dieser Gleichungen lässt sich auch durch die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} \xi - \xi' &= \rho'' \beta_1 \sin 2\xi + \rho'' \beta_2 \sin 4\xi + \rho'' \beta_3 \sin 6\xi + \rho'' \beta_4 \sin 8\xi + \dots \\ \xi - \xi' &= 2\rho'' \beta_1 \sin 2\xi \operatorname{Sin}^2 \eta + 2\rho'' \beta_2 \sin 4\xi \operatorname{Sin}^2 2\eta + 2\rho'' \beta_3 \sin 6\xi \operatorname{Sin}^2 3\eta + 2\rho'' \beta_4 \sin 8\xi \operatorname{Sin}^2 4\eta + \dots \end{aligned} \quad (27*)$$

ersetzen, von denen die erste tabuliert werden kann.

Nachdem man also aus

$$\rho'' \frac{x}{A} = \xi, \quad \frac{y}{A} = \eta, \quad \text{mit} \quad A = \frac{2\pi}{\operatorname{M}}, \quad (28)$$

ξ und η berechnet hat, erhält man ξ' und η' aus (27), und darauf L und b aus (25) bzw. (25*); von b gelangt man dann zu B mittels (9).

II. Zur Ableitung der Konvergenz des Meridians und des Vergrößerungsverhältnisses bilden wir wieder $f'(x + iy)$. Nach (24) und (28) ist nun

$$f'(x + iy) = \frac{1}{A} \frac{1}{\cos(\xi' + i\eta')} \frac{d(\xi' + i\eta')}{d(\xi + i\eta)},$$

wobei nach (26)

$$\frac{d(\xi' + i\eta')}{d(\xi + i\eta)} = 1 - 2\beta_1 \cos 2(\xi + i\eta) - 4\beta_2 \cos 4(\xi + i\eta) - 6\beta_3 \cos 6(\xi + i\eta) - \dots$$

zu setzen ist. Ferner wird mittels der zweiten Gl. (25)

$$\frac{1}{\cos(\xi' + i\eta')} = \frac{\cos \xi' \operatorname{Cof} \eta' + i \sin \xi' \operatorname{Sin} \eta'}{\operatorname{Cof}^2 \eta' \cos^2 b}.$$

Wird nun

$$p = 1 - 2\beta_1 \cos 2\xi \operatorname{Cof} 2\eta - 4\beta_2 \cos 4\xi \operatorname{Cof} 4\eta - 6\beta_3 \cos 6\xi \operatorname{Cof} 6\eta - 8\beta_4 \cos 8\xi \operatorname{Cof} 8\eta - \dots \quad (29)$$

$$q = 2\beta_1 \sin 2\xi \operatorname{Sin} 2\eta + 4\beta_2 \sin 4\xi \operatorname{Sin} 4\eta + 6\beta_3 \sin 6\xi \operatorname{Sin} 6\eta + 8\beta_4 \sin 8\xi \operatorname{Sin} 8\eta - \dots$$

gesetzt, so ist mithin:

$$f'(x + iy) = \frac{1}{A \operatorname{Cof}^2 \eta' \cos^2 b} (p \cos \xi' \operatorname{Cof} \eta' - q \sin \xi' \operatorname{Sin} \eta' + i[p \sin \xi' \operatorname{Sin} \eta' + q \cos \xi' \operatorname{Cof} \eta']). \quad (30)$$

Daher erhält man nach (21) § 2 S. 5:

$$\operatorname{tg} c = \frac{p \sin \xi' \operatorname{Sin} \eta' + q \cos \xi' \operatorname{Cof} \eta'}{p \cos \xi' \operatorname{Cof} \eta' - q \sin \xi' \operatorname{Sin} \eta'} = \frac{\operatorname{tg} \xi' \operatorname{Tg} \eta' + \frac{q}{p}}{1 - \frac{q}{p} \operatorname{tg} \xi' \operatorname{Tg} \eta'}.$$

Es ist aber, vgl. (25*):

$$\operatorname{tg} c' = \operatorname{tg} \xi' \operatorname{Tg} \eta'; \quad (31)$$

setzt man

$$\operatorname{tg} c'' = \frac{q}{p}, \quad (31^*)$$

so ist demnach

$$c = c' + c''. \quad (32)$$

Zur Herleitung des Vergrößerungsverhältnisses

$$\frac{m}{m_0} = \frac{f'(X)}{|f'(x + iy)|}$$

erhält man aus (30):

$$|f'(x + iy)| = \frac{\sqrt{p^2 + q^2}}{A \cos b \operatorname{Cof} \eta'}.$$

Nimmt man wie in § 6 S. 17 für $f'(X)$ den Wert $\frac{1}{N \cos B}$, so wird also:

$$\frac{m}{m_0} = \frac{A}{N \sqrt{p^2 + q^2}} \frac{\cos b}{\cos B} \operatorname{Cof} \eta' = \frac{A}{N p} \frac{\cos b}{\cos B} \frac{\cos c' \cos c''}{\cos L}. \quad (33)$$

Einen anderen Wert für $f'(X)$ findet man aus (4) und (5):

$$f'(X) = \frac{1}{A \cos b} \frac{db}{d\psi}.$$

3*

Nach Gl. (11) ist nun, wenn ihre Koeffizienten der Reihe nach mit $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, \dots$ bezeichnet werden:

$$\frac{db}{d\psi} = 1 : (1 + 2\gamma_1 \cos 2b + 4\gamma_2 \cos 4b + 6\gamma_3 \cos 6b + \dots) = 1 : h; \quad (34)$$

mithin ergibt sich auch:

$$\frac{m}{m_0} = \frac{1}{h \sqrt{\rho^2 + q^2}} \operatorname{Cof} \eta' = \frac{\cos c''}{h p} \operatorname{Cof} \eta'. \quad (33*)$$

§ 8.

Ableitung der ebenen rechtwinkligen Koordinaten, der Konvergenz des Meridians und des Vergrößerungsverhältnisses aus den geographischen Koordinaten.

I. Setzt man wieder wie im vorhergehenden Paragraphen S. 17

$$\operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{1}{2} b \right) (\cos L + i \sin L) = \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{1}{2} (\xi' + i \eta') \right)$$

und

$$\frac{A}{\rho''} \xi' = x', \quad \frac{A}{\eta'} \eta' = y', \quad \text{mit } A = \frac{2M}{\pi}, \quad (35)$$

so gelten auch, entsprechend den Gl. (12) und (11), § 4 S. 10, die folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \xi' &= \frac{\operatorname{tg} b}{\cos L} \\ \operatorname{Tg} \eta' &= \sin L \cos b. \end{aligned} \quad (36)$$

Aus der letzten Gleichung folgt aber, wenn

$$\sin L \cos b = \sin u' \quad (37)$$

gesetzt wird:

$$\sin L \cos b = \sin u'$$

oder

$$\frac{e^{2u'} - 1}{e^{2u'} + 1} = \sin u'$$

$$\eta' = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \sin u'}{1 - \sin u'} = \frac{1}{M} \log \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{1}{2} u' \right) = \sin u' + \frac{1}{3} \sin^3 u' + \frac{1}{5} \sin^5 u' + \frac{1}{7} \sin^7 u' + \dots \quad (38)$$

oder

$$\log_{\operatorname{Arc.}} \eta' = \log \sin u' + M \left(\frac{1}{3} \sin^2 u' + \frac{13}{90} \sin^4 u' + \frac{251}{2835} \sin^6 u' + \frac{3551}{56700} \sin^8 u' + \dots \right). \quad (39)$$

M bedeutet den Modul der BRIGGSchen Logarithmen.

Die erste der Gl. (36) läßt sich auch durch die beiden folgenden ersetzen:

$$\operatorname{tg} c' = \operatorname{tg} L \sin b$$

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} (\xi' - b) = \operatorname{tg} \frac{1}{2} c' \operatorname{Tg} \frac{1}{2} \eta'. \quad (40)$$

Von ξ', η' muß jetzt zu ξ, η und damit zu x, y übergegangen werden. Nun besteht aber gange von (10) zu (11):

$$\frac{\xi + i\eta}{\rho''} = \frac{\xi' + i\eta'}{\rho''} + \gamma_1 \sin 2(\xi' + i\eta') + \gamma_2 \sin 4(\xi' + i\eta') + \gamma_3 \sin 6(\xi' + i\eta') + \gamma_4 \sin 8(\xi' + i\eta') + \dots$$

mit

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= \frac{1}{2}n - \frac{2}{3}n^2 + \frac{5}{16}n^3 + \frac{41}{180}n^4 \dots \\ \gamma_2 &= \frac{13}{48}n^2 - \frac{3}{5}n^3 + \frac{557}{1440}n^4 \dots \\ \gamma_3 &= \frac{61}{240}n^3 - \frac{103}{140}n^4 \dots \\ \gamma_4 &= \frac{49561}{161280}n^4 \dots \\ &\vdots\end{aligned}\tag{41}$$

Hieraus findet man, da nach (15)

$$\xi = \rho'' \frac{x}{A}, \quad \eta = \frac{y}{A}$$

ist:

$$x = A \left\{ \frac{\xi'}{\rho''} + \gamma_1 \sin 2\xi' \cos 2\eta' + \gamma_2 \sin 4\xi' \cos 4\eta' + \gamma_3 \sin 6\xi' \cos 6\eta' + \gamma_4 \sin 8\xi' \cos 8\eta' + \dots \right\} \tag{42}$$

$$y = A \{ \eta' + \gamma_1 \cos 2\xi' \sin 2\eta' + \gamma_2 \cos 4\xi' \sin 4\eta' + \gamma_3 \cos 6\xi' \sin 6\eta' + \gamma_4 \cos 8\xi' \sin 8\eta' + \dots \}.$$

In ihnen ist ξ' in Sekunden und η' als Arcus vorausgesetzt.

An Stelle der ersten dieser Gleichungen kann man auch die beiden folgenden benutzen:

$$\mathfrak{X} = A \left\{ \frac{\xi'}{\rho''} + \gamma_1 \sin 2\xi' + \gamma_2 \sin 4\xi' + \gamma_3 \sin 6\xi' + \gamma_4 \sin 8\xi' + \dots \right\} \tag{42*}$$

$$x - \mathfrak{X} = 2A \{ \gamma_1 \sin 2\xi' \sin^2 \eta' + \gamma_2 \sin 4\xi' \sin^2 2\eta' + \gamma_3 \sin 6\xi' \sin^2 3\eta' + \gamma_4 \sin 8\xi' \sin^2 4\eta' + \dots \}.$$

Die Ergebnisse für \mathfrak{X} können in eine Tafel gebracht werden.

Die Auflösung der Aufgabe, aus den geographischen Koordinaten B, L die ebenen rechtwinkligen x, y abzuleiten, besteht hiernach darin, daß man zuerst b aus (8) berechnet, darauf η' aus (39) und ξ' aus der ersten Gl. (36) oder aus (40); die Gl. (42) geben dann x, y .

Die Gleichungen (8) und (9), die den Übergang von B zu b und von b zu B vermitteln, kann man gleichfalls in eine Tafel bringen.

II. Auch hier ist wie im vorigen Paragraphen:

$$f'(x + iy) = \frac{1}{A} \frac{1}{\cos(\xi' + i\eta')} \frac{d(\xi' + i\eta')}{d(\xi + i\eta)};$$

dabei ist aber jetzt

$$\frac{d(\xi' + i\eta')}{d(\xi + i\eta)} = 1 : (1 + 2\gamma_1 \cos 2(\xi' + i\eta') + 4\gamma_2 \cos 4(\xi' + i\eta') + \dots).$$

Setzt man:

$$p' = 1 + 2\gamma_1 \cos 2\xi' \cos 2\eta' + 4\gamma_2 \cos 4\xi' \cos 4\eta' + 6\gamma_3 \cos 6\xi' \cos 6\eta' + 8\gamma_4 \cos 8\xi' \cos 8\eta' + \dots \tag{43}$$

$$q' = 2\gamma_1 \sin 2\xi' \sin 2\eta' + 4\gamma_2 \sin 4\xi' \sin 4\eta' + 6\gamma_3 \sin 6\xi' \sin 6\eta' + 8\gamma_4 \sin 8\xi' \sin 8\eta' + \dots,$$

so wird demnach

$$\begin{aligned}f'(x + iy) &= \frac{1}{A} \frac{\cos \xi' \cos \eta' + i \sin \xi' \sin \eta'}{\cos^2 \eta' \cos^2 b} \cdot \frac{1}{p' - iq'} \\ &= \frac{1}{A(p'^2 + q'^2) \cos^2 \eta' \cos^2 b} \{ p' \cos \xi' \cos \eta' - q' \sin \xi' \sin \eta' + i(p' \sin \xi' \sin \eta' + q' \cos \xi' \cos \eta') \}.\end{aligned}$$

Also ist nach (21) § 2 S. 5:

$$\begin{aligned}\operatorname{tg} c &= \frac{\operatorname{tg} \xi' \operatorname{Tg} \eta' + \frac{q'}{p'}}{1 - \frac{q'}{p'} \operatorname{tg} \xi' \operatorname{Tg} \eta'}, \\ \frac{m}{m_0} &= f'(X) A \sqrt{p'^2 + q'^2} \cos b \operatorname{Cof} \eta'.\end{aligned}$$

Da nun, vgl. (31) und (40),

$$\operatorname{tg} \xi' \operatorname{Tg} \eta' = \operatorname{tg} L \sin b = \operatorname{tg} c' \quad (44)$$

ist, so folgt aus der ersten Gleichung, wenn

$$\begin{aligned}\frac{q'}{p'} &= \operatorname{tg} c'' \\ \text{gesetzt wird:} \quad c &= c' + c''.\end{aligned} \quad (45)$$

$$c = c' + c''. \quad (46)$$

Daß $\frac{q'}{p'} = \frac{q}{p}$ sein muß, ist leicht ersichtlich; zwischen p, q aus (29) und p', q' aus (43) bestehen die Beziehungen

$$p = \frac{p'}{\sqrt{p'^2 + q'^2}}, \quad q = \frac{q'}{\sqrt{p'^2 + q'^2}}.$$

Mit $f'(X) = \frac{1}{N \cos B}$ wird:

$$\frac{m}{m_0} = \frac{A \sqrt{p'^2 + q'^2}}{N} \frac{\cos b}{\cos B} \operatorname{Cof} \eta' = \frac{A p'}{N} \frac{\cos b}{\cos B} \frac{\cos c'}{\cos c'' \cos L}. \quad (47)$$

§ 9.

Zusammenstellung der Formeln.

Werden die BESSELSchen Elemente des Erdspähröids zugrunde gelegt, so ist

$$n = 0,00167\,41848\,008 \dots^1)$$

zu setzen. Hiermit sind nun in den vorher gegebenen Übertragungsformeln die Koeffizienten berechnet worden.

Bei diesen Formeln war der Anfangspunkt der Koordinaten der Schnittpunkt des Hauptmeridians mit dem Äquator.

Entspricht der Anfangspunkt der ebenen Koordinaten dem Schnittpunkte des Hauptmeridians mit dem Parallelkreise, dessen Breite B_0 ist, so ist von der erhaltenen Abszisse die Länge x_0 des Meridianbogens vom Äquator bis zur Breite B_0 in Abzug zu bringen. x_0 kann man aus einer Tabelle entnehmen²⁾ oder auch wie folgt berechnen.

¹⁾ F. R. HELMERT, Lothabweichungen, Heft I: Formeln und Tafeln sowie einige numerische Ergebnisse für Norddeutschland (Veröffentlichung des Königl. Preuß. Geodätischen Institutes). Berlin 1896, S. 4.

²⁾ Tabellen für die Meridianbogen findet man z. B. bei O. BÖRSCH, Anleitung zur Berechnung geodätischer Koordinaten. Cassel 1884; bei W. JORDAN-O. EGGERT, Handbuch der Vermessungskunde, Band III; und besonders bequem in Intervallen von einer Minute bei F. G. GAUSS, Die trigonometrischen und polygonometrischen Rechnungen in der Feldmeßkunst; bei O. KOLL, Geodätische Rechnungen mittels der Rechenmaschine, und bei H. HARTZL, Tafeln, enthaltend die Ausmaße der Meridian- und Parallelkreisbögen usw., Mitteilungen des k. u. k. militär-geographischen Instituts, Bd. XIV.

Nach (6) wird

$$\begin{aligned} \varphi - B = & -[2,714\,3193\,30] \sin 2B + [9,734\,003 - 10] \sin 4B - [6,8487 - 10] \sin 6B \\ & + [4,00 - 10] \sin 8B - \dots, \end{aligned}$$

woraus für $B = B_0$ sich $\varphi = \xi_0$ ergeben möge.

Da nun ferner

$$\log M = 7,000\,0371\,638, \quad \log A = 6,803\,9172\,868$$

ist, so hat man weiter

$$x_0 = [1,489\,4921\,536] \xi_0.$$

I. Gegeben B und L ; gesucht x, y, c und m .

$$\begin{aligned} b - B = & -[2,839\,0152\,83] \sin 2B + [9,983\,414 - 10] \sin 4B - [7,2240 - 10] \sin 6B \\ & + [4,502 - 10] \sin 8B - \dots. \end{aligned}$$

$$\sin L \cos b = l$$

$$\begin{aligned} \log y' - 6,803\,9172\,868 = \log \eta' = & \log l + [9,160\,6630\,57 - 10] l^2 + [8,797\,485 - 10] l^4 \\ & + [8,5849 - 10] l^6 + [8,435 - 10] l^8 + \dots \end{aligned}$$

$$\operatorname{tg} \xi' = \frac{\operatorname{tg} b}{\cos L} \text{ oder } \operatorname{tg} c' = \operatorname{tg} L \sin b, \quad \operatorname{tg} \frac{1}{2}(\xi' - b) = \operatorname{tg} \frac{1}{2} c' \operatorname{Tg} \frac{1}{2} \eta'; \quad x' = [1,489\,4921\,536] (\xi' - \xi_0).$$

$$\begin{aligned} y - y' = & [3,725\,7209\,1] \cos 2\xi' \operatorname{Sin} 2\eta' + [0,68\,261] \cos 4\xi' \operatorname{Sin} 4\eta' + [7,8783 - 10] \cos 6\xi' \operatorname{Sin} 6\eta' \\ & + [5,187 - 10] \cos 8\xi' \operatorname{Sin} 8\eta' + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x - x' = & [3,725\,7209\,1] \sin 2\xi' \operatorname{Cos} 2\eta' + [0,68\,261] \sin 4\xi' \operatorname{Cos} 4\eta' + [7,8783 - 10] \sin 6\xi' \operatorname{Cos} 6\eta' \\ & + [5,187 - 10] \sin 8\xi' \operatorname{Cos} 8\eta' + \dots \end{aligned}$$

Statt der letzten Gleichung kann man auch die beiden folgenden anwenden:

$$\mathfrak{X} - x' = [3,725\,7209\,13] \sin 2\xi' + [0,682\,614] \sin 4\xi' + [7,87\,833 - 10] \sin 6\xi' + [5,187 - 10] \sin 8\xi' + \dots$$

$$\begin{aligned} x - \mathfrak{X} = & [4,026\,7509] \sin 2\xi' \operatorname{Sin}^2 \eta' + [0,98\,364] \sin 4\xi' \operatorname{Sin}^2 2\eta' + [8,1794 - 10] \sin 6\xi' \operatorname{Sin}^2 3\eta' \\ & + [5,488 - 10] \sin 8\xi' \operatorname{Sin}^2 4\eta' + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p' = & 1 + [7,222\,8336\,22 - 10] \cos 2\xi' \operatorname{Cos} 2\eta' + [4,480\,757 - 10] \cos 4\xi' \operatorname{Cos} 4\eta' \\ & + [1,8526 - 10] \cos 6\xi' \operatorname{Cos} 6\eta' + [9,286 - 20] \cos 8\xi' \operatorname{Cos} 8\eta' + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q' = & [7,222\,8336\,22 - 10] \sin 2\xi' \operatorname{Sin} 2\eta' + [4,480\,757 - 10] \sin 4\xi' \operatorname{Sin} 4\eta' \\ & + [1,8526 - 10] \sin 6\xi' \operatorname{Sin} 6\eta' + [9,286 - 20] \sin 8\xi' \operatorname{Sin} 8\eta' + \dots; \end{aligned}$$

$$c'' = [5,814\,4251\,3] \frac{q'}{p'}, \quad \operatorname{tg} c' = \operatorname{tg} \xi' \operatorname{Tg} \eta' = \operatorname{tg} L \sin b, \quad c = c' + c''.$$

$$\frac{m_0}{m} = \frac{[1,489\,4921\,536]}{N : p''} \frac{p'}{\cos c''} \frac{\cos b}{\cos B} \operatorname{Cos} \eta' = \frac{[6,803\,9172\,868]}{N} p' \frac{\cos b}{\cos B} \frac{\cos c'}{\cos c'' \cos L};$$

N = Querkrümmungsradius in der Breite B .

II. Gegeben x, y ; gesucht B, L, c und m .

$$[8,510\,5078\,464 - 10]x = \xi - \xi_0, \quad [3,196\,0827\,132 - 10]y = \eta. \quad \begin{matrix} \text{Sek.} \\ \text{Arc.} \end{matrix}$$

Erste Auflösung.

$$\begin{aligned} \xi' - \xi &= -[2,236\,2289\,37] \sin 2\xi \operatorname{Cof} 2\eta - [8,083\,093 - 10] \sin 4\xi \operatorname{Cof} 4\eta \\ &\quad - [5,5343 - 10] \sin 6\xi \operatorname{Cof} 6\eta - [2,645 - 10] \sin 8\xi \operatorname{Cof} 8\eta - \dots \\ \eta' - \eta &= -[6,921\,8038\,04 - 10] \cos 2\xi \operatorname{Sin} 2\eta - [2,768\,668 - 10] \cos 4\xi \operatorname{Sin} 4\eta \\ &\quad - [0,2199 - 10] \cos 6\xi \operatorname{Sin} 6\eta - [7,331 - 20] \cos 8\xi \operatorname{Sin} 8\eta - \dots \end{aligned}$$

Man kann statt der ersten dieser Gleichungen auch die beiden folgenden benutzen:

$$\begin{aligned} \xi - \xi &= -[2,236\,2289\,37] \sin 2\xi - [8,083\,093 - 10] \sin 4\xi - [5,5343 - 10] \sin 6\xi \\ &\quad - [2,645 - 10] \sin 8\xi - \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \xi' - \xi &= -[2,537\,2589] \sin 2\xi \operatorname{Sin}^2 \eta - [8,38\,412 - 10] \sin 4\xi \operatorname{Sin}^2 2\eta - [5,835 - 10] \sin 6\xi \operatorname{Sin}^2 3\eta \\ &\quad - [2,95 - 10] \sin 8\xi \operatorname{Sin}^2 4\eta - \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} L &= \frac{\operatorname{Sin} \eta'}{\cos \xi'} & \operatorname{tg} c' &= \operatorname{tg} \xi' \operatorname{Tg} \eta' \\ \sin b &= \frac{\sin \xi'}{\operatorname{Cof} \eta'} & \text{oder} & \operatorname{tg} \frac{1}{2}(\xi' - b) = \operatorname{tg} \frac{1}{2} c' \operatorname{Tg} \frac{1}{2} \eta' \\ &&& \operatorname{tg} \frac{1}{2} L = \operatorname{tg} \frac{1}{2} c' \frac{\cos \frac{1}{2}(\xi' - b)}{\sin \frac{1}{2}(\xi' + b)}. \end{aligned}$$

$$B - b = [2,839\,0148\,78] \sin 2b + [0,129\,507] \sin 4b + [7,5572 - 10] \sin 6b + [5,042 - 10] \sin 8b + \dots$$

$$\begin{aligned} p &= 1 - [7,222\,8337\,99 - 10] \cos 2\xi \operatorname{Cof} 2\eta - [3,370\,728 - 10] \cos 4\xi \operatorname{Cof} 4\eta \\ &\quad - [0,9980 - 10] \cos 6\xi \operatorname{Cof} 6\eta - [8,234 - 20] \cos 8\xi \operatorname{Cof} 8\eta - \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q &= +[7,222\,8337\,99 - 10] \sin 2\xi \operatorname{Sin} 2\eta + [3,370\,728 - 10] \sin 4\xi \operatorname{Sin} 4\eta \\ &\quad + [0,9980 - 10] \sin 6\xi \operatorname{Sin} 6\eta + [8,234 - 20] \sin 8\xi \operatorname{Sin} 8\eta + \dots; \end{aligned}$$

$$c'' = [5,314\,4251\,3] \frac{q}{p}, \quad \operatorname{tg} c' = \operatorname{tg} \xi' \operatorname{Tg} \eta' = \sin b \operatorname{tg} L, \quad c = c' + c''. \quad \begin{matrix} \text{Sek.} \\ \text{Arc.} \end{matrix}$$

$$\text{oder} \quad \frac{m}{m_0} = \frac{[1,489\,4921\,536]}{N:p''} \frac{\cos c''}{p} \frac{\cos b}{\cos B} \operatorname{Cof} \eta' = \frac{[6,803\,9172\,868]}{Np} \frac{\cos b}{\cos B} \frac{\cos c' \cos c''}{\cos L},$$

$$\text{mit} \quad \frac{m_0}{m} = \frac{\cos c''}{hp} \operatorname{Cof} \eta'$$

$$\begin{aligned} h &= 1 + [7,222\,8336\,22 - 10] \cos 2b + [4,480\,757 - 10] \cos 4b + [1,8526 - 10] \cos 6b \\ &\quad + [9,286 - 20] \cos 8b + \dots \end{aligned}$$

Zweite Auflösung.

ξ und η werden wie bei der ersten Auflösung berechnet.

$$\begin{aligned}\sin \beta &= \frac{\sin \xi}{\operatorname{Cof} \eta} & \operatorname{tg} c = \operatorname{tg} \xi \operatorname{Tg} \eta \\ \operatorname{tg} \lambda &= \frac{\operatorname{Sin} \eta}{\cos \xi} \quad \text{oder} \quad \operatorname{tg} \frac{1}{2} (\xi - \beta) = \operatorname{tg} \frac{1}{2} c \operatorname{Tg} \frac{1}{2} \eta \\ && \operatorname{tg} \frac{1}{2} \lambda = \operatorname{tg} \frac{1}{2} c \frac{\cos \frac{1}{2} (\xi - \beta)}{\sin \frac{1}{2} (\xi + \beta)};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}L - \lambda &= -[2,536\ 9566\ 67] \cos \xi \operatorname{Sin} \eta - [8,982\ 1536 - 10] \cos 3\xi \operatorname{Sin} 3\eta \\ &\quad - [5,94618 - 10] \cos 5\xi \operatorname{Sin} 5\eta - [3,081 - 10] \cos 7\xi \operatorname{Sin} 7\eta - \dots\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\log \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{1}{2} b\right) &= \log \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{1}{2} \beta\right) - [6,860\ 3158\ 45 - 10] \sin \xi \operatorname{Cof} \eta - [3,305\ 5128 - 10] \sin 3\xi \operatorname{Cof} 3\eta \\ &\quad - [0,26\ 953 - 10] \sin 5\xi \operatorname{Cof} 5\eta - [7,405 - 20] \sin 7\xi \operatorname{Cof} 7\eta - \dots\end{aligned}$$

$B - b$ wird wie vorher berechnet.

$$\begin{aligned}[6,803\ 9172\ 868] p &= \frac{\cos \xi \operatorname{Cof} \eta}{\cos^2 \beta \operatorname{Cof}^2 \eta} - [7,222\ 5315\ 34 - 10] \cos \xi \operatorname{Cof} \eta - [4,144\ 850 - 10] \cos 3\xi \operatorname{Cof} 3\eta \\ &\quad - [1,3307 - 10] \cos 5\xi \operatorname{Cof} 5\eta - [8,612 - 20] \cos 7\xi \operatorname{Cof} 7\eta - \dots\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[6,803\ 9172\ 868] q &= \frac{\sin \xi \operatorname{Sin} \eta}{\cos^2 \beta \operatorname{Cof}^2 \eta} + [7,222\ 5315\ 34 - 10] \sin \xi \operatorname{Sin} \eta + [4,144\ 850 - 10] \sin 3\xi \operatorname{Sin} 3\eta \\ &\quad + [1,3307 - 10] \sin 5\xi \operatorname{Sin} 5\eta + [8,612 - 20] \sin 7\xi \operatorname{Sin} 7\eta + \dots;\end{aligned}$$

$$\operatorname{tg} c = \frac{q}{p},$$

$$\frac{m}{m_0} = \frac{1}{N \cos B} \frac{\cos c}{p} = \frac{1}{N \cos B} \frac{\sin c}{q}.$$

Zur Berechnung der hyperbolischen Funktionen hat man für kleine z die Reihen:

$$\log \operatorname{Sin} z = \log \frac{1}{i} \sin iz = \log z + M \left(\frac{z^2}{6} - \frac{z^4}{180} + \frac{z^6}{2835} - \frac{z^8}{37800} + \dots \right)$$

$$\log \operatorname{Cof} z = \log \cos iz = M \left(\frac{z^2}{2} - \frac{z^4}{12} + \frac{z^6}{45} - \frac{17z^8}{2520} + \dots \right)$$

$$\log \operatorname{Tg} z = \log \frac{1}{i} \operatorname{tg} iz = \log z - M \left(\frac{z^2}{3} - \frac{7z^4}{90} + \frac{62z^6}{2835} - \frac{127z^8}{18900} + \dots \right);$$

M = Modul der BRIGGSchen Logarithmen.

Allgemein ist

$$Mz = \log \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{1}{2} u\right);$$

$$\frac{1}{i} \operatorname{tg} i \frac{z}{2} = \operatorname{tg} \frac{u}{2}; \quad \frac{1}{i} \sin iz = \operatorname{tg} u, \quad \cos iz = \frac{1}{\cos u}, \quad \frac{1}{i} \operatorname{tg} iz = \sin u.$$

Häufig kann man zur Berechnung der hyperbolischen Funktionen auch mit Vorteil eine Tafel der Subtraktions-Logarithmen benutzen. Setzt man nämlich

$$Mz = \log \frac{1}{\cos \vartheta},$$

so ist

$$\operatorname{Sin} z = \frac{1}{i} \sin iz = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\cos \vartheta} - \cos \vartheta \right)$$

$$\operatorname{Cos} z = \cos iz = \frac{1}{\cos \vartheta} - \frac{1}{i} \sin iz = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\cos \vartheta} + \cos \vartheta \right).$$

§ 10.

Zahlenbeispiele.

I. Gegeben: $B = 48^\circ$, $L = 8^\circ$.

Gesucht: x, y, c und m .

$-\Delta_1 B = -686''$	48276	$2,839\ 0152\ 83$	$9,98\ 3414$	$7,2240$	$4,502$
$+\Delta_2 B = -$	$0,20012$	$\sin 2B \dots 9,997\ 6143\ 49$	$\sin 4B \dots 9,31\ 7879_n$	$\sin 6B \dots 9,9782_n$	$\sin 8B \dots 9,609$
$-\Delta_3 B = +$	$0,00159$	$\Delta_1 B \dots 2,836\ 6296\ 32$	$\Delta_2 B \dots 9,30\ 1293_n$	$\Delta_3 B \dots 7,2022_n$	$\Delta_4 B \dots 4,111$
$+\Delta_4 B = +$					

$$b - B = -686'',68129 \quad b = 47^{\circ}48'33'',31871$$

$\sin L \dots 9,143\ 5553\ 039$
$\cos b \dots 9,827\ 1112\ 794$
$l \dots 8,970\ 6665\ 833$
$\Delta_1 l = 1\ 2647\ 254$
$\Delta_2 l = 47\ 880$
$\Delta_3 l = 256$
$\Delta_4 l = 2$
$\eta' \dots 8,971\ 9361\ 225$
$6,803\ 9172\ 868$
$y' \dots 5,775\ 8534\ 093$
$y' = 596\ 833,799$
$\Delta_1 y' = -107,885$
$\Delta_2 y' = -1,805$
$\Delta_3 y' = +0,001$
$\Delta_4 y' = +$
$y = 596\ 724,110^m$

$9,1606\ 6306$
$l^s \dots 7,9413\ 3317$
$\Delta_1 l \dots 7,1019\ 9623$
$8,79\ 7485$
$l^s \dots 5,88\ 2666$
$\Delta_2 l \dots 4,68\ 0151$
$8,5849$
$l^s \dots 3,8240$
$\Delta_3 l \dots 2,4089$

$\sec L \dots 0,004\ 2472\ 246$	
$\operatorname{tg} b \dots 0,042\ 6559\ 896$	
$\operatorname{tg} \xi' \dots 0,046\ 9032\ 142$	
$\xi' = 48^\circ 5'16''$	$5,7034$
$= 173\ 116'',57034$	
$\xi' \dots 5,238\ 3386\ 395$	
$1,489\ 4921\ 536$	
$x' \dots 6,727\ 8307\ 931$	
$x' = 5\ 343\ 561,266$	
$\Delta_1 x' = +5\ 879,991$	
$\Delta_2 x' = -1,103$	
$\Delta_3 x' = -0,008$	
$\Delta_4 x' = +$	
$x = 5\ 348\ 940,146^m$	
$1,489\ 4921\ 5$	
$p'' : N \dots 8,508\ 9797\ 8$	
$\cos b \dots 9,827\ 1112\ 8$	
$1 : \cos B \dots 0,174\ 4891\ 0$	
$p' \dots 9,999\ 9192\ 0$	
$\cos c' \dots 9,997\ 6582\ 0$	
$1 : \cos c'' \dots 0,000\ 0000\ 2$	
$1 : \cos L \dots 0,004\ 2472\ 2$	
$m : m_0 \dots 0,001\ 8969\ 5$	
$m = 1,004\ 3775$	

$\operatorname{tg} L \dots 9,147\ 8025\ 285$
$\sin b \dots 9,869\ 7672\ 690$
$\operatorname{tg} c' \dots 9,017\ 5697\ 975$
$+ 1$
$\Delta_1 p' = -0,000\ 1828\ 76$
$\Delta_2 p' = -31\ 65$
$\Delta_3 p' = +3$
$\Delta_4 p' = +$
$p' = +0,999\ 8139\ 62$
$\Delta_1 q' = +0,000\ 3131\ 938$
$\Delta_2 q' = -2\ 484$
$\Delta_3 q' = -40$
$\Delta_4 q' = +$
$q' = +0,000\ 3129\ 414$
$5,314\ 4251$
$q' \dots 6,495\ 4631$
$1 : p' \dots 0,000\ 0808$
$c'' \dots 1,809\ 9690$
$c'' = 0^\circ 1' 4'',56082$
$c' = 5\ 56\ 40,92810$
$c = 5^\circ 57' 45'',48892$

3,725 7209	0,68 261	7,878	5,19
$\cos 2\xi' \dots 9,031 7344_n$	$\cos 4\xi' \dots 9,98 983_n$	$\cos 6\xi' \dots 9,502$	$\cos 8\xi' \dots 9,96$
$\operatorname{Sin} 2\eta' \dots 9,275 5074$	$\operatorname{Sin} 4\eta' \dots 9,58 413$	$\operatorname{Sin} 6\eta' \dots 9,773$	$\operatorname{Sin} 8\eta' \dots 9,91$
$\Delta_1 y' \dots 2,032 9627_n$	$\Delta_2 y' \dots 0,25 657_n$	$\Delta_3 y' \dots 7,153$	$\Delta_4 y' \dots 5,06$
<hr/>			
3,725 7209	0,68 261	7,878	5,19
$\sin 2\xi' \dots 9,997 4722$	$\sin 4\xi' \dots 9,33 024_n$	$\sin 6\xi' \dots 9,977_n$	$\sin 8\xi' \dots 9,62$
$\operatorname{Cof} 2\eta' \dots 0,007 5885$	$\operatorname{Cof} 4\eta' \dots 0,02 984$	$\operatorname{Cof} 6\eta' \dots 0,065$	$\operatorname{Cof} 8\eta' \dots 0,11$
$\Delta_1 x' \dots 3,730 7816$	$\Delta_2 x' \dots 0,04 269_n$	$\Delta_3 x' \dots 7,920_n$	$\Delta_4 x' \dots 4,92$
<hr/>			
7,222 8336	4,48 076	1,853	9,29
$\cos 2\xi' \dots 9,031 7344_n$	$\cos 4\xi' \dots 9,98 983_n$	$\cos 6\xi' \dots 9,502$	$\cos 8\xi' \dots 9,96$
$\operatorname{Cof} 2\eta' \dots 0,007 5885$	$\operatorname{Cof} 4\eta' \dots 0,02 984$	$\operatorname{Cof} 6\eta' \dots 0,065$	$\operatorname{Cof} 8\eta' \dots 0,11$
$\Delta_1 p' \dots 6,262 1565_n$	$\Delta_2 p' \dots 4,50 048_n$	$\Delta_3 p' \dots 1,420$	$\Delta_4 p' \dots 9,36$
<hr/>			
7,222 8336	4,48 076	1,853	9,29
$\sin 2\xi' \dots 9,997 4722$	$\sin 4\xi' \dots 9,33 024_n$	$\sin 6\xi' \dots 9,977_n$	$\sin 8\xi' \dots 9,62$
$\operatorname{Sin} 2\eta' \dots 9,275 5074$	$\operatorname{Sin} 4\eta' \dots 9,58 413$	$\operatorname{Sin} 6\eta' \dots 9,773$	$\operatorname{Sin} 8\eta' \dots 9,91$
$\Delta_1 q' \dots 6,495 8132$	$\Delta_2 q' \dots 3,39 513_n$	$\Delta_3 q' \dots 1,603_n$	$\Delta_4 q' \dots 8,82$

II. Gegeben: $x = 5348940,146^m$, $y = 596724,110^m$.

Gesucht: B , L , c und m .

Erste Auflösung.

$$\begin{aligned}
 x &= 6,728 2677 382 \\
 &\quad 8,510 5078 464 \\
 \xi &= 5,238 7755 846 \\
 \xi &= 173 290'',83112 \\
 &= 48^\circ 8'10'',83112 \\
 -\Delta_1 \xi &= - 2 54, 26367 \\
 -\Delta_2 \xi &= + 0, 00282 \\
 -\Delta_3 \xi &= + 0, 00004 \\
 -\Delta_4 \xi &= - \\
 \xi' &= 48^\circ 5'16'',57031 \\
 \sin \xi' &= 9,871 6726 925 \\
 \operatorname{Cof} \eta' &= 0,001 9054 235 \\
 \sin b &= 9,869 7672 690
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b &= 47^\circ 48'33'',31870 \\
 \Delta_1 b &= + 11 26, 94731 \\
 \Delta_2 b &= - 0, 26257 \\
 \Delta_3 b &= - 0, 00345 \\
 \Delta_4 b &= + \\
 B &= 47^\circ 59'59'',99999
 \end{aligned}$$

$y \dots 5,775 7735 854$	$\operatorname{tg} \xi' \dots 0,046 9032 141$
$3,196 0827 132$	$\operatorname{Tg} \eta' \dots 8,970 6665 837$
$\eta \dots 8,971 8562 986$	$\sin b \operatorname{tg} L \dots 9,017 5697 978 \dots \operatorname{tg} c'$
$\eta = 0,093 7251 8333$	1
$-\Delta_1 \eta = + 172 0651$	$-\Delta_1 p = + 0,000 1857 30$
$-\Delta_2 \eta = + 2199$	$-\Delta_2 p = + 2 45$
$-\Delta_3 \eta = - 3$	$-\Delta_3 p = -$
$-\Delta_4 \eta = -$	$-\Delta_4 p = -$
$\eta' = 0,093 7424 1180$	$p = + 1,000 1859 75$
$\sec \xi' \dots 0,175 2305 216$	$\Delta_1 q = + 0,000 3130 781$
$\operatorname{Sin} \eta' \dots 8,972 5720 072$	$\Delta_2 q = - 196$
$\operatorname{tg} L \dots 9,147 8025 288$	$\Delta_3 q = - 6$
$L = 8^\circ 0' 0'',00002$	$\Delta_4 q = +$
$1,489 4921 5$	$q = + 0,000 3130 579$
$p'': N \dots 8,508 9797 8$	$5,314 4251$
$\cos c'' \dots 0,000 0000 2$	$q \dots 6,495 6247$
$1 : p \dots 9,999 9192 3$	$1 : p \dots 9,999 9192$
$\cos b \dots 9,827 1112 8$	$c'' \dots 1,809 9690$
$\sec B \dots 0,174 4891 0$	$c'' = 0^\circ 1' 4'',56082$
$\operatorname{Cof} \eta' \dots 0,001 9054 2$	$c' = 5 56 40 ,92811$
$\frac{m}{m_0} \dots 0,001 8969 8$	$c = 5^\circ 57'45'',48893$

2,839 0148 78	0,12 9507	7,5572	5,042
$\sin 2b \dots 9,997 9085 44$	$\sin 4b \dots 9,28 9741_n$	$\sin 6b \dots 9,9809_n$	$\sin 8b \dots 9,582$
$\Delta_1 b \dots 2,836 9284 22$	$\Delta_2 b \dots 9,41 9248_n$	$\Delta_3 b \dots 7,5381_n$	$\Delta_4 b \dots 4,624$
2,286 2289 4	8,08 3093	5,5343	2,64
$\sin 2\xi \dots 9,997 8921 4$	$\sin 4\xi \dots 9,33 6885_n$	$\sin 6\xi \dots 9,9761_n$	$\sin 8\xi \dots 9,63$
$\text{Cof } 2\eta \dots 0,007 5857 7$	$\text{Cof } 4\eta \dots 0,02 9831$	$\text{Cof } 6\eta \dots 0,0653$	$\text{Cof } 8\eta \dots 0,11$
$\Delta_1 \xi \dots 2,241 2068 5$	$\Delta_2 \xi \dots 7,44 9809_n$	$\Delta_3 \xi \dots 5,5757_n$	$\Delta_4 \xi \dots 2,38$
6,921 8038	2,76 867	0,220	7,33
$\cos 2\xi \dots 9,038 4623_n$	$\cos 4\xi \dots 9,98 951_n$	$\cos 6\xi \dots 9,509$	$\cos 8\xi \dots 9,96$
$\text{Sin } 2\eta \dots 9,275 4267$	$\text{Sin } 4\eta \dots 9,58 404$	$\text{Sin } 6\eta \dots 9,773$	$\text{Sin } 8\eta \dots 9,91$
$\Delta_1 \eta \dots 5,235 6928_n$	$\Delta_2 \eta \dots 2,34 222_n$	$\Delta_3 \eta \dots 9,502$	$\Delta_4 \eta \dots 7,20$
7,222 8338	3,37 073	0,998	8,23
$\cos 2\xi \dots 9,038 4623_n$	$\cos 4\xi \dots 9,98 951_n$	$\cos 6\xi \dots 9,509$	$\cos 8\xi \dots 9,96$
$\text{Cof } 2\eta \dots 0,007 5858$	$\text{Cof } 4\eta \dots 0,02 983$	$\text{Cof } 6\eta \dots 0,065$	$\text{Cof } 8\eta \dots 0,11$
$\Delta_1 p \dots 6,268 8819_n$	$\Delta_2 p \dots 3,39 007_n$	$\Delta_3 p \dots 0,572$	$\Delta_4 p \dots 8,30$
7,222 8338	3,37 073	0,998	8,23
$\sin 2\xi \dots 9,997 8921$	$\sin 4\xi \dots 9,33 688_n$	$\sin 6\xi \dots 9,976_n$	$\sin 8\xi \dots 9,63$
$\text{Sin } 2\eta \dots 9,275 4267$	$\text{Sin } 4\eta \dots 9,58 404$	$\text{Sin } 6\eta \dots 9,773$	$\text{Sin } 8\eta \dots 9,91$
$\Delta_1 q \dots 6,495 6526$	$\Delta_2 q \dots 2,29 165_n$	$\Delta_3 q \dots 0,747_n$	$\Delta_4 q \dots 7,77$

Zweite Auflösung.

$x \dots 6,728 2677 382$	$y \dots 5,775 7735 854$
8,510 5078 464	3,196 0827 132
$\xi \dots 5,238 7755 846$	$\eta \dots 8,971 8562 986$
$\xi = 173^{\circ}290'' , 83112$	$\sec \xi \dots 0,175 6396 232$
$= 48^{\circ}10' , 83112$	$\text{Sin } \eta \dots 8,972 4919 493$
$\sin \xi \dots 9,872 0017 611$	$\text{tg } \lambda \dots 9,148 1315 725$
$\text{Cof } \eta \dots 0,001 9047 242$	$\lambda = 80^{\circ}21' , 54572$
$\sin \beta \dots 9,870 0970 369$	$-\Delta_1 \lambda = - 21 , 56795$
$\beta = 47^{\circ}51' 26'' , 24915$	$-\Delta_2 \lambda = + 2223$
$45^{\circ} + \frac{\beta}{2} = 68^{\circ}55' 43'' , 12457$	$-\Delta_3 \lambda = + 2$
$\text{tg}(45^{\circ} + \frac{1}{2}\beta) \dots 0,414 20821 24$	$-\Delta_4 \lambda = - .$
$-\Delta_1 \beta = - 5422 784$	$L = 8^{\circ}0' 0'', 00002$
$-\Delta_2 \beta = - 1 223$	
$-\Delta_3 \beta = + 2$	
$-\Delta_4 \beta = + .$	
$\text{tg}(45^{\circ} + \frac{1}{2}b) \dots 0,413 6658 119$	
$45^{\circ} + \frac{1}{2}b = 68^{\circ}54' 16'' , 65935$	
$b = 47^{\circ}48' 33'' , 31870$	

Der Übergang von b zu B geschieht wie bei der ersten Auflösung.

$\text{Cof }^2 \eta \dots 0,003 8094 5$	$\cos^2 \beta \dots 9,653 4185 1$	$K \dots 6,461 1452 5$	$K p = 0,669 7859 920$
$6,803 9172 9$		$p \dots 3,364 7908 1$	
$K \dots 6,461 1452 5$			
$1 : p \dots 6,635 2091 9$			
$\cos c \dots 9,997 6440 2$			
$1 : N \cos B \dots 3,369 0437 5$			
$\frac{m}{m_0} \dots 0,001 8969 6$			
$\sin \xi \text{ Sin } \eta = 0,069 9026 6132$			
$\Delta_1 q = + 529 9723$			
$\Delta_2 q = + 1 0512$			
$\Delta_3 q = - 41$			
$\Delta_4 q = - .$			
$K q = 0,069 9557 6326$			
$K q \dots 8,844 8234 993$			
$K p \dots 9,825 9360 604$			
$\text{tg } c \dots 9,018 8874 389$			
$c = 5^{\circ}57' 45'' , 48891$			

$6,860\ 3158$	$3,30\ 551$	$0,270$	$7,41$
$\sin \xi \dots 9,872\ 0018$	$\sin 3\xi \dots 9,76\ 492$	$\sin 5\xi \dots 9,941_n$	$\sin 7\xi \dots 9,59_n$
$\text{Cof } \eta \dots 0,001\ 9047$	$\text{Cof } 3\eta \dots 0,01\ 695$	$\text{Cof } 5\eta \dots 0,046$	$\text{Cof } 7\eta \dots 0,09$
$\Delta_1 \beta \dots 6,734\ 2223$	$\Delta_3 \beta \dots 3,08\ 738$	$\Delta_5 \beta \dots 0,257_n$	$\Delta_4 \beta \dots 7,09_n$
$2,536\ 9567$	$8,98\ 215$	$5,946$	$3,08$
$\cos \xi \dots 9,824\ 3604$	$\cos 3\xi \dots 9,91\ 019_n$	$\cos 5\xi \dots 9,690_n$	$\cos 7\xi \dots 9,96$
$\text{Sin } \eta \dots 8,972\ 4919$	$\text{Sin } 3\eta \dots 9,45\ 469$	$\text{Sin } 5\eta \dots 9,687$	$\text{Sin } 7\eta \dots 9,85$
$\Delta_1 \lambda \dots 1,333\ 8090$	$\Delta_3 \lambda \dots 8,84\ 703_n$	$\Delta_5 \lambda \dots 5,323_n$	$\Delta_4 \lambda \dots 2,89$
$\text{Cof }^2 \eta \cos^2 \beta \dots 9,657\ 2280$	$9,65\ 723$	$9,657$	$9,66$
$7,222\ 5315$	$4,14\ 485$	$1,381$	$8,61$
$\cos \xi \dots 9,824\ 3604$	$\cos 3\xi \dots 9,91\ 019_n$	$\cos 5\xi \dots 9,690_n$	$\cos 7\xi \dots 9,96$
$\text{Cof } \eta \dots 0,001\ 9047$	$\text{Cof } 3\eta \dots 0,01\ 695$	$\text{Cof } 5\eta \dots 0,046$	$\text{Cof } 7\eta \dots 0,09$
$\Delta_1 p \dots 6,706\ 0246$	$\Delta_3 p \dots 3,72\ 922_n$	$\Delta_5 p \dots 0,724_n$	$\Delta_4 p \dots 8,32$
$6,879\ 7595$	$3,80\ 208$	$0,988$	$8,27$
$\sin \xi \dots 9,872\ 0018$	$\sin 3\xi \dots 9,76\ 492$	$\sin 5\xi \dots 9,941_n$	$\sin 7\xi \dots 9,59_n$
$\text{Sin } \eta \dots 8,972\ 4919$	$\text{Sin } 3\eta \dots 9,45\ 469$	$\text{Sin } 5\eta \dots 9,687$	$\text{Sin } 7\eta \dots 9,85$
$\Delta_1 q \dots 5,724\ 2532$	$\Delta_3 q \dots 3,02\ 169$	$\Delta_5 q \dots 0,616_n$	$\Delta_4 q \dots 7,71_n$

Es ist von Interesse, die Ergebnisse von S. 26 mit denjenigen Werten zu vergleichen, die man mittels der konformen Doppelprojektion der preußischen Landesaufnahme für $B = 48^\circ$ und $L = 8^\circ$ erhält.

Der Anfangspunkt der ebenen rechtwinkligen Koordinaten der Landesaufnahme entspricht der geographischen Breite $B_0 = 52^\circ 42' 2'', 5325156 \dots$. Nach den im Anfange des § 9 aufgeführten Formeln ergibt sich dazu als Länge des Meridianbogens $x_0 = 5\ 840\ 711,803''$. Dieser Betrag ist von dem auf S. 26 gefundenen x in Abzug zu bringen, wenn bei der Abbildung des Erdspähröids in der Ebene der Anfangspunkt vom Äquator auf den Parallelkreis mit der Breite B_0 verlegt wird.

Die Rechnung für die konforme Doppelprojektion ergab mit den Werten von S. 26 zusammen die folgende Vergleichung:

$$B = 48^\circ, \quad L = 8^\circ.$$

Konforme Abbildung des Erdellipsoids in der Ebene.

$$\begin{aligned} x &= -491\ 771,657'' \\ y &= +596\ 724,110 \\ c &= 5^\circ 57' 45'', 4889 \\ m &= 1,004\ 3775. \end{aligned}$$

Konforme Doppelprojektion des Erdellipsoids auf die Kugel und von dieser auf die Ebene.

$$\begin{aligned} x &= -491\ 770,972'' \\ y &= +596\ 723,843 \\ c &= 5^\circ 57' 45'', 8715 \\ m &= 1,004\ 3742. \end{aligned}$$

Wie man sieht, weichen die Ergebnisse beider Übertragungen nicht sehr voneinander ab. Das Vergrößerungsverhältnis ist in beiden Fällen nahezu dasselbe. Entfernt man sich weiter vom Normalparallelkreis, so wird jedoch die direkte Übertragung vorteilhafter.

In den Beispielen sind die mit γ_4 , β_4 , α_4 multiplizierten Glieder, die von der Ordnung n^4 sind, gar nicht zur Geltung gekommen. Das ist selbst noch nicht der Fall, wie das folgende Beispiel zeigt, wenn die Entfernung vom Hauptmeridian 30° beträgt.

Die Formeln des § 9 reichen demnach viel weiter, als sie je für die Zwecke einer Landesvermessung gebraucht werden.

III. Gegeben: $B = 48^\circ$, $L = 30^\circ$.

Der Übergang von B zu b ist bereits unter I angegeben.

$$b = 47^\circ 48' 33'', 31871.$$

$$\begin{aligned} \sin L &= 9,698\ 9700\ 043 \\ \cos b &= 9,827\ 1112\ 794 \\ \sin u &= 9,526\ 0812\ 837 \\ u &= 19^\circ 37' 16'', 39451 \\ 45^\circ + \frac{1}{2}u &= 54^\circ 48' 38'', 19726 \\ \operatorname{tg}(45^\circ + \frac{1}{2}u) &= 0,151\ 7215\ 079 \\ \log \operatorname{tg}(45^\circ + \frac{1}{2}u) &= 9,181\ 0471\ 503 \\ 1 : M &= 0,362\ 2156\ 887 \\ \eta' &= 9,543\ 2628\ 390 \\ &\quad 6,803\ 9172\ 868 \\ y' &= 6,347\ 1801\ 258 \\ y' &= 2,224\ 232,211 \\ \Delta_1 y' &= - 955,756 \\ \Delta_2 y' &= - 8,112 \\ \Delta_3 y' &= + 0,020 \\ \Delta_4 y' &= + . \\ y &= 2,223\ 268,363 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sec L &= 0,062\ 4693\ 683 \\ \operatorname{tg} b &= 0,042\ 6559\ 896 \\ \operatorname{tg} \xi' &= 0,105\ 1253\ 579 \\ \xi' &= 51^\circ 52' 3'', 96069 \\ &= 186^\circ 723'', 96069 \\ \xi' &= 5,271\ 2000\ 508 \\ &\quad 1,489\ 4921\ 536 \\ x' &= 6,760\ 6922\ 044 \\ x' &= 5,763\ 578,391 \\ \Delta_1 x' &= + 6,478,613 \\ \Delta_2 x' &= - 4,767 \\ \Delta_3 x' &= - 0,023 \\ \Delta_4 x' &= + . \\ x &= 5,770\ 052,214 \\ p'' \cos b : N \cos B &= 8,510\ 5801\ 6 \\ &\quad \left\{ \begin{array}{l} 1,489\ 4921\ 5 \\ \operatorname{p}' = 9,999\ 7814\ 1 \\ \sec c'' = 0,000\ 0003\ 3 \\ \sec u = 0,025\ 9799\ 2 \end{array} \right. \\ \frac{m}{m_0} &= 0,025\ 8339\ 7 \\ \frac{m}{m_0} &= 1,061\ 2898 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} L &= 9,761\ 4393\ 726 \\ \sin b &= 9,869\ 7672\ 690 \\ \operatorname{tg} c' &= 9,631\ 2066\ 416 \\ &+ 1 \\ \Delta_1 p' &= - 0,000\ 4974\ 516 \\ \Delta_2 p' &= - 57\ 600 \\ \Delta_3 p' &= + 194 \\ \Delta_4 p' &= + 1 \\ p' &= + 0,999\ 4968\ 079 \\ \Delta_1 q' &= + 0,001\ 2282\ 980 \\ \Delta_2 q' &= - 26\ 497 \\ \Delta_3 q' &= - 215 \\ \Delta_4 q' &= + 1 \\ q' &= + 0,001\ 2256\ 269 \\ q' &= 7,088\ 3582\ 8 \\ 1 : p' &= 0,000\ 2185\ 9 \\ &\quad \left\{ \begin{array}{l} 5,314\ 4251\ 3 \\ - 22 \end{array} \right. \\ c'' &= 2,403\ 0017\ 8 \\ c' &= 23^\circ 9' 34'', 59751 \\ c'' &= 412, 93084 \\ c &= 23^\circ 13' 47'', 52835 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos 2\xi' &= 9,375\ 5550\ 5_n \\ \frac{1}{i} \sin 2i\eta' &= 9,879\ 0711\ 2 \\ &\quad 3,725\ 7209\ 1 \\ \sin 2\xi' &= 9,987\ 3990\ 2 \\ \cos 2i\eta' &= 0,098\ 3621\ 1 \\ \Delta_1 y' &= 2,980\ 3470\ 8_n \\ \Delta_1 x' &= 3,811\ 4820\ 4 \\ \cos 2\xi' \cos 2i\eta' &= 9,473\ 9171\ 6_n \\ &\quad 7,222\ 8336\ 2 \\ \sin 2\xi' \cdot \frac{1}{i} \sin 2i\eta' &= 9,866\ 4701\ 4 \\ \Delta_1 p' &= 6,696\ 7507\ 8_n \\ \Delta_1 q' &= 7,089\ 3037\ 6 \end{aligned} \quad \begin{aligned} \cos 4\xi' &= 9,94\ 804_n \\ \frac{1}{i} \sin 4i\eta' &= 0,27\ 846 \\ &\quad 0,68\ 261 \\ \sin 4\xi' &= 9,66\ 398_n \\ \cos 4i\eta' &= 0,33\ 162 \\ \Delta_2 y' &= 0,90\ 911_n \\ \Delta_2 x' &= 0,67\ 821_n \\ \cos 4\xi' \cos 4i\eta' &= 0,97\ 966_n \\ &\quad 4,48\ 076 \\ \sin 4\xi' \cdot \frac{1}{i} \sin 4i\eta' &= 9,94\ 244_n \\ \Delta_2 p' &= 4,76\ 042_n \\ \Delta_2 q' &= 4,42\ 320_n \end{aligned} \quad \begin{aligned} \cos 6\xi' &= 9,819 \\ \frac{1}{i} \sin 6i\eta' &= 0,603 \\ &\quad 7,878 \\ \sin 6\xi' &= 9,876_n \\ \cos 6i\eta' &= 0,616 \\ \Delta_3 y' &= 8,300 \\ \Delta_3 x' &= 8,370_n \\ \cos 6\xi' \cos 6i\eta' &= 0,435 \\ &\quad 1,853 \\ \sin 6\xi' \cdot \frac{1}{i} \sin 6i\eta' &= 0,479_n \\ \Delta_3 p' &= 2,288 \\ \Delta_3 q' &= 2,332_n \end{aligned} \quad \begin{aligned} \cos 8\xi' &= 9,76 \\ \frac{1}{i} \sin 8i\eta' &= 0,91 \\ &\quad 5,19 \\ \sin 8\xi' &= 9,91 \\ \cos 8i\eta' &= 0,91 \\ \Delta_4 y' &= 5,86 \\ \Delta_4 x' &= 6,01 \\ \cos 8\xi' \cos 8i\eta' &= 0,67 \\ &\quad 9,29 \\ \sin 8\xi' \cdot \frac{1}{i} \sin 8i\eta' &= 0,82 \\ \Delta_4 p' &= 9,96 \\ \Delta_4 q' &= 0,11 \end{aligned}$$

IV. Gegeben: $x = 5770052,214^m$, $y = 2223268,363^m$.

$$\begin{aligned}
 x &= 6,761\,1797\,432 \\
 &\quad 8,510\,5078\,464 \\
 \xi &= 5,271\,6875\,896 \\
 \xi &= 186\,933'',69460 \\
 &= 51^\circ 55' 33'' 69460 \\
 -\Delta_1 \xi &= -3,29, 74609 \\
 -\Delta_2 \xi &= +1207 \\
 -\Delta_3 \xi &= +11 \\
 -\Delta_4 \xi &= - \\
 \xi' &= 51^\circ 52' 3'',96069 \\
 \sin \xi' &= 9,895\,7471\,891 \\
 \cos u &= 9,974\,0200\,800 \\
 \sin b &= 9,869\,7672\,691 \\
 b &= 47^\circ 48' 33'',31873
 \end{aligned}$$

Von b gelangt man zu B wie unter II angegeben ist, es wird
 $B = 48^\circ 0' 0'',00002$

$$\begin{aligned}
 y &= 6,346\,9918\,881 \\
 &\quad 3,196\,0827\,132 \\
 \eta &= 9,543\,0746\,013 \\
 \eta &= 0,349\,2002\,945 \\
 -\Delta_1 \eta &= +1512\,897 \\
 -\Delta_2 \eta &= +986 \\
 -\Delta_3 \eta &= -4 \\
 -\Delta_4 \eta &= - \\
 \eta' &= 0,349\,3516\,824 \\
 \eta' &= 9,543\,2628\,391 \\
 M &= 9,637\,7843\,113 \\
 M\eta' &= 9,181\,0471\,504 \\
 \operatorname{tg}(45^\circ + \frac{1}{2}u) &= 0,151\,7215\,079 \\
 45^\circ + \frac{1}{2}u &= 54^\circ 48' 38'',19725 \\
 u &= 19^\circ 37' 16'',39450 \\
 \sec \xi' &= 0,209\,3781\,688 \\
 \operatorname{tg} u &= 9,552\,0612\,036 \\
 \operatorname{tg} L &= 9,761\,4393\,724 \\
 L &= 29^\circ 59' 59'',99996
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \operatorname{tg} \xi' &= 0,105\,1253\,579 \\
 \sin u &= 9,526\,0812\,836 \\
 \operatorname{tg} \epsilon' &= 9,631\,2066\,415 \\
 &+1 \\
 -\Delta_1 p &= +0,000\,5014\,978 \\
 -\Delta_2 p &= +4\,459 \\
 -\Delta_3 p &= -27 \\
 -\Delta_4 p &= - \\
 p &= +1,000\,5019\,410 \\
 \Delta_1 q &= +0,001\,2270\,696 \\
 \Delta_2 q &= -2\,071 \\
 \Delta_3 q &= -30 \\
 \Delta_4 q &= + \\
 q &= +0,001\,2268\,595 \\
 q &= 7,088\,7948\,2 \\
 p &= 0,000\,2179\,4 \\
 \operatorname{tg} \epsilon' &= 7,088\,5768\,8 \\
 \epsilon' &= 23^\circ 9' 34'',59749 \\
 \epsilon'' &= 4\,12, 93085 \\
 c &= 23^\circ 13' 47'',52834
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{cccc}
 2,236\,2289\,4 & 8,08\,309 & 5,534 & 2,64 \\
 \sin 2\xi & 9,987\,1821\,8 & \sin 6\xi & \sin 8\xi \\
 \cos 2i\eta & 0,098\,2827\,6 & \cos 6i\eta & \cos 8i\eta \\
 \Delta_1 \xi & 2,321\,6938\,8 & \Delta_3 \xi & \Delta_4 \xi \\
 & 8,08\,184_n & 6,023_n & 3,47 \\
 & 2,76\,867 & 0,220 & 7,33 \\
 & \cos 4\xi & \cos 6\xi & \cos 8\xi \\
 & 9,94\,712_n & 9,822 & 9,75 \\
 \frac{1}{i} \sin 2i\eta & 9,878\,8532\,2 & \frac{1}{i} \sin 6i\eta & \frac{1}{i} \sin 8i\eta \\
 \Delta_1 \eta & 6,179\,8095\,0_n & 0,602 & 0,91 \\
 & 2,99\,396_n & 0,644 & 7,99 \\
 \cos 2\xi \cos 2i\eta & 9,477\,4352\,4_n & \cos 6\xi \cos 6i\eta & \cos 8\xi \cos 8i\eta \\
 & 7,222\,8338\,0 & 0,437 & 0,66 \\
 \sin 2\xi \cdot \frac{1}{i} \sin 2i\eta & 9,866\,0354\,0 & 0,998 & 8,23 \\
 \Delta_1 p & 6,700\,2690\,4_n & \sin 6\xi \cdot \frac{1}{i} \sin 6i\eta & \sin 8\xi \cdot \frac{1}{i} \sin 8i\eta \\
 & 7,088\,8692\,0 & 0,476_n & 0,83 \\
 & 3,64\,924_n & 1,435 & 8,89 \\
 & 3,31\,626_n & 1,474_n & 9,06
 \end{array}$$

§ 11.

Formeln für kurze Entfernungen vom Hauptmeridian.

Wenn man in den vorigen Formeln auch schon die mit γ_3 , β_3 , α_3 multiplizierten Glieder vernachlässigt, so reichen sie noch aus bis zu einer Entfernung von etwa 2° vom Hauptmeridian, vorausgesetzt daß in den geographischen Koordinaten und der Meridiankonvergenz die vierte Dezimalstelle der Sekunde

und in den rechtwinkligen Koordinaten das Millimeter genau verlangt wird. In diesem Falle lassen sich die Formeln noch etwas zusammenziehen; gleichzeitig sind in der folgenden Übersicht die hyperbolischen Sinus und Cosinus durch Kreisfunktionen ersetzt worden.

I. Berechnung von x , y , c und m aus B und L .

Nachdem b aus B wie vorher im § 9 abgeleitet ist, hat man, wenn $\operatorname{tg} \eta' = \frac{1}{i} \operatorname{tg} i \eta' = \sin u'$ gesetzt wird:

$$\sin L \cos b = \sin u'$$

$$\log y' = 6,803\,917\,287 + \log \sin u' + [9,160\,663 - 10] \sin^2 u' + [8,7975 - 10] \sin^4 u' + \dots$$

$$\operatorname{tg} c' = \operatorname{tg} L \sin b = \operatorname{tg} \xi' \sin u', \quad \xi' - b = \frac{2\rho''}{[5,615\,4551]} \operatorname{tg} \frac{1}{2} c' \operatorname{tg} \frac{1}{2} u'.$$

$$\mathfrak{X} = [1,489\,4921\,536] (\xi' - \xi_0) + [3,725\,7209\,1] \sin 2\xi' + [0,68\,261] \sin 4\xi' + [7,878 - 10] \sin 6\xi' + \dots$$

$$x - \mathfrak{X} = \frac{2A\gamma_1}{[4,02\,675]} \sin 2\xi' \operatorname{tg}^2 u' \left\{ 1 + \frac{8\gamma_2 : \gamma_1}{[7,860 - 10]} \frac{\cos 2\xi'}{\cos^2 u'} \right\}$$

$$y - y' = \frac{2A\gamma_1}{[4,026\,751]} \frac{\operatorname{tg} u'}{\cos u'} \left\{ \cos 2\xi' + \frac{2\gamma_2 : \gamma_1}{[7,2579 - 10]} \cos 4\xi' (1 + 2 \operatorname{tg}^2 u') \right\}.$$

$$c'' = \frac{8\rho''\gamma_1}{[3,139\,3187]} \operatorname{tg} c' \frac{\cos^2 \xi'}{\cos^2 u'} \left\{ 1 + \frac{8\gamma_2 : \gamma_1 - 2\gamma_1}{[7,7461 - 10]} \cos 2\xi' (1 + 2 \operatorname{tg}^2 u') \right\},$$

$$c = c' + c'';$$

oder

$$\log \operatorname{tg} c = \log \operatorname{tg} c' + \frac{8M(\gamma_1 + 8\gamma_2 - 6\gamma_1^2)}{[7,463\,6465 - 10]} \frac{\cos^2 b}{\cos^2 u'} \left\{ 1 - \frac{(16\gamma_2 - 8\gamma_1^2)(\gamma_1 + 8\gamma_2 - 6\gamma_1^2)}{[7,89\,148 - 10]} (\sin^2 \xi' + \cos 2\xi' \operatorname{tg}^2 u') \right\}.$$

Vernachlässigt man in $\frac{m}{m_0}$ auch noch die Glieder mit γ_2 , so wird aus (33*) erhalten:

$$\frac{m}{m_0} = \frac{1}{\cos u'} \left\{ 1 - \frac{4\gamma_1}{[7,524 - 10]} \left(\frac{\sin^2 \xi'}{\cos^2 u'} - \sin^2 \xi' \cos^2 u' - \cos^2 \xi' \operatorname{tg}^2 u' \right) \right\}$$

oder

$$\log \frac{m}{m_0} = \log \sec u' - [7,162 - 10] \operatorname{tg}^2 u' (\sin^2 b - \cos 2\xi').$$

Zur Berechnung der trigonometrischen Funktionen von u' dienen hier auch die folgenden Gleichungen:

$$\operatorname{tg} u' = \sin c' \operatorname{ctg} b, \quad \cos u' = \frac{\cos L}{\cos c'},$$

$$\log \sec u' = \frac{1}{2} M \frac{\sin^2 u'}{[9,33\,675 - 10]} + \frac{1}{4} M \frac{\sin^4 u'}{[9,04 - 10]} + \dots$$

$$\text{und} \quad \log \operatorname{tg} \frac{1}{2} u' = \log \frac{\sin u'}{2} + M \left(\frac{\sin u'}{2} \right)^2 + \dots$$

$$\text{Ferner ist} \quad \log \operatorname{tg} \frac{1}{2} c = \log \frac{\operatorname{tg} c}{2} - M \left(\frac{\operatorname{tg} c}{2} \right)^2 + \frac{3}{2} M \left(\frac{\operatorname{tg} c}{2} \right)^4 - \dots$$

II. Berechnung von B , L , c und m aus x , y .

Hierbei ist $\sin \eta = \operatorname{tg} u$ gesetzt.

Erste Auflösung.

$$\begin{aligned}\xi - \xi_0 &= [8,510\ 5078\ 464 - 10]x, & \xi - \xi &= -[2,236\ 2289\ 4] \sin 2\xi - [8,0831 - 10] \sin 4\xi - \dots; \\ \eta &= [3,196\ 0827\ 13 - 10]y, & \log \operatorname{tg} u &= \log \eta + [8,8596 - 10] \eta^2 - \dots, & \log \sec u &= [9,3368 - 10] \eta^2 - \dots.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\xi' - \xi &= \frac{-2\rho''\beta_1}{[2,53\ 726_n]} \sin 2\xi \operatorname{tg}^2 u \left\{ 1 + \frac{8\beta_2:\beta_1}{[6,750 - 10]} \frac{\cos 2\xi}{\cos^2 u} \right\}, \\ \eta' - \eta &= \frac{-2\beta_1}{[7,222\ 834_n - 10]} \frac{\operatorname{tg} u}{\cos u} \left\{ \cos 2\xi + \frac{2\beta_2:\beta_1}{[6,14\ 789 - 10]} \cos 4\xi (1 + 2 \operatorname{tg}^2 u) \right\}; \\ \log \frac{\eta'}{\eta} &= \frac{M}{[9,637\ 784 - 10]} \frac{\eta' - \eta}{\eta} - \frac{\frac{1}{2}M}{[9,337 - 10]} \left(\frac{\eta' - \eta}{\eta} \right)^2 + \dots \\ c'' &= \frac{4\rho''\beta_1}{[2,838\ 2889]} \sin 2\xi \frac{\operatorname{tg} u}{\cos u} \left\{ 1 + \frac{2\beta_1 + 8\beta_2:\beta_1}{[7,3488 - 10]} \cos 2\xi (1 + 2 \operatorname{tg}^2 u) \right\}.\end{aligned}$$

Wird $\operatorname{Tg} \eta' = \sin u'$ gesetzt, so ist:

$$\log \sin u' = \log \eta' - [9,160\ 663 - 10] \eta^2 + [8,53 - 10] \eta^4 - \dots, \quad \log \operatorname{tg} \frac{1}{2} u' = \log \frac{\eta'}{2} - [9,1607 - 10] \left(\frac{\eta'}{2} \right)^2 + \dots,$$

und

$$\operatorname{tg} c' = \operatorname{tg} \xi' \sin u', \quad \xi' - b = \frac{2\rho''}{[5,615\ 4551]} \operatorname{tg} \frac{1}{2} c' \operatorname{tg} \frac{1}{2} u', \quad \operatorname{tg} \frac{1}{2} L = \operatorname{tg} \frac{1}{2} c' \frac{\cos \frac{1}{2}(\xi' - b)}{\sin \frac{1}{2}(\xi' + b)},$$

oder auch

$$\begin{aligned}\sin b &= \sin \xi' \cos u', & \operatorname{tg} L &= \sec \xi' \operatorname{tg} u'. \\ c &= c' + c''.\end{aligned}$$

Zweite Auflösung.

$$\begin{aligned}\xi - \xi_0 &= [8,510\ 5078\ 464 - 10]x, & \eta &= [3,196\ 0827\ 13 - 10]y. \\ \log \sin u &= \log \eta - [9,160\ 663 - 10] \eta^2 + [8,53 - 10] \eta^4 - \dots, & \log \operatorname{tg} \frac{1}{2} u &= \log \frac{\eta}{2} - [9,1607 - 10] \left(\frac{\eta}{2} \right)^2 + \dots;\end{aligned}$$

$$\operatorname{tg} c = \operatorname{tg} \xi \sin u, \quad \xi - \beta = \frac{2\rho''}{[5,615\ 4551]} \operatorname{tg} \frac{1}{2} c \operatorname{tg} \frac{1}{2} u, \quad \operatorname{tg} \frac{1}{2} \lambda = \operatorname{tg} \frac{1}{2} c \frac{\cos \frac{1}{2}(\xi - \beta)}{\sin \frac{1}{2}(\xi + \beta)}.$$

Oder

$$\log \cos u = -[9,336\ 754 - 10] \eta^2 + [8,56 - 10] \eta^4 - \dots,$$

$$\log \operatorname{tg} u = \log \eta + [8,859\ 633 - 10] \eta^2 - [7,38 - 10] \eta^4 + \dots;$$

$$\sin \xi \cos u = \sin \beta, \quad \sec \xi \operatorname{tg} u = \operatorname{tg} \lambda.$$

$$\begin{aligned}\log \operatorname{tg} (45^\circ + \frac{1}{2} b) &= \log \operatorname{tg} (45^\circ + \frac{1}{2} \beta) \\ &\quad - \frac{M\alpha_1}{[6,860\ 3158 - 10]} \frac{\sin \xi}{\cos u} \left\{ 1 + \frac{\alpha_2:\alpha_1}{[6,44\ 520 - 10]} \frac{\sin 3\xi}{\sin \xi} (1 + 4 \operatorname{tg}^2 u) \right\},\end{aligned}$$

$$L - \lambda = -\frac{\rho''\alpha_1}{[2,536\ 957]} \cos \xi \operatorname{tg} u \left\{ 1 + \frac{\alpha_2:\alpha_1}{[6,4452 - 10]} \frac{\cos 3\xi}{\cos \xi} (3 + 4 \operatorname{tg}^2 u) \right\}.$$

$$\log \operatorname{tg} c = \log \operatorname{tg} \beta + \frac{2M\alpha_1}{[7,161\ 3458 - 10]} \frac{\cos^2 \beta}{\cos^2 u} \left\{ 1 + \frac{3\alpha_2:\alpha_1}{[6,92\ 232 - 10]} (-3 + 8 (\cos^2 \xi + \operatorname{tg}^2 u \cos 2\xi)) \right\}.$$

Der Übergang von b zu B geschieht bei beiden Auflösungen wie auf S. 24 angegeben ist.

Wenn man bei der Berechnung von $\frac{m}{m_0}$ wieder die Glieder mit n^2 vernachlässigt, so kann man bei der ersten Auflösung ebenfalls die unter I angegebene Formel benutzen. Für beide Auflösungen erhält man mittels der zweiten Gl. (22) für $\frac{m}{m_0}$ eine Formel. Da nämlich jetzt $\Psi - b = n \sin b \cos b$ nach (11) und $\frac{b - \beta}{\cos \beta} = -n \sin \xi \operatorname{Cof} \eta$ nach (19) ist, so wird mit Hilfe der zweiten Gl. (17*) $\frac{\Psi - \beta}{\cos \beta} = -n \sin \xi \frac{\operatorname{Sin}^2 \eta}{\operatorname{Cof} \eta}$, so daß sich aus (20) ergibt $f'(X) = \frac{1}{A \cos \beta} \left(1 - n \left(1 - \frac{2 \operatorname{Sin}^2 \xi}{\operatorname{Cof}^2 \eta} + \operatorname{Sin}^2 \xi \right) \right)$.

Ferner folgt aus (21) $\frac{1}{\sqrt{p^2 + q^2}} = A \operatorname{Cof} \eta \cos \beta (1 + n (\operatorname{Cos}^2 \xi \operatorname{Cof}^2 \eta - \operatorname{Sin}^2 \xi \operatorname{Sin}^2 \eta))$. Mithin wird

$$\frac{m}{m_0} = \sec u \left\{ 1 - \frac{n}{[7,224 - 10]} \left(\frac{2 \operatorname{Sin}^2 \xi}{\operatorname{Cos}^2 u} - 2 \operatorname{Sin}^2 \xi \operatorname{Cos}^2 u - \operatorname{Tg}^2 u \right) \right\}$$

oder

$$\log \frac{m}{m_0} = \log \sec u - [6,862 - 10] (2 \operatorname{Sin}^2 \xi \operatorname{Sin}^2 u - \operatorname{Cos} 2\xi \operatorname{Tg}^2 u).$$

§ 12.

Zahlenbeispiele.

I. Gegeben: $B = 50^\circ$, $L = 2^\circ$.

Aus B wird zunächst b berechnet nach der auf S. 23 angegebenen Formel;

$$b = 49^\circ 48' 39", 8948.$$

$$\sin L \dots 8,542\,819\,164$$

$$\cos b \dots 9,809\,768\,358$$

$$\sin u' \dots 8,352\,587\,522$$

$$\frac{1}{3} M \sin^2 u' = 73\,424$$

$$\frac{13}{90} M \sin^4 u' = 16$$

$$6,803\,917\,287$$

$$y' \dots 5,156\,578\,249$$

$$y' = 143\,409,608$$

$$\Delta_1 y' = -40,198$$

$$\Delta_2 y' = -0,410$$

$$y = 143\,369,000''$$

$$4,026\,751$$

$$\operatorname{Tg} u' \dots 8,352\,698$$

$$\sec u' \dots 0,000\,110$$

$$\cos 2\xi' \dots 9,224\,643_n$$

$$\Delta_1 y' \dots 1,604\,202_n$$

$$7,257\,9$$

$$\cos 4\xi' \dots 9,974\,8_n$$

$$\sec 2\xi' \dots 0,775\,4_n$$

$$1 + 2 \operatorname{Tg}^2 u' \dots 0,000\,4$$

$$\Delta_1 y' \dots 9,612\,7_n$$

$$3,725\,7209\,1$$

$$\sin 2\xi' \dots 9,993\,8024\,1$$

$$\Delta_1 x' \dots 3,719\,5233\,2$$

$$0,68\,261$$

$$\sin 4\xi' \dots 9,51\,947_n$$

$$\Delta_1 x' \dots 0,20\,208_n$$

$$7,878$$

$$\sin 6\xi' \dots 9,942_n$$

$$\Delta_3 x' \dots 7,820_n$$

$$5,615\,4551$$

$$\operatorname{Tg} \frac{1}{2} c' \dots 8,125\,0249$$

$$\operatorname{Tg} \frac{1}{2} u' \dots 8,051\,6126$$

$$\xi' - b \dots 1,792\,0926$$

$$\xi' - b = 61", 9573$$

$$\xi' = 49^\circ 49' 41", 8521$$

$$= 179\,381", 8521$$

$$\xi' \dots 5,253\,7785\,038$$

$$1,489\,4921\,536$$

$$x' \dots 6,743\,2706\,574$$

$$x' = 5,536\,950,710$$

$$\Delta_1 x' = +5,242,318$$

$$\Delta_2 x' = -1,592$$

$$\Delta_3 x' = -7$$

$$\Delta_1 \xi' = +5,320$$

$$\Delta_2 \xi' = -6$$

$$x = 5,542\,196,743''$$

$$4,02\,675$$

$$\sin 2\xi' \dots 9,99\,380$$

$$\operatorname{Tg}^2 u' \dots 6,70\,540$$

$$\Delta_1 \xi' \dots 0,72\,595$$

$$7,860$$

$$\cos 2\xi' \dots 9,225_n$$

$$\sec^2 u' \dots 0,000$$

$$\Delta_3 \xi' \dots 7,811_n$$

$$\operatorname{Tg} L \dots 8,543\,0838\,05$$

$$\sin b \dots 9,883\,0483\,67$$

$$\operatorname{Tg} c' \dots 8,426\,1321\,72$$

$$3,139\,3187$$

$$\cos^2 \xi' \dots 9,619\,2278$$

$$\sec^2 u' \dots 0,000\,2203$$

$$1,184\,8990$$

$$7,746\,1$$

$$\cos 2\xi' \dots 9,224\,6_n$$

$$1 + 2 \operatorname{Tg}^2 u' \dots 0,000\,4$$

$$8,156\,0_n$$

$$c' = 1^\circ 31' 41", 1605$$

$$c'' = \begin{cases} + & 15,3073 \\ - & 143 \end{cases}$$

$$c = 1^\circ 31' 56", 4535$$

$$7,162$$

$$\operatorname{Tg}^2 u' \dots 6,705$$

$$\sin^2 b \dots 9,766$$

$$\cos 2\xi' \dots 9,225$$

$$3,633$$

$$3,092$$

$$\sec u' \dots 0,000\,1101\,6$$

$$— 4,3$$

$$— 1,2$$

$$\frac{m}{m_0} \dots 0,000\,1096\,1$$

II. Gegeben: $x = 5542196,743^m$, $y = 143369,000^m$.

Erste Auflösung.

$x \dots 6,743\ 6819\ 388$	
8,510\ 5078\ 464	
$\xi \dots 5,254\ 1897\ 852$	
$\xi = 179\ 551'', 8091$	
= $49^\circ 52' 31'', 8091$	
$-\Delta_1 \xi = -2\ 49, 7888$	
$-\Delta_2 \xi = +0, 0040$	
$+\Delta_1 \xi = -0, 1722$	
$+\Delta_2 \xi = +$	
$\xi' = 49^\circ 49' 41'', 8521$	
	$2,58\ 726_n$
2,236\ 2289\ 4	$\sin 2\xi \dots 9,99\ 368$
$\sin 2\xi \dots 9,993\ 6800\ 2$	$\operatorname{tg}^2 u \dots 6,70\ 515$
$\Delta_1 \xi \dots 2,229\ 9089\ 6$	$\Delta_1 \xi \dots 9,28\ 609_n$
	$9,236_n$
8,0831	5,53
$\sin 4\xi \dots 9,5235_n$	$\sin 6\xi \dots 9,75_n$
$\Delta_1 \xi \dots 7,6066_n$	$\cos 2\xi \dots 9,229_n$
	$6,750$
	$\sec^2 u \dots 0,000$
	$\Delta_2 \xi \dots 5,215$
$\operatorname{tg} \frac{1}{2} c' \dots 8,125\ 0249$	
$\operatorname{tg} \frac{1}{2} u' \dots 8,051\ 6126$	
	5,615\ 4551
$\xi' - b \dots 1,792\ 0926$	
$\xi' - b = 61'', 9573$	
$b = 49^\circ 48' 39'', 8948$	

Der Übergang von b zu B erfolgt nach der auf S. 24 angegebenen Formel;

$$B = 50^\circ 0' 0'', 0000$$

$y \dots 5,156\ 4552\ 56$	2,888\ 2889
3,196\ 0827\ 13	
$\eta \dots 8,352\ 5379\ 69$	
$M^{\eta' - \eta} = +1\ 230\ 09$	
$-\frac{1}{2} M \left(\frac{\eta' - \eta}{\eta} \right)^2 = -17$	
$\eta' \dots 8,352\ 6609\ 61$	
	$7,222\ 834_n$
$\operatorname{tg} u \dots 8,352\ 575$	
$\sec u \dots 0,000\ 110$	
$\cos 2\xi \dots 9,228\ 828_n$	
$\Delta_1 \eta \dots 4,804\ 847$	
	5,5755 _n
	6,1479
	9,9743 _n ... $\cos 4\xi$
	0,0004 ... 1 + 2 $\operatorname{tg}^2 u$
$\Delta_2 \eta \dots 1,6981$	
	0,0000 0063 7804 = $\Delta_1 \eta$
	+ 499 = $\Delta_2 \eta$
	0,0000 0063 7803 = $\eta' - \eta$
$\operatorname{tg} \frac{1}{2} c' \dots 8,125\ 0249\ 2$	6,862
$\cos \frac{1}{2} (\xi - b) \dots 0,000\ 0000\ 0$	2 ... 0,301
$\operatorname{cosec} \frac{1}{2} (\xi + b) \dots 0,116\ 8965\ 5$	6,862
	$\sin 2\xi \dots 9,767$
	$\sin^2 u \dots 6,705$
	$\operatorname{tg}^2 u \dots 6,705$
	$\Delta_1 m \dots 3,635$
	$\Delta_2 m \dots 2,796_n$
	$\sec u \dots 0,000\ 1101\ 0$
	$-\Delta_1 m = -4\ 3$
	$+\Delta_2 m = -6$
	$m \dots 0,000\ 1096\ 1$
	m_0
$L = 7200'', 0000$	
	$= 2^\circ 0' 0'', 0000$

Zweite Auflösung.

$x \dots 6,743\ 6819\ 388$	$y \dots 5,156\ 4552\ 56$
$8,510\ 5078\ 464$	$3,196\ 0827\ 13$
$\xi \dots 5,254\ 1897\ 852$	$\eta \dots 8,352\ 5379\ 69$
$\xi = 179\ 551''\ 8091$	$\operatorname{tg} \frac{1}{2} c \dots 8,125\ 6278\ 48$
$= 49^\circ 52' 31''\ 8091$	$\cos \frac{1}{2} (\xi - \beta) \dots - 5$
$\operatorname{tg} \frac{1}{2} c \dots 8,125\ 6278$	$\operatorname{cosec} \frac{1}{2} (\xi + \beta) \dots 0,116\ 5946\ 62$
$\operatorname{tg} \frac{1}{2} u \dots 8,051\ 4896$	$\left\{ \begin{array}{l} 5,615\ 4551\ 29 \\ - 441\ 62 \end{array} \right.$
$5,615\ 4551$	$\lambda \dots 3,857\ 6334\ 72$
$\xi - \beta \dots 1,792\ 5725$	$\lambda = 7204''\ 9915$
$\xi - \beta = 62'', 0258$	$-\Delta_1 \lambda = -4, 9971$
$\beta = 49^\circ 51' 29''\ 7833$	$-\Delta_2 \lambda = +0, 0056$
$\operatorname{tg} (45^\circ + \frac{1}{2} \beta) \dots 0,437\ 2653\ 20$	$L = 7200''\ 0000$
$-\Delta_1 \beta = -5544\ 81$	
$-\Delta_2 \beta = -1\ 02$	
$\operatorname{tg} (45^\circ + \frac{1}{2} b) \dots 0,436\ 7107\ 37$	
$45^\circ + \frac{1}{2} b = 69^\circ 54' 19''\ 9474$	
$b = 49^\circ 48' 39''\ 8948$	
$6,860\ 3158$	$2,536\ 957$
$\sin \xi \dots 9,883\ 4604$	$\cos \xi \dots 9,809\ 190$
$\sec u \dots 0,000\ 1101$	$\operatorname{tg} u \dots 8,352\ 575$
$\Delta_1 \beta \dots 6,743\ 8863$	$\Delta_1 \lambda \dots 0,698\ 722$
$6,445\ 2$	$6,445\ 2$
$\sin 3\xi \dots 9,703\ 8$	$\cos 3\xi \dots 9,935\ 9_n$
$\operatorname{cosec} \xi \dots 0,116\ 5$	$\sec \xi \dots 0,190\ 8$
$1 + 4 \operatorname{tg}^2 u \dots 0,000\ 9$	$3 + 4 \operatorname{tg}^2 u \dots 0,477\ 4$
$\Delta_2 \beta \dots 3,010\ 3$	$\Delta_2 \lambda \dots 7,748\ 0_n$

$y \dots 5,156\ 4552\ 56$	$\operatorname{tg} \xi \dots 0,074\ 2707\ 33$
$3,196\ 0827\ 13$	$\sin u \dots 8,352\ 4645\ 71$
$\eta \dots 8,352\ 5379\ 69$	$\operatorname{tg} c \dots 8,426\ 7353\ 04$
$\operatorname{tg} \frac{1}{2} c \dots 8,125\ 6278\ 48$	$\Delta_1 c = 6029\ 14$
$\cos \frac{1}{2} (\xi - \beta) \dots - 5$	$\Delta_2 c = 1\ 62$
$\operatorname{cosec} \frac{1}{2} (\xi + \beta) \dots 0,116\ 5946\ 62$	$\operatorname{tg} e \dots 8,427\ 3383\ 80$
$\left\{ \begin{array}{l} 5,615\ 4551\ 29 \\ - 441\ 62 \end{array} \right.$	$e = 1^\circ 31' 56''\ 4534$
	-3
	$8 \dots 0,90\ 309$
	$\cos^2 \xi \dots 9,61\ 838$
	$0,52\ 147 + 3,3224$
	$8 \dots 0,90\ 309$
	$\operatorname{tg}^2 u \dots 6,70\ 515$
	$\cos 2\xi \dots 9,22\ 905_n$
	$6,83\ 729_n - 0,0007$
	$k = +0,3217$
	$7,161\ 3458$
	$\cos^2 \beta \dots 9,618\ 6891$
	$\sec^2 u \dots 0,000\ 2202$
	$\Delta_1 c \dots 6,780\ 2551$
	$6,922\ 3$
	$k \dots 9,507\ 4$
	$\Delta_2 c \dots 3,210\ 0$

Die Berechnung des Vergrößerungsverhältnisses geschieht wie bei der vorigen Auflösung, ebenso der Übergang von b zu B .

Bei diesen Beispielen sind die Abszissen vom Äquator ab gezählt; soll der Anfangspunkt der Breite B_0 entsprechen, so ist bei I von den Werten für x die Länge des Meridianbogens vom Äquator bis zu B_0 zu subtrahieren.

Wie man sehen wird, sind bei Entfernungen vom Hauptmeridian, die kleiner als $8 - 9^\circ$ sind, die Formeln, die jetzt entwickelt werden sollen, für die numerische Rechnung kürzer und bequemer.

Zweite Ableitung der Übertragungsformeln des Erdellipsoids in die Ebene.

§ 13.

Ableitung der geographischen Koordinaten aus den ebenen rechtwinkligen Koordinaten.

Eine zweite Form der Abbildungsformeln wird dadurch erhalten, daß man in der Grundgleichung, (10) § 1 S. 3:

$$f(x + iy) = f(X) + iL \quad (1)$$

$f(x + iy)$ in eine nach Potenzen von iy fortschreitende Reihe entwickelt. Die Koeffizienten dieser Reihe, die die sukzessiven Ableitungen von $f(x)$ sind, lassen sich aus (8**) § 1 S. 4:

$$f'(x) = \frac{1}{N' \cos B'}, \quad N' = \frac{a\sqrt{1+e'^2}}{\sqrt{(1+e'^2 \cos^2 B')^3}}, \quad (2)$$

mit Hilfe der Beziehung:

$$\frac{dB'}{dx} = \frac{1}{R'} = \frac{Q'}{N'}, \quad R' = \frac{a\sqrt{1+e'^2}}{\sqrt{(1+e'^2 \cos^2 B')^3}}, \quad (3)$$

herstellen. Die Breite B' entspricht dem Endpunkte der Abszisse x , die Breite B dem Endpunkte der Abszisse X ; vgl. Fig. 1, S. 3.

Man erhält alsdann:

$$\begin{aligned} f(X) &= f(x) - \frac{1}{2} y^2 f''(x) + \frac{1}{24} y^4 f^{IV}(x) - \frac{1}{720} y^6 f^{VI}(x) + \dots \\ L &= yf'(x) - \frac{1}{6} y^3 f'''(x) + \frac{1}{120} y^5 f^V(x) - \frac{1}{5040} y^7 f^{VII}(x) + \dots \end{aligned} \quad (4)$$

Diese Gleichungen erfüllen wie es sein muß die Bedingungen (4*) § 1 S. 4. Umgekehrt hätte man auch aus diesen die Gl. (4) erhalten können. Denn man weiß von vornherein, daß X und daher auch $f(X)$ eine gerade Funktion von y sein muß, weil zu gleich großen positiven und negativen y derselbe Meridianbogen X gehört. Dagegen ist L eine ungerade Funktion von y , da für gleich große positive und negative y die entsprechende Länge L entgegengesetzte Werte hat. Setzt man dementsprechend für $f(X)$ und L Potenzreihen von y an, so zeigen die Bedingungen $\frac{\partial f(X)}{\partial x} = \frac{\partial L}{\partial y}$ und $\frac{\partial f(X)}{\partial y} = -\frac{\partial L}{\partial x}$, daß ihre Koeffizienten die Differentialquotienten von $f(x)$ sein müssen, wie es (4) angibt.

Entwickelt man $f(X)$ in der ersten Gl. (4) in eine nach Potenzen von $x - X$ fortschreitende Reihe, so ist:

$$f(X) = f(x) - (x - X)f'(x) + \frac{1}{2}(x - X)^2 f''(x) - \frac{1}{6}(x - X)^3 f'''(x) + \dots$$

Mithin wird, wenn man

$$\frac{f''(x)}{f'(x)} = g_1, \quad \frac{f'''(x)}{f'(x)} = g_2, \quad \frac{f^{IV}(x)}{f'(x)} = g_3, \quad \text{usw.} \quad (5)$$

setzt:

$$(x - X) - \frac{1}{2} g_1(x - X)^2 + \frac{1}{6} g_2(x - X)^3 - \dots = \frac{1}{2} g_1 y^2 - \frac{1}{24} g_3 y^4 + \frac{1}{720} g_5 y^6 - \dots$$

Indem man nach und nach verbesserte Näherungswerte für $x - X$ einsetzt, findet man daraus:

$$x - X = \frac{1}{2} g_1 y^3 - \frac{1}{24} (g_3 - 3g_1^3) y^4 + \frac{1}{720} (g_5 - 15g_1^2(g_3 - 3g_1^3 + g_1 g_3)) y^6 - \dots \quad (6)$$

Hierin ist jetzt nur noch von $x - X$ zu dem entsprechenden Breitenunterschiede $B' - B$ überzugehen.

Die zweite Gl. (4):

$$L = y f'(x) \left\{ 1 - \frac{1}{6} g_2 y^2 + \frac{1}{120} g_4 y^4 - \frac{1}{5040} g_6 y^6 + \dots \right\} \quad (4*)$$

liefert bereits die zu x, y gehörige Länge. Dabei ist L in Bogenmaß gemessen.

Zunächst werden nun die Werte der g hergeleitet. Benutzt man die (von CH. SCHOLS und W. JORDAN gebrauchte) Bezeichnung:

$$e'^2 \cos^2 B' = \varepsilon'^2, \quad (7)$$

so daß also

$$Q' = 1 + \varepsilon'^2$$

und wegen (3)

$$\frac{d \varepsilon'^2}{dx} = \frac{d Q'}{dx} = -2 \varepsilon'^2 \operatorname{tg} B' \frac{Q'}{N'}, \quad \frac{d N'}{dx} = \varepsilon'^2 \operatorname{tg} B', \quad \frac{d \operatorname{tg} B'}{dx} = (1 + \operatorname{tg}^2 B') \frac{Q'}{N'}$$

wird, so erhält man aus (2):

$$\begin{aligned} g_1 &= \frac{f''(x)}{f'(x)} = \frac{\operatorname{tg} B'}{N'}, \\ g_3 &= \frac{f'''(x)}{f'(x)} = \frac{1}{N'^2} (Q' (5 - 4\varepsilon'^2) + 6 \operatorname{tg}^2 B'), \\ g_5 &= \frac{f^{VIV}(x)}{f'(x)} = \frac{\operatorname{tg} B'}{N'^4} (Q' (5 - 4\varepsilon'^2) + 6 \operatorname{tg}^2 B') (Q' (5 - 4\varepsilon'^2) + 6 \operatorname{tg}^2 B' + 24 \operatorname{tg}^4 B'), \\ g_7 &= \frac{f^{VI}(x)}{f'(x)} = \frac{1}{N'^6} (Q'^2 (61 - 76\varepsilon'^2 + 88\varepsilon'^4) + 12 Q' \operatorname{tg}^2 B' (15 - 11\varepsilon'^2 + 8\varepsilon'^4 - 16\varepsilon'^6) + 120 \operatorname{tg}^4 B'), \\ g_9 &= \frac{f^{VII}(x)}{f'(x)} = \frac{1}{N'^8} (Q'^3 (61 - 76\varepsilon'^2 + 88\varepsilon'^4) + 2 Q'^2 \operatorname{tg}^2 B' (331 - 442\varepsilon'^2 + 436\varepsilon'^4 - 816\varepsilon'^6) \\ &\quad + 24 Q' \operatorname{tg}^4 B' (55 - 41\varepsilon'^2 + 33\varepsilon'^4 - 16\varepsilon'^6 + 80\varepsilon'^8) + 720 \operatorname{tg}^6 B') \\ &\quad \text{usw.} \end{aligned} \quad (8)$$

Ist g_1 berechnet, so ist für die folgenden g :

$$g_{r+1} = g_1 g_r + \frac{dg_r}{dx}.$$

Die Substitution dieser Werte in (6) gibt, wenn jetzt

$$\frac{y}{N'} = \eta' \quad (9)$$

gesetzt wird:

$$\begin{aligned} \frac{X - x}{N'} &= -\frac{1}{2} \eta'^2 \operatorname{tg} B' \left\{ 1 - \frac{1}{12} (Q' (5 - 4\varepsilon'^2) + 3 \operatorname{tg}^2 B') \eta'^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{360} (Q'^2 (61 - 76\varepsilon'^2 + 88\varepsilon'^4) + 6 Q' \operatorname{tg}^2 B' (15 - 12\varepsilon'^2 + 16\varepsilon'^4 - 32\varepsilon'^6) + 45 \operatorname{tg}^4 B') \eta'^4 \right\} + G l_8. \end{aligned}$$

Nun besteht aber zwischen $X - x$ und $B - B'$ nach (1) § 1 die Gleichung:

$$X - x = \int_{B'}^B R dB,$$

woraus folgt:

$$X - x = R'(B - B') + \frac{1}{2} \frac{dR'}{dB'} (B - B')^2 + \frac{1}{6} \frac{d^2 R'}{dB'^2} (B - B')^3 + \dots$$

mit

$$\begin{aligned} R' &= \frac{a\sqrt{(1+e'^2)}}{\sqrt{(1+e'^2 \cos^2 B')^3}} = \frac{N'}{Q'}, & \frac{dR'}{dB'} &= R' \cdot \frac{3e'^2 \tan B'}{Q'} = N' \frac{R'_1}{Q'^2}, \\ \frac{d^2 R'}{dB'^2} &= R' \cdot \frac{3e'^2}{Q'^2} (Q' - \tan^2 B' (1 - 4e'^2)) = N' \frac{R'_2}{Q'^3}, & \text{usw.} \end{aligned}$$

Statt dessen kann man auch schreiben:

$$\frac{X - x}{N'} = \frac{B - B'}{Q'} + \frac{1}{2} R'_1 \left(\frac{B - B'}{Q'} \right)^2 + \frac{1}{6} R'_2 \left(\frac{B - B'}{Q'} \right)^3 + \dots;$$

daraus wird aber durch Umkehrung:

$$\begin{aligned} \frac{B - B'}{Q'} &= \frac{X - x}{N'} - \frac{1}{2} R'_1 \left(\frac{X - x}{N'} \right)^2 - \frac{1}{6} (R'_2 - 3R'_1^2) \left(\frac{X - x}{N'} \right)^3 - \dots \\ &= \frac{X - x}{N'} - \frac{3}{2} e'^2 \tan B' \left(\frac{X - x}{N'} \right)^2 - \frac{1}{2} e'^2 (Q' - \tan^2 B' (1 + 5e'^2)) \left(\frac{X - x}{N'} \right)^3 - \dots. \end{aligned}$$

$B - B'$ ist hierbei als Arcus zu verstehen.

Trägt man nun in die Gleichung den vorher gefundenen Wert von $\frac{X - x}{N'}$ ein, so findet man die zu x, y gehörige Breite B durch die Gleichung:

$$\begin{aligned} B - B' &= -\frac{1}{2} \rho'' \eta'^2 Q' \tan B' \left\{ 1 - \frac{1}{12} (Q' (5 - 4e'^2) + 3 \tan^2 B' (1 - 3e'^2)) \eta'^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{360} (Q'^2 (61 - 76e'^2 + 88e'^4) + 2 Q' \tan^2 B' (45 - 171e'^2 + 138e'^4 - 96e'^6) + 45 \tan^4 B' (1 - 2e'^2 + 5e'^4)) \eta'^4 \right\} + Gl_6. \end{aligned} \quad (10)$$

Die Weiterentwicklung dieser Gleichung wird im § 17 I erfolgen.

Für die geographische Länge erhält man nach (4*) infolge (2) und (8):

$$\begin{aligned} L &= \rho'' \eta' \sec B' \left\{ 1 - \frac{1}{6} (Q' + 2 \tan^2 B') \eta'^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{120} (Q'^2 (5 - 4e'^2) + 4 Q' \tan^2 B' (7 - 5e'^2 + 6e'^4) + 24 \tan^4 B') \eta'^4 \right\} + Gl_7. \end{aligned} \quad (11)$$

Die Gleichungen (10) und (11) stimmen, wenn man Q' und e'^2 durch ihre Werte und $\tan^2 B'$ durch $\frac{1}{\cos^2 B'} - 1$ ersetzt, mit den Entwicklungen von O. SCHREIBER überein (Theorie der Projektionsmethode der hannoverschen Landesvermessung, S. 25).

Für $e'^2 = 0 = \varepsilon'^2$ ergeben sich aus (10) und (11) die Formeln (8*) und (8**), § 3 S. 8.

Die Gl. (11) soll nun nach dem Vorbilde der zweiten Gl. (8) § 3 S. 7 umgeformt werden.

Ersetzt man zunächst Q' durch $1 + \varepsilon'^2$ und nimmt man ferner noch das Glied in η'^7 mit, bei dem aber die mit ε'^6 multiplizierten Glieder vernachlässigt werden, so ist, L als Arcus vorausgesetzt:

$$\begin{aligned} L \cos B' = \eta' - \frac{1}{6}(1 + \varepsilon'^2 + 2 \operatorname{tg}^2 B')\eta'^3 + \frac{1}{120}(5 + 6\varepsilon'^2 - 3\varepsilon'^4 - 4\varepsilon'^6 + (28 + 8\varepsilon'^2 + 4\varepsilon'^4 + 24\varepsilon'^6)\operatorname{tg}^2 B' \\ + 24\operatorname{tg}^4 B')\eta'^5 - \frac{1}{5040}(61 + 107\varepsilon'^2 + 43\varepsilon'^4 + (662 + 440\varepsilon'^2 - 234\varepsilon'^4)\operatorname{tg}^2 B' \\ + (1320 + 336\varepsilon'^2 - 192\varepsilon'^4)\operatorname{tg}^4 B' + 720\operatorname{tg}^6 B')\eta'^7 + Gl_9. \end{aligned}$$

Nun ist aber

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} L \cos B' = L \cos B' + \frac{1}{3}(L \cos B')^3(1 + \operatorname{tg}^2 B') + \frac{2}{15}(L \cos B')^5(1 + 2\operatorname{tg}^2 B' + \operatorname{tg}^4 B') \\ + \frac{17}{315}(L \cos B')^7(1 + 3\operatorname{tg}^2 B' + 3\operatorname{tg}^4 B' + \operatorname{tg}^6 B') + \dots; \end{aligned}$$

daher wird mit dem obigen Werte von $L \cos B'$:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} L \cos B' = \eta' + \frac{1}{6}(1 - \varepsilon'^2)\eta'^3 + \frac{1}{120}(1 - 14\varepsilon'^2 - 3\varepsilon'^4 - 4\varepsilon'^6 - (12\varepsilon'^2 - 4\varepsilon'^4 - 24\varepsilon'^6)\operatorname{tg}^2 B')\eta'^5 \\ + \frac{1}{5040}(1 - 135\varepsilon'^2 - \varepsilon'^4 - (132\varepsilon'^2 - 444\varepsilon'^4)\operatorname{tg}^2 B' + 360\varepsilon'^4\operatorname{tg}^4 B')\eta'^7 + Gl_9. \end{aligned}$$

Rechter Hand wird jetzt noch $\frac{1}{i}\sin i\eta'$ eingeführt. Wegen

$$\frac{1}{i}\sin i\eta' = \eta' + \frac{1}{6}\eta'^3 + \frac{1}{120}\eta'^5 + \frac{1}{5040}\eta'^7 + \dots$$

ergibt sich alsdann:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} L \cos B' = \frac{1}{i}\sin i\eta' \left\{ 1 - \frac{1}{6}\varepsilon'^2\eta'^2 - \frac{1}{360}\varepsilon'^2(32 + 9\varepsilon'^2 + 12\varepsilon'^4 + (36 - 12\varepsilon'^2 - 72\varepsilon'^4)\operatorname{tg}^2 B')\eta'^4 \right. \\ \left. - \frac{1}{10800}\varepsilon'^2(96 - 43\varepsilon'^2 + (84 - 828\varepsilon'^2)\operatorname{tg}^2 B' - 180\varepsilon'^2\operatorname{tg}^4 B')\eta'^6 \right\}. \quad (12) \end{aligned}$$

Die hierin vernachlässigten Glieder sind von der Ordnung $\varepsilon'^2\eta'^9$ und $\varepsilon'^6\eta'^7$.

Die Koeffizienten in der Potenzreihe von η'^2 , Gl. (12), müssen sämtlich ε'^2 als Faktor haben, weil für $\varepsilon'^2 = 0$ (12) in die für die Kugel gültige Gleichung $\operatorname{tg} L \cos B' = \frac{1}{i}\sin i\frac{y}{a}$ übergehen muß. Läßt man in (12) in der Klammer das Glied mit η'^6 fort, so ist daher die Formel immer noch genauer als (11), denn die vernachlässigten Glieder sind jetzt erst von der Ordnung $\varepsilon'^2\eta'^7$, während sie in (11) von der Ordnung η'^7 sind.

Geht man zu Logarithmen über, so wird aus (12) erhalten:

$$\begin{aligned} \log(\operatorname{tg} L \cos B') = \log \frac{1}{i}\sin i\eta' - M\varepsilon'^2 \left\{ \frac{1}{6}\eta'^2 + \frac{1}{180}(16 + 7\varepsilon'^2 + 6\varepsilon'^4 + 6(3 - \varepsilon'^2 - 6\varepsilon'^4)\operatorname{tg}^2 B')\eta'^4 \right. \\ \left. + \frac{1}{3600}(32 + 39\varepsilon'^2 + 4(7 - 54\varepsilon'^2)\operatorname{tg}^2 B' - 60\varepsilon'^2\operatorname{tg}^4 B')\eta'^6 \right\} + M\varepsilon'^2 Gl_8 + M\varepsilon'^6 Gl_6; \\ \eta' = \frac{y}{N}. \end{aligned} \quad (12*)$$

§ 14.

Ableitung der ebenen rechtwinkligen Koordinaten aus den geographischen Koordinaten.

Ausdrücke für x und y lassen sich einmal aus den Gl. (6) und (4*) und ein zweites Mal aus den allgemeinen Gl. (11), (11*) und (12) des § 1 ableiten.

Im ersten Falle ist an Stelle des Arguments x das Argument X einzuführen und y durch L auszudrücken. Zum Endpunkte der Abszisse X gehört die Breite B .

Setzt man

$$g_v(X) = \frac{f^{(v+1)}(X)}{f'(X)} = G_v, \quad (5*)$$

während wie bisher $g_v(x)$ durch g_v bezeichnet wird, so ist wegen

$$\frac{dG_v}{dX} = G_{v+1} - G_1 G_v,$$

$$g_v = G_v + (x - X)(G_{v+1} - G_1 G_v) + \frac{1}{2}(x - X)^2(G_{v+2} - 2G_1 G_{v+1} + 2G_1^2 G_v - G_2 G_v) + \dots,$$

woraus folgt, indem man gleichzeitig hiermit in (6) nach und nach g durch G ersetzt:

$$\begin{aligned} g_v &= G_v + \frac{1}{2} G_1 (G_{v+1} - G_1 G_v) y^2 \\ &\quad + \frac{1}{24} (3G_1^2 G_{v+2} - (G_3 - 6G_1 G_2 + 9G_1^3) G_{v+1} + (G_3 - 9G_1 G_2 + 9G_1^3) G_1 G_v) y^4 + \dots \end{aligned} \quad (13)$$

und

$$\begin{aligned} x - X &= \frac{1}{2} G_1 y^2 - \frac{1}{24} (G_3 - 6G_1 G_2 + 3G_1^3) y^4 \\ &\quad + \frac{1}{720} (G_5 - 15G_1 G_4 - 15G_2 G_3 + 60G_1^2 G_3 + 90G_1 G_2^2 - 150G_1^3 G_2 + 45G_1^5) y^6 + \dots \end{aligned} \quad (13*)$$

Da ferner

$$\begin{aligned} f'(x) &= f'(X) \left\{ 1 + (x - X) G_1 + \frac{1}{2} (x - X)^2 G_2 + \dots \right\} \\ &= f'(X) \left\{ 1 + \frac{1}{2} G_1^2 y^2 - \frac{1}{24} (G_3 - 9G_1 G_2 + 3G_1^3) G_1 y^4 + \dots \right\} \end{aligned}$$

ist, so wird mit Hilfe von (13) aus (4*) erhalten:

$$L = f'(X) \left\{ y - \frac{1}{6} (G_2 - 3G_1^2) y^3 + \frac{1}{120} (G_4 - 15G_1(G_3 - 3G_1 G_2 + G_1^3)) y^5 + \dots \right\}.$$

Die Umkehrung dieser Gleichung liefert, weil nach (12) § 1 S. 4

$$\frac{L}{f'(X)} = L \cdot N \cos B$$

ist:

$$\frac{y}{N} = L \cos B + \frac{N^2}{6} (G_2 - 3G_1^2) (L \cos B)^3 + \frac{N^4}{120} (-G_4 + 10G_2^2 + 15G_1(G_3 - 7G_1 G_2 + 7G_1^3)) (L \cos B)^5 + \dots \quad (14)$$

Die Substitution dieses Wertes in (13*) gibt weiter:

$$\begin{aligned} \frac{x-X}{N} &= \frac{N}{2} G_1 (L \cos B)^2 - \frac{N^3}{24} (G_3 - 5G_1(2G_2 - 3G_1^2))(L \cos B)^4 \\ &\quad + \frac{N^5}{720} (G_5 - 35G_2G_3 - 7G_1(3G_4 - 30G_1G_3 - 40G_2^2 + 180G_1^2G_2 - 135G_1^4))(L \cos B)^6 + \dots \end{aligned} \quad (15)$$

L ist dabei in Bogenmaß angenommen.

Man hat nun in (14) und (15) die Werte für die G einzutragen; diese ergeben sich aus den g in (8) dadurch, daß man an Stelle von N' , Q' , ε'^2 , B' jetzt N , Q , ε^2 , B schreibt; es ist also

$$\varepsilon^2 = e'^2 \cos^2 B, \quad Q = 1 + \varepsilon^2, \quad N = a \sqrt{\frac{1 + e'^2}{1 + \varepsilon^2}}. \quad (7*)$$

Aus (14) und (15) folgt alsdann:

$$\begin{aligned} y &= NL' \left\{ 1 + \frac{1}{6} (Q - \operatorname{tg}^2 B) L'^2 + \frac{1}{120} (Q^2(5 + 4\varepsilon^2) - 2Q \operatorname{tg}^2 B(9 + 20\varepsilon^2 + 12\varepsilon^4) + \operatorname{tg}^4 B) L'^4 \right\} + NGl_7, \\ x - X &= \frac{1}{2} NL'^2 \operatorname{tg} B \left\{ 1 + \frac{1}{12} (Q(5 + 4\varepsilon^2) - \operatorname{tg}^2 B) L'^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{360} (Q^2(61 + 148\varepsilon^2 + 88\varepsilon^4) - 2Q \operatorname{tg}^2 B(29 + 136\varepsilon^2 + 204\varepsilon^4 + 96\varepsilon^6) + \operatorname{tg}^4 B) L'^4 \right\} + NGl_8; \\ L' &= \frac{L_{\text{Sek.}}}{\varrho''} \cos B. \end{aligned} \quad (16)$$

Ersetzt man in diesen Gleichungen Q und ε^2 durch ihre Werte und $\operatorname{tg}^2 B$ durch $\frac{1}{\cos^2 B} - 1$, so kommen sie in Übereinstimmung mit den von O. SCHREIBER angegebenen (Theor. d. Projektionsmeth. d. hann. Landesverm., S. 10).

Zu den Gl. (16) gelangt man direkt, wenn man die rechte Seite der Gl. (11) § 1 S. 4:

$$x + iy = J(\omega + iL), \quad \omega = f(X),$$

in eine Potenzreihe von iL entwickelt. Dabei ist

$$J(\omega) = X.$$

Man erhält, L als Arcus vorausgesetzt:

$$\begin{aligned} x &= X - \frac{L^2}{2} \frac{d^2 X}{d\omega^2} + \frac{L^4}{24} \frac{d^4 X}{d\omega^4} - \frac{L^6}{720} \frac{d^6 X}{d\omega^6} + \dots \\ y &= L \frac{dX}{d\omega} - \frac{L^3}{6} \frac{d^3 X}{d\omega^3} + \frac{L^5}{120} \frac{d^5 X}{d\omega^5} - \frac{L^7}{5040} \frac{d^7 X}{d\omega^7} + \dots \end{aligned} \quad (17)$$

Da nun nach (12) § 1:

$$\frac{dX}{d\omega} = N \cos B \quad \text{und} \quad \frac{dB}{d\omega} = Q \cos B \quad (18)$$

ist, so wird:

$$\begin{aligned}\frac{d^3 X}{d \omega^3} &= -N \cos^2 B \operatorname{tg} B, \\ \frac{d^3 X}{d \omega^3} &= -N \cos^3 B (1 + \varepsilon^2 - \operatorname{tg}^2 B), \\ \frac{d^4 X}{d \omega^4} &= +N \cos^4 B \operatorname{tg} B (5 + 9\varepsilon^2 + 4\varepsilon^4 - \operatorname{tg}^2 B), \\ \frac{d^5 X}{d \omega^5} &= +N \cos^5 B (5 + 14\varepsilon^2 + 13\varepsilon^4 + 4\varepsilon^6 - \operatorname{tg}^2 B (18 + 58\varepsilon^2 + 64\varepsilon^4 + 24\varepsilon^6) + \operatorname{tg}^4 B), \\ \frac{d^6 X}{d \omega^6} &= -N \cos^6 B \operatorname{tg} B (61 + 270\varepsilon^2 + 445\varepsilon^4 + 324\varepsilon^6 + 88\varepsilon^8 - \operatorname{tg}^2 B (58 + 330\varepsilon^2 + 680\varepsilon^4 + 600\varepsilon^6 + 192\varepsilon^8) + \operatorname{tg}^4 B), \\ \frac{d^7 X}{d \omega^7} &= -N \cos^7 B (61 + 331\varepsilon^2 + 715\varepsilon^4 + 769\varepsilon^6 + 412\varepsilon^8 + 88\varepsilon^{10} - \operatorname{tg}^2 B (479 + 3298\varepsilon^2 + 8655\varepsilon^4 + 10964\varepsilon^6 \\ &\quad + 6760\varepsilon^8 + 1632\varepsilon^{10}) + \operatorname{tg}^4 B (179 + 1771\varepsilon^2 + 6080\varepsilon^4 + 9480\varepsilon^6 + 6912\varepsilon^8 + 1920\varepsilon^{10}) - \operatorname{tg}^6 B), \\ &\quad \text{usw.},\end{aligned}\tag{18*}$$

womit man wieder zu den Gl. (16) kommt.

Der Gl. (11) § 4 S. 10 entsprechend wird nun die Gleichung für y umgewandelt; die Umformung der Gleichung für $x - X$ wird im § 17 II erfolgen.

Wenn man $L \cos B$ durch die Reihe

$$\begin{aligned}L \cos B &= \cos B \sin L + \frac{1}{6} (\cos B \sin L)^3 (1 + \operatorname{tg}^2 B) + \frac{3}{40} (\cos B \sin L)^5 (1 + 2 \operatorname{tg}^2 B + \operatorname{tg}^4 B) \\ &\quad + \frac{5}{112} (\cos B \sin L)^7 (1 + 3 \operatorname{tg}^2 B + 3 \operatorname{tg}^4 B + \operatorname{tg}^6 B) + \dots\end{aligned}$$

ersetzt, so wird mit

$$\cos B \sin L = l$$

aus der zweiten Gl. (17) und (18*) erhalten:

$$\begin{aligned}\frac{y}{N} &= l + \frac{1}{6} (2 + \varepsilon^2) l^3 + \frac{1}{120} (24 + 24\varepsilon^2 + 13\varepsilon^4 + 4\varepsilon^6 - 8\varepsilon^2 \operatorname{tg}^2 B (6 + 8\varepsilon^2 + 3\varepsilon^4)) l^5 \\ &\quad + \frac{1}{504} (72 + 108\varepsilon^2 + 117\varepsilon^4 - 4\varepsilon^2 \operatorname{tg}^2 B (108 + 261\varepsilon^2) + 384\varepsilon^4 \operatorname{tg}^4 B) l^7 + \dots\end{aligned}\tag{19}$$

Hierbei sind im Koeffizienten von l^7 die mit ε^6 multiplizierten Glieder vernachlässigt. Geht man nun mittels der Gleichung

$$\frac{1}{i} \operatorname{tg} i \frac{y}{N} = \frac{y}{N} - \frac{1}{3} \left(\frac{y}{N} \right)^3 + \frac{2}{15} \left(\frac{y}{N} \right)^5 - \frac{17}{315} \left(\frac{y}{N} \right)^7 + \dots$$

zu $\frac{1}{i} \operatorname{tg} i \frac{y}{N}$ über, so findet man:

$$\begin{aligned}\frac{1}{i} \operatorname{tg} i \frac{y}{N} &= l \left\{ 1 + \frac{1}{6} \varepsilon^2 l^2 + \frac{1}{120} \varepsilon^2 (4 + 13\varepsilon^2 + 4\varepsilon^4 - 8 \operatorname{tg}^2 B (6 + 8\varepsilon^2 + 3\varepsilon^4)) l^4 \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{1260} \varepsilon^2 (18 + 121\varepsilon^2 - 6 \operatorname{tg}^2 B (96 + 323\varepsilon^2) + 960\varepsilon^2 \operatorname{tg}^4 B) l^6 \right\} + \varepsilon^2 G_l + \varepsilon^6 G_l.\end{aligned}\tag{20}$$

Da für $\varepsilon^2 = 0$ diese Gleichung in $\frac{1}{i} \operatorname{tg} i \frac{y}{N} = \cos B \sin L$ übergehen muß, so müssen auch die vernachlässigten Glieder ε^2 als Faktor enthalten. Würde man in (20) das letzte Glied mit l^7 fortlassen, so würde die Formel dennoch genauer sein als die entsprechende Gl. (16) oder (19).

6*

Der Übergang von (20) zu Logarithmen gibt endlich:

$$\begin{aligned} \log \frac{1}{i} \operatorname{tg} i \frac{y}{N} &= \log l + M \varepsilon^2 \left\{ \frac{1}{6} l^2 + \frac{1}{180} (6 + 17 \varepsilon^2 + 6 \varepsilon^4 - 12 \operatorname{tg}^2 B (6 + 8 \varepsilon^2 + 3 \varepsilon^4)) l^4 \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{210} (3 + 19 \varepsilon^2 - \operatorname{tg}^2 B (82 + 323 \varepsilon^2) + 160 \varepsilon^2 \operatorname{tg}^4 B) l^6 \right\} + M \varepsilon^2 G l_8 + M \varepsilon^6 G l_6; \end{aligned} \quad (20*)$$

$$l = \cos B \sin L.$$

Die Berechnung von y kann auch noch durch die später im § 17 S. 53 unter (43) gegebene Gleichung erfolgen.

§ 15.

Berechnung der Konvergenz des Meridians.

I. Aus den ebenen rechtwinkligen Koordinaten.

Zur Ableitung der Konvergenz c des Meridians aus den ebenen rechtwinkligen Koordinaten kann man nach § 2 von verschiedenen Formeln ausgehen. Will man gleich c selbst erhalten, so ist es am bequemsten (19) § 2 S. 5 anzuwenden. Diese Gleichung gibt entwickelt mit $\frac{f''(x)}{f'(x)} = g_1$:

$$c = y g_1 - \frac{1}{6} y^3 \frac{d^2 g_1}{dx^2} + \frac{1}{120} y^5 \frac{d^4 g_1}{dx^4} - \dots$$

Soll $\operatorname{tg} c$ berechnet werden, so hat man nach (16) § 2 S. 5 einmal

$$\operatorname{tg} c = - \frac{\partial X}{\partial y} : \frac{\partial X}{\partial x};$$

dazu ist X aus (6) zu entnehmen, vgl. S. 47.

Andererseits ist auch

$$\operatorname{tg} c = \frac{\partial L}{\partial x} : \frac{\partial L}{\partial y},$$

wo L aus der zweiten Gl. (4) erhalten wird. Das ist dasselbe, als wenn man $f'(x+iy) = p + iq$ bildet und $\operatorname{tg} c = \frac{q}{p}$ setzt, vgl. (20) und (21), § 2 S. 5. Im letzteren Falle wird

$$\operatorname{tg} c = \frac{g_1 y - \frac{1}{6} g_3 y^3 + \frac{1}{120} g_5 y^5 - \frac{1}{5040} g_7 y^7 + \dots}{1 - \frac{1}{2} g_2 y^2 + \frac{1}{24} g_4 y^4 - \frac{1}{720} g_6 y^6 + \dots}, \quad g_r = \frac{f^{(r+1)}(x)}{f'(x)}$$

oder

$$\operatorname{tg} c = g_1 y - \frac{1}{6} g_3 y^3 + \frac{1}{120} g_5 y^5 - \frac{1}{5040} g_7 y^7 + \dots \quad (21)$$

mit

$$g_3 = g_3 - 3 g_1 g_2,$$

$$g_5 = g_5 - 5 g_1 g_4 - 10 g_2 g_3,$$

$$g_7 = g_7 - 7 g_1 g_6 - 21 g_2 g_5 - 35 g_4 g_3,$$

usw.

Mittels (8) wird daher

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} c &= \eta' \operatorname{tg} B' \left\{ 1 - \frac{1}{3} Q'(1 - 2\varepsilon'^2) \eta'^2 + \frac{1}{15} Q'(Q'(2 - 2\varepsilon'^2 + 11\varepsilon'^4) + 3\varepsilon'^2 \operatorname{tg}^2 B' (2 - \varepsilon'^2 - 8\varepsilon'^4)) \eta'^4 \right\} + Gl_7; \\ \eta' &= \frac{y}{N}. \end{aligned} \quad (22)$$

Diese Gleichung stimmt mit der von O. SCHREIBER (Theor. d. Projektionsmeth. d. hann. Landesverm. S. 31) überein, wenn man Q' und ε'^2 durch ihre Werte ersetzt und von $\operatorname{tg}^2 B'$ zu $\cos^2 B'$ übergeht.

Wir werden nun (22), der Gl. (9) § 3 S. 8 entsprechend, umformen. Vorher entwickeln wir sie jedoch noch ein Glied weiter. Dazu bedarf es der Kenntnis von g_7 . Indem wir darin die mit ε'^6 multiplizierten Glieder vernachlässigen, erhalten wir aus (8):

$$\begin{aligned} g_7 &= \frac{\operatorname{tg} B'}{N'^7} (1385 + 1731\varepsilon'^2 - 573\varepsilon'^4 + 6 \operatorname{tg}^2 B' (1211 + 736\varepsilon'^2 - 305\varepsilon'^4) \\ &\quad + 24 \operatorname{tg}^4 B' (455 + 112\varepsilon'^2 - 64\varepsilon'^4) + 5040 \operatorname{tg}^6 B'). \end{aligned} \quad (8*)$$

Mit (8) und (8*) folgt zunächst aus (21) bzw. (22), wenn gleichzeitig Q' durch seinen Wert ersetzt wird:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} c &= \operatorname{tg} B' \left\{ \eta' - \frac{1}{3} (1 - \varepsilon'^2 - 2\varepsilon'^4) \eta'^3 + \frac{1}{15} (2 + 2\varepsilon'^2 + 9\varepsilon'^4 + 20\varepsilon'^6 + 11\varepsilon'^8 + \operatorname{tg}^2 B' (6\varepsilon'^2 + 3\varepsilon'^4 \right. \\ &\quad \left. - 27\varepsilon'^6 - 24\varepsilon'^8)) \eta'^5 - \frac{1}{315} (17 + 15\varepsilon'^2 - 87\varepsilon'^4 + \operatorname{tg}^2 B' (66\varepsilon'^2 - 33\varepsilon'^4) + 135\varepsilon'^4 \operatorname{tg}^4 B') \eta'^7 \right\} + Gl_9 \end{aligned} \quad (22*)$$

und hieraus weiter:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} c &= \operatorname{tg} B' \cdot \frac{1}{i} \operatorname{tg} i\eta' \left\{ 1 + \frac{1}{3} \varepsilon'^2 (1 + 2\varepsilon'^2) \eta'^2 + \frac{1}{45} \varepsilon'^2 (11 + 37\varepsilon'^2 + 60\varepsilon'^4 + 33\varepsilon'^6 + 9 \operatorname{tg}^2 B' (2 + \varepsilon'^2 \right. \\ &\quad \left. - 9\varepsilon'^4 - 8\varepsilon'^6)) \eta'^4 - \frac{1}{945} \varepsilon'^2 (10 - 436\varepsilon'^2 + 18 \operatorname{tg}^2 B' (4 - 9\varepsilon'^2) + 135\varepsilon'^2 \operatorname{tg}^4 B') \eta'^6 \right\} + \varepsilon'^2 Gl_8 + \varepsilon'^6 Gl_7. \end{aligned} \quad (23)$$

Da die Koeffizienten der Potenzreihe von η'^2 als Faktor ε'^2 enthalten müssen, so wird, wenn man das Glied mit η'^6 in (23) wegläßt, die Formel dennoch genauer als (22) sein.

In logarithmischer Form ist:

$$\begin{aligned} \log \operatorname{tg} c &= \log \left(\operatorname{tg} B' \cdot \frac{1}{i} \operatorname{tg} i\eta' \right) + M\varepsilon'^2 \left\{ \frac{1}{3} (1 + 2\varepsilon'^2) \eta'^2 + \frac{1}{90} (22 + 69\varepsilon'^2 + 100\varepsilon'^4 + 46\varepsilon'^6 \right. \\ &\quad \left. + 18Q' \operatorname{tg}^2 B' (2 - \varepsilon'^2 - 8\varepsilon'^4)) \eta'^4 - \frac{1}{945} (10 - 359\varepsilon'^2 + 36 \operatorname{tg}^2 B' (2 - \varepsilon'^2) + 135\varepsilon'^2 \operatorname{tg}^4 B') \eta'^6 \right\} \\ &\quad + M(\varepsilon'^2 Gl_8 + \varepsilon'^6 Gl_6). \end{aligned} \quad (23*)$$

Ein anderer Ausdruck zur Berechnung von c wird später in (37) § 17 I S. 52 gegeben werden.

II. Aus den geographischen Koordinaten.

Ersetzt man in (21) g_r nach (13) durch G_r und y nach (14) durch $L \cos B - L'$, so gelangt man sofort zu der gewünschten Formel für $\operatorname{tg} c$; es ergibt sich:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} c &= NG_1L' - \frac{N^3}{6} (G_3 - 7G_1G_2 + 6G_1^3)L'^3 \\ &\quad + \frac{N^5}{120} (G_5 - 16G_1(G_4 - 10G_2^2 - 15G_1^4) + 15G_1^2(7G_3 - 31G_1G_2 - 25G_2G_3)L'^5 + Gl_7, \end{aligned}$$

aus der durch Einführung der Werte für G_r (vgl. S. 42 u. 38) folgt:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} c &= L' \operatorname{tg} B \left\{ 1 + \frac{1}{3} (Q(1 + 2\varepsilon^2) + \operatorname{tg}^2 B) L'^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{15} (Q^2(2 + 11\varepsilon^2 + 11\varepsilon^4) + 4Q \operatorname{tg}^2 B(1 - \varepsilon^2 - 9\varepsilon^4 - 6\varepsilon^6) + 2 \operatorname{tg}^4 B) L'^4 \right\} + G l_7; \quad (24) \\ L' &= \frac{L_{\text{Sek}}}{\rho''} \cos B. \end{aligned}$$

Direkt erhält man $\operatorname{tg} c$ in folgender Weise; es ist

$$\operatorname{tg} c = -\frac{dy}{dx},$$

wenn x und y aus den Gl. (17), unter der Voraussetzung, daß L konstant ist, entnommen werden. Also ist, wenn

$$\text{gesetzt wird: } \frac{d^{r+1}X}{d\omega^{r+1}} : \frac{dX}{d\omega} = h_r$$

$$\operatorname{tg} c = -\frac{\frac{dy}{d\omega}}{\frac{d\omega}{dx}} = -\left(h_1 L - \frac{1}{6} h_3 L^3 + \frac{1}{120} h_5 L^5 - \dots\right) : \left(1 - \frac{1}{2} h_2 L^2 + \frac{1}{24} h_4 L^4 - \dots\right)$$

oder

$$-\operatorname{tg} c = h_1 L - \frac{1}{6} h_3 L^3 + \frac{1}{120} h_5 L^5 - \frac{1}{5040} h_7 L^7 + \dots \quad (25)$$

mit

$$\begin{aligned} h_3 &= h_3 - 3h_1 h_2, \\ h_5 &= h_5 - 5h_1 h_4 - 10h_2 h_3, \\ h_7 &= h_7 - 7h_1 h_6 - 21h_2 h_5 - 35h_4 h_3, \\ &\text{usw.} \end{aligned}$$

Die Werte für die h ergeben sich aus (18) und (18*). Um auch h_7 zu erhalten, bilden wir noch $\frac{d^8X}{d\omega^8}$, vernachlässigen aber dabei die mit ε^6 multiplizierten Glieder; es wird alsdann

$$\begin{aligned} \frac{d^8X}{d\omega^8} &= +N \cos^8 B \operatorname{tg} B (1385 + 10899\varepsilon^2 + 34419\varepsilon^4 - \operatorname{tg}^2 B (3111 + 32802\varepsilon^2 + 129087\varepsilon^4) \\ &\quad + \operatorname{tg}^4 B (543 + 9219\varepsilon^2 + 49644\varepsilon^4) - \operatorname{tg}^6 B). \quad (18***) \end{aligned}$$

Aus (25) folgt nun, L in Bogenmaß vorausgesetzt, in Übereinstimmung mit (24):

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} c &= L \sin B \left\{ 1 + \frac{1}{3} (1 + 3\varepsilon^2 + 2\varepsilon^4 + \operatorname{tg}^2 B) (L \cos B)^2 + \frac{1}{15} (2 + 15\varepsilon^2 + 35\varepsilon^4 + 33\varepsilon^6 + 11\varepsilon^8 \right. \\ &\quad \left. + 4 \operatorname{tg}^2 B (1 - 10\varepsilon^4 - 15\varepsilon^6 - 6\varepsilon^8) + 2 \operatorname{tg}^4 B) (L \cos B)^4 + \frac{1}{315} (17 + 231\varepsilon^2 + 1029\varepsilon^4 \right. \\ &\quad \left. + \operatorname{tg}^2 B (51 - 63\varepsilon^2 - 2352\varepsilon^4) + \operatorname{tg}^4 B (51 + 21\varepsilon^2 + 294\varepsilon^4) + 17 \operatorname{tg}^6 B) (L \cos B)^6 \right\} + G l_9. \quad (24*) \end{aligned}$$

Um diese Gleichung nach dem Vorbilde von (13) § 4 S. 10 umzuformen, ersetze man vor der Klammer L mittels der Gleichung:

$$\begin{aligned} L &= \operatorname{tg} L \left(1 - \frac{1}{3} \sin^2 L - \frac{2}{15} \sin^4 L - \frac{8}{105} \sin^6 L - \dots \right) \\ &= \operatorname{tg} L \left(1 - \frac{1}{3} (\sin L \cos B)^2 (1 + \operatorname{tg}^2 B) - \frac{2}{15} (\sin L \cos B)^4 (1 + 2 \operatorname{tg}^2 B + \operatorname{tg}^4 B) - \dots \right) \end{aligned}$$

und in der Klammer L^2 durch die Gleichung:

$$L^2 = \sin^2 L + \frac{1}{3} \sin^4 L + \frac{8}{45} \sin^6 L + \dots$$

oder

$$(L \cos B)^2 = (\sin L \cos B)^2 + \frac{1}{3} (\sin L \cos B)^4 (1 + \operatorname{tg}^2 B) + \frac{8}{45} (\sin L \cos B)^6 (1 + 2 \operatorname{tg}^2 B + \operatorname{tg}^4 B) + \dots$$

Jetzt ergibt sich:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} c &= \operatorname{tg} L \sin B \left\{ 1 + \frac{1}{3} \varepsilon^2 (3 + 2 \varepsilon^2) l^2 + \frac{1}{15} \varepsilon^2 (15 + 35 \varepsilon^2 + 33 \varepsilon^4 + 11 \varepsilon^6 - 4 \varepsilon^8 \operatorname{tg}^2 B (10 + 15 \varepsilon^2 + 6 \varepsilon^4)) l^4 \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{21} \varepsilon^2 (21 + 84 \varepsilon^2 - 161 \varepsilon^4 \operatorname{tg}^2 B) l^6 \right\} + \varepsilon^2 G l_9 + \varepsilon^6 G l_7, \end{aligned} \quad (26)$$

mit

$$l = \sin L \cos B.$$

Oder

$$\begin{aligned} \log \operatorname{tg} c &= \log(\operatorname{tg} L \sin B) + M \varepsilon^2 \left\{ \frac{1}{3} (3 + 2 \varepsilon^2) l^2 + \frac{1}{90} (90 + 165 \varepsilon^2 + 138 \varepsilon^4 + 46 \varepsilon^6 - 24 \varepsilon^8 \operatorname{tg}^2 B (10 + 15 \varepsilon^2 + 6 \varepsilon^4)) l^4 \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{21} (21 (1 + 3 \varepsilon^2) - 161 \varepsilon^2 \operatorname{tg}^2 B) l^6 \right\} + M \varepsilon^2 G l_8 + M \varepsilon^6 G l_6. \end{aligned} \quad (26*)$$

Zur Berechnung von c findet man noch eine andere Gleichung im § 17 II, S. 53 unter (42).

§ 16.

Berechnung des Vergrößerungsverhältnisses.

I. Aus den ebenen rechtwinkligen Koordinaten.

Zur Ableitung eines zur Berechnung des Vergrößerungsverhältnisses $\frac{m}{m_0}$ dienenden Ausdrucks kann man eine der Formeln (15), (17), (21) und (24*) des § 2 benutzen; wir wählen dazu (15), § 2 S. 4:

$$\frac{m_0^2}{m^2} = \left(\frac{\partial X}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial X}{\partial y} \right)^2.$$

Nach (6) wird, wenn man berücksichtigt, daß $\frac{dg_r}{dx} = g_{r+1} - g_1 g_r$ ist:

$$\frac{\partial X}{\partial x} = 1 - \frac{1}{2} (g_2 - g_1^2) y^2 + \frac{1}{24} (g_4 - g_1 g_3 - 9 g_1^2 (g_2 - g_1^2)) y^4 - \dots$$

$$\frac{\partial X}{\partial y} = -g_1 y + \frac{1}{6} (g_3 - 3 g_1^3) y^3 - \dots;$$

mithin hat man:

$$\frac{m_0^2}{m^2} = 1 - (g_2 - 2 g_1^2) y^2 + \frac{1}{12} (g_4 + 3 g_2^2 - g_1 (5 g_3 + 15 g_1 g_2 - 24 g_1^3)) y^4 - \dots,$$

woraus

$$\frac{m_0}{m} = 1 - \frac{1}{2} (g_2 - 2 g_1^2) y^2 + \frac{1}{24} (g_4 - g_1 (5 g_3 + 3 g_1 g_2 - 12 g_1^3)) y^4 - \dots \quad (27)$$

folgt. Die Einführung der Werte von g aus (8) liefert

$$\frac{m_0}{m} = 1 - \frac{1}{2} Q' \eta'^2 \left\{ 1 - \frac{1}{12} (Q'(5 - 4\varepsilon'^2) + 24\varepsilon'^4 \operatorname{tg}^2 B') \eta'^2 \right\} + Gl_6$$

oder

$$\frac{m}{m_0} = 1 + \frac{1}{2} Q' \eta'^2 \left\{ 1 + \frac{1}{12} (Q'(1 + 4\varepsilon'^2) - 24\varepsilon'^4 \operatorname{tg}^2 B') \eta'^2 \right\} + Gl_6;$$

$$\eta' = \frac{y}{N}.$$
(28)

Die letzte Gleichung wird entsprechend (10) § 3 S. 8 umgewandelt. Da

$$\cos i \eta' \sqrt{Q'} = 1 + \frac{1}{2} Q' \eta'^2 + \frac{1}{24} Q'^2 \eta'^4 + \dots,$$

ferner

$$\eta' \sqrt{Q'} = \frac{y}{\sqrt{R' N}} = \frac{y}{\varrho'} = \frac{Q'}{\alpha \sqrt{1 + e'^2}} y$$

ist, wo also $\frac{1}{\varrho'}$, das GAUSSsche Krümmungsmaß für die Breite B' bedeutet, so wird

$$\frac{m}{m_0} = \cos i \frac{y}{\varrho'} \left\{ 1 + \frac{1}{6} \varepsilon'^2 \left(1 - \frac{6\varepsilon'^2 \operatorname{tg}^2 B'}{Q'} \right) \left(\frac{y}{\varrho'} \right)^4 \right\} + \varepsilon'^2 Gl_6$$

oder

(29)

$$\log \frac{m}{m_0} = \log \cos i \frac{y}{\varrho'} + \frac{1}{6} M \varepsilon'^2 \left(1 - \frac{6\varepsilon'^2 \operatorname{tg}^2 B'}{Q'} \right) \left(\frac{y}{\varrho'} \right)^4 + M \varepsilon'^2 Gl_6.$$
(29*)

Aus der zweiten Gl. (28) lässt sich auch die folgende ableiten:

$$\frac{m}{m_0} = \cos i \eta' \left\{ 1 + \frac{1}{2} \varepsilon'^2 \eta'^2 + \frac{1}{24} \varepsilon'^4 (9 + 4\varepsilon'^2 - 24Q' \operatorname{tg}^2 B') \eta'^4 \right\} + \varepsilon'^2 Gl_6.$$
(29**)

Die Form (29) bzw. (29**) besitzt demnach größere Genauigkeit als die entsprechende Gl. (28).

II. Aus den geographischen Koordinaten.

Wird in (27) g , durch G , nach (13) und y durch $L' = \frac{L_{\text{Sek.}}}{\rho''} \cos B$ nach (14) ersetzt, so erhält sich

$$\frac{m_0}{m} = 1 - \frac{N^2}{2} (G_2 - 2G_1^2) L'^2 + \frac{N^4}{24} (G_4 - 4G_2^2 - G_1(11G_3 - 47G_1G_2 + 36G_1^3)) L'^4 - \dots,$$
(30)

und wenn man die Werte für G , (vgl. S. 42 u. 38) einführt:

$$\frac{m_0}{m} = 1 - \frac{1}{2} Q L'^2 \left\{ 1 - \frac{1}{12} (Q(1 - 4\varepsilon^2) + 4 \operatorname{tg}^2 B(1 + 6\varepsilon^2 Q)) L'^2 \right\} + Gl_6$$

oder

$$\frac{m}{m_0} = 1 + \frac{1}{2} Q L'^2 \left\{ 1 + \frac{1}{12} (Q(5 + 4\varepsilon^2) - 4 \operatorname{tg}^2 B(1 + 6\varepsilon^2 Q)) L'^2 \right\} + Gl_6.$$
(31)

Zur Umformung dieser Gleichung, entsprechend (14) § 4 S. 10, wird aus (24) gebildet:

$$\begin{aligned} \cos c &= 1 - \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 c + \frac{3}{8} \operatorname{tg}^4 c - \dots \\ &= 1 - \frac{1}{2} L'^2 \operatorname{tg}^2 B - \frac{1}{24} L'^4 \operatorname{tg}^2 B (8(1 + 3\varepsilon^2 + 2\varepsilon^4) - \operatorname{tg}^2 B) - \dots; \end{aligned}$$

da nun

$$\frac{1}{\cos L} = 1 + \frac{1}{2} L'^2 (1 + \operatorname{tg}^2 B) + \frac{5}{24} L'^4 (1 + 2 \operatorname{tg}^2 B + \operatorname{tg}^4 B) + \dots$$

ist, so wird

$$\frac{\cos c}{\cos L} = 1 + \frac{1}{2} L'^2 + \frac{1}{24} (5 - 4 \operatorname{tg}^2 B (1 + 6 \varepsilon^2 + 4 \varepsilon^4)) L'^4 + \dots$$

und mithin

$$\begin{aligned} \frac{m}{m_0} &= \frac{\cos c}{\cos L} + \frac{1}{2} \varepsilon^2 L'^2 + \frac{1}{24} \varepsilon^2 (14 + 13 \varepsilon^2 + 4 \varepsilon^4 - 4 \operatorname{tg}^2 B (1 + 8 \varepsilon^2 + 6 \varepsilon^4)) L'^4 + \dots \\ &= \frac{\cos c}{\cos L} \left\{ 1 + \frac{1}{2} \varepsilon^2 L'^2 + \frac{1}{24} \varepsilon^2 (8 + 13 \varepsilon^2 + 4 \varepsilon^4 - 4 \operatorname{tg}^2 B (1 + 8 \varepsilon^2 + 6 \varepsilon^4)) L'^4 - \dots \right\}. \end{aligned}$$

Ersetzt man in der Klammer $L'^2 = \left(\frac{L_{\text{Sek}}}{\rho''}\right)^2 \cos^2 B$ durch $l^2 + \frac{1}{3} l^4 (1 + \operatorname{tg}^2 B) + \dots$, mit

$$l = \sin L \cos B,$$

so erhält man endlich:

$$\frac{m}{m_0} = \frac{\cos c}{\cos L} \left\{ 1 + \frac{1}{2} \varepsilon^2 l^2 + \frac{1}{24} \varepsilon^2 (12 + 13 \varepsilon^2 + 4 \varepsilon^4 - 8 \varepsilon^2 \operatorname{tg}^2 B (4 + 3 \varepsilon^2)) l^4 \right\} + \varepsilon^2 G l_6 \quad (32)$$

oder

$$\log \frac{m}{m_0} = \log \frac{\cos c}{\cos L} + M \varepsilon^2 \left\{ \frac{1}{2} l^2 + \frac{1}{12} (6 + 5 \varepsilon^2 + 2 \varepsilon^4 - 4 \varepsilon^2 \operatorname{tg}^2 B (4 + 3 \varepsilon^2)) l^4 \right\} + M \varepsilon^2 G l_6. \quad (32*)$$

Wenn man andererseits in die zweite Gl. (31) nach der ersten Gl. (16)

$$L' = \frac{y}{N} - \frac{1}{6} (Q - \operatorname{tg}^2 B) \left(\frac{y}{N}\right)^3 + \dots$$

einführt, so findet man:

$$\frac{m}{m_0} = 1 + \frac{1}{2} Q \left(\frac{y}{N}\right)^2 + \frac{1}{24} Q^2 (1 + 4 \varepsilon^2 - 24 \varepsilon^2 \operatorname{tg}^2 B) \left(\frac{y}{N}\right)^4 + \dots,$$

oder unter $\frac{1}{\varrho^2}$ das GAUSSsche Krümmungsmaß für die Breite B verstanden:

$$\frac{m}{m_0} = \cos i \frac{y}{\varrho} \left\{ 1 + \frac{1}{6} \varepsilon^2 (1 - 6 \operatorname{tg}^2 B) \left(\frac{y}{\varrho}\right)^4 \right\} + \varepsilon^2 G l_6. \quad (33)$$

Vernachlässigt man die $\varepsilon^2 G l_6$ bzw. $\varepsilon'^2 G l_6$, so kann man mithin nach (33) und (29)

$$\frac{m}{m_0} = \cos i \frac{y}{\varrho} \quad (34)$$

setzen, wobei ϱ zu irgend einer Breite längs der Ordinate y angenommen werden kann.

Da ϱ ebenso wie ε^2 und $\operatorname{tg}^2 B$ von x abhängig ist, so sind die Kurven, auf denen $\frac{m}{m_0}$ konstant ist, nicht mehr wie bei der Kugel zur Abszissenachse parallele Gerade. Sie weichen aber nicht sehr viel davon ab, denn sie werden angenähert dargestellt durch die Gleichung:

$$Qy = \text{konst.},$$

Krüger: Konforme Abbildung des Erdellipsoids in der Ebene.

wo Q zu irgend einer Breite längs y gehört. Sind y_1 und y_2 die Ordinaten zweier Punkte einer Kurve, für die $\frac{m}{m_0}$ konstant ist, so ist angenähert

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{Q_1}{Q_2}.$$

Q ändert sich innerhalb eines gewöhnlich zur Darstellung kommenden Gebietes nicht viel; z. B.

für 48° ist $Q = 1,00301$, für 52° ist $Q = 1,00255$, für 56° ist $Q = 1,00210$.

Ist demnach bei 48° $y = 75000^m$, so ist angenähert bei konstantem $\frac{m}{m_0}$ bei 52° $y = 75035^m$ und bei 56° $y = 75068^m$.

Die Kurven konstanten Vergrößerungsverhältnisses verlaufen in nahezu paralleler Richtung zur x -Achse, sie konvergieren nach Süden zu.

§ 17.

Umformung der Ausdrücke für die Breitendifferenz $B - B'$ und für die Koordinatendifferenz $x - X$.

I. Umformung von $B - B'$, (10) § 13 S. 39.

Die Formel (10) läßt sich jetzt in mehrfacher Weise so umwandeln, daß die vernachlässigten Glieder als Faktor ε'^2 enthalten.

Entsprechend der Gl. (7) S. 7 § 3 ergibt sich eine Umformung von (10). Man erhält zunächst aus ihr mittels der ersten Gl. (28):

$$\frac{B - B'}{\rho''} = \operatorname{tg} B' \left(\frac{m_0}{m} - 1 \right) + \frac{1}{2} \frac{\operatorname{tg}^3 B'}{Q'} (1 - 3\varepsilon'^2 - 8\varepsilon'^4) \left(\frac{m_0}{m} - 1 \right)^2 + G l_6,$$

und hiermit, da

$$\sin B - \sin B' = \frac{B - B'}{\rho''} \cos B' - \frac{1}{2} \left(\frac{B - B'}{\rho''} \right)^2 \sin B' - \dots$$

ist:

$$\sin B - \sin B' = \left(\frac{m_0}{m} - 1 \right) \sin B' \left\{ 1 - 2 \frac{\varepsilon'^2 \operatorname{tg}^2 B'}{Q'} (1 + 2\varepsilon'^2) \left(\frac{m_0}{m} - 1 \right) \right\} + \varepsilon'^2 G l_6$$

oder

$$\sin \frac{1}{2} (B' - B) = \frac{1}{2} \frac{\sin B'}{\cos \frac{1}{2} (B' + B)} \left(1 - \frac{m_0}{m} \right) \left\{ 1 + 2 \frac{\varepsilon'^2 \operatorname{tg}^2 B'}{Q'} (1 + 2\varepsilon'^2) \left(1 - \frac{m_0}{m} \right) \right\} + \varepsilon'^2 G l_6 \quad (35)$$

oder auch

$$\sin B = \frac{m_0}{m} \sin B' \left\{ 1 - \frac{1}{2} \varepsilon'^2 Q' \operatorname{tg}^2 B' (1 + 2\varepsilon'^2) \eta'^4 \right\} + \varepsilon'^2 G l_6. \quad (35*)$$

Trägt man in diese Gleichung den Wert für $\frac{m}{m_0}$ aus (29) ein, so geht sie, da $\eta' \sqrt{Q'} = \frac{y}{\varrho}$ ist, über in:

$$\sin B = \frac{\sin B'}{\cos i \frac{y}{\varrho}} \left\{ 1 - \frac{1}{6} \varepsilon'^2 \left(1 + 3 \frac{\operatorname{tg}^2 B'}{Q'} \right) \left(\frac{y}{\varrho} \right)^4 \right\} + \varepsilon'^2 G l_6. \quad (35**)$$

Zu einer noch geeigneteren Umformung gelangt man, indem man die für die transversale Mercatorprojektion der Kugel von Radius a geltende Formel $\operatorname{tg} \frac{1}{2}(B' - B) = \operatorname{tg} \frac{1}{2} c \cdot \frac{1}{i} \operatorname{tg} \frac{1}{2} i \frac{y}{a}$, vgl. (8*) § 4 S. 11, zum Vorbild nimmt.

Dementsprechend wird hier gebildet:

$$\eta' = \frac{y}{N'}, \quad \frac{1}{i} \operatorname{tg} \frac{1}{2} i \eta' = \frac{1}{2} \eta' - \frac{1}{24} \eta'^3 + \frac{1}{240} \eta'^5 - \dots$$

und mittels (22*):

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} c = \frac{1}{2} \operatorname{tg} c - \frac{1}{8} \operatorname{tg}^3 c + \frac{1}{16} \operatorname{tg}^5 c - \dots$$

$$= \frac{1}{2} \eta' \operatorname{tg} B' \left\{ 1 - \frac{1}{12} (4 - 4 \varepsilon'^2 - 8 \varepsilon'^4 + 3 \operatorname{tg}^2 B') \eta'^2 + \frac{1}{120} (16 + 16 \varepsilon'^2 + 72 \varepsilon'^4 + 160 \varepsilon'^6 + 88 \varepsilon'^8 \right. \\ \left. + \operatorname{tg}^2 B' (30 + 18 \varepsilon'^2 - 36 \varepsilon'^4 - 216 \varepsilon'^6 - 192 \varepsilon'^8) + 15 \operatorname{tg}^4 B' \eta'^4 + \dots \right\},$$

und aus beiden Ausdrücken:

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} c \cdot \frac{1}{i} \operatorname{tg} \frac{1}{2} i \eta' = \frac{1}{4} \eta'^2 \operatorname{tg} B' \left\{ 1 - \frac{1}{12} (5 - 4 \varepsilon'^2 - 8 \varepsilon'^4 + 3 \operatorname{tg}^2 B') \eta'^2 + \frac{1}{720} (122 + 76 \varepsilon'^2 + 392 \varepsilon'^4 \right. \\ \left. + 960 \varepsilon'^6 + 528 \varepsilon'^8 + \operatorname{tg}^2 B' (195 + 108 \varepsilon'^2 - 216 \varepsilon'^4 - 1296 \varepsilon'^6 - 1152 \varepsilon'^8) + 90 \operatorname{tg}^4 B' \eta'^4 + \dots \right\}.$$

Andererseits wird aus (10) erhalten:

$$\operatorname{tg} \frac{B' - B}{2Q'} = \frac{B' - B}{2\rho'' Q'} + \frac{1}{24} \left(\frac{B' - B}{\rho'' Q'} \right)^3 + \dots \\ = \frac{1}{4} \eta'^2 \operatorname{tg} B' \left\{ 1 - \frac{1}{12} (5 + \varepsilon'^2 - 4 \varepsilon'^4 + 3 \operatorname{tg}^2 B' (1 - 3 \varepsilon'^2)) \eta'^2 + \frac{1}{720} (122 + 92 \varepsilon'^2 - 6 \varepsilon'^4 + 200 \varepsilon'^6 \right. \\ \left. + 176 \varepsilon'^8 + \operatorname{tg}^2 B' (195 - 504 \varepsilon'^2 - 132 \varepsilon'^4 + 168 \varepsilon'^6 - 384 \varepsilon'^8) + 90 \operatorname{tg}^4 B' (1 - 2 \varepsilon'^2 + 5 \varepsilon'^4) \eta'^4 + \dots \right\}.$$

Mithin ergibt sich:

$$\operatorname{tg} \frac{B' - B}{2Q'} = \operatorname{tg} \frac{1}{2} c \cdot \frac{1}{i} \operatorname{tg} \frac{1}{2} i \eta' \left\{ 1 - \frac{1}{12} \varepsilon'^2 (5 + 4 \varepsilon'^2 - 9 \operatorname{tg}^2 B') \eta'^2 - \frac{1}{720} \varepsilon'^2 (109 + 398 \varepsilon'^2 + 480 \varepsilon'^4 \right. \\ \left. + 192 \varepsilon'^6 + 3 \operatorname{tg}^2 B' (154 + 52 \varepsilon'^2 - 368 \varepsilon'^4 - 256 \varepsilon'^6) + 45 \operatorname{tg}^4 B' (1 - 10 \varepsilon'^2) \eta'^4 \right\} + \varepsilon'^2 G l_8; \quad (36)$$

oder:

$$\log \operatorname{tg} \frac{B' - B}{2Q'} = \log \left(\operatorname{tg} \frac{1}{2} c \cdot \frac{1}{i} \operatorname{tg} \frac{1}{2} i \eta' \right) - M \varepsilon'^2 \left\{ \frac{1}{12} (5 + 4 \varepsilon'^2 - 9 \operatorname{tg}^2 B') \eta'^2 \right. \\ \left. + \frac{1}{1440} (218 + 921 \varepsilon'^2 + 1160 \varepsilon'^4 + 464 \varepsilon'^6 + 6 \operatorname{tg}^2 B' (154 - 23 \varepsilon'^2 - 428 \varepsilon'^4 - 256 \varepsilon'^6) \right. \\ \left. + 5 \operatorname{tg}^4 B' (18 - 99 \varepsilon'^2) \eta'^4 \right\} + M \varepsilon'^2 G l_6. \quad (36*)$$

Aus (36) wollen wir noch eine andere Formel ableiten, ohne jedoch das letzte Glied dabei mitzunehmen.

Mit Hilfe von (10) findet man zunächst:

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2}(B' + B) = \operatorname{tg} B' - \frac{B' - B}{2\rho''} (1 + \operatorname{tg}^2 B') + \dots = \operatorname{tg} B' \left\{ 1 - \frac{1}{4} Q' (1 + \operatorname{tg}^2 B') \eta'^2 + \dots \right\};$$

folglich wird

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2}(B' + B) \cdot \frac{1}{i} \operatorname{tg} \frac{1}{2} i\eta' = \frac{1}{2} \eta' \operatorname{tg} B' \left\{ 1 - \frac{1}{12} (4 + 3\epsilon'^2 + 3Q' \operatorname{tg}^2 B') \eta'^2 + \dots \right\},$$

und wenn man dies mit dem vorher angegebenen Werte von $\operatorname{tg} \frac{1}{2} c$ vergleicht:

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} c = \operatorname{tg} \frac{1}{2}(B' + B) \cdot \frac{1}{i} \operatorname{tg} \frac{1}{2} i\eta' \left\{ 1 + \frac{1}{12} \epsilon'^2 (7 + 8\epsilon'^2 + 3 \operatorname{tg}^2 B') \eta'^2 \right\} + \epsilon'^2 G l_5. \quad (37)$$

Für $\epsilon'^2 = 0$ geht (37) in eine für die transversale Mercatorprojektion der Kugel geltende Gleichung über.

Indem man den Wert für $\operatorname{tg} \frac{1}{2} c$ in (36) einführt, erhält man:

$$\operatorname{tg} \frac{B' - B}{2Q'} = \operatorname{tg} \frac{1}{2}(B' + B) \cdot \left(\frac{1}{i} \operatorname{tg} \frac{1}{2} i\eta' \right)^2 \left\{ 1 + \frac{1}{6} \epsilon'^2 (1 + 2\epsilon'^2 + 6 \operatorname{tg}^2 B') \eta'^2 \right\} + \epsilon'^2 G l_6. \quad (38)$$

Diese Formel enthält c nicht, erfordert aber indirektes Rechnen.

II. Umformung von $x - X$, (16) § 14 S. 42.

In ähnlicher Weise wie vorher kann man auch die zweite Gleichung (16) umformen.

Zunächst ergibt sich aus der ersten Gl. (16):

$$\begin{aligned} \frac{1}{i} \operatorname{tg} i \frac{y}{2N} &= \frac{1}{2} L' \left\{ 1 + \frac{1}{12} (1 + 2\epsilon^2 - 2 \operatorname{tg}^2 B) L'^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{120} (1 + 9\epsilon^2 + 13\epsilon^4 + 4\epsilon^6 - \operatorname{tg}^2 B (13 + 58\epsilon^2 + 64\epsilon^4 + 24\epsilon^6) + \operatorname{tg}^4 B) L'^4 + \dots \right\} \end{aligned}$$

und aus (24*):

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{1}{2} c &= \frac{1}{2} L' \operatorname{tg} B \left\{ 1 + \frac{1}{12} (4 + 12\epsilon^2 + 8\epsilon^4 + \operatorname{tg}^2 B) L'^2 + \frac{1}{120} (16 + 120\epsilon^2 + 280\epsilon^4 + 264\epsilon^6 + 88\epsilon^8 \right. \\ &\quad \left. + \operatorname{tg}^2 B (2 - 90\epsilon^2 - 380\epsilon^4 - 480\epsilon^6 - 192\epsilon^8) + \operatorname{tg}^4 B) L'^4 + \dots \right\}; \end{aligned}$$

dennach wird:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{1}{2} c \cdot \frac{1}{i} \operatorname{tg} i \frac{y}{2N} &= \frac{1}{4} L'^2 \operatorname{tg} B \left\{ 1 + \frac{1}{12} (5 + 14\epsilon^2 + 8\epsilon^4 - \operatorname{tg}^2 B) L'^2 + \frac{1}{720} (122 + 874\epsilon^2 + 1918\epsilon^4 \right. \\ &\quad \left. + 1688\epsilon^6 + 528\epsilon^8 - \operatorname{tg}^2 B (101 + 998\epsilon^2 + 2744\epsilon^4 + 3024\epsilon^6 + 1152\epsilon^8) + 2 \operatorname{tg}^4 B) L'^4 + \dots \right\}. \end{aligned}$$

Dagegen folgt aus der zweiten Gleichung (16):

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{x - X}{2N} &= \frac{1}{4} L'^2 \operatorname{tg} B \left\{ 1 + \frac{1}{12} (5 + 9\epsilon^2 + 4\epsilon^4 - \operatorname{tg}^2 B) L'^2 + \frac{1}{720} (122 + 540\epsilon^2 + 890\epsilon^4 + 648\epsilon^6 \right. \\ &\quad \left. + 176\epsilon^8 - \operatorname{tg}^2 B (101 + 660\epsilon^2 + 1360\epsilon^4 + 1200\epsilon^6 + 384\epsilon^8) + 2 \operatorname{tg}^4 B) L'^4 + \dots \right\}. \end{aligned}$$

Die Vergleichung der letzten beiden Ausdrücke liefert weiter:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{x-X}{2N} &= \operatorname{tg} \frac{1}{2} c \cdot \frac{1}{i} \operatorname{tg} i \frac{y}{2N} \left\{ 1 - \frac{1}{12} \varepsilon^2 (5 + 4\varepsilon^2) L'^2 - \frac{1}{720} \varepsilon^2 (209 + 578\varepsilon^2 + 560\varepsilon^4 + 192\varepsilon^6 \right. \\ &\quad \left. - \operatorname{tg}^2 B (313 + 1364\varepsilon^2 + 1824\varepsilon^4 + 768\varepsilon^6) L'^4 \right\} + \varepsilon^2 G l_8. \end{aligned} \quad (39)$$

In der Klammer ersetzen wir noch, wie auf S. 49, $L'^2 = \left(\frac{L_{\text{Sek.}}}{\rho''}\right)^2 \cos^2 B$ durch $l^2 = \sin^2 L \cos^2 B$. (Wenn B kleiner als 45° ist, würde es etwas besser sein, $\operatorname{tg}^2 L \cos^2 B$ einzuführen.) Dadurch wird

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{x-X}{2N} &= \operatorname{tg} \frac{1}{2} c \cdot \frac{1}{i} \operatorname{tg} i \frac{y}{2N} \left\{ 1 - \frac{1}{12} \varepsilon^2 (5 + 4\varepsilon^2) l^2 - \frac{1}{720} \varepsilon^2 (309 + 658\varepsilon^2 + 560\varepsilon^4 + 192\varepsilon^6 \right. \\ &\quad \left. - 3 \operatorname{tg}^2 B (71 + 428\varepsilon^2 + 608\varepsilon^4 + 256\varepsilon^6) l^4 \right\} + \varepsilon^2 G l_8 \end{aligned} \quad (39*)$$

oder

$$\begin{aligned} \log \operatorname{tg} \frac{x-X}{2N} &= \log \left(\operatorname{tg} \frac{1}{2} c \cdot \frac{1}{i} \operatorname{tg} i \frac{y}{2N} \right) - M \varepsilon^2 \left\{ \frac{1}{12} (5 + 4\varepsilon^2) l^2 + \frac{1}{720} (309 + 783\varepsilon^2 + 760\varepsilon^4 + 272\varepsilon^6 \right. \\ &\quad \left. - 3 \operatorname{tg}^2 B (71 + 428\varepsilon^2 + 608\varepsilon^4 + 256\varepsilon^6) l^4 \right\} + M \varepsilon^2 G l_8. \end{aligned} \quad (39**)$$

Ist hieraus $\frac{x-X}{2N}$ gleich z Sekunden erhalten, so ist $x - X = 2 \frac{N}{\rho''} z$; man hat auch

$$\log \frac{x-X}{2N} = \log \operatorname{tg} \frac{x-X}{2N} - \frac{1}{3} M \operatorname{tg}^2 \frac{x-X}{2N} + \frac{13}{90} M \operatorname{tg}^4 \frac{x-X}{2N} - \dots$$

Von $x - X$ lässt sich auch leicht zu $B' - B$ übergehen. Wie aus der Entwicklung auf S. 39 ersichtlich, ist:

$$\frac{B' - B}{2\rho'' Q} = \frac{x-X}{2N} - 3\varepsilon^2 \operatorname{tg} B \left(\frac{x-X}{2N} \right)^2 + \dots \quad (40)$$

mithin wird nach der zweiten Gleichung (16):

$$\operatorname{tg} \frac{B' - B}{2Q} = \operatorname{tg} \frac{x-X}{2N} \left\{ 1 - \frac{3}{4} \varepsilon^2 \operatorname{tg}^2 B \cdot L'^2 \right\} + \varepsilon^2 G l_6. \quad (41)$$

Indem man nun aus (39) den Wert von $\operatorname{tg} \frac{x-X}{2N}$ entnimmt, findet man:

$$\operatorname{tg} \frac{B' - B}{2Q} = \operatorname{tg} \frac{1}{2} c \cdot \frac{1}{i} \operatorname{tg} i \frac{y}{2N} \left\{ 1 - \frac{1}{12} \varepsilon^2 (5 + 4\varepsilon^2 + 9 \operatorname{tg}^2 B) L'^2 \right\} + \varepsilon^2 G l_6. \quad (41*)$$

Man gelangt noch leicht zu folgenden Gleichungen. Mittels (40), der zweiten Gl. (16) und des auf der vorigen Seite gegebenen Ausdrucks für $\operatorname{tg} \frac{1}{2} c$ ergibt sich:

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} c = \frac{\sin \frac{1}{2} (B' + B)}{\cos \frac{1}{2} (B' - B)} \operatorname{tg} \frac{1}{2} L \left\{ 1 + \frac{1}{12} \varepsilon^2 (9 + 8\varepsilon^2) L'^2 \right\} + \varepsilon^2 G l_5, \quad (42)$$

und mittels (40), der zweiten Gl. (16) und des umstehenden Ausdrucks für $\frac{1}{i} \operatorname{tg} i \frac{y}{2N}$:

$$\frac{1}{i} \operatorname{tg} i \frac{y}{2N} = \frac{\cos \frac{1}{2} (B' + B)}{\cos \frac{1}{2} (B' - B)} \operatorname{tg} \frac{1}{2} L \left\{ 1 + \frac{1}{12} \varepsilon^2 (2 + 3 \operatorname{tg}^2 B) L'^2 \right\} + \varepsilon^2 G l_5. \quad (43)$$

Damit wird weiter aus (41*) erhalten:

$$\operatorname{tg} \frac{B' - B}{2Q} = \frac{1}{2} \frac{\sin(B' + B)}{\cos^2 \frac{1}{2}(B' - B)} \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} L \left\{ 1 + \frac{1}{6} \varepsilon^2 (3 + 2\varepsilon^2 - 3 \operatorname{tg}^2 B) L'^2 \right\} + \varepsilon^2 G l_5. \quad (41**)$$

Für B' kann man noch eine andere Gleichung bilden, die (12) § 4 S. 10 entspricht. Trägt man in (40) aus der zweiten Gl. (16) den Wert für $\frac{x - X}{2N}$ ein, so wird

$$\frac{B' - B}{2\rho''} = \frac{1}{2} L'^2 Q \operatorname{tg} B \left\{ 1 + \frac{1}{12} (Q(5 + 4\varepsilon^2) - \operatorname{tg}^2 B(1 + 9\varepsilon^2)) L'^2 + \dots \right\};$$

und hiermit:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} B' - \operatorname{tg} B &= (1 + \operatorname{tg}^2 B) \frac{B' - B}{\rho''} + \operatorname{tg} B(1 + \operatorname{tg}^2 B) \left(\frac{B' - B}{\rho''} \right)^2 + \dots \\ &= \frac{1}{2} L'^2 Q \operatorname{tg} B (1 + \operatorname{tg}^2 B) \left\{ 1 + \frac{1}{12} (Q(5 + 4\varepsilon^2) + \operatorname{tg}^2 B(5 - 3\varepsilon^2)) L'^2 + \dots \right\}. \end{aligned}$$

Nun ist aber

$$\frac{\operatorname{tg} B}{\cos(L\sqrt{Q})} = \operatorname{tg} B + \frac{1}{2} L'^2 Q \operatorname{tg} B (1 + \operatorname{tg}^2 B) \left\{ 1 + \frac{5}{12} Q(1 + \operatorname{tg}^2 B) L'^2 + \dots \right\};$$

folglich erhält man:

$$\operatorname{tg} B' = \frac{\operatorname{tg} B}{\cos(L\sqrt{Q})} \left\{ 1 - \frac{1}{6} e'^2 Q(-Q + 2\operatorname{tg}^2 B) L'^4 \right\} + \varepsilon^2 G l_6. \quad (44)$$

Auch (35*) liefert eine Gleichung für B' ; mit Hilfe der Gl. (11) ergibt sich daraus:

$$\sin B' = \frac{m}{m_0} \sin B \left\{ 1 + \frac{1}{2} \varepsilon^2 Q \operatorname{tg}^2 B (1 + 2\varepsilon^2) L'^4 \right\} + \varepsilon^2 G l_6, \quad (45)$$

in die der Wert von $\frac{m}{m_0}$ aus (32) oder aus der ihr vorhergehenden Gleichung einzuführen ist.

§ 18.

Zusammenstellung der Formeln.

I. Gegeben x, y .

Gesucht B, L, c und m .

Zunächst ist die zu dem Endpunkte der Abszisse x gehörige Breite B' aus einer Tafel¹⁾ zu entnehmen oder nach den Formeln (7) und (5) des § 5 zu berechnen. Entspricht dem Anfangspunkte der Koordinaten die geogr. Breite B_0 , so ist die Länge x_0 des Meridianbogens vom Äquator bis zu B_0 zur Abszisse hinzuzufügen, um das zu dem Meridianbogen $x_0 + x$ gehörige B' zu erhalten.

1) Vgl. S. 22 Anmerkung.

Alsdann ist

$$e'^2 \cos^2 B' = \varepsilon'^2, \quad 1 + \varepsilon'^2 = Q', \quad N' = \frac{a \sqrt{1 + e'^2}}{\sqrt{Q'}} = \frac{[6,806\,0976\,435]}{\sqrt{Q'}}, \quad R' = \frac{N'}{Q'}; \quad (46)$$

$$\frac{y}{N'} = \eta'.$$

Setzt man

$$\frac{1}{i} \operatorname{tg} \frac{1}{2} i\eta' = \operatorname{tg} \frac{1}{2} u',$$

also

$$M\eta' = \log \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{1}{2} u' \right),$$

so ist

$$\frac{1}{i} \sin i\eta' = \operatorname{tg} u', \quad \frac{1}{i} \operatorname{tg} i\eta' = \sin u', \quad \cos i\eta' = \sec u'$$

und

$$\log \underset{\text{Sek.}}{u'} = \log \rho'' \eta' - \frac{\frac{1}{6} M}{[8,859\,6330\,6 - 10]} \eta'^2 + \frac{\frac{1}{36} M}{[8,081\,482 - 10]} \eta'^4 - \frac{\frac{19}{8835} M}{[7,4640 - 10]} \eta'^6 + \frac{\frac{43}{29680} M}{[6,92 - 10]} \eta'^8 - \dots \quad (47)$$

Man hat auch die folgenden Formeln, die für die Rechnung sehr bequem sind:

$$\begin{aligned} \log \operatorname{tg} u' &= \log \eta' + \frac{1}{6} M \eta'^2 - \frac{1}{180} M \eta'^4 + \frac{1}{2835} M \eta'^6 - \frac{1}{37800} M \eta'^8 + \dots \\ \log \sin u' &= \log \eta' - \frac{2}{6} M \eta'^2 + \frac{14}{180} M \eta'^4 - \frac{62}{2835} M \eta'^6 + \frac{254}{37800} M \eta'^8 - \dots \\ \log \cos u' &= - \frac{3}{6} M \eta'^2 + \frac{15}{180} M \eta'^4 - \frac{63}{2835} M \eta'^6 + \frac{255}{37800} M \eta'^8 - \dots \end{aligned} \quad (48)$$

und

$$\begin{aligned} \log \operatorname{tg} \frac{1}{2} u' &= \log \frac{1}{2} \eta' - \frac{1}{12} M \eta'^2 + \frac{14}{16 \cdot 180} M \eta'^4 - \frac{62}{64 \cdot 2835} M \eta'^6 + \dots \\ \frac{1}{6} M \dots 8,859\,6330\,6 - 10 &\quad \frac{1}{180} M \dots 7,382\,512 - 10 \quad \frac{1}{2835} M \dots 6,1852 - 10 \quad \frac{1}{37800} M \dots 5,06 - 10. \end{aligned}$$

Für $y = 100\,000$ Meter gibt das größte mit η'^4 multiplizierte Glied dieser Reihen, $\frac{1}{12} M \eta'^4$, für mittlere Breiten (von 45° bis 55° etwa) erst 22 Einheiten der 10. Dezimalstelle; die Glieder mit η'^6 kommen dabei nicht mehr in Betracht.

Zur Berechnung von L , c , B und $\frac{m}{m_0}$ dienen nun nach (12*), (23*), (36*) und (29**), (29*) die nachstehenden Formeln:

$$\left. \begin{aligned} \log \operatorname{tg} L &= \log \frac{\operatorname{tg} u'}{\cos B'} - \mathfrak{A}_1 \eta'^2 - \mathfrak{A}_2 \eta'^4 - \mathfrak{A}_3 \eta'^6 + Gl_{10} \\ \log \operatorname{tg} c &= \log (\sin u' \operatorname{tg} B') + \mathfrak{B}_1 \eta'^2 + \mathfrak{B}_2 \eta'^4 - \mathfrak{B}_3 \eta'^6 + Gl_{10} \\ \log \operatorname{tg} \frac{B' - B}{2Q'} &= \log \left(\operatorname{tg} \frac{1}{2} c \operatorname{tg} \frac{1}{2} u' \right) + \mathfrak{C}_1 \eta'^2 - \mathfrak{C}_2 \eta'^4 + Gl_8 \\ \log (B' - B) &= \log \left(2\rho'' Q' \operatorname{tg} \frac{B' - B}{2Q'} \right) - \frac{1}{3} M \operatorname{tg}^2 \frac{B' - B}{2Q'} + \dots \\ \log \frac{m}{m_0} &= \log \sec u' + 3\mathfrak{A}_1 \eta'^2 + Gl_8 \\ &= \log \sec u'_1 + \mathfrak{A}_1 \left(\frac{y^2}{R' N'} \right)^2 + Gl_8 \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

mit

$$\log \sec u_1' = \frac{1}{2} M \frac{y^3}{R'N'} - \frac{1}{12} M \left(\frac{y^3}{R'N'} \right)^2 + \frac{1}{45} M \left(\frac{y^3}{R'N'} \right)^3 - \dots \quad (49*)$$

Im vorhergehenden ist:

$$\mathfrak{A}_1 = \frac{1}{6} M \varepsilon'^2,$$

$$\mathfrak{B}_1 = \frac{1}{3} M \varepsilon'^2 (1 + 2 \varepsilon'^2) = \mathfrak{A}_1 (2 + 4 \varepsilon'^2),$$

$$\mathfrak{C}_1 = \frac{1}{12} M \varepsilon'^2 (-5 - 4 \varepsilon'^2 + 9 \operatorname{tg}^2 B') = \mathfrak{A}_1 (-2,5 - 2 \varepsilon'^2 + 4,5 \operatorname{tg}^2 B');$$

$$\mathfrak{A}_2 = \frac{1}{180} M \varepsilon'^2 (16 + 7 \varepsilon'^2 + 6 \varepsilon'^4 + 6(3 - \varepsilon'^2 - 6 \varepsilon'^4) \operatorname{tg}^2 B'),$$

$$\mathfrak{B}_2 = \frac{1}{90} M \varepsilon'^2 (22 + 69 \varepsilon'^2 + 100 \varepsilon'^4 + 46 \varepsilon'^6 + 18 Q' (2 - \varepsilon'^2 - 8 \varepsilon'^4) \operatorname{tg}^2 B'), \quad (50)$$

$$\mathfrak{C}_2 = \frac{1}{1440} M \varepsilon'^2 (218 + 921 \varepsilon'^2 + 1160 \varepsilon'^4 + 464 \varepsilon'^6 + 6(154 - 23 \varepsilon'^2 - 428 \varepsilon'^4 - 256 \varepsilon'^6) \operatorname{tg}^2 B'$$

$$\mathfrak{A}_3 = \frac{1}{3600} M \varepsilon'^2 (32 + 39 \varepsilon'^2 + 4(7 - 54 \varepsilon'^2) \operatorname{tg}^2 B' - 60 \varepsilon'^2 \operatorname{tg}^4 B'), \\ + 5(18 - 99 \varepsilon'^2) \operatorname{tg}^4 B');$$

$$\mathfrak{B}_3 = \frac{1}{945} M \varepsilon'^2 (10 - 359 \varepsilon'^2 + 36(2 - \varepsilon'^2) \operatorname{tg}^2 B' + 135 \varepsilon'^2 \operatorname{tg}^4 B').$$

Für die Logarithmen von \mathfrak{A}_2 , \mathfrak{A}_3 , \mathfrak{B}_2 , \mathfrak{B}_3 und \mathfrak{C}_2 ergeben sich hiernach die folgenden Werte:

B'	$\log \mathfrak{A}_2$	$\log \mathfrak{A}_3$	$\log \mathfrak{B}_2$	$\log \mathfrak{B}_3$	$\log \mathfrak{C}_2$
45°	-10 6,4403	-10 5,380	-10 6,9754	-10 6,098	-10 7,097
46	9 6,4412	9 5,379	1 6,9789	12 6,110	12 7,109
47	9 6,4421	8 5,378	1 6,9824	12 6,122	11 7,120
48	8 6,4429	9 5,377	1 6,9859	11 6,133	12 7,132
49	9 6,4438	8 5,375	2 6,9893	11 6,144	12 7,144
50	8 6,4446	9 5,374	1 6,9926	11 6,155	12 7,156
51	9 6,4455	8 5,373	1 6,9960	10 6,165	12 7,168
52	8 6,4463	9 5,372	1 6,9992	10 6,175	12 7,180
53	9 6,4472	8 5,371	1 7,0025	10 6,185	12 7,192
54	8 6,4480	9 5,370	1 7,0057	9 6,194	13 7,205
55	8 6,4488	9 5,369	1 7,0088	9 6,203	12 7,217

Nimmt man für y den extremen Wert von $700\,000''$ an, so wird mit Hilfe der vorstehenden Tabelle für die mit η'^4 und η'^6 multiplizierten Glieder der Gl. (49) erhalten

	in Einheiten der 9. Dezimalstelle				in Einh. d. 8. Dezimalstelle
	$\mathfrak{A}_2 \eta'^4$	$\mathfrak{A}_3 \eta'^6$	$\mathfrak{B}_2 \eta'^4$	$\mathfrak{B}_3 \eta'^6$	
bei $B' = 45^\circ$	39.7	0.04	136.2	0.2	18.0
$= 55$	40.4	0.04	146.8	0.3	23.7

Um die 4. Dezimalstelle der Sekunde in (49) zu erhalten, braucht man selbst bei $y = 700\,000''$ die Glieder mit η'^6 nicht mitzunehmen. Bei $169\,000''$ Entfernung vom Hauptmeridian beträgt das größte Glied $\mathfrak{B}_2 \eta'^4$ eine halbe Einheit der 9. Dezimalstelle; man kann daher bis zu diesem Abstande auch die mit η'^4 multiplizierten Glieder vernachlässigen.

II. Gegeben: B, L .

Gesucht: x, y, c und m .

Hier ist:

$$e'^2 \cos^2 B = \varepsilon^2, \quad 1 + \varepsilon^2 = Q, \quad N = \frac{a\sqrt{1+e'^2}}{\sqrt{Q}} = [6,806\,0976\,435], \quad R = \frac{N}{Q}. \quad (51)$$

Wird ferner

$$\frac{1}{i} \operatorname{tg} i \frac{y}{2N} = \operatorname{tg} \frac{1}{2} u \quad (52)$$

gesetzt, so ist:

$$\log y = \log N \frac{u}{\rho''} + \left[\begin{array}{l} \frac{1}{6} M \\ 8,859\,6330\,6 - 10 \end{array} \right] \left(\frac{u}{\rho''} \right)^2 + \left[\begin{array}{l} \frac{1}{36} M \\ 8,081\,482 - 10 \end{array} \right] \left(\frac{u}{\rho''} \right)^4 + \left[\begin{array}{l} \frac{19}{2835} M \\ 7,4640 - 10 \end{array} \right] \left(\frac{u}{\rho''} \right)^6 + \left[\begin{array}{l} \frac{43}{22650} M \\ 6,92 - 10 \end{array} \right] \left(\frac{u}{\rho''} \right)^8 + \dots, \quad (52^*)$$

wobei u in Sekunden auszudrücken ist; oder für die Rechnung noch geeigneter:

$$\log y = \log N \sin u + \left[\begin{array}{l} \frac{1}{3} M \\ 9,160\,6630\,6 - 10 \end{array} \right] \sin^2 u + \left[\begin{array}{l} \frac{13}{90} M \\ 8,797\,485 - 10 \end{array} \right] \sin^4 u + \left[\begin{array}{l} \frac{251}{2835} M \\ 8,5849 - 10 \end{array} \right] \sin^6 u + \left[\begin{array}{l} \frac{3551}{56700} M \\ 8,435 - 10 \end{array} \right] \sin^8 u + \dots. \quad (52^*)$$

Dabei ist nach (20*):

$$\begin{aligned} \sin L \cos B &= l, \\ \log \sin u &= \log l + \mathfrak{D}_1 l^2 - \mathfrak{D}_2 l^4 - \mathfrak{D}_3 l^6 + G l_{10}. \end{aligned}$$

Weiter ist nach (26*) und (39**):

$$\begin{aligned} \log \operatorname{tg} c &= \log (\operatorname{tg} L \sin B) + \mathfrak{E}_1 l^2 + \mathfrak{E}_2 l^4 + \mathfrak{E}_3 l^6 + G l_{10}, \\ \log \operatorname{tg} \frac{x-X}{2N} &= \log \left(\operatorname{tg} \frac{1}{2} c \operatorname{tg} \frac{1}{2} u \right) - \mathfrak{F}_1 l^2 - \mathfrak{F}_2 l^4 + G l_8, \\ \log (x-X) &= \log \left(2N \operatorname{tg} \frac{x-X}{2N} \right) - \frac{1}{3} M \operatorname{tg}^2 \frac{x-X}{2N} + \dots. \end{aligned}$$

X ist der Meridianbogen, der zur Breite B gehört; er ist aus einer Tabelle zu entnehmen oder nach (5) und (6) des § 5, vgl. auch S. 23 oben, zu berechnen. Wenn dem Koordinatennullpunkte

Krüger, Konforme Abbildung des Erdellipsoide in der Ebene.

die geographische Breite B_0 entspricht, so ist von X bzw. von x die Länge des Meridianbogens vom Äquator bis zu B_0 zu subtrahieren.

Nach (32*) und (33) ist ferner:

$$\begin{aligned} \log \frac{m}{m_0} &= \log \frac{\cos c}{\cos L} + \mathfrak{G}_1 l^2 + \mathfrak{G}_2 l^4 + G l_8 \\ &= \log \cos i \frac{y}{\sqrt{RN}} - \mathfrak{G}_2' \left(\frac{y}{\sqrt{RN}} \right)^4 + G l_8. \end{aligned} \quad (53*)$$

Die Koeffizienten in (53) und (53*) haben folgende Bedeutung:

$$\mathfrak{D}_1 = \frac{1}{6} M \varepsilon^2,$$

$$\mathfrak{E}_1 = \frac{1}{3} M \varepsilon^2 (3 + 2 \varepsilon^2) = \mathfrak{D}_1 (6 + 4 \varepsilon^2),$$

$$\mathfrak{F}_1 = \frac{1}{12} M \varepsilon^2 (5 + 4 \varepsilon^2) = \mathfrak{D}_1 (2,5 + 2 \varepsilon^2); \quad -\mathfrak{D}_1 + \mathfrak{E}_1 = 2 \mathfrak{F}_1;$$

$$\mathfrak{D}_2 = \frac{1}{180} M \varepsilon^2 (-6 - 17 \varepsilon^2 - 6 \varepsilon^4 + 12(6 + 8 \varepsilon^2 + 3 \varepsilon^4) \operatorname{tg}^2 B),$$

$$\mathfrak{E}_2 = \frac{1}{90} M \varepsilon^2 (90 + 165 \varepsilon^2 + 138 \varepsilon^4 + 46 \varepsilon^6 - 24 \varepsilon^2 (10 + 15 \varepsilon^2 + 6 \varepsilon^4) \operatorname{tg}^2 B),$$

$$\mathfrak{F}_2 = \frac{1}{720} M \varepsilon^2 (309 + 783 \varepsilon^2 + 760 \varepsilon^4 + 272 \varepsilon^6 - 3(71 + 428 \varepsilon^2 + 608 \varepsilon^4 + 256 \varepsilon^6) \operatorname{tg}^2 B); \quad (54)$$

$$\mathfrak{D}_3 = \frac{1}{210} M \varepsilon^2 (-3 - 19 \varepsilon^2 + (82 + 323 \varepsilon^2) \operatorname{tg}^2 B - 160 \varepsilon^2 \operatorname{tg}^4 B),$$

$$\mathfrak{E}_3 = \frac{1}{21} M \varepsilon^2 (21(1 + 3 \varepsilon^2) - 161 \varepsilon^2 \operatorname{tg}^2 B).$$

$$\mathfrak{G}_1 = 3 \mathfrak{D}_1 = \frac{1}{2} M \varepsilon^2, \quad \mathfrak{G}_2 = \frac{1}{12} M \varepsilon^2 (6 + 5 \varepsilon^2 + 2 \varepsilon^4 - 4 \varepsilon^2 (4 + 3 \varepsilon^2) \operatorname{tg}^2 B);$$

$$\mathfrak{G}_2' = \frac{1}{6} M \varepsilon^2 (-1 + 6 \operatorname{tg}^2 B).$$

Ferner hat man noch

$$\begin{aligned} \log \operatorname{tg} \frac{1}{2} u &= \log \frac{\sin u}{2} + M \left(\frac{\sin u}{2} \right)^2 + \frac{3}{2} M \left(\frac{\sin u}{2} \right)^4 + \frac{10}{3} M \left(\frac{\sin u}{2} \right)^6 + \frac{35}{4} M \left(\frac{\sin u}{2} \right)^8 + \dots, \\ \log \operatorname{tg} \frac{1}{2} c &= \log \frac{\operatorname{tg} c}{2} - M \left(\frac{\operatorname{tg} c}{2} \right)^2 + \frac{3}{2} M \left(\frac{\operatorname{tg} c}{2} \right)^4 - \frac{10}{3} M \left(\frac{\operatorname{tg} c}{2} \right)^6 + \frac{35}{4} M \left(\frac{\operatorname{tg} c}{2} \right)^8 - \dots. \end{aligned} \quad (55)$$

Für die Logarithmen der Koeffizienten \mathfrak{D}_2 , \mathfrak{D}_3 , \mathfrak{E}_2 , \mathfrak{E}_3 und \mathfrak{F}_2 finden sich nachstehende Werte:

B	$\log \mathfrak{D}_2$	$\log \mathfrak{D}_3$	$\log \mathfrak{E}_2$	$\log \mathfrak{E}_3$	$\log \mathfrak{F}_2$
45°	— 10 6,7301	— 10 6,742	— 10 7,1628	— 10 7,157	— 10 6,28
46	6,7476	175	6,758	16	6,19
47	6,7644	168	6,773	15	6,07
48	6,7805	161	6,788	15	5,90
49	6,7960	155	6,802	14	5,63
50	6,8109	149	6,815	13	4,78
51	6,8252	143	6,828	13	5,48
52	6,8389	137	6,841	13	5,82
53	6,8521	132	6,853	12	6,01
54	6,8648	127	6,864	11	6,14
55	6,8770	122	6,875	11	6,24
			6,9788	215	22
				6,970	

Nimmt man $L = 12^0$ an, so ergibt sich hiernach für die mit l^4 und l^6 multiplizierten Glieder

	in Einheiten der 9. Dezimalstelle				in Einh. d. 8. Dezimalstelle $\mathfrak{F}_2 l^4$
	$\mathfrak{D}_2 l^4$	$\mathfrak{D}_3 l^6$	$\mathfrak{E}_2 l^4$	$\mathfrak{E}_3 l^6$	
bei $B = 45^0$	250.9	5.6	679.7	14.6	8.9
$B = 55$	152.4	2.2	192.6	2.7	— 3.5

Für $L = 2^0$ wird bei $B = 45^0$ das größte Korrektionsglied $\mathfrak{E}_2 l^4$ erst eine halbe Einheit der 9. Dezimalstelle; mithin braucht man bis zu dahin nur die mit l^2 multiplizierten Zusatzglieder zu berücksichtigen. Daß die Berechnung dieser Werte aber nur geringe Mühe macht, zeigen die nachfolgenden Beispiele.

§ 19.

Zahlenbeispiele.

I. Berechnung der ebenen rechtwinkligen Koordinaten für
 $B = 48^\circ$ und $L = 8^\circ$.

$$\begin{aligned} \sin L &= 9,143\,5553\,039 \\ \cos B &= 9,825\,5108\,951 \\ l &= 8,969\,0661\,990 \\ + \mathfrak{D}_1 l^2 &= + 18\,885 \\ - \mathfrak{D}_2 l^4 &= - 454 \\ - \mathfrak{D}_3 l^6 &= - 4 \\ \sin u &= 8,969\,0680\,417 \\ N &= 6,805\,4453\,510 \\ (1) &= 1\,2554\,492 \\ (2) &= 47\,180 \\ (3) &= 251 \\ (4) &= 2 \\ y &= 5,775\,7735\,852 \\ y &= 596\,724,1098^m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tg L &= 9,147\,8025\,285 \\ \sin B &= 9,871\,0734\,581 \\ + \mathfrak{E}_1 l^2 &= + 113\,535 \\ + \mathfrak{E}_2 l^4 &= + 978 \\ + \mathfrak{E}_3 l^6 &= + 8 \\ \tg c &= 9,018\,8874\,387 \\ c &= 50^\circ 57' 45'', 4889 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tg \frac{1}{2} c &= 8,716\,6778\,57 \\ \tg \frac{1}{2} u &= 8,668\,9827\,10 \\ - \mathfrak{F}_1 l^2 &= - 47\,32 \\ - \mathfrak{F}_2 l^4 &= - 6 \\ \tg \frac{x-X}{2N} &= 7,385\,6558\,29 \\ 2N &= 7,106\,4753\,47 \\ -(5) &= - 8\,55 \\ x - X &= 4,492\,1303\,21 \\ x - X &= 31\,054,913 \\ X &= 53\,17\,885,233 \\ x &= 53\,48\,940,146^m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e'^2 &= 7,827\,3187\,8 \\ \cos^2 B &= 9,651\,0217\,9 \\ \varepsilon^2 &= 7,478\,3405\,7 \\ \varepsilon^2 &= 0,003\,0084\,346 \\ 1 + \varepsilon^2 &= 0,001\,3045\,851 \\ \sqrt{1 + \varepsilon^2} &= 0,000\,6522\,925 \\ &= 6,806\,0976\,435 \\ N &= 6,805\,4453\,510 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{6} M &= 8,859\,633 & l^4 &= 5,8763 \\ \varepsilon^2 &= 7,478\,341 & \mathfrak{D}_2 &= 6,7805 \\ l^2 &= 7,988\,132 & \mathfrak{E}_2 &= 7,1142 \\ \mathfrak{D}_1 l^3 &= 4,276\,106 & \mathfrak{F}_2 &= 5,90 \\ & & &= 2,6668 \\ \frac{1}{3} M &= 9,160\,663 & 2,9905 \\ \varepsilon^2 l^2 &= 5,416\,473 & 1,78 \\ 3 + 2\varepsilon^2 &= 0,477\,992 & & \\ \mathfrak{E}_1 l^2 &= 5,055\,128 & l^6 &= 3,81 \\ & & \mathfrak{D}_3 &= 6,79 \\ \frac{1}{12} M &= 8,55\,860 & \mathfrak{E}_3 &= 7,11 \\ \varepsilon^2 l^2 &= 5,41\,647 & 0,60 \\ 5 + 4\varepsilon^2 &= 0,70\,001 & 0,92 \\ \mathfrak{F}_1 l^2 &= 4,67\,508 & & \\ & & & \\ 9,160\,6630\,6 & & 8,5849 \\ \sin^2 u &= 7,938\,1360\,8 & \sin^2 u &= 3,8144 \\ (1) &= 7,098\,7991\,4 & (3) &= 2,3993 \\ & & & \\ 8,797\,485 & & 8,435 \\ \sin^4 u &= 5,876\,272 & \sin^4 u &= 1,753 \\ (2) &= 4,673\,757 & (4) &= 0,188 \\ & & & \\ \tg \frac{x-X}{2N} &= \frac{9,1607}{4,7713} & & \\ (5) &= 3,9320 & & \end{aligned}$$

X , der Meridianbogen, der zur Breite B gehört, ist hier wie auch späterhin aus einer Tafel von O. KOLL entnommen.¹⁾

Für $\log VQ$ ist auf 10 Dezimalstellen eine Tafel von W. JORDAN berechnet worden.²⁾

Die Ergebnisse des vorstehenden Beispiels sind in Übereinstimmung mit den nach der ersten Übertragungsmethode berechneten im § 10 S. 26, aber die Rechnung ist hier viel kürzer.

1) O. KOLL, Geodätische Rechnungen mittels der Rechenmaschine. Halle a. S. 1903.

2) JORDAN-EGGERT, Handbuch der Vermessungskunde, Band III.

II. Berechnung der geographischen Koordinaten für

$$x = 5348940,146^m, \quad y = 596724,1098^m.$$

Zu dem Meridianbogen x gehört $B' = 48^\circ 16' 45'', 5510$.

$\eta' \dots 8,970\ 3211\ 851$	$\eta' \dots 8,970\ 3211\ 851$	$e'^2 \dots 7,827\ 3187\ 8$
$+ \frac{1}{8} (1) = + 6313\ 576$	$- (1) = - 12627\ 153$	$\cos^2 B' \dots 9,646\ 2958\ 6$
$- \frac{1}{14} (2) = - 1836$	$+ (2) = + 25699$	$\varepsilon'^2 \dots 7,473\ 6146\ 4$
$+ \frac{1}{62} (3) = + 1$	$- (3) = - 63$	$\varepsilon'^2 = 0,002\ 9758\ 747$
$- \frac{1}{254} (4) = -$	$+ (4) = +$	$Q' = 1 + \varepsilon'^2 \dots 0,001\ 2904\ 867$
$\operatorname{tg} u' \dots 8,970\ 9523\ 592$	$\sin u' \dots 8,969\ 0610\ 334$	$\sqrt{Q'} \dots 0,000\ 6452\ 434$
$\sec B' \dots 0,176\ 8520\ 694$	$\operatorname{tg} B' \dots 0,049\ 8225\ 517$	$6,806\ 0976\ 435$
$- \mathfrak{A}_1 \eta'^2 = - 18789$	$+ \mathfrak{B}_1 \eta'^2 = + 37800$	$N' \dots 6,805\ 4524\ 001$
$- \mathfrak{A}_2 \eta'^4 = - 211$	$+ \mathfrak{B}_2 \eta'^4 = + 738$	$y \dots 5,775\ 7735\ 852$
$- \mathfrak{A}_3 \eta'^6 = -$	$- \mathfrak{B}_3 \eta'^6 = - 1$	$\eta' \dots 8,970\ 3211\ 851$
$\operatorname{tg} L \dots 9,147\ 8025\ 286$	$\operatorname{tg} c \dots 9,018\ 8874\ 388$	$\frac{1}{3} M \dots 9,160\ 6630\ 6 \quad \frac{12}{2835} M \dots 7,9776$
$L = 8^\circ 0' 0'', 0000$	$c = 5^\circ 57' 45'', 4889$	$\eta'^2 \dots 7,940\ 6423\ 7 \quad \eta'^6 \dots 3,8219$
		$(1) \dots 7,101\ 3054\ 3 \quad (3) \dots 1,7995$
$\sec u' \dots 0,001\ 8913\ 26$	$\operatorname{tg} \frac{1}{2} c \dots 8,716\ 6778\ 57$	$\frac{7}{90} M \dots 8,528\ 640 \quad \frac{127}{18900} M \dots 7,47$
$+ 3 \mathfrak{A}_1 \eta'^2 = + 5637$	$\operatorname{tg} \frac{1}{2} u' \dots 8,668\ 9756\ 72$	$\eta'^4 \dots 5,881\ 285 \quad \eta'^8 \dots 1,76$
$\frac{m}{m_0} \dots 0,001\ 8969\ 63$	$+ \mathfrak{C}_1 \eta'^2 = + 5927$	$(2) \dots 4,409\ 925 \quad (4) \dots 9,23$
$\frac{m}{m_0} = 1,004\ 3775$	$- \mathfrak{C}_2 \eta'^4 = - 104$	
$B' - B = 0^\circ 16' 45'', 55102$	$\operatorname{tg} \frac{B' - B}{2 Q'} \dots 7,385\ 6593\ 52$	$9,1607$
$B' = 48^\circ 16' 45, 5510$	$2 \rho'' Q' \dots 5,616\ 7456\ 16$	$\operatorname{tg}^2 \frac{B' - B}{2 Q'} \dots 4,7713$
$B = 48^\circ 0' 0'', 0000$	$- (5) = - 855$	$(5) \dots 3,9320$
	$B' - B \dots 3,002\ 4041\ 13$	
		$\frac{1}{2} (1) \dots 6,800\ 275 \quad \eta'^4 \dots 5,8813$
		$\varepsilon'^2 \dots 7,473\ 614 \quad \mathfrak{A}_2 \dots 6,4432$
		$\mathfrak{A}_1 \eta'^2 \dots 4,273\ 889 \quad \mathfrak{B}_2 \dots 6,9868$
		$2 + 4 \varepsilon'^2 \dots 0,308\ 607 \quad \mathfrak{C}_2 \dots 7,135$
		$\mathfrak{B}_1 \eta'^2 \dots 4,577\ 496 \quad 2,3245$
		$4,273\ 889 \quad 2,8681$
		$- 2,5 - 2 \varepsilon'^2 \dots 0,398\ 973_n \quad 3,016$
		$4,5 \operatorname{tg}^2 B' \dots 0,752\ 858 \quad \eta'^6 \dots 3,82$
		$- 47083 \dots 4,672\ 862_n \quad \mathfrak{A}_2 \dots 5,38$
		$+ 106352 \dots 5,026\ 747 \quad \mathfrak{B}_2 \dots 6,14$
		$59269 = \mathfrak{C}_1 \eta'^2$

Hierzu sind die beiden Auflösungen S. 27—29 im § 10 zu vergleichen; gegen diese ist auch hier die Rechnung viel einfacher und kürzer. Bei den Beispielen ist der Anfangspunkt der Koordinaten im Äquator angenommen. Soll er der Breite B_0 entsprechen, so ist von den erhaltenen Werte der Abszisse x die Länge des Meridianbogens vom Äquator bis zur Breite B_0 abzuziehen.

III. Als weiteres Beispiel sollen die Formeln zur Übertragung eines Punktes der GAUSS'schen Landesvermessung von Hannover benutzt werden, und zwar des Hauptdreieckspunktes Borkum, der am weitesten von dem durch die Göttinger Sternwarte gehenden Hauptmeridian entfernt ist.

Bei der hannoverschen Gradmessung (1821—1825) und der sich dieser anschließenden Landesvermessung (1828—1844) wurde von GAUSS die WALBECKSche Abplattung 1:302,78 zu Grunde gelegt; dazu machte er die Annahme, daß der Meridianquadrant des Erdellipsoids gleich 10 000 000 Meter sei. Demgemäß wird bei ihm¹⁾:

$$\log a = 6,804\,5975\,970,$$

$$\log e^3 = 7,819\,1850\,399 \quad \text{und} \quad \log e'^2 = 7,822\,0585\,008.$$

Der Anfangspunkt des ebenen rechtwinkligen Koordinatensystems war der Mittelpunkt der Achse des REICHENBACHSchen Meridiankreises in der Sternwarte zu Göttingen, dessen Breite $B_0 = 51^\circ 31' 47'',85$ gesetzt wurde. Die Abszissen wurden nach Süden, die Ordinaten nach Westen positiv gezählt. Bei den hier benutzten Formeln ist dagegen x nach Norden positiv, während für die Ordinaten vorausgesetzt ist, daß sie mit L gleiches Vorzeichen haben; nimmt man y und L nach Westen positiv, so wird nach dem GAUSS'schen Koordinatenverzeichnis²⁾

Borkum, Leuchtturm,

$$x = + 234\,139,343^m, \quad y = + 216\,659,508^m.$$

Bei GAUSS ist $m_0 = 1$.

Um zunächst die geographische Breite B' , die zum Endpunkte der Abszisse x gehört, zu erhalten, hat man hier nach (6) und (7) des § 5 S. 12 u. 13 die Formeln:

$$B - \Psi = [2,709\,0765\,375] \sin 2B - [9,723\,5170 - 10] \sin 4B + [6,8329 - 10] \sin 6B - \dots^3)$$

$$B - \Psi = [2,709\,0763\,147] \sin 2\Psi + [9,869\,6441 - 10] \sin 4\Psi + [7,1668 - 10] \sin 6\Psi + \dots$$

Darin bedeutet Ψ die Breite auf einer Kugel, die gleichen Meridianumfang mit dem Erdellipsoid hat, und es sind die Meridianbögen zwischen dem Äquator und den Breiten Ψ und B von gleicher Länge.

Aus der ersten Gleichung folgt $\Psi_0 = 51^\circ 23' 29'',08293$ für $B = B_0$.

Da nun 1 Meter des Kugelmeridians $\frac{90^\circ}{10^7}$ entspricht, so wird mithin der Abszisse x auf der Kugel die Breite $\Psi' = \Psi_0 + 9^\circ \cdot \frac{x}{10^6} = \Psi_0 + (9,0234\,1393\,43)^\circ = 53^\circ 29' 55'',19764$ entsprechen. Setzt man diesen Wert in die zweite Gleichung ein, so findet sich für die zu x gehörige Breite B' auf dem Ellipsoid

$$B' - \Psi' = 489'',00167, \quad \text{also} \quad B' = 53^\circ 38' 4'',1993.$$

Mit diesem Wert und dem von y ergibt sich dann die folgende Rechnung:

1) GAUSS' Werke, Band IX, S. 69.

2) GAUSS' Werke, Band IV, S. 438.

3) Vgl. auch GAUSS' Werke, Band IX, S. 172.

$\begin{array}{r} \eta' \dots 8,530\,2496\,22 \\ + \frac{1}{2}(1) = + \quad 832\,02 \\ - \frac{1}{14}(2) = - \quad 3 \\ \hline \operatorname{tg} u' \dots 8,530\,3328\,21 \\ \sec B' \dots 0,226\,9935\,55 \\ - \mathfrak{A}_1 \eta'^2 = - \quad 194\cdot2 \\ \operatorname{tg} L \dots 8,757\,3261\,82 \\ L = 3^{\circ}16'23'',6135 \end{array}$	$\begin{array}{r} \eta' \dots 8,530\,2496\,22 \\ -(1) = - \quad 1664\,03 \\ +(2) = + \quad 45 \\ \sin u' \dots 8,530\,0832\,64 \\ \operatorname{tg} B' \dots 0,132\,9248\,11 \\ + \mathfrak{B}_1 \eta'^2 = + \quad 3\,90 \\ + \mathfrak{B}_2 \eta'^4 = + \quad 1 \\ \operatorname{tg} c \dots 8,663\,0084\,66 \\ c = 2^{\circ}38'6'',9630 \end{array}$	$\begin{array}{r} \epsilon'^2 \dots 7,822\,0585 \\ \cos^2 B' \dots 9,546\,0129 \\ \epsilon'^2 \dots 7,368\,0714 \\ \epsilon'^2 = 0,002\,3338\,42 \\ Q' = 1 + \epsilon'^2 \dots 0,001\,0123\,94 \\ \sqrt{Q'} \dots 0,000\,5061\,97 \\ a\sqrt{1 + \epsilon'^2} \dots 6,806\,0343\,28 \\ 1 : N' \dots 3,194\,4718\,69 \\ y \dots 5,335\,7777\,53 \\ \eta' \dots 8,530\,2496\,22 \end{array}$
$\begin{array}{r} \operatorname{tg} \frac{1}{2} c \dots 8,361\,7486 \\ \operatorname{tg} \frac{1}{2} u' \dots 8,229\,1780 \\ + \mathfrak{C}_1 \eta'^2 = + \quad 11 \\ 2 \rho'' Q' \dots 5,616\,4675 \\ B' - B \dots 2,207\,3952 \\ B' - B = \quad 2'41'',2112 \\ B = 53^{\circ}35'22'',9881 \end{array}$	$\begin{array}{r} \sec u' \dots 0,000\,2495\,57 \\ + 3 \mathfrak{A}_1 \eta'^2 = + \quad 5\,83 \\ m \dots 0,000\,2501\,40 \\ m = 1,200\,5761\,3 \end{array}$	$\begin{array}{r} \frac{1}{3} M \dots 9,160\,6631 \quad \frac{7}{90} M \dots 8,5286 \\ \eta'^2 \dots 7,060\,4992 \quad \eta'^4 \dots 4,1210 \\ (1) \dots 6,221\,1623 \quad (2) \dots 2,6496 \\ \frac{1}{2} \epsilon'^2 \dots 7,067\,0 \\ \mathfrak{A}_1 \eta'^2 \dots 3,288\,2 \quad 3,2882 \\ 2 + 4 \epsilon'^2 \dots 0,303\,0 \quad - 2,5 - 2 \epsilon'^2 \dots 0,3988 \\ \mathfrak{B}_1 \eta'^2 \dots 3,591\,2 \quad 4,5 \operatorname{tg}^2 B' \dots 0,9191 \\ \quad \quad \quad - 486 \dots 3,6870 \\ \mathfrak{B}_2 \dots 7,00 \quad + 1611 \dots 4,2073 \\ \eta'^4 \dots 4,12 \quad 1125 = \mathfrak{C}_1 \eta'^2 \\ \mathfrak{B}_2 \eta'^4 \dots 1,12 \end{array}$

Von den mit η'^4 multiplizierten Korrektionsgliedern kommt hier allein das Glied $\mathfrak{B}_2 \eta'^4$ mit nur einer Einheit der letzten Dezimalstelle in Betracht. Ferner konnte man jetzt den Übergang von $\operatorname{tg} \frac{B' - B}{2Q'}$ zu $B' - B$ durch Multiplikation mit $2\rho'' Q'$ bewerkstelligen.

Benutzt man zur Berechnung des Vergrößerungsverhältnisses die Formel (34), nach der

$$\log \frac{m}{m_0} = \frac{1}{2} M \left(\frac{y}{\varrho'} \right)^2 - \frac{1}{12} M \left(\frac{y}{\varrho'} \right)^4 + G l_6, \quad \varrho' = \sqrt{N' R'},$$

wird, so ergibt sich mit $\left(\frac{y}{\varrho'} \right)^2 = Q' \eta'^2$:

$$\begin{array}{lll} \frac{1}{2} M \dots 9,336\,7543 & \frac{1}{12} M \dots 8,5586 & (a) = 0,000\,2501\,88 \\ Q' \dots 0,001\,0124 & Q'^2 \dots 0,0020 & (b) = - \quad 48 \\ \eta'^2 \dots 7,060\,4992 & \eta'^4 \dots 4,1210 & m \dots 0,000\,2501\,40 \\ (a) \dots 6,398\,2659 & (b) \dots 2,6816 & \end{array}$$

Mit Hilfe des Vergrößerungsverhältnisses kann man B auch nach (35*) berechnen:

$$\log \sin B = \log \frac{\sin B'}{m} - \frac{1}{2} M Q \epsilon'^2 (1 + 2 \epsilon'^2) \operatorname{tg}^2 B' \cdot \eta'^4.$$

$$\begin{array}{ll} \frac{1}{2} M \dots 9,337 & \\ Q' \epsilon'^2 \dots 7,369 & \\ 1 + 2 \epsilon'^2 \dots 0,002 & \\ \operatorname{tg}^2 B' \dots 0,266 & \\ \eta'^4 \dots 4,121 & \\ 1,095 & \\ \sin B \dots 9,905\,6811\,15, & B = 53^{\circ}35'22'',9881. \end{array}$$

Wendet man die Gl. (38) an, so hat man für $B' - B$:

$$\log \frac{\log (B' - B)}{\text{Sek.}} = \log \left(2\rho'' Q' \operatorname{tg} \frac{1}{2}(B' + B) \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}u' \right) + \frac{1}{6} M \varepsilon'^2 (1 + 2\varepsilon'^2 + 6 \operatorname{tg}^2 B') \eta'^2.$$

$$\begin{array}{rcl} \operatorname{tg} \frac{1}{2}(B' + B) & \cdots & 0,132\,5694 \\ \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}u' & \cdots & 6,458\,3560 \\ 2\rho'' Q' & \cdots & 5,616\,4675 \\ & + & 23 \\ \log (B' - B) & \cdots & 2,207\,3952, \end{array} \quad \begin{array}{rcl} \frac{1}{6} M & \cdots & 8,860 \\ \varepsilon'^2 & \cdots & 7,368 \\ \eta'^2 & \cdots & 7,060 \\ 3,288 \\ 1 + 2\varepsilon'^2 & \cdots & 0,002 \\ 6 \operatorname{tg}^2 B' & \cdots & 1,044 \\ & & 4,332 \dots 215 \\ & & 0,000\,0023\,5 \end{array}$$

übereinstimmend mit der ersten Rechnung.

Es sollen jetzt umgekehrt aus den geographischen Koordinaten

$$L = 3^\circ 16' 23'', 6135, \quad B = 53^\circ 35' 22'', 9881$$

die ebenen rechtwinkligen Koordinaten, sowie die Meridiankonvergenz und das Vergrößerungsverhältnis berechnet werden.

$\sin L \dots 8,756\,6170\,97$	$\operatorname{tg} L \dots 8,757\,3261\,81$	$\varepsilon'^2 \dots 7,822\,0585$
$\cos B \dots 9,773\,4670\,45$	$\sin B \dots 9,905\,6811\,15$	$\cos^2 B \dots 9,546\,9341$
$+ \mathfrak{D}_1 l^2 = + \quad 194\,4$	$+ \mathfrak{E}_1 l^2 = + \quad 11\,69$	$s^2 \dots 7,368\,9926$
$- \mathfrak{D}_2 l^4 = - \quad 1$	$+ \mathfrak{E}_2 l^4 = + \quad 1$	$s^2 = 0,002\,3387\,97$
$\sin u \dots 8,530\,0843\,35$	$\operatorname{tg} c \dots 8,663\,0084\,66$	$1 + s^2 \dots 0,001\,0145\,41$
(1) = 1662 77	$c = 2^\circ 38' 6'', 9630$	$\sqrt{Q} \dots 0,000\,5072\,70$
(2) = 83		$a\sqrt{1 + e'^2} \dots 6,806\,0343\,28$
$N \dots 6,805\,5270\,58$		$N \dots 6,805\,5270\,58$
$y \dots 5,335\,7777\,53$	$\operatorname{tg} \frac{1}{2}c \dots 8,361\,7486$	$\frac{1}{6} M \dots 8,8596 \quad l^4 \dots 4,12$
$y = 216\,659,508^m$	$\operatorname{tg} \frac{1}{2}u \dots 8,229\,1791$	$\varepsilon^2 \dots 7,3690 \quad \mathfrak{D}_2 \dots 6,86 \quad 0,98 \dots \mathfrak{D}_2 l^4$
$\cos c \dots 9,999\,5404\,74$	$- \mathfrak{F}_1 l^2 = - \quad 5$	$l^2 \dots 7,0602 \quad \mathfrak{E}_2 \dots 7,01 \quad 1,13 \dots \mathfrak{E}_2 l^4$
1: $\cos L \dots 0,000\,7090\,84$	$2N \dots 7,106\,5571$	$\mathfrak{D}_1 l^2 \dots 3,2888$
$+ 3\mathfrak{D}_1 l^2 = + \quad 5\,83$	$x - X \dots 3,697\,4843$	$6 + 4s^2 \dots 0,7788 \quad 4,0676 \dots \mathfrak{E}_1 l^2$
$m \dots 0,000\,2501\,41$	$x - X = 4982,924^m$	$2,5 + 2s^2 \dots 0,3988 \quad 3,6876 \dots \mathfrak{F}_1 l^2$

Bei der Nebenrechnung kann man an Stelle von $l = \sin L \cos B$ auch $\sin u$ nehmen.

Hier ist nun noch X zu berechnen. Trägt man den Wert von B in die erste Gleichung für $B - \Psi$, S. 62, ein, so findet man $B - \Psi = 489'', 2372$; also wird

$$\Psi = 53^\circ 27' 13'', 7509.$$

Nach S. 62 ist weiter

$$\Psi_0 = 51^\circ 23' 29'', 0829;$$

folglich

$$\Psi - \Psi_0 = 2^\circ 3' 44'', 6680 = 2^\circ 0,062\,4077\,7 \dots$$

Da nun 1° der Kugelbreite gleich $\frac{1}{9} \cdot 10^6$ Meter ist, so entsprechen $(\Psi - \Psi_0)$ Grad:

$$\begin{aligned} X &= 229\,156,419^m \\ x - X &= 4\,982,924 \\ x &= 234\,139,343^m. \end{aligned}$$

Man kann auch statt dessen die zum Endpunkte von x gehörige Breite B' nach einer der Formeln (41), (41*), (41**) und (44) erhalten, und dann x selbst entweder aus einer Tabelle entnehmen oder ebenso wie vorher X berechnen.

Z. B. hat man nach (44):

$$\log \operatorname{tg} B' = \log \frac{\operatorname{tg} B}{\cos L \sqrt{Q}} - \frac{1}{6} M e'^2 Q (2 \operatorname{tg}^2 B - Q) l^4,$$

$$\begin{array}{rcl} L & \dots & 4,071\,2784\,89 \\ \sqrt{Q} & \dots & 0,000\,5072\,70 \\ & \overline{4,071\,7857\,59} & L\sqrt{Q} = 3^\circ 16' 37'', 3851 \\ & & \begin{array}{r} \frac{1}{6} M e'^2 \dots 6,682 \\ Q \dots 0,001 \\ (2 \operatorname{tg}^2 B - Q) \dots 0,427 \\ l^4 \dots 4,120 \\ 1,230 \end{array} \\ \sec L\sqrt{Q} & \dots & 0,000\,7107\,43 \\ \operatorname{tg} B & \dots & 0,132\,2140\,70 \\ & \overline{2} & \\ \operatorname{tg} B' & \dots & \overline{0,132\,9248\,11}; \quad B' = 53^\circ 38' 4'', 1993. \end{array}$$

Oder nach (41**) ist

$$\log(B' - B) = \log \left\{ \rho'' Q \frac{\sin(B' + B)}{\cos^2 \frac{1}{2}(B' - B)} \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} L \right\} - \frac{1}{6} M \varepsilon^2 l^2 (3 \operatorname{tg}^2 B - 3 - 2 \varepsilon^2);$$

dabei ist angenähert

$$\begin{array}{lll} \log \operatorname{tg} B' = \log \operatorname{tg} B + \frac{1}{2} M Q \left(\frac{L}{\rho''} \right)^2 & \text{oder} & \log \sin B' = \log \sin B + \frac{1}{2} M \sin^2 u. \\ \frac{1}{2} M Q \left(\frac{L}{\rho''} \right)^2 = \frac{\operatorname{tg} B \dots 0,132\,2141}{7104} & \sin B \dots 9,905\,6811 & B = 53^\circ 35' 22'', 99 \quad \frac{1}{2} L = 1^\circ 38' 11'', 807 \\ \operatorname{tg} B' \dots 0,132\,9245 & \frac{1}{2} M \sin^2 u = \frac{2494}{\sin B' \dots 9,905\,9305} & B' = 53^\circ 38' 4'', 20 \\ & & \begin{array}{r} \frac{\sin(B' + B) \dots 9,980\,0731}{\sec^2 \frac{1}{2}(B' - B) \dots 0,000\,0001} \\ \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} L \dots 6,911\,8830 \\ \rho'' Q \dots 5,315\,4396 \\ \overline{5} \\ B' - B \dots 2,207\,3953 \end{array} \quad \begin{array}{r} \mathfrak{D}_1 l^2 \dots 3,289 \\ 3 \operatorname{tg}^2 B - 3 - 2 \varepsilon^2 \dots 0,400 \\ \overline{8,689} \\ B' - B = 2' 41'', 2112. \end{array} \end{array}$$

Setzt man nun in der ersten Gleichung für $B - \psi$, S. 62, den Wert $B' = 53^\circ 38' 4'', 1993$ für B ein, so ergibt sich das zugehörige $B' - \psi' = 489'', 0017$; also wird $\psi' = 53^\circ 29' 55'', 1976$ und daher $\psi' - \psi_0 = 2^\circ 6' 26'', 1147$. Da nun 1° gleich $\frac{10^6}{9}$ Meter ist, so gehört zu $(\psi' - \psi_0)$ Grad:

$$x = 2,107\,2540\,83 \cdot \frac{10^6}{9} = 234\,139,343^m.$$

§ 20.

Formeln für kleinere Entfernungen. Zahlenbeispiele.

Bei kleineren Entfernungen kann man oft mit Vorteil, anstatt von $\log \operatorname{tg} L$ und $\log \operatorname{tg} c$ zu L und c überzugehen, durch Hinzufügung der Additamente die Formeln so umwandeln, daß man $\log L$ und $\log c$ erhält. Es ist

$$\begin{aligned}\log \frac{z}{\rho''} &= \log \operatorname{tg} z - \tau_z \\ &= \log \sin z + \sigma_z,\end{aligned}$$

wo

$$\begin{aligned}\tau_z &= \frac{M:3}{[9,16\,066-10]} \operatorname{tg}^3 z - \frac{13 M:90}{[8,797-10]} \operatorname{tg}^4 z + \dots = \frac{M:3\rho''^2}{[8,531\,813-20]} z^2 + \frac{7 M:90\rho''^4}{[7,271-30]} z^4 + \dots \\ \sigma_z &= \frac{M:6}{[8,85\,963-10]} \sin^2 z + \frac{11 M:180}{[8,424-10]} \sin^4 z + \dots = \frac{M:6\rho''^2}{[8,23\,078-20]} z^2 + \frac{M:180\rho''^4}{[6,125-30]} z^4 + \dots\end{aligned}\quad (56)$$

ist.¹⁾ Für $z = 1^\circ 20'$ beträgt das Glied $\frac{7}{90} M \left(\frac{z}{\rho''} \right)^4$ erst eine Einheit der 8. Dezimalstelle.

Läßt man auch noch die mit l^4 und η'^4 multiplizierten Glieder fort, was nach S. 57 u. 59 bis zu etwa 2° Entfernung vom Hauptmeridian geschehen kann, ohne daß in den Ergebnissen die 4. Dezimalstelle der Sekunde und das Millimeter nennenswert beeinflußt werden, so ergeben sich folgende Formeln.

I. Berechnung von B , L , c und m , wenn x und y gegeben sind.

Das zu dem Endpunkte der Abszisse x gehörige B' wird aus einer Tafel entnommen, ebenso $\rho'':N'$. Dann ist:

$$\left. \begin{aligned}\frac{\rho''}{N'} y &= \eta', \\ \log u' &= \log \eta' - \frac{M:6\rho''^2}{[8,23\,078-20]} \eta'^2 + \frac{M:36\rho''^4}{[6,824-30]} \eta'^4 - \dots; \\ \log L &= \log(u' \sec B') + \tau_{u'} - \tau_L - \mu_1, \\ \log c &= \log(u' \operatorname{tg} B') - \sigma_{u'} - \tau_c + \mu_2, \\ \log(B' - B) &= \log\left(\frac{Q'}{2\rho'} u' c\right) + \tau_{\frac{u'}{2}} + \tau_{\frac{c}{2}} + \mu_3, \quad \log \frac{Q'}{2\rho'} = 7,367\,8899 - 10 + 2 \log \frac{\rho''}{N'}; \\ \log \frac{m}{m_0} &= \log \sec u' + 3\mu_1 = \frac{M:2\rho''^2}{[8,70\,790-20]} \eta'^2 - \frac{M:12\rho''^4}{[7,301-30]} \eta'^4 + \dots + 3\mu_1.\end{aligned}\right\} \quad (57)$$

L , c und $B' - B$ werden in Sekunden erhalten.

1) Tafeln für Additamente findet man u. a. bei O. BÖRSCH, Anleitung zur Berechnung geodätischer Koordinaten, und bei F. G. GAUSS, Die trigonometrischen und polygonometrischen Rechnungen in der Feldmeßkunst.

2) Für $\log VQ$ und für $\log Q$ ist wie schon erwähnt je eine Tabelle in JORDANS Handbuch der Vermessungskunde, Band III, enthalten, desgleichen für $\log VQ = \log \sqrt{\frac{N}{R}}$ in ALBRECHTS Formeln und Hilfstafeln für geographische Ortsbestimmungen, Leipzig 1908.

Das Glied $\frac{M}{36\rho''^4} \eta'^4$ in der Formel für $\log u'$ gibt bei 160 km Entfernung vom Hauptmeridian erst etwa eine halbe Einheit der 8. Dezimalstelle.

In den Formeln (57) ist

$$\mu_1 = \frac{1}{6} M \varepsilon'^2 \eta'^2, \quad \mu_2 = (2 + 4 \varepsilon'^2) \mu_1 \quad \text{und} \quad \mu_3 = (-2,5 - 2 \varepsilon'^2 + 4,5 \operatorname{tg}^2 B') \mu_1;$$

eine Übersicht ihrer Werte ist in den nachstehenden Tabellen enthalten.

Tabelle für μ_1
in Einheiten der 8. Dezimalstelle.

$y =$ km	30	40	50	60	70	80	90	100
$B' = 44^\circ$	0.6	1.0	1.5	2.2	3.0	3.9	5.0	6.2
47	0.5	0.9	1.4	2.0	2.7	3.5	4.5	5.5
50	0.4	0.8	1.2	1.8	2.4	3.1	4.0	4.9
53	0.4	0.7	1.1	1.6	2.1	2.8	3.5	4.3
56	0.3	0.6	0.9	1.3	1.8	2.4	3.0	3.7

Tabelle für μ_2
in Einheiten der 8. Dezimalstelle.

$y =$ km	20	30	40	50	60	70	80	90	100
$B' = 44^\circ$	0.5	1.1	2.0	3.1	4.5	6.1	8.0	10.1	12.4
47	0.4	1.0	1.8	2.8	4.0	5.5	7.1	9.0	11.2
50	0.4	0.9	1.6	2.5	3.6	4.8	6.3	8.0	9.9
53	0.3	0.8	1.4	2.2	3.1	4.2	5.5	7.0	8.7
56	0.3	0.7	1.2	1.9	2.7	3.7	4.8	6.1	7.5

Tabelle für μ_3
in Einheiten der 7. Dezimalstelle.

$y =$ km	40	50	60	70	80	90	100
$B' = 44^\circ$	0.2	0.3	0.4	0.5	0.7	0.8	1.0
47	0.2	0.4	0.5	0.7	0.9	1.2	1.5
50	0.3	0.5	0.7	0.9	1.2	1.5	1.9
53	0.4	0.6	0.8	1.1	1.5	1.9	2.3
56	0.4	0.7	1.0	1.3	1.8	2.2	2.7

Da für $B' - B$ bei $B' = 56^\circ$, wo μ_3 innerhalb der vorstehenden Tabelle am größten wird, bis zu einer Entfernung von etwa 160 km vom Hauptmeridian die Rechnung nur mit 6-stelligen Logarithmen

9*

geführ zu werden braucht, um die 4. Stelle der Sekunde noch zu erhalten, und da ferner μ_3 bei $B' = 56^\circ$ und für eine Entfernung von 136 km vom Hauptmeridian erst den Wert von 5 Einheiten der 7. Dezimale erreicht, so braucht man innerhalb dieser letzten Entfernung μ_3 gar nicht in Betracht zu ziehen. Bei $B' = 44^\circ$ kann man μ_3 bis zu einer Entfernung von etwa 210 km vom Hauptmeridian unberücksichtigt lassen.

Beispiel. Gegeben ist

$$y = 100\,125,000'' \quad \text{und} \quad x = 5\,577\,352,754''.$$

Die Abszisse ist vom Äquator ab gezählt; zu dem Meridianbogen x gehört alsdann die Breite $B' = 50^\circ 20' 0'',0000$.

$y \dots 5,000\,5425\,3$ $\rho'': N' \dots 8,508\,9211\,8$ $\eta' \dots 3,509\,4637\,1$ $-\frac{1}{6} M \left(\frac{\eta'}{\rho''}\right)^2 = -177\,7$ $u' \dots 3,509\,4459\,4$ $\sec B' \dots 0,194\,9614\,9$ $+ \tau_w = +355\,4$ $- \tau_L = -872\,1$ $- \mu_1 = -5$ $L \dots 3,704\,3557\,1$ $L = \underline{\underline{1^\circ 24' 22'',3913}}$	$u' \dots 3,509\,4459\,4$ $\operatorname{tg} B' \dots 0,081\,3230\,6$ $-\tau_c = -516\,7$ $-\sigma_u = -177\,7$ $+ \mu_2 = +10$ $c \dots 3,590\,6996\,6$ $c = \underline{\underline{1^\circ 4' 56'',7241}}$ $\frac{M}{2} \left(\frac{\eta'}{\rho''}\right)^2 = 0,000\,0533\,1$ $\frac{M}{12} \left(\frac{\eta'}{\rho''}\right)^4 = -$ $+ 3\mu_1 = +15$ $\frac{m}{m_0} \dots \underline{\underline{0,000\,0534\,6}}$	$7,367\,8899$ $(\rho'': N')^2 \dots 7,017\,8424$ $u' c \dots 7,100\,1456$ $+ \tau_c = +129$ $+ \tau_u = +89$ $+ \mu_3 = +2$ $B' - B \dots 1,485\,8999$ $B' - B = \underline{\underline{30'',6126}}$ $B = \underline{\underline{50^\circ 19' 29'',3874}}$
---	---	--

II. Berechnung von x , y , c und m , wenn B und L gegeben sind.

$$\left. \begin{aligned} \log u &= \log (L \cos B) - \sigma_L + \sigma_u + \nu_1; \\ \log y &= \log \frac{N}{\rho''} u + \frac{M:6\rho''^2}{[8,23\,078 - 20]} u^2 + \frac{M:36\rho''^4}{[6,824 - 30]} u^4 + \dots, \\ \log c &= \log (L \sin B) + \tau_L - \tau_c + \nu_2, \\ \log (x - X) &= \log \frac{N}{2\rho''} uc + \tau_{\frac{c}{2}} + \tau_{\frac{u}{2}} - \nu_3; \\ \log \frac{m}{m_0} &= \log \frac{\cos c}{\cos L} + 3\nu_1. \end{aligned} \right\} \quad (58)$$

Das Glied $\frac{1}{36} M \left(\frac{\eta'}{\rho''}\right)^4$ in $\log y$ beträgt bei einer Entfernung von 2° vom Hauptmeridian (mittlere Breiten vorausgesetzt) noch nicht eine halbe Einheit der 8. Dezimalstelle.

X ist die Abszisse, deren Endpunkt zur Breite B gehört.
Ferner ist

$$\nu_1 = \frac{1}{6} M \varepsilon^2 (\sin L \cos B)^2, \quad \nu_2 = (6 + 4\varepsilon^2)\nu_1 \quad \text{und} \quad \nu_3 = \frac{1}{2}(\nu_2 - \nu_1).$$

Man erhält für diese Größen die nachfolgenden Werte.

Tabelle für ν_1
in Einheiten der 8. Dezimalstelle.

$L =$	$0^\circ 20'$	$0^\circ 30'$	$0^\circ 40'$	$0^\circ 50'$	$1^\circ 0'$	$1^\circ 10'$	$1^\circ 20'$	$1^\circ 30'$
$B = 44^\circ$	0.4	1.0	1.8	2.8	4.0	5.4	7.0	8.9
47	0.4	0.8	1.4	2.2	3.2	4.4	5.7	7.2
50	0.3	0.6	1.1	1.8	2.5	3.4	4.5	5.7
53	0.2	0.5	0.9	1.3	1.9	2.6	3.5	4.4
56	0.2	0.4	0.6	1.0	1.4	2.0	2.6	3.3

Tabelle für ν_2
in Einheiten der 8. Dezimalstelle.

$L =$	$0^\circ 10'$	$0^\circ 15'$	$0^\circ 20'$	$0^\circ 25'$	$0^\circ 30'$	$0^\circ 35'$	$0^\circ 40'$	$0^\circ 45'$
$B = 44^\circ$	0.7	1.5	2.6	4.1	6.0	8.1	10.6	13.4
47	0.5	1.2	2.1	3.3	4.8	6.6	8.6	10.8
50	0.4	1.0	1.7	2.6	3.8	5.2	6.8	8.6
53	0.3	0.7	1.3	2.0	2.9	4.0	5.2	6.6
56	0.2	0.5	1.0	1.5	2.2	3.0	3.9	4.9

$L =$	$0^\circ 50'$	$0^\circ 55'$	$1^\circ 0'$	$1^\circ 5'$	$1^\circ 10'$	$1^\circ 15'$	$1^\circ 20'$	$1^\circ 25'$	$1^\circ 30'$
$B = 44^\circ$	16.6	20.0	23.9	28.0	32.5	37.3	42.4	47.9	53.7
47	13.4	16.2	19.3	22.6	26.2	30.1	34.3	38.7	43.4
50	10.6	12.8	15.2	17.8	20.7	23.8	27.0	30.5	34.2
53	8.1	9.8	11.7	13.7	15.9	18.3	20.8	23.5	26.3
56	6.0	7.3	8.7	10.2	11.8	13.6	15.5	17.5	19.6

Tabelle für ν_3
in Einheiten der 7. Dezimalstelle.

$L =$	$0^\circ 40'$	$0^\circ 50'$	$1^\circ 0'$	$1^\circ 10'$	$1^\circ 20'$	$1^\circ 30'$
$B = 44^\circ$	0.4	0.7	1.0	1.4	1.8	2.2
47	0.4	0.6	0.8	1.1	1.4	1.8
50	0.3	0.4	0.6	0.9	1.1	1.4
53	0.2	0.3	0.5	0.7	0.9	1.1
56	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.8

Die Werte der Tabelle für ν_3 braucht man nur, wenn in $x - X$ das Millimeter scharf erhalten werden soll.

Beispiel. Gegeben ist (vgl. S. 68)

$$L = 1^{\circ}24'22'',3913, \quad B = 50^{\circ}19'29'',3874.$$

$L \dots 3,704\ 3557\ 1$	$L \dots 3,704\ 3557\ 1$	$1 : 2\rho'' \dots 4,384\ 5449$
$\cos B \dots 9,805\ 1162\ 3$	$\sin B \dots 9,886\ 3081\ 1$	$N : \rho'' \dots 1,491\ 0786$
$-\sigma_L = -\ 436\ 0$	$+\tau_L = +\ 872\ 1$	$uc \dots 7,100\ 1458$
$+\sigma_u = +\ 177\ 7$	$-\tau_c = -\ 516\ 7$	$+\tau_{\frac{c}{2}} = +\ 129$
$+\nu_1 = +\ 5$	$+\nu_2 = +\ 29$	$+\tau_{\frac{u}{2}} = +\ 89$
$u \dots 3,509\ 4461\ 6$	$c \dots 3,590\ 6996\ 5$	$-\nu_3 = -\ 1$
$N : \rho'' \dots 1,491\ 0786\ 1$	$c = 1^{\circ}4'56'',7240$	$x - X \dots 2,975\ 7910$
$\frac{1}{6}M\left(\frac{u}{\rho''}\right)^3 = 177\ 7$	$\cos c \dots 9,999\ 9224\ 9$	$x - X = 945,782$
$y \dots 5,000\ 5425\ 4$	$\sec L \dots 0,000\ 1308\ 2$	$X = 5576\ 406,972$
$y = 100\ 125,002^m$	$+3\nu_1 = +\ 15$	$x = 5577\ 352,754^m$
	$\frac{m}{m_0} \dots 0,000\ 0534\ 6$	

Der Meridianbogen X , der zur Breite B gehört, ist aus einer Tafel entnommen.

Bei der Ableitung der rechtwinkligen ebenen Koordinaten aus der geographischen Breite und Länge, wobei man häufig die Kenntnis der Konvergenz des Meridians nicht nötig hat, sind die Formeln auch in der folgenden Form ganz bequem:

$$\log \sin u = \log (\sin L \cos B) + \nu_1,$$

$$\log y = \log (N \sin u) + \frac{1}{3} M \sin^2 u + \frac{13}{90} M \sin^4 u + \dots,$$

$$\log (x - X) = \log \left(\frac{N}{2} \operatorname{tg} L \sin B \sin u \right) - \frac{3}{2} \left(\frac{1}{2} \tau - \sigma_u \right) + \nu_2 - \nu_3.$$

Dabei genügt es, $\tau = \frac{1}{3} M (\operatorname{tg} L \sin B)^3$ und $\sigma_u = \frac{1}{6} M \sin^6 u$ zu setzen.

Das Anwendungsgebiet dieser Formeln erstreckt sich über 2° Entfernung vom Hauptmeridian.

Beispiel. x und y sind für $B = 50^{\circ}$ und $L = 2^{\circ}$ zu berechnen.

$\sin L \dots 8,542\ 8191\ 64$	$\operatorname{tg} L \dots 8,543\ 0838$	$e'^2 \dots 7,8273 \quad (\operatorname{tg} L \sin B)^3 \dots 6,85468$
$\cos B \dots 9,808\ 0674\ 97$	$\sin B \dots 9,884\ 2540$	$\cos^2 B \dots 9,6161 \quad \frac{1}{3} M \dots 9,16066$
$+\nu_1 = +\ 101$	$\sin u \dots 8,350\ 8868$	$\varepsilon^2 \dots 7,4434$
$\sin u \dots 8,350\ 8867\ 62$	$\frac{1}{2} N \dots 6,504\ 4656$	$\frac{1}{6} M \dots 8,8596 \quad 6,01534$
$N \dots 6,805\ 4956\ 30$	$-\frac{3}{2} \left(\frac{1}{2} \tau - \sigma_u \right) = -\ 231$	$\sin^2 u \dots 6,7018$
$(1) = 728\ 51$	$\nu_2 - \nu_3 = +\ 4$	$\nu_1 \dots 3,0048$
$(2) = 16$	$x - X \dots 3,282\ 6675$	$6 + 4\varepsilon^2 \dots 0,7790$
$y \dots 5,156\ 4552\ 59$	$x - X = 1\ 917,201$	$2,5 + 2\varepsilon^2 \dots 0,3989 \quad \tau = 0,000\ 1036$
$y = 143\ 369,001^m$	$X = 5\ 540\ 279,542$	$\nu_2 \dots 3,7838 \quad \nu_3 \dots 3,4037 \quad \frac{1}{2} \tau = 0,000\ 0518$
	$x = 5\ 542\ 196,743^m$	$\frac{1}{3} M \dots 9,160\ 663 \quad \frac{1}{2} (1) = \sigma_u = \frac{364}{2}$
		$\sin^2 u \dots 6,701\ 774 \quad \frac{1}{2} \tau - \sigma_u = 0,000\ 0154$
		$(1) \dots 5,862\ 437$
		$\frac{18}{90} M \dots 8,797$
		$\sin^4 u \dots 3,404$
		$(2) \dots 2,201$

Die Ergebnisse sind in Übereinstimmung mit § 12, S. 34, 1. Beispiel; vgl. auch noch § 47 III.

Benutzt man das vorhergehende Schema auf S. 68, so braucht man, wenn die Kenntnis von c nicht erforderlich ist, die Rechnung dafür nur auf 7 oder 6 Stellen zu führen.

§ 21.

Formeln für Entfernungen bis zu 100 km vom Hauptmeridian.

Zahlenbeispiele.

Liegt y innerhalb 100 km, so genügt es bei den vorigen Formeln $\tau_z = \frac{1}{3} M \left(\frac{z}{\rho''} \right)^2$ und $\sigma_z = \frac{1}{6} M \left(\frac{z}{\rho''} \right)^2$ zu nehmen. Der Fehler in τ_z kann dadurch für mittlere Breiten etwa eine Einheit der 8. Dezimalstelle betragen, während er in σ_z erst etwa eine Einheit der 9. Dezimalstelle erreicht. Alsdann bestehen zwischen den Additamenten in den Formeln (57) und (58) Beziehungen, durch welche die Formeln noch etwas vereinfacht werden können.

Bei (57) ist $\sigma_{u'} = \frac{1}{2} \tau_{u'}$, $\tau_{u'} = \frac{1}{4} \tau_u$, $\tau_{\frac{c}{2}} = \frac{1}{4} \tau_c$ und, weil es ausreicht $\tau_L = \tau_{u' \sec B'}$ und $\tau_c = \tau_{u' \tg B'}$ zu setzen, $\tau_L = \tau_c + \tau_{u'}$. Ferner ist $\frac{1}{6} M \left(\frac{\eta'}{\rho''} \right)^2 = \frac{1}{2} \tau_{\eta'}$; da sich $\log \eta'$ und $\log u'$ sehr angenähert nur um $\frac{1}{2} \tau_{\eta'}$ unterscheiden, so kann man statt $\tau_{u'}$ auch $\tau_{\eta'}$ setzen.

Bei (58) hat man $\sigma_L = \frac{1}{2} \tau_L$, $\sigma_u = \frac{1}{2} \tau_u$ und, wegen $\tau_u = \tau_{L \cos B}$ und $\tau_c = \tau_{L \sin B}$, $\tau_L = \tau_u + \tau_c$, also $\tau_{\frac{c}{2}} + \tau_{\frac{u}{2}} = \frac{1}{4} \tau_L$ und $\log \frac{\cos c}{\cos L} = \frac{1}{2} M \frac{L^2 - c^2}{\rho''^2} = \frac{3}{2} \tau_u$.

Damit werden die nachstehenden Formeln erhalten.

I. Gegeben x, y .

$$\frac{\rho''}{N'} y = \eta', \quad \tau_{\eta'} = [8,53\,181 - 20] \eta'^2, \quad \tau_L = \tau_{\eta'} \sec^2 B' = [8,53\,181 - 20] L^2;$$

B' und $\frac{\rho''}{N'}$ gehören zum Endpunkte von x .

$$\left. \begin{aligned} \log L &= \log (\eta' \sec B') + \frac{1}{2} \tau_{\eta'} - \tau_L - \mu_1, \\ \log c &= \log (\eta' \tg B') - \tau_L + \mu_2, \\ \log (B' - B) &= 7,367\,8899 - 10 + \log \left\{ \left(\frac{\rho''}{N'} \right)^2 \eta'^2 c \right\} + \frac{1}{4} \tau_L - \frac{1}{2} \tau_{\eta'} + \mu_3 \\ &= 7,367\,8899 - 10 + \log \left\{ \left(\frac{\rho''}{N'} \right)^2 \eta'^2 \tg B' \right\} - \frac{3}{4} \tau_L - \frac{1}{2} \tau_{\eta'} + \mu_2 + \mu_3 \\ \log \frac{m}{m_0} &= \frac{3}{2} \tau_{\eta'} + 3 \mu_1. \end{aligned} \right\} \quad (60)$$

L, c und $B' - B$ ergeben sich in Sekunden.

II. Gegeben B, L .

$$\tau_L = [8,53\ 181 - 20]L^2, \quad \tau_{L \cos B} = [8,53\ 181 - 20](L \cos B)^2 = \tau_L \cos^2 B.$$

L und c sind in Sekunden vorausgesetzt; $\frac{N}{\rho''}$ und der Meridianbogen X gehören zu B .

$$\left. \begin{aligned} \log y &= \log \left(\frac{N}{\rho''} L \cos B \right) - \left(\frac{1}{2} \tau_L - \tau_{L \cos B} \right) + \nu_1, \\ \log c &= \log (L \sin B) + \tau_{L \cos B} + \nu_2, \\ \log (x - X) &= 4,384\ 5449 - 10 + \log \left(\frac{N}{\rho''} c L \cos B \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \tau_L - \tau_{L \cos B} \right) + \nu_1 - \nu_3 \\ &= 4,384\ 5449 - 10 + \log \left(\frac{N}{\rho''} L^2 \sin B \cos B \right) - \frac{1}{4} \tau_L + \frac{3}{2} \tau_{L \cos B} + \nu_4; \\ \log \frac{m}{m_0} &= \frac{3}{2} \tau_{L \cos B} + 3 \nu_1. \end{aligned} \right\} \quad (61)$$

Für $\nu_4 = \nu_1 + \nu_2 - \nu_3$ findet man die folgenden Werte:

Tabelle für ν_4
in Einheiten der 7. Dezimalstelle.

$L =$	$0^\circ 30'$	$0^\circ 40'$	$0^\circ 50'$	$1^\circ 0'$	$1^\circ 10'$	$1^\circ 20'$	$1^\circ 30'$
$B = 44^\circ$	0.5	0.8	1.2	1.8	2.4	3.1	4.1
47	0.4	0.6	1.0	1.5	2.0	2.6	3.3
50	0.2	0.5	0.8	1.2	1.5	2.0	2.6
53	0.2	0.4	0.6	0.9	1.2	1.5	2.0
56	0.2	0.3	0.4	0.6	0.9	1.2	1.5

Die Werte für ν_4 sind innerhalb des vorstehenden Gebietes so klein, daß sie nur in Betracht gezogen zu werden brauchen, wenn das Millimeter in $x - X$ ganz scharf abgeleitet werden soll.

I. Beispiel. Es sei gegeben

$$B = 52^\circ 40' 0'', 0000, \quad L = 1^\circ 10' 0'', 0000 = 4200'', 0000.$$

$N : \rho'' \dots 1,491\ 1365\ 6$ $L \dots 3,623\ 2492\ 9$ $\cos B \dots 9,782\ 7957\ 8$ $-\left(\frac{1}{2} \tau_L - \tau_{L \cos B}\right) = -794$ $+ \nu_1 = +3$ $y \dots 4,897\ 1737\ 2$ $y = \underline{\underline{78\ 917,573}}$ $8,53\ 181$ $L^2 \dots 7,24\ 650$ $\tau_L \dots 5,77\ 831 \dots 0,000\ 0600\ 2$ $\cos^2 B \dots 9,56\ 559$ $\tau_{L \cos B} \dots 5,34\ 390 \dots 0,000\ 0220\ 7,5$	$L \dots 3,623\ 2492\ 9$ $\sin B \dots 9,900\ 4331\ 1$ $+ \tau_{L \cos B} = +2208$ $+ \nu_2 = +16$ $c \dots 3,523\ 7046\ 4$ $c = 0^\circ 55' 39'', 6784$ $\frac{3}{2} \tau_{L \cos B} = 0,000\ 0331\ 1$ $\frac{3}{2} \nu_1 = +9$ $\frac{m}{m_0} \dots \underline{\underline{0,000\ 0332\ 0}}$	$1 : 2 \rho'' \dots 4,384\ 5449$ $N : \rho'' \dots 1,491\ 1366$ $L \cos B \dots 3,406\ 0451$ $c \dots 3,523\ 7046$ $-\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \tau_L - \tau_{L \cos B} \right) = -40$ $\nu_1 - \nu_3 =$ $x - X \dots 2,805\ 4272$ $x - X = 638,891$ $X = 5\ 836\ 924,612$ $x = \underline{\underline{5\ 837\ 563,503''}}$
---	---	--

vom Äquator ab gerechnet.

Gegeben sei $x = 5837563,503^m$, $y = 78917,573^m$.

Zu x gehört $B' = 52^\circ 40' 20'', 6710$.

$y \dots 4,897\ 1737\ 2$	$\eta' \dots 3,406\ 0370\ 2$	$7,367\ 8899$
$\rho' : N' \dots 8,508\ 8633\ 0$	$\operatorname{tg} B' \dots 0,117\ 7276\ 0$	$(\rho' : N')^2 \dots 7,017\ 7266$
$\sec B' \dots 0,217\ 2612\ 9$	$-\tau_L = - \quad 600\ 3$	$\eta' c \dots 6,929\ 7417$
$\frac{1}{2}\tau_{\eta'} - \tau_L = - \quad 489\ 9$	$+ \mu_2 = + \quad 5$	$\frac{1}{4}\tau_L - \frac{1}{2}\tau_{\eta'} = + \quad 40$
$-\mu_1 = - \quad 3$	$c \dots 3,523\ 7046\ 4$	$+ \mu_3 = + \quad 1$
$L \dots 3,623\ 2492\ 9$	$c = 0^\circ 55' 39'', 6784$	$B' - B \dots 1,315\ 3623$
$L = 1^\circ 10' 0'', 0000$	$\frac{3}{2}\tau_{\eta'} = 0,000\ 0331\ 1$	$B' - B = 20'', 6711$
$8,53\ 181$	$3\mu_1 = + \quad 9$	$B' = 52^\circ 40' 20'', 6710$
$\eta'^2 \dots 6,81\ 207$	$\frac{m}{m_0} \dots 0,000\ 0332\ 0$	$B = 52^\circ 39' 59'', 9999$
$\tau_{\eta'} \dots 5,34\ 388$		
$\sec^2 B' \dots 0,43\ 452$		
$\tau_L \dots 5,77\ 840$		
$\tau_L = 6003 \cdot ..$		

II. Beispiel. Gegeben ist

$$B = 54^\circ 10' 0'', 0000 \text{ und } L = 50' 0'', 0000 = 3000''.$$

$N : \rho'' \dots 1,491\ 1730\ 3$	$N : 2\rho''^2 \dots 5,875\ 718$	$8,53\ 181$
$L \dots 3,477\ 1212\ 5$	$L^2 \dots 6,954\ 242$	$L^2 \dots 6,95\ 424$
$\cos B \dots 9,767\ 4745\ 5$	$\cos B \dots 9,767\ 475$	$\tau_L \dots 5,48\ 605 \quad \tau_L = 3062 \cdot 10^{-8}$
$-\frac{1}{2}\tau_L + \tau_{L \cos B} = - 48\ 1$	$\sin B \dots 9,908\ 873$	$\cos^2 B \dots 9,53\ 495$
$+\nu_1 = + \quad 1$	$\frac{3}{2}\tau_{L \cos B} - \frac{1}{4}\tau_L = + \quad 8$	$\tau_{L \cos B} \dots 5,02\ 100 \quad \tau_{L \cos B} = 1050 \cdot ..$
$y \dots 4,735\ 7640\ 3$	$x - X \dots 2,506\ 316$	
$y = 54\ 420,688^m$	$x - X = 320,860$	
	$X = 6\ 003\ 846,486$	
	$x = 6\ 004\ 167,346^m$	
	vom Äquator ab.	

Es ist gegeben $x = 6\ 004\ 167,346^m$ und $y = 54\ 420,688^m$.

Zu x gehört $B' = 54^\circ 10' 10'', 3786$.

$y \dots 4,735\ 7640\ 3$	$\eta' \dots 3,244\ 5909\ 3$	$7,367\ 890$
$\rho' : N' \dots 8,508\ 8269\ 0$	$\operatorname{tg} B' \dots 0,141\ 4441\ 8$	$(\rho' : N')^2 \dots 7,017\ 054$
$\sec B' \dots 0,232\ 5557\ 1$	$-\tau_L = - \quad 306\ 3$	$\eta' c \dots 6,630\ 595$
$\frac{1}{2}\tau_{\eta'} - \tau_L = - \quad 253\ 8$	$+ \mu_2 = + \quad 2$	$\frac{1}{4}\tau_L - \frac{1}{2}\tau_{\eta'} = + \quad 2$
$-\mu_1 = - \quad 1$	$c \dots 3,386\ 0045\ 0$	$B' - B \dots 1,016\ 141$
$L \dots 3,477\ 1212\ 5$	$c = 0^\circ 40' 32'', 2292$	$B' - B = 10'', 3786$
$L = 50' 0'', 0000$	$8,53\ 181$	$B = 54^\circ 10' 0'', 0000$
	$\eta'^2 \dots 6,48\ 918$	
	$\tau_{\eta'} \dots 5,02\ 039 \quad \tau_{\eta'} = 1050 \cdot 10^{-8}$	
	$\sec^2 B' \dots 0,46\ 511$	
	$\tau_L \dots 5,48\ 610 \quad \tau_L = 3063 \cdot ..$	

Wenn man c nicht berechnen will, so hat man für $\log(B' - B)$ folgende Rechnung:

$$\begin{aligned} & 7,367\,890 \\ (\rho'': N')^2 & \dots 7,017\,654 \\ \eta'^2 & \dots 6,489\,182 \\ -\frac{3}{4}\tau_L - \frac{1}{2}\tau_{\eta'} & = -\frac{\operatorname{tg} B' \dots 0,141\,444}{B' - B \dots 1,016\,142} \\ & 28 \end{aligned}$$

§ 22.

Andere Reihenentwicklungen für die Übertragungsformeln.

Wenn in der Umgebung eines Punktes P_1 auf dem Erdellipsoid eine größere Anzahl Punkte in der Ebene darzustellen sind, oder wenn umgekehrt ein Gebiet um p_1 in der Ebene auf das Ellipsoid zu übertragen ist, so kann man Formeln benutzen, die von den Werten in P_1 bzw. in p_1 ausgehen.¹⁾ Um solche Formeln abzuleiten, sind in (10) und (11), S. 39, bzw. in den beiden Gl. (16), S. 42, die Koeffizienten in Potenzreihen von $B' - B_1'$ bzw. von $x - x_1$ zu entwickeln. Bei der Meridiankonvergenz ist noch vorher von $\operatorname{tg} c$, (22) S. 45 und (24) S. 46, zu c überzugehen; es wird

$$\begin{aligned} c &= \rho'' \frac{y}{N'} \operatorname{tg} B' \left\{ 1 - \frac{1}{3} (Q'(1 - 2\varepsilon'^2) + \operatorname{tg}^2 B') \left(\frac{y}{N'} \right)^2 + G l_4 \right\} \\ &= L \sin B \left\{ 1 + \frac{1}{3} Q(1 + 2\varepsilon^2) \left(\frac{L}{\rho''} \cos B \right)^2 + G l_4 \right\}. \end{aligned} \quad (62)$$

Um nun beispielsweise aus (10) die Formel für $B - B_1$ herzustellen, hat man zunächst $\frac{Q' \operatorname{tg} B'}{N'^2}$ in eine nach Potenzen von $x - x_1$ fortschreitende Reihe zu entwickeln. Mittels des TAYLOR-schen Satzes ergibt sich:

$$\begin{aligned} \frac{Q' \operatorname{tg} B'}{N'^2} &= \frac{Q'_1}{N'_1{}^2} \left\{ \operatorname{tg} B'_1 + (Q'_1 + (1 - 3\varepsilon'_1{}^2) \operatorname{tg}^2 B'_1) \frac{B' - B'_1}{Q'_1} \right. \\ &\quad \left. + \operatorname{tg} B'_1 ((1 - 5\varepsilon'_1{}^2) Q'_1 + (1 + 3\varepsilon'_1{}^4) \operatorname{tg}^2 B'_1) \left(\frac{B' - B'_1}{Q'_1} \right)^2 + \dots \right\}, \end{aligned} \quad (63)$$

worin $\varepsilon'_1{}^2 = e'^2 \cos^2 B'_1$, $Q'_1 = 1 + \varepsilon'_1{}^2$, $N'_1 = a \sqrt{\frac{1 + e'^2}{Q'_1}}$ ist.

Da aber nach S. 39

$$\frac{B' - B'_1}{Q'_1} = \frac{x - x_1}{N'_1} - \frac{3}{2} \varepsilon'_1{}^2 \operatorname{tg} B'_1 \left(\frac{x - x_1}{N'_1} \right)^3 + \dots$$

ist, so wird weiter:

$$\begin{aligned} \frac{Q' \operatorname{tg} B'}{N'^2} &= \frac{Q'_1}{N'_1{}^2} \left\{ \operatorname{tg} B'_1 + (Q'_1 + (1 - 3\varepsilon'_1{}^2) \operatorname{tg}^2 B'_1) \frac{x - x_1}{N'_1} \right. \\ &\quad \left. + \operatorname{tg} B'_1 ((1 - \frac{13}{2} \varepsilon'_1{}^2) Q'_1 + (1 - \frac{3}{2} \varepsilon'_1{}^2 + \frac{15}{2} \varepsilon'_1{}^4) \operatorname{tg}^2 B'_1) \left(\frac{x - x_1}{N'_1} \right)^2 + \dots \right\}. \end{aligned}$$

¹⁾ Vgl. W. JORDAN, Geographische Koordinaten und rechtwinklige Koordinaten. Zeitschrift für Vermessungswesen, Bd. XXVIII (1899), S. 162 u. f.

Vernachlässigt man nun Glieder 5. Ordnung, so kann man in den Gliedern 4. Ordnung B' , ε'^2 , N' durch Q_1' , $\varepsilon_1'^2$, N_1' ersetzen. Es folgt daher aus (10), wenn man

$$\frac{x - x_1}{N_1'} = \Delta x', \quad \frac{y}{N_1'} = y', \quad \frac{y_1}{N_1'} = y_1' \quad (64)$$

setzt:

$$\frac{B - B_1}{\rho'' Q_1'} = \frac{B' - B_1'}{\rho'' Q_1'} - b_{0,2}(y'^2 - y_1'^2) - (b_{1,2} \Delta x' + b_{2,2} \Delta x'^2) y'^2 + b_{0,4}(y'^4 - y_1'^4) + G l_5 \quad (65)$$

mit

$$b_{0,2} = \frac{1}{2} \operatorname{tg} B_1', \quad b_{1,2} = \frac{1}{2} (Q_1' + (1 - 3\varepsilon_1'^2) \operatorname{tg}^2 B_1'),$$

$$b_{2,2} = \frac{1}{4} \operatorname{tg} B_1' ((2 - 13\varepsilon_1'^2) Q_1' + (2 - 3\varepsilon_1'^2 + 15\varepsilon_1'^4) \operatorname{tg}^2 B_1'),$$

$$b_{0,4} = \frac{1}{24} \operatorname{tg} B_1' ((5 - 4\varepsilon_1'^2) Q_1' + 3(1 - 3\varepsilon_1'^2) \operatorname{tg}^2 B_1').$$

$B' - B_1'$ kann man zu dem Werte von $x - x_1$ aus einer der bereits früher angegebenen Tafeln entnehmen, oder es ist dafür nach S. 39 zu setzen:

$$\frac{B' - B_1'}{\rho'' Q_1'} = \Delta x' - b_{2,0} \Delta x'^2 + b_{3,0} \Delta x'^3 + b_{4,0} \Delta x'^4 + \dots \quad (66)$$

mit

$$b_{2,0} = \frac{3}{2} \varepsilon_1'^2 \operatorname{tg} B_1', \quad b_{3,0} = \frac{1}{2} \varepsilon_1'^2 (-Q_1' + (1 + 5\varepsilon_1'^2) \operatorname{tg}^2 B_1'),$$

$$b_{4,0} = \frac{1}{8} \varepsilon_1'^2 \operatorname{tg} B_1' ((4 + 19\varepsilon_1'^2) Q_1' - 5\varepsilon_1'^2 (3 + 7\varepsilon_1'^2) \operatorname{tg}^2 B_1').$$

In derselben Weise findet man aus (11):

$$\frac{L - L_1}{\rho''} \cos B_1' = y' - y_1' + (l_{1,1} \Delta x' + l_{2,1} \Delta x'^2 + l_{3,1} \Delta x'^3) y' - l_{0,3} (y'^3 - y_1'^3) - l_{1,3} \Delta x' \cdot y'^3 + G l_5 \quad (67)$$

mit

$$l_{1,1} = \operatorname{tg} B_1', \quad l_{2,1} = \frac{1}{2} (Q_1' + 2 \operatorname{tg}^2 B_1'), \quad l_{3,1} = \frac{1}{6} \operatorname{tg} B_1' ((5 - 4\varepsilon_1'^2) Q_1' + 6 \operatorname{tg}^2 B_1'),$$

$$l_{0,3} = \frac{1}{3} l_{2,1}, \quad l_{1,3} = \frac{1}{6} \operatorname{tg} B_1' ((5 + 8\varepsilon_1'^2) Q_1' + 3(2 + 5\varepsilon_1'^2 + 4\varepsilon_1'^4) \operatorname{tg}^2 B_1').$$

Ferner aus der ersten Gl. (62):

$$\frac{c - c_1}{\rho''} = c_{0,1} (y' - y_1') + (c_{1,1} \Delta x' + c_{2,1} \Delta x'^2 + c_{3,1} \Delta x'^3) y' - c_{0,3} (y'^3 - y_1'^3) - c_{1,3} \Delta x' \cdot y'^3 + G l_5 \quad (68)$$

mit

$$c_{0,1} = \operatorname{tg} B_1', \quad c_{1,1} = Q_1' + \operatorname{tg}^2 B_1', \quad c_{2,1} = \operatorname{tg} B_1' ((1 - 2\varepsilon_1'^2) Q_1' + \operatorname{tg}^2 B_1'), \quad c_{0,3} = \frac{1}{3} c_{2,1},$$

$$c_{3,1} = c_{1,3} = \frac{1}{3} ((1 - 2\varepsilon_1'^2) Q_1'^2 + 2(2 - \varepsilon_1'^2 + 6\varepsilon_1'^4) Q_1' \operatorname{tg}^2 B_1' + 3 \operatorname{tg}^4 B_1').$$

In vorstehendem sind $B - B_1$, $B' - B_1'$, $L - L_1$ und $c - c_1$ in Sekunden vorausgesetzt.

Zur Berechnung der ebenen rechtwinkligen Koordinaten aus den geographischen Koordinaten werden aus den beiden Gl. (16) die folgenden Formeln erhalten, wenn

$$\varepsilon_1'^2 = e'^2 \cos^2 B_1, \quad Q_1 = 1 + \varepsilon_1^2, \quad N = a \sqrt{1 + \varepsilon_1'^2} \quad (69)$$

10*

und (für $L, L_1, B - B_1$ in Sekunden)

$$\frac{L}{\rho''} \cos B_1 = L', \quad \frac{L_1}{\rho''} \cos B_1 = L'_1, \quad \frac{B - B_1}{\rho'' Q_1} = \Delta B' \quad (70)$$

gesetzt wird:

$$\frac{x - x_1}{N_1} = \frac{X - X_1}{N_1} + b_{0.2}(L'^2 - L_1'^2) - (b_{1.2}\Delta B' + b_{2.2}\Delta B'^2)L'^2 + b_{0.4}(L'^4 - L_1'^4) + Gl_5 \quad (71)$$

mit

$$b_{0.2} = \frac{1}{2} \operatorname{tg} B_1, \quad b_{1.2} = \frac{1}{2}(-Q_1 + \operatorname{tg}^2 B_1), \quad b_{2.2} = \frac{1}{4} \operatorname{tg} B_1((4 + \varepsilon_1^2)Q_1 + 3\varepsilon_1^2 \operatorname{tg}^2 B_1),$$

$$b_{0.4} = \frac{1}{24} \operatorname{tg} B_1((5 + 4\varepsilon_1^2)Q_1 - \operatorname{tg}^2 B_1)$$

und

$$\frac{X - X_1}{N_1} = \Delta B' + b_{2.0}\Delta B'^2 - b_{3.0}\Delta B'^3 - b_{4.0}\Delta B'^4 + \dots,$$

wobei

$$b_{2.0} = \frac{3}{2}\varepsilon_1^2 \operatorname{tg}^2 B_1, \quad b_{3.0} = \frac{1}{2}\varepsilon_1^2(-Q_1 + (1 - 4\varepsilon_1^2)\operatorname{tg}^2 B_1),$$

$$b_{4.0} = \frac{1}{8}\varepsilon_1^2 \operatorname{tg} B_1((4 - 11\varepsilon_1^2)Q_1 + 5\varepsilon_1^2(3 - 4\varepsilon_1^2)\operatorname{tg}^2 B_1).$$

$X - X_1$, der Meridianbogen zwischen den Breiten B und B_1 , kann auch aus den angegebenen Tafeln entnommen werden.

Weiter wird

$$\frac{y - y_1}{N_1} = L' - L'_1 - (l_{1.1}\Delta B' + l_{2.1}\Delta B'^2 - l_{3.1}\Delta B'^3)L' - l_{0.3}(L'^3 - L_1'^3) - l_{1.3}\Delta B' \cdot L'^3 + Gl_5 \quad (72)$$

mit

$$l_{1.1} = \operatorname{tg} B_1, \quad l_{2.1} = \frac{1}{2}(Q_1 + 3\varepsilon_1^2 \operatorname{tg}^2 B_1), \quad l_{3.1} = \frac{1}{6} \operatorname{tg} B_1((1 - 8\varepsilon_1^2)Q_1 + 3\varepsilon_1^2(1 - 4\varepsilon_1^2)\operatorname{tg}^2 B_1),$$

$$l_{0.3} = \frac{1}{3}b_{1.2}, \quad l_{1.3} = 4b_{0.4}.$$

Für die Meridiankonvergenz ergibt sich aus der zweiten Gl. (62), wenn man noch

$$\frac{B - B_1}{\rho''} = \Delta B$$

setzt:

$$\frac{c - c_1}{\rho''} = \operatorname{tg} B_1(L' - L'_1) + (\Delta B - \frac{1}{2} \operatorname{tg} B_1 \Delta B^2 - \frac{1}{6} \Delta B^3)L' + c_{0.3}(L'^3 - L_1'^3) - c_{1.3}\Delta B \cdot L'^3 + Gl_5, \quad (73)$$

worin

$$c_{0.3} = \frac{1}{3}(1 + 2\varepsilon_1^2)Q_1 \operatorname{tg} B_1, \quad c_{1.3} = \frac{1}{3}(-(1 + 2\varepsilon_1^2)Q_1 + 2(1 + 6\varepsilon_1^2)Q_1) \operatorname{tg}^2 B_1$$

ist.

Im Vergleich mit den Formeln des vorigen Paragraphen bedeuten die Formeln (wenn ihre Koeffizienten auch bereits bekannt sind) für die Rechnung kaum einen Vorteil; sie stehen den ersteren außerdem an Genauigkeit nach.

§ 23.

Ableitung einiger Werte für m_0 .

Die Einführung von m_0 bewirkt nach (9) § 1 nur eine Veränderung des Maßstabes des Bildes, nicht aber in seiner Form. Man wird daher in der Regel $m_0 = 1$ nehmen.

Bis auf Glieder 6. Ordnung ist nach (34) S. 49, wenn

$$\frac{y}{\varrho} = y' \quad (74)$$

gesetzt wird, wobei $\varrho = \sqrt{RN}$ zu irgend einer Breite zwischen B' und B gehört,

$$\frac{m}{m_0} = \cos iy' = 1 + \frac{1}{2} y'^2 + \frac{1}{24} y'^4. \quad (75)$$

Soll nun m_0 bestimmt werden, so muß man für das Vergrößerungsverhältnis eine Bedingung annehmen. Im folgenden sollen einige Annahmen darüber gemacht werden.

I. Es sei m_λ das Vergrößerungsverhältnis in einem Punkte an der Grenze des Bildes. Zu diesem Punkte gehöre y'_λ . Entweder ist m_λ der größte Wert des Vergrößerungsverhältnisses oder ein in seiner Nähe liegender Wert. Auf der Abszissenachse ist der Wert des Vergrößerungsverhältnisses gleich m_0 .

Setzt man

$$m_0 = 1 - v_1 y'^2 - v_2 y'^4 - \dots, \quad (76)$$

worin v_1 und v_2 vorläufig unbestimmte Koeffizienten bedeuten, so wird

$$m = 1 + \frac{1}{2} y'^2 - v_1 y'^2 + \frac{1}{24} y'^4 - \frac{1}{2} v_1 y'^2 y'^2 - v_2 y'^4 + \dots \quad (77)$$

Hiernach ist:

$$m_\lambda = 1 + \left(\frac{1}{2} - v_1\right) y'^2 + \left(\frac{1}{24} - \frac{1}{2} v_1 - v_2\right) y'^4 + \dots$$

Wird nun festgesetzt, daß zwischen den Vergrößerungsverhältnissen m_λ und m_0 die Beziehung

$$1 - m_0 = m_\lambda - 1 \quad (78)$$

stattfinden soll, so muß

$$v_1 = \frac{1}{4} \quad \text{und} \quad v_2 = -\frac{1}{24}$$

sein. Es wird demnach, vgl. S. 9,

$$m_0 = 1 - \frac{1}{4} y'^2 + \frac{1}{24} y'^4 - \dots,$$

$$m_\lambda = 1 + \frac{1}{4} y'^2 - \frac{1}{24} y'^4 + \dots.$$

Aus (77) folgt, daß $m = 1$ wird für

$$y' = \pm y'_\lambda \sqrt[4]{\frac{1}{2} \left\{ 1 + \frac{1}{48} y'^2 - \dots \right\}}.$$

Gehören zu m_λ die geographischen Koordinaten B_λ, L_λ , so ist mithin nach (16) S. 42:

$$\begin{aligned} m_0 &= 1 - \frac{1}{4} Q_\lambda \left(\frac{L_\lambda}{\rho''} \cos B_\lambda \right)^2 + \dots, \\ m_\lambda &= 1 + \frac{1}{4} Q_\lambda \left(\frac{L_\lambda}{\rho''} \cos B_\lambda \right)^2 - \dots, \end{aligned} \quad (79)$$

wobei L_λ in Sekunden angenommen ist.

Für $L_\lambda = 1^\circ 20' = 4800''$ und $B_\lambda = 50^\circ$ ist hiernach $m_0 = 1 - 0,000\,0561 = 1 - \frac{1}{17828}$.

II. Zu einer andern Beziehung gelangt man wie folgt. Dem Flächenelement $df = d\bar{x}d\bar{y}$ $= m_0^2 dx dy$ in der Ebene entspricht auf dem Ellipsoid das Flächenelement $\frac{1}{m^2} df$. Die Vergrößerung der Abbildung ist daher

$$V = \int \left(1 - \frac{1}{m^2} \right) df.$$

Nimmt man für ϱ auf dem abzubildenden Flächenstreifen einen mittleren Wert ϱ_0 an, so ist die Vergrößerung des Bildes, das zwischen den Abszissen \bar{x}_1 und \bar{x}_2 von der Abszissenachse bis zur Parallelen in der Entfernung \bar{y}_λ genommen werden möge:

$$V = (\bar{x}_2 - \bar{x}_1) \int_0^{\bar{y}_\lambda} \left(1 - \frac{1}{m^2} \right) d\bar{y} = (x_2 - x_1) \varrho_0 \int_0^{y'_\lambda} \left(m_0^2 - \frac{m_0^2}{m^2} \right) dy'.$$

Setzt man wieder

$$m_0 = 1 - \nu_1 y'_\lambda{}^2 - \nu_2 y'_\lambda{}^4 - \dots,$$

so wird, da $\left(\frac{m_0}{m}\right)^2 = 1 - y'^2 + \frac{2}{3} y'^4 - \dots$ ist:

$$V = \varrho_0 (x_2 - x_1) y'_\lambda{}^3 \left\{ \frac{1}{3} - 2\nu_1 + \left(\nu_1^2 - 2\nu_2 - \frac{2}{15} \right) y'_\lambda{}^2 + \dots \right\}.$$

Wenn man nun festsetzt, daß $V = 0$ sein soll, so muß

$$\nu_1 = \frac{1}{6} \quad \text{und} \quad \nu_2 = -\frac{19}{360}$$

werden. Dementsprechend ist jetzt

$$m_0 = 1 - \frac{1}{6} y'_\lambda{}^2 + \frac{19}{360} y'_\lambda{}^4 + \dots = 1 - \frac{1}{6} Q_\lambda \left(\frac{L_\lambda}{\rho''} \cos B_\lambda \right)^2 + \dots;$$

daher wird

$$m_\lambda = 1 + \frac{1}{3} y'_\lambda{}^2 + \frac{1}{90} y'_\lambda{}^4 + \dots = 1 + \frac{1}{3} Q_\lambda \left(\frac{L_\lambda}{\rho''} \cos B_\lambda \right)^2 + \dots. \quad (80)$$

m wird gleich 1 für $y' = \pm \sqrt{\frac{1}{3}} \left(1 - \frac{4}{45} y'_\lambda{}^2 + \dots \right)$.

Nun wird aber in der Regel die Begrenzung der Abbildung nicht durch eine Parallele zur x -Achse gebildet, sondern gewöhnlich ist die Grenze das Bild eines Meridians. Für ein konstantes L_λ ergibt sich das zugehörige $y' = \frac{y}{\varrho}$ nach (11) S. 39 aus der Gleichung

$$y' = \sqrt{Q'} \frac{L_\lambda}{\rho''} \cos B' + Gl_s,$$

wo B' zu x gehört; ferner ist $d\bar{x} = m_0 R' dB'$. Macht man die Annahme, daß es genügt, auf dem Flächenstreifen für Q' einen mittleren Wert Q'_0 , also für die Krümmungsradien mittlere Werte R'_0, N'_0 zu setzen, so ist demnach die Vergrößerung der Abbildung von der Abszissenachse zwischen \bar{x}_1 und \bar{x}_2 bis zum Bilde des Meridians L_λ gleich

$$V = \int_{\bar{x}_1}^{\bar{x}_2} \int_0^{\bar{y}} \left(1 - \frac{1}{m^2}\right) d\bar{x} d\bar{y} = R'_0 \int_{B'_1}^{B'_2} dB' \int_0^y \left(1 - \frac{1}{m^2}\right) m_0^2 dy$$

oder da $\left(\frac{m_0}{m}\right)^2 = 1 - y'^2 + \dots$ ist,

$$V = R'_0 Q'_0 \int_{B'_1}^{B'_2} \left((m_0^2 - 1)y' + \frac{1}{3}y'^3 + \dots\right) dB'.$$

Darin ist für y' der vorher angegebene Wert einzuführen; also wird

$$\begin{aligned} \int y'^3 dB' &= V Q'_0 \left(\frac{L_\lambda}{\rho''}\right)^3 \int \cos^3 B' dB' = \frac{1}{3} V Q'_0 \left(\frac{L_\lambda}{\rho''}\right)^3 (\sin B' \cos^2 B' + 2 \sin B') + \text{konst.}, \\ \int y' dB' &= V Q'_0 \frac{L_\lambda}{\rho''} \int \cos B' dB' = V Q'_0 \frac{L_\lambda}{\rho''} \sin B' + \text{konst.} \end{aligned}$$

Setzt man nun

$$m_0 = 1 - \nu Q'_0 \left(\frac{L_\lambda}{\rho''}\right)^2 + \dots,$$

so ergibt sich

$$V = N'_0 \left(\frac{L_\lambda}{\rho''}\right)^3 \left\{ 2 \left(\frac{1}{9} - \nu\right) (\sin B'_2 - \sin B'_1) + \frac{1}{9} (\sin B'_2 \cos^2 B'_2 - \sin B'_1 \cos^2 B'_1) + \dots \right\}.$$

Soll nun wieder $V = 0$ sein, so muß

$$\begin{aligned} \nu &= \frac{1}{18} \left(2 + \frac{\sin B'_2 \cos^2 B'_2 - \sin B'_1 \cos^2 B'_1}{\sin B'_2 - \sin B'_1} \right) \\ &= \frac{1}{12} (\cos^2 B'_2 + \cos^2 B'_1) + \frac{1}{36} (\sin B'_2 - \sin B'_1)^2 \end{aligned}$$

werden. Folglich ist in diesem Falle

$$m_0 = 1 - \frac{1}{12} Q'_0 \left(\frac{L_\lambda}{\rho''}\right)^2 (\cos^2 B'_2 + \cos^2 B'_1) - \frac{1}{36} Q'_0 \left(\frac{L_\lambda}{\rho''}\right)^3 (\sin B'_2 - \sin B'_1)^2 + \dots; \quad (81)$$

dabei ist angenähert

$$Q'_0 \left(\frac{L_\lambda}{\rho''}\right)^2 (\cos^2 B'_2 + \cos^2 B'_1) = y'_2{}^2 + y'_1{}^2. \quad (81*)$$

Für $B'_1 = 50^\circ, B'_2 = 55^\circ, L_\lambda = 1^\circ 20'$ gibt (81):

$$m_0 = 1 - 0,000\,0335,8 - 0,000\,0000,5 = 1 - 0,000\,0336 = 1 - \frac{1}{29762}.$$

Der Maximalwert wird, wenn man in (81) das letzte Glied vernachlässigt und $B'_2 > B'_1$ ist,

$$m_\lambda = 1 + \frac{1}{12} Q'_0 \left(\frac{L_\lambda}{\rho''}\right)^2 (5 \cos^2 B'_1 - \cos^2 B'_2),$$

und mit den vorstehenden Zahlenwerten gleich 1,000 0786. Ohne die Einführung von m_0 würde dieser Wert gleich $m_\lambda = 1 + \frac{1}{2} Q'_0 \left(\frac{L_\lambda}{\rho''}\right)^2 \cos^2 B_1 = 1,000\,112 = \frac{1,000\,0786}{0,999\,9664}$.

III. Auf den in (81) angegebenen Wert von m_0 wird man auch in folgender Weise geführt. Sieht man den stets positiven Wert $\left(1 - \frac{1}{m^2}\right)^2$ als Maß der Änderung eines Flächenelements an, so ist für die Fläche zwischen den beiden Ordinaten \bar{y}_1 und \bar{y}_2 (deren Fußpunkten die Breiten B_1' und B_2' entsprechen) einerseits und dem Bilde des Meridians $L_\lambda = \text{konst.}$ und der Abszissenachse andererseits, wenn man die gleichen Vernachlässigungen wie vorher eintreten lässt, das Maß der Flächenänderung:

$$\int \left(1 - \frac{1}{m^2}\right)^2 df = \frac{R_0' \varrho_0'}{m_0^2} \int_{B_1'}^{B_2'} dB' \int_0^{y'} \left(m_0^2 - \frac{m_0^2}{m^2}\right)^2 dy' = \frac{R_0' \varrho_0'}{m_0^2} J.$$

Man setze

$$m_0 = 1 - \nu y_\tau'^2 + \dots,$$

wo y_τ' irgend ein Wert von y' , und ν zu bestimmen ist. Dann ist

$$\left(m_0^2 - \frac{m_0^2}{m^2}\right)^2 = 4\nu^2 y_\tau'^4 - 4\nu y_\tau'^2 y'^2 + y'^4 + \dots$$

und

$$J = \int_{B_1'}^{B_2'} \left(4\nu^2 y_\tau'^4 y' - \frac{4}{3} \nu y_\tau'^2 y'^3 + \frac{1}{5} y'^5 + \dots\right) dB'.$$

Setzt man nun fest, daß $R_0' \varrho_0' \frac{J}{m_0^2}$ in bezug auf ν ein Minimum werden soll, so muß

$$\frac{R_0' \varrho_0'}{m_0^2} \left(\frac{\partial J}{\partial \nu} + \frac{2J}{m_0} y_\tau'^2\right) = 0$$

sein. $\frac{\partial J}{\partial \nu}$ und $\frac{J}{m_0}$ sind von derselben Ordnung in bezug auf y' , folglich kann man $2\frac{J}{m_0} y_\tau'^2$ hier vernachlässigen. Das Minimum tritt mithin angenähert ein, wenn

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial \nu} &= 4 \int_{B_1'}^{B_2'} \left(2\nu y_\tau'^4 y' - \frac{1}{3} y_\tau'^2 y'^3 + \dots\right) dB' \\ &= -4y_\tau'^2 \int_{B_1'}^{B_2'} \left((m_0^2 - 1)y' + \frac{1}{3} y'^3 + \dots\right) dB' = 0 \end{aligned}$$

ist. Dieselbe Gleichung, von den konstanten Faktoren abgesehen, war aber auch unter II zu erfüllen, wenn gefordert wurde, daß $V=0$ sein sollte; es ergibt sich mithin auch hier für m_0 wieder der Wert (81).

IV. Es seien ds und ds_1 zwei aufeinanderfolgende Elemente irgend einer auf einer Fläche gezogenen Kurve und ds' und ds_1' die entsprechenden Elemente der Bildkurve in der Ebene. Dann ist

$$ds = \frac{1}{m} ds', \quad ds_1 = \left(\frac{1}{m} + \frac{\partial \frac{1}{m}}{\partial s'} ds'\right) ds_1';$$

also

$$\frac{ds_1}{ds} = \left(1 - \frac{\partial \ln m}{\partial s'} ds'\right) \frac{ds_1'}{ds'}.$$

Hiernach kann man $\frac{\partial \ln m}{\partial s'} ds'$ als die Abweichung von der vollständigen Ähnlichkeit ansehen.¹⁾ Denkt man sich nun auf der Ellipsoidfläche eine Kurve gezogen, die von irgend einem Punkte ausgeht, für den $m = m_0 \cos iy' = 1$ ist, und dazu das Bild der Kurve in der Ebene gezeichnet, so summieren sich längs derselben die Abweichungen von der Ähnlichkeit. Es würde mithin $\ln m$ als die Abweichung von der Ähnlichkeit oder als die Verzeichnung im Bildpunkte von P anzusehen sein, wenn man von irgend einem Punkte der Kurve $m = 1$ auf irgend einem Wege zum Bildpunkte von P geht. Diese Abweichung kann positiv oder negativ sein, je nachdem m größer oder kleiner als 1 ist. Man kann $\ln m$ auch als Fehler des Bildes betrachten. Dementsprechend kann man m_0 so wählen, daß

$$\int (\ln m)^2 df = \text{Min.}$$

wird. Nun ist $\ln \frac{m}{m_0} = \frac{1}{2} y'^2 + \dots$, und wenn man wie vorher

$$m_0 = 1 - \nu y_\tau'^2 + \dots$$

setzt,

$$\ln m = \frac{1}{2} y'^2 - \nu y_\tau'^2 + \dots$$

Unter denselben Annahmen wie in II und III wird aber

$$\begin{aligned} \int (\ln m)^2 df &= R_0' q_0' \int_{B_1'}^{B_2'} dB' \int_0^{y_1'} m_0^2 \left(\frac{1}{2} y'^2 - \nu y_\tau'^2 + \dots \right)^2 dy' \\ &= R_0' q_0' \int_{B_1'}^{B_2'} \left(\frac{1}{20} y'^5 - \frac{1}{3} \nu y_\tau'^2 y'^3 + \nu^2 y_\tau'^4 y' + \dots \right) m_0^2 dB'. \end{aligned}$$

Infolge der getroffenen Vernachlässigungen kann man unter dem Integral m_0^2 gleich 1 setzen. Das Minimum in bezug auf ν ergibt sich nun für

$$\int_{B_1'}^{B_2'} \left(-\frac{1}{3} y'^3 + 2 \nu y_\tau'^2 y' \right) dB' = 0$$

oder für

$$\int_{B_1'}^{B_2'} \left((m_0^2 - 1)y' + \frac{1}{3} y'^3 \right) dB' = 0.$$

Man wird also auch hier wieder den in (81) angegebenen Wert von m_0 erhalten.

Die Einführung von m_0 kann auch dazu dienen, eine Korrektion wegen der mittleren Höhenlage des abzubildenden Landes anzubringen.

1) Vgl. H. WEBER, Über die Abbildung auf einer Ebene. Crelle's Journal, Bd. 67 (1867), S. 237.

Der Unterschied der geodätischen Linie auf dem Erdellipsoid und der die Projektionen ihrer Endpunkte in der Ebene verbindenden Geraden.

§ 24.

Allgemeine Formeln.

Es sei irgendeine Fläche konform in die Ebene übertragen. Die Urbilder der die Ebene bedeckenden Geraden $\bar{x} = \text{konst.}$ und $\bar{y} = \text{konst.}$ sind dann auf der Fläche zwei sich rechtwinklig schneidende Kurvenscharen. Entspricht einem Punkt P der Fläche der Punkt p mit den Koordinaten \bar{x}, \bar{y} in der Ebene, und ist in ihm das Vergrößerungsverhältnis gleich m , so werden die Bogenelemente der beiden durch P gehenden Kurven $\frac{1}{m} d\bar{x} = \frac{m_0}{m} dx$ und $\frac{1}{m} d\bar{y} = \frac{m_0}{m} dy$ sein.

Von einem festen Punkte P_1 , dem in der Ebene $p_1 (\bar{x}_1, \bar{y}_1)$ entspricht, werde nun nach P eine geodätische Linie s gezogen. Die Länge der Verbindungsgeraden $p_1 p$ sei \bar{r} , ihr Azimut ϑ . Wird die geodätische Linie $P_1 P = s$ in die Ebene übertragen, so soll ihre Darstellung s' in der-

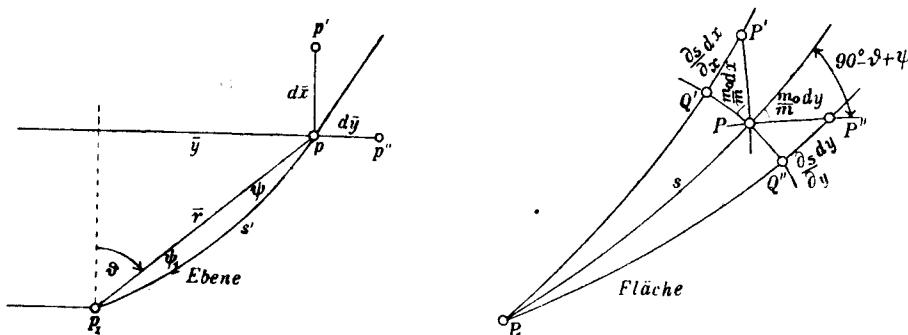


Fig. 2.

selben mit der Geraden \bar{r} im Punkte p den Winkel ψ bilden. Der Winkel zwischen s' und der Ordinate \bar{y} wird daher gleich $90^\circ - \vartheta + \psi$ sein. Den gleichen Winkel bildet aber auch auf der Fläche in P die geodätische Linie mit dem Urbilde der Ordinate. Einem Zuwachs von \bar{x} um $d\bar{x}$, zu dem auf der Fläche $PP' = \frac{m_0}{m} dx$ gehört, entspricht bei konstantem \bar{y} der Zuwachs von s gleich $Q'P' = \frac{\partial s}{\partial \bar{x}} d\bar{x} = \frac{\partial s}{\partial x} dx$, und dem Zuwachs von \bar{y} um $d\bar{y}$, wozu auf der Fläche $PP'' = \frac{m_0}{m} dy$ gehört, bei konstantem \bar{x} ein Zuwachs von s gleich $Q''P'' = \frac{\partial s}{\partial \bar{y}} d\bar{y} = \frac{\partial s}{\partial y} dy$. Da nun der geodätische Kreis $Q'PQ''$ auf P_1Q' , P_1P und P_1Q'' senkrecht steht und ferner $P'P$ senkrecht zu PP'' ist, so hat man aus dem unendlich kleinen Dreieck $PQ'P'$:

$$\frac{m_0}{m} dx \cdot \sin(90^\circ - \vartheta + \psi) = \frac{\partial s}{\partial x} dx$$

oder

$$\frac{m_0}{m} \cos(\vartheta - \psi) = \frac{\partial s}{\partial x}, \quad (1)$$

und aus dem unendlich kleinen Dreiecke $PP''Q''$:

$$\frac{m_0}{m} dy \cdot \cos(90^\circ - \vartheta + \psi) = \frac{\partial s}{\partial y} dy$$

oder

$$\frac{m_0}{m} \sin(\vartheta - \psi) = \frac{\partial s}{\partial y}. \quad (2)$$

Aus (1) und (2) folgt, indem man beide mit $2s$ multipliziert und darauf quadriert und addiert:

$$4 \left(\frac{m_0}{m} s \right)^2 = \left(\frac{\partial s}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial s}{\partial y} \right)^2. \quad (3)$$

Ferner ergibt sich aus ihnen, wenn man (1) mit $\sin \vartheta$ und (2) mit $-\cos \vartheta$ multipliziert und alsdann beide addiert:

$$\frac{m_0}{m} \sin \psi = \sin \vartheta \frac{\partial s}{\partial x} - \cos \vartheta \frac{\partial s}{\partial y}. \quad (4)$$

Die Entwicklung von s^2 muß mit $\frac{\bar{r}^2}{m_1^2} = \frac{m_0^2}{m_1^2} r^2$ beginnen, unter m_1 das Vergrößerungsverhältnis in P_1 verstanden, denn in P_1 ist $ds = \frac{m_0}{m_1} \frac{dr}{\cos \psi_1} = \frac{m_0}{m_1} dr (1 - \dots)$. Es wird daher gesetzt:

$$s^2 = \frac{m_0^2}{m_1^2} r^2 S, \quad (5)$$

wobei also die Entwicklung von S mit 1 anfängt.

Weiter wird

$$x - x_1 = x \xi, \quad y - y_1 = x \eta \quad (6)$$

gesetzt, so daß

$$r^2 = x^2 (\xi^2 + \eta^2), \quad \cos \vartheta = \frac{x \xi}{r}, \quad \sin \vartheta = \frac{x \eta}{r}, \quad \bar{r} = r m_0$$

ist. x ist eine Konstante.

Dadurch gehen (3) und (4) über in die beiden folgenden Gleichungen:

$$S + \xi \frac{\partial S}{\partial \xi} + \eta \frac{\partial S}{\partial \eta} + \frac{\xi^2 + \eta^2}{4S} \left(\left(\frac{\partial S}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial \eta} \right)^2 \right) = \frac{m_1^2}{m^2}, \quad (7)$$

$$\sin \psi = \frac{m}{m_1} \left\{ \eta \frac{\partial S}{\partial \xi} - \xi \frac{\partial S}{\partial \eta} \right\} = \frac{m}{m_1} \frac{1}{2} \sqrt{S} \left\{ \eta \frac{\partial S}{\partial \xi} - \xi \frac{\partial S}{\partial \eta} \right\}. \quad (8)$$

Ist aus (7) S abgeleitet, so gibt (5) s^2 und aus (8) findet man ψ . Setzt man in den erhaltenen Ausdrücken $x = x_2$ und $y = y_2$, so fällt der Punkt p mit dem Punkte p_2 zusammen; ψ geht demnach in ψ_2 über, d. h. in den Winkel, welchen s' mit \bar{r} im Punkte p_2 bildet. Den Winkel ψ_1 , den \bar{r} mit s' im Punkte p_1 bildet, erhält man aus dem Ausdrucke für ψ_2 , indem man x_1 , y_1 und die darauf bezüglichen Werte mit x_2 , y_2 und den entsprechenden Werten vertauscht. Man kann auch für ψ_1 eine Differentialgleichung aufstellen. Man bildet je 2 Ausdrücke für PQ' und PQ'' :

$$\frac{m_0}{m} dx \cdot \sin(\vartheta - \psi) = -m \frac{\partial(\vartheta + \psi_1)}{\partial x} dx,$$

$$\frac{m_0}{m} dy \cdot \cos(\vartheta - \psi) = +m \frac{\partial(\vartheta + \psi_1)}{\partial y} dy,$$

11*

worin m die reduzierte Länge der geodätischen Linie in P bezeichnet. Aus ihnen stellt man mit (1) und (2) und mit $\frac{\partial \vartheta}{\partial x} = -\frac{y-y_1}{r^2}$, $\frac{\partial \vartheta}{\partial y} = +\frac{x-x_1}{r^2}$ die Gleichung

$$\frac{\partial s}{\partial x} \frac{\partial \psi_1}{\partial x} + \frac{\partial s}{\partial y} \frac{\partial \psi_1}{\partial y} = \frac{y-y_1}{r^2} \frac{\partial s}{\partial x} - \frac{x-x_1}{r^2} \frac{\partial s}{\partial y}$$

her, die durch (5) und (6) in

$$2\xi \frac{\partial \psi_1}{\partial \xi} + 2\eta \frac{\partial \psi_1}{\partial \eta} + (\xi^2 + \eta^2) \left(\frac{\partial \ln S}{\partial \xi} \frac{\partial \psi_1}{\partial \xi} + \frac{\partial \ln S}{\partial \eta} \frac{\partial \psi_1}{\partial \eta} \right) = \eta \frac{\partial \ln S}{\partial \xi} - \xi \frac{\partial \ln S}{\partial \eta}$$

übergeht.

§ 25.

Entfernungs- und Richtungsreduktion bei der transversalen Mercator-Projektion der Kugel.

I. Herleitung von $\log s - \log r$.

Um die Formel (7) auf die Kugel anwenden zu können, muß man $\frac{m_1^2}{m^2}$ in eine Potenzreihe von $y - y_1$ entwickeln. Nach (10) § 3 S. 8 ist, wenn A den Kugelradius bezeichnet,

$$\frac{m}{m_0} = m' = \cos \frac{iy}{A}, \quad \text{also } \frac{1}{m'^2} = 1 + \operatorname{tg}^2 \frac{iy}{A};$$

mithin wird:

$$\frac{d \frac{1}{m'^2}}{dy} = \frac{2}{m'^2} \frac{i}{A} \operatorname{tg} \frac{iy}{A}, \quad \frac{d^2 \frac{1}{m'^2}}{dy^2} = -\frac{2}{m'^2} \frac{1}{A^2} \left(1 + 3 \operatorname{tg}^2 \frac{iy}{A} \right),$$

$$\frac{d^3 \frac{1}{m'^2}}{dy^3} = -\frac{8}{m'^2} \frac{i}{A^3} \left(2 \operatorname{tg} \frac{iy}{A} + 3 \operatorname{tg}^3 \frac{iy}{A} \right), \quad \frac{d^4 \frac{1}{m'^2}}{dy^4} = \frac{8}{m'^2} \frac{1}{A^4} \left(2 + 15 \operatorname{tg}^2 \frac{iy}{A} + 15 \operatorname{tg}^4 \frac{iy}{A} \right), \text{ usw.}$$

Der TAYLORSche Satz gibt daher, wenn

$$\eta = \frac{1}{A} (y - y_1) \tag{9}$$

und zur Abkürzung

$$\frac{1}{i} \operatorname{tg} \frac{iy_1}{A} = t_1 \tag{10}$$

gesetzt wird:

$$\frac{m_1^2}{m'^2} = \frac{m_1^2}{m^2} = 1 + c_1 \eta + \frac{1}{2} c_2 \eta^2 + \frac{1}{6} c_3 \eta^3 + \frac{1}{24} c_4 \eta^4 + \dots \tag{11}$$

mit

$$\begin{aligned} c_1 &= -2t_1 \\ c_2 &= -2(1 - 3t_1^2) \\ c_3 &= +8(2t_1 - 3t_1^3) \\ c_4 &= +8(2 - 15t_1^2 + 15t_1^4) \\ &\text{usw.} \end{aligned} \tag{11*}$$

Entsprechend (9) ist nach (6) noch zu setzen:

$$\xi = \frac{1}{A} (x - x_1). \tag{9**}$$

Man erkennt nun leicht, daß in (7) die Reihe für S , die nach Potenzen von ξ und η fortschreitet, nur gerade Potenzen von ξ enthalten kann; denn auf der Kugel ergibt sich dasselbe s , wenn man $x - x_1$ mit $x_1 - x$ vertauscht. Es wird daher angesetzt: (12)

$$S = 1 + \alpha_{0.1} \eta + \frac{1}{2} \alpha_{2.0} \xi^2 + \frac{1}{2} \alpha_{0.2} \eta^2 + \frac{1}{2} \alpha_{2.1} \xi^2 \eta + \frac{1}{6} \alpha_{0.3} \eta^3 + \frac{1}{24} \alpha_{4.0} \xi^4 + \frac{1}{4} \alpha_{2.2} \xi^2 \eta^2 + \frac{1}{24} \alpha_{0.4} \eta^4 + \dots$$

Dann ist

$$\frac{\partial S}{\partial \xi} = \alpha_{2.0} \xi + \alpha_{2.1} \xi \eta + \frac{1}{6} \alpha_{4.0} \xi^3 + \frac{1}{2} \alpha_{2.2} \xi \eta^2 + \dots$$

$$\frac{\partial S}{\partial \eta} = \alpha_{0.1} + \alpha_{0.2} \eta + \frac{1}{2} \alpha_{2.1} \xi^2 + \frac{1}{2} \alpha_{0.3} \eta^2 + \frac{1}{2} \alpha_{2.2} \xi^2 \eta + \frac{1}{6} \alpha_{0.4} \eta^3 + \dots;$$

also wird

$$S + \xi \frac{\partial S}{\partial \xi} + \eta \frac{\partial S}{\partial \eta} \quad (12^*)$$

$$= 1 + 2 \alpha_{0.1} \eta + \frac{3}{2} \alpha_{2.0} \xi^2 + \frac{3}{2} \alpha_{0.2} \eta^2 + 2 \alpha_{2.1} \xi^2 \eta + \frac{2}{3} \alpha_{0.3} \eta^3 + \frac{5}{24} \alpha_{4.0} \xi^4 + \frac{5}{4} \alpha_{2.2} \xi^2 \eta^2 + \frac{5}{24} \alpha_{0.4} \eta^4 + \dots,$$

ferner

$$\left(\frac{\partial S}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial \eta} \right)^2 = \alpha_{0.1}^2 + 2 \alpha_{0.1} \alpha_{0.2} \eta + (\alpha_{2.0}^2 + \alpha_{0.1} \alpha_{2.1}) \xi^2 + (\alpha_{0.2}^2 + \alpha_{0.1} \alpha_{0.3}) \eta^2 + \dots$$

und

$$\frac{1}{S} = 1 - \alpha_{0.1} \eta - \frac{1}{2} \alpha_{2.0} \xi^2 + \left(\alpha_{0.1}^2 - \frac{1}{2} \alpha_{0.2} \right) \eta^2 + \dots;$$

mithin

$$\frac{\xi^2 + \eta^2}{4S} \left(\left(\frac{\partial S}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial \eta} \right)^2 \right) \quad (12^{**})$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{4} \alpha_{0.1}^2 (\xi^2 + \eta^2) + \left(\frac{1}{2} \alpha_{0.1} \alpha_{0.2} - \frac{1}{4} \alpha_{0.1}^3 \right) (\xi^2 \eta + \eta^3) + \left(\frac{1}{4} \alpha_{2.0}^2 + \frac{1}{4} \alpha_{0.1} \alpha_{2.1} - \frac{1}{8} \alpha_{0.1}^2 \alpha_{2.0} \right) (\xi^4 + \xi^2 \eta^2) \\ &\quad + \left(\frac{1}{4} \alpha_{0.2}^2 + \frac{1}{4} \alpha_{0.1} \alpha_{0.3} - \frac{5}{8} \alpha_{0.1}^2 \alpha_{0.2} + \frac{1}{4} \alpha_{0.1}^4 \right) (\xi^2 \eta^2 + \eta^4) + \dots. \end{aligned}$$

Werden nun die Werte aus (12*), (12**) und (11) in die Gleichung (7) eingeführt, so ergeben sich die folgenden Beziehungen:

$$2 \alpha_{0.1} = c_1; \quad \frac{3}{2} \alpha_{2.0} + \frac{1}{4} \alpha_{0.1}^2 = 0, \quad 2 \alpha_{2.1} + \frac{1}{2} \alpha_{0.1} \alpha_{0.2} - \frac{1}{4} \alpha_{0.1}^3 = 0,$$

$$\alpha_{0.2} - \alpha_{2.0} = \frac{1}{3} c_2; \quad \alpha_{0.3} - 3 \alpha_{2.1} = \frac{1}{4} c_3;$$

$$\frac{5}{24} \alpha_{4.0} + \frac{1}{4} \alpha_{2.0}^2 + \frac{1}{4} \alpha_{0.1} \alpha_{2.1} - \frac{1}{8} \alpha_{0.1}^2 \alpha_{2.0} = 0,$$

$$\frac{5}{24} \alpha_{0.4} + \frac{1}{4} \alpha_{0.2}^2 + \frac{1}{4} \alpha_{0.1} \alpha_{0.3} - \frac{5}{8} \alpha_{0.1}^2 \alpha_{0.2} + \frac{1}{4} \alpha_{0.1}^4 = \frac{1}{24} c_4,$$

$$\alpha_{2.2} - \frac{1}{6} (\alpha_{4.0} + \alpha_{0.4}) = -\frac{1}{30} c_4; \text{ usw.}$$

Berechnet man hieraus die α , indem man gleichzeitig für die c aus (11*) ihre Werte einsetzt, so erhält man nach (12):

$$\begin{aligned} S &= 1 - t_1 \eta - \frac{1}{12} t_1^2 \xi^2 - \frac{1}{12} (4 - 11 t_1^2) \eta^2 - \frac{1}{12} (t_1 - 2 t_1^3) \xi^2 \eta + \frac{1}{12} (7 t_1 - 10 t_1^3) \eta^3 \\ &\quad - \frac{1}{360} (3 t_1^2 - 4 t_1^4) \xi^4 - \frac{1}{180} (4 - 37 t_1^2 + 41 t_1^4) \xi^2 \eta^2 + \frac{1}{360} (40 - 283 t_1^2 + 274 t_1^4) \eta^4 + \dots, \end{aligned} \quad (13)$$

und hieraus nach (5):

$$s^2 = \frac{1}{\cos^2 \frac{i y_1}{A}} r^2 S = r^2 (1 - t_1^2) S. \quad (13*)$$

Dabei ist

$$\xi = \frac{1}{A} (x_2 - x_1), \quad \eta = \frac{1}{A} (y_2 - y_1), \quad r^2 = A^2 (\xi^2 + \eta^2), \quad (13**)$$

wenn man den beliebigen Punkt (x, y) mit dem Punkte (x_2, y_2) zusammenfallen lässt.

In diesen Gleichungen bezieht sich $t_1 = \frac{1}{i} \operatorname{tg} \frac{i y_1}{A}$ auf den Anfang von $p_1 p_2$; es ist jedoch vorteilhafter, den zur Mitte gehörigen Wert einzuführen. Nun ist

$$\frac{y_1}{A} = \frac{y_1 + y_2}{2A} - \frac{y_2 - y_1}{2A} = \frac{y_1 + y_2}{2A} - \frac{1}{2} \eta;$$

ferner werde gesetzt

$$\frac{1}{i} \operatorname{tg} i \frac{y_1 + y_2}{2A} = t_m. \quad (14)$$

Da

$$\frac{\partial \frac{1}{i} \operatorname{tg} \frac{iy}{A}}{\partial \frac{y}{A}} = \frac{\partial t}{\partial \frac{y}{A}} = 1 - t^2$$

ist, so findet man mittels des TAYLORSCHEN Satzes:

$$t_1 = t_m - \frac{1}{2} (1 - t_m^2) \eta - \frac{1}{4} (t_m - t_m^3) \eta^2 + \frac{1}{24} (1 - 4t_m^2 + 3t_m^4) \eta^3 + \frac{1}{48} (2t_m - 5t_m^3 + 3t_m^5) \eta^4 + \dots,$$

$$1 - t_1^2 = (1 - t_m^2) \left\{ 1 + t_m \eta - \frac{1}{4} (1 - 3t_m^2) \eta^2 - \frac{1}{6} (2t_m - 3t_m^3) \eta^3 + \frac{1}{48} (2 - 15t_m^2 + 15t_m^4) \eta^4 + \dots \right\},$$

$$t_1^2 = t_m^2 - (t_m - t_m^3) \eta + \frac{1}{4} (1 - 4t_m^2 + 3t_m^4) \eta^2 + \dots,$$

$$t_1^3 = t_m^3 - \frac{3}{2} (t_m^2 - t_m^4) \eta + \dots, \quad t_1^4 = t_m^4 + \dots.$$

Damit ergibt sich aber aus (13) und (13*):

$$\begin{aligned} \frac{s^2}{r^2} &= (1 - t_m^2) \left\{ 1 - \frac{1}{12} t_m^2 \xi^2 - \frac{1}{12} (1 - 2t_m^2) \eta^2 - \frac{1}{360} (3t_m^2 - 4t_m^4) \xi^4 \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{720} (1 - 13t_m^2 + 14t_m^4) \xi^2 \eta^2 + \frac{1}{720} (5 - 26t_m^2 + 23t_m^4) \eta^4 + \dots \right\}, \end{aligned} \quad (15)$$

oder wenn zu Logarithmen übergegangen wird:

$$\begin{aligned} \log s - \log r &= \frac{1}{2} \log (1 - t_m^2) - \frac{1}{24} M \left\{ t_m^2 \xi^2 + (1 - 2t_m^2) \eta^2 + \frac{1}{120} (12t_m^2 - 11t_m^4) \xi^4 \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{120} (2 - 16t_m^2 + 8t_m^4) \xi^2 \eta^2 - \frac{1}{120} (5 - 32t_m^2 + 26t_m^4) \eta^4 + \dots \right\}, \end{aligned} \quad (15*)$$

wobei

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \log (1 - t_m^2) &= - \frac{1}{2} M \left(\frac{y_1 + y_2}{2A} \right)^2 + \frac{1}{12} M \left(\frac{y_1 + y_2}{2A} \right)^4 - \frac{1}{45} M \left(\frac{y_1 + y_2}{2A} \right)^6 - \dots, \\ \log t_m^2 &= 2 \log \frac{y_1 + y_2}{2A} - \frac{2}{3} M \left(\frac{y_1 + y_2}{2A} \right)^2 + \dots, \end{aligned} \quad (15**)$$

und wie vorher

$$\xi = \frac{x_2 - x_1}{A}, \quad \eta = \frac{y_2 - y_1}{A}, \quad r^2 = A^2 (\xi^2 + \eta^2)$$

ist. M = Modul der BRIGGSchen Logarithmen.

Die Formel (15*) stimmt mit einer Formel von SCHOOLS überein, von dem sie auf anderem Wege entwickelt wurde.¹⁾ Aus ihr erhält man sofort eine von O. SCHREIBER gegebene Formel, indem man t_m durch die Reihenentwicklung nach $\frac{y_1 + y_2}{2A}$ ersetzt.²⁾ Wenn

$$\frac{y_1 + y_2}{A} = \gamma \quad (16*)$$

ist, so wird

$$\frac{1}{2} \log (1 - t_m^2) = -M \left(\frac{1}{8} \gamma^2 - \frac{1}{192} \gamma^4 + \frac{1}{2880} \gamma^6 - \dots \right),$$

$$t_m = \frac{1}{2} \gamma - \frac{1}{24} \gamma^3 + \dots,$$

und damit

$$\begin{aligned} \log r - \log s &= \frac{1}{8} M \left\{ \gamma^2 + \frac{1}{3} \eta^2 - \frac{1}{24} \gamma^4 + \frac{1}{12} \gamma^2 (\xi^2 - 2\eta^2) + \frac{1}{360} \eta^2 (2\xi^2 - 5\eta^2) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{360} \gamma^6 - \frac{1}{72} \gamma^4 (\xi^2 - 2\eta^2) + \frac{1}{360} \gamma^2 (3\xi^4 - 4\xi^2\eta^2 + 8\eta^4) + \dots \right\}. \end{aligned} \quad (16)$$

II. Herleitung von ψ_2 und ψ_1 .

Der Winkel ψ_2 , den das Bild der geodätischen Linie mit der Verbindungsgeraden ihrer Endpunkte p_1 und p_2 in p_2 bildet, lässt sich jetzt nach (8) mit Hilfe des in (13) angegebenen Ausdrucks von S berechnen. Danach wird

$$\begin{aligned} \eta \frac{\partial S}{\partial \xi} - \xi \frac{\partial S}{\partial \eta} &= t_1 \xi + \frac{2}{3} (1 - 3t_1^2) \xi \eta + \frac{1}{12} (t_1 - 2t_1^3) \xi^3 \\ &\quad - \frac{1}{12} (23t_1 - 34t_1^3) \xi \eta^2 + \frac{1}{90} (4 - 40t_1^2 + 45t_1^4) \xi^2 \eta \\ &\quad - \frac{1}{90} (44 - 320t_1^2 + 315t_1^4) \xi \eta^3 + \dots \end{aligned}$$

und

$$\frac{1}{\sqrt{S}} = 1 + \frac{1}{2} t_1 \eta + \frac{1}{24} t_1^2 \xi^2 + \frac{1}{12} (2 - t_1^2) \eta^2 + \frac{1}{48} (2t_1 - t_1^3) \xi^2 \eta - \frac{1}{24} (t_1 - t_1^3) \eta^3 + \dots;$$

ferner ist

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{\cos \frac{i y_2}{A}}{\cos \frac{i y_1}{A}} = 1 + t_1 \eta + \frac{1}{2} \eta^2 + \frac{1}{6} t_1 \eta^3 + \frac{1}{24} \eta^4 + \dots.$$

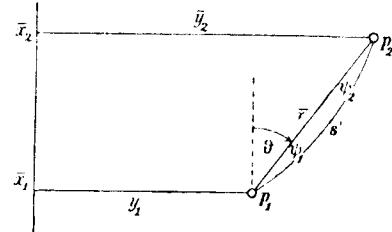


Fig. 3.

1) Ch. M. SCHOOLS, Sur l'emploi de la projection de Mercator pour le calcul d'une triangulation dans le voisinage de l'équateur. Annales de l'école polyt. de Delft. T. I. 1885, p. 37.

Die Formel wurde auch mitgeteilt (ohne Ableitung) von O. SCHREIBER, Zur konformen Doppelprojektion der K. Preuß. Landesaufnahme. Zeitschr. f. Vermessungswesen, Bd. XXVIII (1899) S. 502.

2) O. SCHREIBER, Die konforme Doppelprojektion der trig. Abteilung der Königl. Preuß. Landesaufnahme. Formeln u. Tafeln. Berlin 1897. S. 44.

Mithin wird nach (8)

$$\sin \psi_2 = \frac{1}{2} \frac{m_2}{m_1} \frac{1}{\sqrt{S}} \left(\eta \frac{\partial S}{\partial \xi} - \xi \frac{\partial S}{\partial \eta} \right)$$

$$= \frac{1}{2} t_1 \xi + \frac{1}{12} (4 - 3t_1^2) \xi \eta + \frac{1}{48} (2t_1 - 3t_1^3) \xi^3 - \frac{1}{8} (t_1 - t_1^3) \xi \eta^2 \\ + \frac{1}{1440} (32 - 180t_1^2 + 135t_1^4) \xi^3 \eta - \frac{1}{720} (16 - 60t_1^2 + 45t_1^4) \xi \eta^3 + \dots$$

und hieraus:

$$\frac{\psi_2}{\rho''} = \frac{1}{2} t_1 \xi + \frac{1}{12} (4 - 3t_1^2) \xi \eta + \frac{1}{24} (t_1 - t_1^3) (\xi^3 - 3\xi \eta^2) \\ + \frac{1}{720} (16 - 60t_1^2 + 45t_1^4) (\xi^3 \eta - \xi \eta^3) + \dots \quad (17)$$

Es empfiehlt sich auch hier t_m an Stelle von t_1 einzuführen; man erhält, wenn man die auf S. 86 angegebenen Beziehungen zwischen t_m und t_1 benutzt:

$$\frac{\psi_2}{\rho''} = \frac{1}{2} t_m \xi \left(1 + \frac{1}{12} (1 - t_m^2) \xi^2 \right) + \frac{1}{12} \xi \eta \left(1 + \frac{1}{60} (\xi^2 - \eta^2) \right) + \dots \quad (18)$$

Vertauscht man x_1, y_1 mit x_2, y_2 , dann gehen ξ, η in $-\xi, -\eta$ über und aus ψ_2 wird $-\psi_1$, so daß aus (18) folgt:

$$\frac{\psi_1}{\rho''} = \frac{1}{2} t_m \xi \left(1 + \frac{1}{12} (1 - t_m^2) \xi^2 \right) - \frac{1}{12} \xi \eta \left(1 + \frac{1}{60} (\xi^2 - \eta^2) \right) + \dots \quad (18^*)$$

Es seien $\alpha_{1,2}$ und $\alpha_{2,1}$ die Richtungswinkel von s im Anfangs- und Endpunkte, also diejenigen Winkel, die die zum Hauptmeridian parallelen Kugelkreise durch P_1 und P_2 mit dem Bogen $P_1 P_2$ eines größten Kreises bilden, von Norden über Osten gezählt. Ferner seien $\vartheta_{1,2}$ und $\vartheta_{2,1} = 180^\circ + \vartheta_{1,2}$ die Richtungswinkel der Geraden $p_1 p_2$ in p_1 und p_2 . Da nun bei der Mercatorprojektion die parallelen Kugelkreise zum Hauptmeridian durch Parallelen zur x -Achse in der Ebene dargestellt werden (vgl. § 4 S. 11), so ist

$$\left. \begin{array}{l} \alpha_{1,2} - \vartheta_{1,2} = +\psi_1 \\ \alpha_{2,1} - \vartheta_{2,1} = -\psi_2 \end{array} \right\} \quad (19)$$

Setzt man

$$\left. \begin{array}{l} \tau_1 = \frac{1}{2} \rho'' t_m \xi \left(1 + \frac{1}{12} (1 - t_m^2) \xi^2 + \dots \right) \\ \tau_2 = \frac{1}{12} \rho'' \xi \eta \left(1 + \frac{1}{60} (\xi^2 - \eta^2) + \dots \right) \end{array} \right\} \quad (20)$$

mit

$$\log t_m = \log \frac{y_1 + y_2}{2A} - \frac{1}{3} M \left(\frac{y_1 + y_2}{2A} \right)^2 + \frac{7}{90} M \left(\frac{y_1 + y_2}{2A} \right)^4 - \dots,$$

$$\log (1 - t_m^2) = -M \left(\frac{y_1 + y_2}{2A} \right)^2 + \dots,$$

so hat man:

$$\left. \begin{array}{l} \alpha_{1,2} - \vartheta_{1,2} = +\tau_1 - \tau_2 \\ \alpha_{2,1} - \vartheta_{2,1} = -\tau_1 - \tau_2 \end{array} \right\} \quad (20^*)$$

Wird wieder $\frac{y_1 + y_2}{A} = \gamma$ gesetzt, und ferner

$$t_m = \frac{1}{2} \gamma - \frac{1}{24} \gamma^3 + \frac{1}{240} \gamma^5 - \dots,$$

so geht τ_1 über in

$$\tau_1 = \frac{1}{4} \rho'' \xi \gamma \left\{ 1 - \frac{1}{12} (\gamma^2 - \xi^2) + \frac{1}{360} (3\gamma^4 - 10\gamma^2\xi^2 - \dots) \right\}. \quad (20**)$$

Dieser Wert von τ_1 und der von τ_2 aus (20) in (20*) eingesetzt, ergeben die SCHREIBERSchen Gebrauchsformeln für die Richtungsreduktionen.¹⁾

§ 26.

Entfernungsreduktion beim Erdellipsoid.

Wird

$$\frac{\varepsilon'^2 \operatorname{tg} B'}{\sqrt{Q'}} = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon'^2 \sin 2B'}{\sqrt{1 + \varepsilon'^2 \cos^2 B'}} = \varepsilon^2 \quad (21)$$

gesetzt, wobei B' die geographische Breite ist, die zu x gehört, so hat man beim Erdellipsoid für das Vergrößerungsverhältnis nach (29) § 16 S. 48 die Formel

$$\frac{m}{m_0} = \cos i \frac{y}{\varrho} \left(1 + \frac{1}{6} (\varepsilon'^2 - 6\varepsilon^4) \left(\frac{y}{\varrho} \right)^4 \right) + \varepsilon'^2 G l_6; \quad \frac{1}{\varrho'} = \frac{1 + \varepsilon'^2 \cos^2 B'}{a \sqrt{1 + \varepsilon'^2}}. \quad (22)$$

Sieht man von der Veränderlichkeit von ϱ' ab, und vernachlässigt man die mit ε'^2 multiplizierten Glieder, so gelten die im vorigen Paragraphen entwickelten Formeln für die Mercator Projektion, in denen nur ϱ' für A zu schreiben ist. Um nun die Zusatzglieder zu erhalten, die das Ellipsoid erfordert, verfahren wir wie folgt.

Zunächst wird

$$\left(\frac{m_0}{m} \right)^2 = 1 - \left(\frac{y}{\varrho} \right)^2 + \frac{1}{3} (2 - \varepsilon'^2 + 6\varepsilon^4) \left(\frac{y}{\varrho} \right)^4 - \frac{17}{45} \left(\frac{y}{\varrho} \right)^6 + Gl_8 \quad (22*)$$

in eine nach Potenzen von $y - y_1$ und $x - x_1$ fortschreitende Reihe entwickelt. Gehört ϱ'_1 zu der geographischen Breite B'_1 , der x_1 entspricht, so ist:

$$\begin{aligned} \left(\frac{m_0}{m} \right)^2 &= 1 - \left(\frac{1}{\varrho'^2} + \frac{d \frac{1}{\varrho'^2}}{dx_1} (x - x_1) + \frac{1}{2} \frac{d^2 \frac{1}{\varrho'^2}}{dx_1^2} (x - x_1)^2 + \dots \right) (y_1 + (y - y_1))^2 \\ &\quad + \frac{1}{3} \left(\frac{2 - \varepsilon'^2 + 6\varepsilon^4}{\varrho'^4} + \frac{d \frac{2 - \varepsilon'^2 + 6\varepsilon^4}{\varrho'^4}}{dx_1} (x - x_1) + \dots \right) (y_1 + (y - y_1))^4 \\ &\quad - \frac{17}{45} \left(\frac{1}{\varrho'^6} + \dots \right) (y_1 + (y - y_1))^6 + \dots \end{aligned}$$

Nun ist aber

$$\begin{aligned} \frac{d \frac{1}{\varrho'^2}}{dx} &= - \frac{4\varepsilon^2}{\varrho'^3}, & \frac{d \varepsilon'^2}{dx} &= - \frac{2\varepsilon^2 (1 + \varepsilon'^2)}{\varrho'}, & \frac{d \varepsilon^4}{dx} &= \frac{2\varepsilon^2}{\varrho'} (\varepsilon'^2 (1 - \operatorname{tg}^2 B') + \varepsilon^4), \\ \frac{d^2 \frac{1}{\varrho'^2}}{dx^2} &= - \frac{4}{\varrho'^4} (\varepsilon'^2 (1 - \operatorname{tg}^2 B') - 5\varepsilon^4), & \frac{d \frac{2 - \varepsilon'^2 + 6\varepsilon^4}{\varrho'^4}}{dx} &= - \frac{2\varepsilon^2}{\varrho'^5} (7 - 11\varepsilon'^2 + 6\varepsilon'^2 \operatorname{tg}^2 B' + 18\varepsilon^4); \end{aligned}$$

1) O. SCHREIBER, Die konforme Doppelprojektion usw., S. 42-43.

Krüger, Konforme Abbildung des Erdellipsoids in der Ebene

folglich wird, wenn

$$\frac{x - x_1}{\epsilon_1} = \xi_1, \quad \frac{y - y_1}{\epsilon_1} = \eta_1 \quad \text{und} \quad \frac{y_1}{\epsilon_1} = y_1' \quad (23)$$

gesetzt und

$$\left(\frac{m_0}{m}\right)^2 = 1 - y_1'^2 + \frac{1}{3}(2 - \epsilon_1'^2 + 6\epsilon_1^4)y_1'^4 - \frac{17}{45}y_1'^6 + \dots \quad (24)$$

eingeführt wird:

$$\left(\frac{m_0}{m}\right)^2 : \left(\frac{m_0}{m_1}\right)^2 = \left(\frac{m_1}{m}\right)^2 = 1 + c_1 \eta_1 + \frac{1}{2} c_2 \eta_1^2 + \frac{1}{6} c_3 \eta_1^3 + \frac{1}{24} c_4 \eta_1^4 + \frac{1}{120} c_5 \eta_1^5 + \dots + E(\xi_1, \eta_1), \quad (25)$$

mit

$$\begin{aligned} c_1 &= -2 \left(y_1' - \frac{1}{3} y_1'^3 + \frac{2}{15} y_1'^5 - \frac{17}{315} y_1'^7 + \dots \right) \\ c_2 &= -2(1 - 3y_1'^2 + 2y_1'^4 - \dots) \\ c_3 &= +8 \left(2y_1' - \frac{11}{3} y_1'^3 + \dots \right) \\ c_4 &= +8(2 - 15y_1' + \dots) \\ c_5 &= -16(17y_1' - \dots) \\ c_6 &= -16(17 - \dots) \end{aligned} \quad (25^*)$$

usw.;

ferner ist

$$\begin{aligned} E(\xi_1, \eta_1) &= \epsilon_1^2 \left(4y_1'^2 - \frac{2}{3} y_1'^4 \right) \xi_1 - \frac{4}{3} \epsilon_1'^2 y_1'^3 \cdot \eta_1 + 2\epsilon_1'^2 (1 - \operatorname{tg}^2 B_1') y_1'^2 \cdot \xi_1^2 \\ &\quad + 8\epsilon_1^2 y_1' \cdot \xi_1 \eta_1 - 2\epsilon_1'^2 y_1'^2 \cdot \eta_1^2 + 4\epsilon_1'^2 (1 - \operatorname{tg}^2 B_1') y_1' \cdot \xi_1^2 \eta_1 + 4\epsilon_1^2 \cdot \xi_1 \eta_1^2 \quad (25^{**}) \\ &\quad - \frac{4}{3} \epsilon_1'^2 y_1' \cdot \eta_1^3 + 2\epsilon_1'^2 (1 - \operatorname{tg}^2 B_1') \cdot \xi_1^2 \eta_1^2 - \frac{1}{3} \epsilon_1'^2 \cdot \eta_1^4 + e'^2 G l_5 + e'^4 G l_4. \end{aligned}$$

Der erste Teil in (25), der nur von der Veränderlichkeit von y herröhrt, stimmt mit (11) bei der Mercator-Projektion der Kugel überein; die Koeffizienten c_v in (25*) haben dieselbe Bedeutung wie in (11*), nur daß hier $t_1 = \frac{1}{i} \operatorname{tg} i \frac{y_1}{\epsilon_1} = y_1' - \frac{1}{3} y_1'^3 + \frac{2}{15} y_1'^5 - \dots$ zu setzen ist.

Führt man nun in (7)

$$S = S_1 + S_2 \quad (26)$$

ein, wo S_1 durch die Differentialgleichung

$$S_1 + \xi_1 \frac{\partial S_1}{\partial \xi_1} + \eta_1 \frac{\partial S_1}{\partial \eta_1} + \frac{\xi_1^2 + \eta_1^2}{4 S_1} \left\{ \left(\frac{\partial S_1}{\partial \xi_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial S_1}{\partial \eta_1} \right)^2 \right\} = 1 + c_1 \eta_1 + \frac{1}{2} c_2 \eta_1^2 + \frac{1}{6} c_3 \eta_1^3 + \dots$$

bestimmt wird, so hat S_1 den in (13) angegebenen Wert, vorausgesetzt, daß jetzt ξ_1, η_1 für ξ, η geschrieben und für t_1 der obige Wert genommen wird. Es ist also

$$\begin{aligned} S_1 &= 1 - \left(y_1' - \frac{1}{3} y_1'^3 + \frac{2}{15} y_1'^5 \right) \eta_1 - \frac{1}{12} \left(y_1'^2 - \frac{2}{3} y_1'^4 \right) \xi_1^2 - \frac{1}{12} \left(4 - 11y_1'^2 + \frac{22}{3} y_1'^4 \right) \eta_1^2 \\ &\quad - \frac{1}{12} \left(y_1' - \frac{7}{3} y_1'^3 \right) \xi_1^2 \eta_1 + \frac{1}{12} \left(7y_1' - \frac{37}{3} y_1'^3 \right) \eta_1^3 - \frac{1}{120} y_1'^2 \cdot \xi_1^4 \\ &\quad - \frac{1}{180} (4 - 37y_1'^2) \xi_1^2 \eta_1^2 + \frac{1}{360} (40 - 283y_1'^2) \eta_1^4 - \frac{1}{120} y_1' \cdot \xi_1 \eta_1^4 + \frac{4}{45} y_1' \cdot \xi_1^2 \eta_1^3 \\ &\quad - \frac{101}{360} y_1' \cdot \eta_1^5 + G l(\xi_1^6, \xi_1^4 \eta_1^2, \xi_1^2 \eta_1^4, \eta_1^6) + G l_8. \end{aligned} \quad (27)$$

Für S_2 ergibt sich aus (7) alsdann die Differentialgleichung:

$$S_2 + \xi_1 \frac{\partial S_2}{\partial \xi_1} + \eta_1 \frac{\partial S_2}{\partial \eta_1} + \frac{\xi_1^2 + \eta_1^2}{4S_1} R = E(\xi_1, \eta_1) \quad (28)$$

mit

$$R = - \left\{ \frac{S_2}{S_1} - \left(\frac{S_2}{S_1} \right)^2 + \dots \right\} \left\{ \left(\frac{\partial S_1}{\partial \xi_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial S_1}{\partial \eta_1} \right)^2 \right\} + \frac{1}{1 + \frac{S_2}{S_1}} \left\{ 2 \left(\frac{\partial S_1}{\partial \xi_1} \frac{\partial S_2}{\partial \xi_1} + \frac{\partial S_1}{\partial \eta_1} \frac{\partial S_2}{\partial \eta_1} \right) + \left(\frac{\partial S_2}{\partial \xi_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial S_2}{\partial \eta_1} \right)^2 \right\}.$$

Hieraus ist ersichtlich, daß wegen (25**) S_2 von der Ordnung $e'^2 Gl_3$ sein wird, so daß also $\frac{\partial S_2}{\partial \xi_1}$ und $\frac{\partial S_2}{\partial \eta_1}$ höchstens von der Ordnung $e'^2 Gl_2$ werden. Nach (27) ist $\frac{\partial S_1}{\partial \xi_1}$ von der dritten und $\frac{\partial S_1}{\partial \eta_1}$ von der ersten Ordnung. Es wird daher in R das größte Glied $\frac{\partial S_1}{\partial \eta_1} \frac{\partial S_2}{\partial \eta_1}$ von der Ordnung $e'^2 Gl_3$ sein, folglich ist $\frac{\xi_1^2 + \eta_1^2}{4S_1} R$ von der Ordnung $e'^2 Gl_5$. Dies Glied kommt mithin bei der Vernachlässigung, die in (25**) stattfindet, hier nicht weiter in Betracht. Denn in (25**) ist nur $-\frac{2}{3} \xi_1^2 y_1'^4 \xi_1$ von der Ordnung $e'^2 Gl_5$, und diesem entspricht kein Glied in $\frac{\xi_1^2 + \eta_1^2}{4S_1} R$. Das betreffende Glied ist noch mitgenommen, weil für Dreiecksseiten, die von der Abszissenachse weit abliegen, $x_2 - x_1$ und $y_2 - y_1$ bedeutend kleiner als y_1 sind.

Die Differentialgleichung zur Bestimmung von S_2 reduziert sich mithin auf

$$S_2 + \xi_1 \frac{\partial S_2}{\partial \xi_1} + \eta_1 \frac{\partial S_2}{\partial \eta_1} = E(\xi_1, \eta_1). \quad (28*)$$

Aus ihr folgt sofort:

$$\begin{aligned} S_2 &= \xi_1^2 \left(2y_1'^2 - \frac{1}{3} y_1'^4 \right) \xi_1 - \frac{2}{3} \xi_1'^2 y_1'^3 \cdot \eta_1 + \frac{2}{3} \xi_1'^2 (1 - \operatorname{tg}^2 B_1') y_1'^2 \cdot \xi_1^2 + \frac{8}{3} \xi_1^2 y_1' \cdot \xi_1 \eta_1 - \frac{2}{3} \xi_1'^2 y_1'^2 \cdot \eta_1^2 \\ &\quad + \xi_1'^2 (1 - \operatorname{tg}^2 B_1') y_1' \cdot \xi_1^2 \eta_1 + \xi_1^2 \cdot \xi_1 \eta_1^2 - \frac{1}{3} \xi_1'^2 y_1' \cdot \eta_1^3 + \frac{2}{5} \xi_1'^2 (1 - \operatorname{tg}^2 B_1') \cdot \xi_1^2 \eta_1^2 - \frac{1}{15} \xi_1'^2 \eta_1^4 + Gl_7. \end{aligned} \quad (28**)$$

Läßt man den willkürlich angenommenen Punkt \bar{x}, \bar{y} mit dem Punkte \bar{x}_2, \bar{y}_2 zusammenfallen, so ist in (27) und (28**) zu setzen:

$$\xi_1 = \frac{\bar{x}_2 - \bar{x}_1}{\bar{e}_1}, \quad \eta_1 = \frac{\bar{y}_2 - \bar{y}_1}{\bar{e}_1}. \quad (23*)$$

Für die geodätische Linie s des Erdellipsoide, deren Endpunkte sich in den Punkten

$$\bar{x}_1 = m_0 x_1, \quad \bar{y}_1 = m_0 y_1 \quad \text{und} \quad \bar{x}_2 = m_0 x_2, \quad \bar{y}_2 = m_0 y_2$$

projizieren, setzt man nach (5)

$$\frac{s}{r} = \frac{m_0}{m_1} \sqrt{S_1 + S_2} \quad \text{mit} \quad r = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \bar{e}_1 \sqrt{\xi_1^2 + \eta_1^2}.$$

Ehe jedoch dieser Ausdruck aus (24), (27) und (28**) zusammengesetzt wird, soll untersucht werden, welchen Einfluß für weit von der Abszissenachse entfernte Dreiecksseiten die Glieder 6. Ordnung in S_1 und S_2 , mit Ausschluß der beiden größten: $-\frac{2}{15} y_1'^5 \eta_1$ und $-\frac{2}{3} \xi_1'^2 y_1'^3 \eta_1$, haben.

In S_1 sind diese Glieder:

$$\begin{aligned} &+ \frac{1}{18} y_1'^4 (\xi_1^2 - 11 \eta_1^2) + \frac{1}{36} y_1'^3 (7 \xi_1^2 \eta_1 - 37 \eta_1^3) - \frac{1}{360} y_1'^2 (3 \xi_1^4 - 74 \xi_1^2 \eta_1^2 + 283 \eta_1^4) \\ &- \frac{1}{360} y_1' (3 \xi_1^4 \eta_1 - 32 \xi_1^2 \eta_1^3 + 101 \eta_1^5) + Gl(\xi_1^6, \xi_1^4 \eta_1^2, \xi_1^2 \eta_1^4, \eta_1^6) \end{aligned}$$

12*

und in S_2 :

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{3} \epsilon_1^2 y_1'^4 \xi_1 + \epsilon_1'^2 \left(\frac{2}{3} y_1'^2 (\xi_1^2 - \eta_1^2) + \frac{1}{3} y_1' (3 \xi_1^2 \eta_1 - \eta_1^3) + \frac{1}{15} (6 \xi_1^2 \eta_1^2 - \eta_1^4) \right) \\ & - \epsilon_1'^2 \operatorname{tg}^2 B_1' \left(\frac{2}{3} y_1'^2 \xi_1^2 + y_1' \xi_1^2 \eta_1 + \frac{2}{5} \xi_1^2 \eta_1^2 \right). \end{aligned}$$

Es werde hierin

$$\xi_1 = \eta_1 = \frac{1}{10} y_1' \quad \text{und} \quad y_1' = \frac{1}{10}$$

gesetzt, so daß angenähert $r = 90$ km und $y_1 = 638$ km wird. (Das Triangulationsgebiet der preußischen trigonometrischen Abteilung erstreckt sich vom Hauptmeridian westlich 540 km und östlich 622 km.) Dann geben die vorstehenden Glieder in S_1 :

$$y_1'^6 \left(-\frac{1}{180} - \frac{1}{1200} - \frac{53}{900000} - \frac{1}{500000} \right) = -\frac{1}{10^6} \frac{907}{140625} = -0,000000006.$$

Daß die Glieder mit $\xi_1^6, \xi_1^4 \eta_1^2, \dots$, bei denen die Koeffizienten mit einem echten Brüche beginnen, oder die noch mit $y_1'^2$ multipliziert sind, hier ohne jede Bedeutung sind, ist unmittelbar ersichtlich. Für die Glieder in S_2 ergibt sich:

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{30} \epsilon_1^2 y_1'^5 + y_1'^4 \left(\epsilon_1'^2 \left(\frac{1}{1500} + \frac{1}{30000} \right) - \epsilon_1'^2 \operatorname{tg}^2 B_1' \left(\frac{1}{150} + \frac{1}{1000} + \frac{1}{25000} \right) \right) \\ & = -\frac{1}{30 \cdot 10^5} \epsilon_1^2 + \frac{7}{10000 \cdot 10^4} \epsilon_1'^2 - \frac{289}{37500 \cdot 10^4} \epsilon_1'^2 \operatorname{tg}^2 B_1'. \end{aligned}$$

Nun ist bei

	40°	50°	60°
$\log \epsilon_1^2 = 7,519$	7,519	7,463	
$\log \epsilon_1'^2 = 7,596$	7,443	7,225	
$\log \epsilon_1'^2 \operatorname{tg}^2 B_1' = 7,443$	7,596	7,702	;

also ist für mittlere Breiten der Einfluß der obigen Glieder in S_2 gleich $-0,000000005$.

Die angegebenen Glieder 6. Ordnung geben mithin für $S_1 + S_2$ erst $-0,000000011$.

Die Formel (22) für $\frac{m_0}{m_1}$ vernachlässigt Glieder 8. Ordnung, ihr Einfluß kann hier höchstens gleich einer Einheit der 9. Dezimalstelle sein.

Vernachlässigt man demnach in S_1 und S_2 diejenigen Glieder 6. Ordnung, die vorher aufgeführt sind, so wird der dadurch hervorgerufene Fehler bei einer Hauptdreiecksseite von 90 km Länge, deren Anfangspunkt um 638 km vom Hauptmeridian absteht, und die von jenem aus unter einem Azimut von 45° etwa verläuft, erst

$$r \cdot 0,000000006 = 0,0005^m$$

beträgt, dem im Logarithmus von $\frac{s}{r}$ noch nicht 3 Einheiten der 9. Dezimalstelle entsprechen.

Es wird daher in allen praktischen Fällen genügen

$$\left. \begin{aligned} S_1 &= 1 - \left(y_1' - \frac{1}{3} y_1'^3 + \frac{2}{15} y_1'^5 \right) \eta_1 - \frac{1}{12} (4 - 11 y_1'^2) \eta_1^2 - \frac{1}{12} y_1'^2 \xi_1^2 - \frac{1}{12} y_1' \xi_1^2 \eta_1 \\ &+ \frac{7}{12} y_1' \eta_1^3 - \frac{1}{45} \xi_1^2 \eta_1^2 + \frac{1}{9} \eta_1^4 + G l_6 \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

und

$$S_2 = \epsilon_1^2 \left(2 y_1'^2 \xi_1 + \frac{8}{3} y_1' \xi_1 \eta_1 + \xi_1 \eta_1^2 \right) - \frac{2}{3} \epsilon_1'^2 y_1'^3 \eta_1 + G l_6$$

zu setzen.

§ 27.

Herleitung von $\log s - \log r$. Zahlenbeispiele und Genauigkeitsuntersuchungen.

Nach (5) und (26) ist

$$\log \frac{r}{s} = \log \frac{m_1}{m_0} - \frac{1}{2} \log (S_1 + S_2); \quad (30)$$

dabei wird nach (22)

$$\log \frac{m_1}{m_0} = M \left\{ \frac{1}{2} y_1'^2 - \left(\frac{1}{12} - \frac{1}{6} \varepsilon_1'^2 \right) y_1'^4 + \frac{1}{45} y_1'^6 + G l_8 \right\} \quad (30^*)$$

und nach (29):

$$\begin{aligned} -\log (S_1 + S_2) &= M \left\{ (y_1' - \frac{1}{3} y_1'^3 + \frac{2}{15} y_1'^5) y_1 + \frac{1}{12} y_1' \xi_1^2 + \frac{1}{12} (4 - 5 y_1'^2) y_1^2 \right. \\ &\quad + \frac{1}{12} y_1' (\xi_1^2 y_1 - 3 y_1^3) + \frac{1}{90} (2 \xi_1^2 y_1^2 - 5 y_1^4) \\ &\quad \left. - \varepsilon_1'^2 (2 y_1'^2 \xi_1 + \frac{8}{3} y_1' \xi_1 y_1 + \xi_1 y_1^2) + \frac{2}{3} \varepsilon_1'^2 y_1'^3 y_1 \right\} + G l_6. \end{aligned} \quad (30^{**})$$

Der Ausdruck für die Entfernungsreduktion wird einfacher, wenn man

$$\frac{1}{2} (y_1 + y_2) = y_m$$

statt y_1 einführt, also

$$y_1 = y_m - \frac{1}{2} (y_2 - y_1)$$

setzt. Demzufolge ist

$$\frac{1}{\varrho_1'} = \frac{1 + e'^2 \cos^2 B_1'}{a \sqrt{1 + e'^2}} = \frac{1 + \varepsilon_1'^2}{a \sqrt{1 + e'^2}},$$

wo B_1' dem Endpunkte von x_1 entspricht, durch

$$\frac{1}{\varrho_m'} = \frac{1 + e'^2 \cos^2 B_m'}{a \sqrt{1 + e'^2}} = \frac{1 + \varepsilon_m'^2}{a \sqrt{1 + e'^2}},$$

zu ersetzen, wobei B_m' die geographische Breite ist, die zu dem Endpunkte der Abszisse $\frac{1}{2} (x_1 + x_2)$ gehört. Weiter sei

$$Q_m' = 1 + \varepsilon_m'^2 = 1 + e'^2 \cos^2 B_m'. \quad (31)$$

und

$$\frac{x_2 - x_1}{\varrho_m'} = \xi_m, \quad \frac{y_2 - y_1}{\varrho_m'} = \eta_m, \quad \frac{y_1 + y_2}{2 \varrho_m'} = y_m'.$$

Dann ist, mit

$$\frac{\varepsilon_m'^2 \operatorname{tg} B_m'}{V Q_m'} = \varepsilon_m^2, \quad (21^*)$$

$$\frac{1}{\varrho_1'} = \frac{1}{\varrho_m'} (1 + \varepsilon_m^2 \xi_m + e'^2 G l_3);$$

also wird

$$y_1' = \left(y_m' - \frac{1}{2} \eta_m \right) (1 + \varepsilon_m^2 \xi_m) + e'^2 G l_3,$$

$$\xi_1 = \xi_m (1 + \varepsilon_m^2 \xi_m) + e'^2 G l_3, \quad \eta_1 = \eta_m (1 + \varepsilon_m^2 \xi_m) + e'^2 G l_3.$$

Trägt man diese Werte in (30*) und (30**) ein, so gelangt man nach (30) zu folgender Formel für die Entfernungsreduktion:

$$\log r - \log s = M \left\{ \frac{1}{2} y_m'^2 \left(1 - \frac{1}{6} y_m'^2 + \frac{2}{45} y_m'^4 + \frac{1}{12} (\xi_m^2 - 2 \eta_m^2) \right) + \frac{1}{24} \eta_m^2 \left(1 + \frac{1}{120} (2 \xi_m^2 - 5 \eta_m^2) \right) - \frac{1}{3} \epsilon_m^2 y_m' \xi_m \eta_m + \frac{1}{6} \epsilon_m'^2 y_m'^3 (y_m' + 2 \eta_m) \right\} + G l_6. \quad (32)$$

Die ersten beiden Teile von (32) folgen natürlich auch sofort aus (15*) oder (16); sie stimmen mit der Formel für die Mercator-Projektion der Kugel überein, nur daß bei letzterer ϱ_m' einen konstanten Wert hat.

Für die extremen Werte

$$y_m = 700 \text{ km}, \quad x_2 - x_1 = -70 \text{ km}, \quad y_2 - y_1 = 70 \text{ km}$$

haben das mit ϵ_m^2 und die beiden mit $\epsilon_m'^2$ multiplizierten Glieder in der Gl. (32) der Reihe nach die folgenden Werte

bei 40° :	0.6, 4.2, 0.8,	zusammen 5.6 Einheiten der 8. Dezimalstelle
„ 50° :	0.6, 2.9, 0.6,	„ 4.1 „ „ „
„ 60° :	0.5, 1.8, 0.3,	„ 2.6 „ „ „

Den größten Wert hat also hierbei das Glied $\frac{M}{6} \epsilon_m'^2 y_m'^4$.

Man wird hiernach diese Glieder wohl meistens vernachlässigen können. Ebenso kann man das Glied $\frac{M}{2880} (2 \xi_m^2 \eta_m^2 - 5 \eta_m^4)$ fortlassen, da es für die obigen Werte die 8. Dezimalstelle überhaupt nicht beeinflußt.

Das Glied $\frac{M}{45} y_m'^6$ liefert für dieselben Werte: 1.7 und die Glieder $\frac{M}{24} y_m'^2 \xi_m^2$ und $\frac{M}{12} y_m'^2 \eta_m^2$ geben dafür: 2.6 und 5.2 Einheiten der 8. Dezimalstelle.

Es folgt hieraus, daß für Hauptdreiecksseiten, deren Mitten um 700 km vom Hauptmeridian abstehen, die Formel für mittlere Breiten

$$\log \frac{r}{s} = M \left\{ \frac{1}{2} y_m'^2 + \frac{1}{24} \eta_m^2 - \frac{1}{12} y_m'^4 \right\} \quad (32^*)$$

höchstens auf 1 Einheit der 7. Dezimalstelle ungenau ist.

Der Fehler der Formel (32) selbst kann für meßbare Dreiecksseiten im Abstande von 700 km vom Hauptmeridian noch nicht eine Einheit der 8. Dezimalstelle betragen. (Vgl. auch § 29.)

Beispiel. Es sei gegeben

$$x_2 - x_1 = 64 \text{ km}, \quad y_2 - y_1 = -48 \text{ km}, \\ \text{so daß}$$

$$r = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = 80 \text{ km}$$

ist. Die Berechnung der Entfernungsreduktion soll für die 3 Fälle:

$$y_m = \frac{1}{2} (y_1 + y_2) = 200 \text{ km}, \quad = 400 \text{ km}, \quad = 600 \text{ km} \\ \text{erfolgen.}$$

Dem Endpunkte der Abszisse x_1 entspreche die geographische Breite $B'_1 = 47^\circ$. Dann gehört zu $x_1 + \frac{1}{2}(x_2 - x_1) = x_1 + 32000^m$ die geographische Breite $B'_m = 47^\circ 17' 16''$. Dieser Wert wird leicht mittels einer Tafel, die zu den geographischen Breiten die entsprechenden Längen der Meridianbogen gibt, gefunden. Mit B'_m erhält man

$$\log \frac{1}{\epsilon_m} = \log \frac{1}{\sqrt{R'_m N'_m}} = 3,195\,2430 - 10,$$

wie man ebenfalls einer Tafel entnehmen kann. Ferner wird

$$\log \varepsilon'_m = 7,4902 - 10 \quad \text{und} \quad \log \epsilon'_m = 7,5242 - 10.$$

Nach (32*) wird nun erhalten:

	$y_m = 200\,000^m$	$y_m = 400\,000^m$	$y_m = 600\,000^m$
$\frac{1}{2} M y'_m{}^2$	= 0,000 2134 5.2	0,000 8538 0.8	0,001 9210 6.9
- „ $\cdot \frac{1}{6} y'_m{}^2$	= - 3.5	- 5 6.0	- 28 3.3
$+ \frac{1}{24} M y'_m{}^2$	= + 10 2.5	+ 10 2.5	+ 10 2.5
$\log r - \log s =$	0,000 2144 4.2	0,000 8542 7.3	0,001 9192 6.1

Der hierbei begangene Fehler ist nach (32):

$+ \frac{1}{2} M y'_m{}^2 \cdot \frac{2}{45} y'_m{}^4 = + 0,000\,0000\,0.0$	$+ 0,000\,0000\,0.1$	$+ 0,000\,0000\,0.7$
$+ „ \cdot \frac{1}{12} \epsilon'_m{}^2 = + .2$	$+ .7$	$+ 1.6$
$- „ \cdot \frac{1}{6} \eta'_m{}^2 = - .2$	$-.8$	1.8
$- \frac{1}{3} M \epsilon'_m{}^2 y'_m \epsilon_m \eta'_m = + .1$	$.2$	$.3$
$+ \frac{1}{6} M \varepsilon'_m{}^2 y'_m{}^3 \cdot y'_m = + .0$	$.4$	1.8
$+ „ \cdot 2 \eta'_m = - .0$	$.1$	$.3$
Fehler	$+ 0,000\,0000\,0.1$	$+ 0,000\,0000\,0.5$
		$+ 0,000\,0000\,2.3$

Das Glied $\frac{1}{2880} M(2\varepsilon'_m \eta'_m{}^2 - 5\eta'_m{}^4)$ hat hierbei wie schon erwähnt keinen Einfluß.

Wenn $y_m = 146000^m$ etwa ist, bringt das Glied $\frac{1}{12} M y'_m{}^4$ nur 1 Einheit der 8. Dezimalstelle. Läßt man dies Glied in (32*) fort, so stimmt diese Formel mit der von GAUSS im Briefwechsel mit SCHUMACHER angegebenen überein.¹⁾

1) Briefwechsel zwischen C. F. GAUSS und H. C. SCHUMACHER, Band II, S. 264, oder GAUSS' Werke, Band IX, S. 215. Die von GAUSS gegebene Form lautet:

$$\log s = \log r - M \frac{(1 - e^2 \sin^2 B'_m)^{\frac{1}{2}}}{2a^2(1 - e^2)} \cdot \frac{y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2}{3},$$

oder

$$\log r = \log s + M \left(\frac{1}{4} (y_1 + y_2)^2 + \frac{1}{12} (y_1 - y_2)^2 \right) q$$

mit

$$q = \frac{(1 - e^2 \sin^2 B'_m)^{\frac{1}{2}}}{2a^2(1 - e^2)}.$$

Der Gl. (32) kann man mittels (22) auch die folgende Form geben:

$$\begin{aligned} \log \frac{r}{s} = & \log \frac{m_m}{m_0} + M \left\{ \frac{1}{24} \mathfrak{y}_m^2 + \frac{1}{24} y_m'^2 (\mathfrak{x}_m^2 - 2 \mathfrak{y}_m^2) + \frac{1}{2880} \mathfrak{y}_m^2 (2 \mathfrak{x}_m^2 - 5 \mathfrak{y}_m^2) \right. \\ & \left. - \frac{1}{3} \mathfrak{e}_m^2 y_m' \mathfrak{x}_m \mathfrak{y}_m + \frac{1}{3} \varepsilon_m'^2 y_m'^3 \mathfrak{y}_m \right\} + Gl_6, \end{aligned} \quad (32**)$$

worin m_m das Vergrößerungsverhältnis für die Mitte von r ist.

Durch Einführung der Vergrößerungsverhältnisse, die zu dem Anfangs-, Mittel- und Endpunkte von r gehören, lässt sich (32**) noch einfacher darstellen. Indem man die Beziehungen

$$\frac{y_2}{\mathfrak{e}_2} = \left(y'_m + \frac{1}{2} \mathfrak{y}_m \right) (1 - \mathfrak{e}_m^2 \mathfrak{x}_m^2) + e'^2 Gl_3$$

$$\frac{y_1}{\mathfrak{e}_1} = \left(y'_m - \frac{1}{2} \mathfrak{y}_m \right) (1 + \mathfrak{e}_m^2 \mathfrak{x}_m^2) + e'^2 Gl_3$$

benutzt, hat man:

$$\begin{aligned} \log \frac{m_2}{m_0} = & \log \cos i \frac{y_2}{\mathfrak{e}_2} + \frac{1}{6} M \varepsilon_2'^2 y_2'^4 + Gl_8 \\ = & M \left\{ \left(\frac{1}{2} y_m'^2 - \frac{1}{12} y_m'^4 + \frac{1}{45} y_m'^6 \right) + \frac{1}{2} \left(y'_m - \frac{1}{3} y_m'^3 \right) \mathfrak{y}_m + \frac{1}{8} (1 - y_m'^2) \mathfrak{y}_m^2 - \frac{1}{24} y_m' \mathfrak{y}_m^3 - \frac{1}{192} \mathfrak{y}_m^4 \right. \\ & \left. - \mathfrak{e}_m^2 \left(y_m'^2 \mathfrak{x}_m + y_m' \mathfrak{x}_m \mathfrak{y}_m + \frac{1}{4} \mathfrak{x}_m \mathfrak{y}_m^2 \right) + \frac{1}{6} \varepsilon_m'^2 y_m'^4 \right\} + Gl_6, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log \frac{m_1}{m_0} = & \log \cos i \frac{y_1}{\mathfrak{e}_1} + \frac{1}{6} M \varepsilon_1'^2 y_1'^4 + Gl_8 \\ = & M \left\{ \left(\frac{1}{2} y_m'^2 - \frac{1}{12} y_m'^4 + \frac{1}{45} y_m'^6 \right) - \frac{1}{2} \left(y'_m - \frac{1}{3} y_m'^3 \right) \mathfrak{y}_m + \frac{1}{8} (1 - y_m'^2) \mathfrak{y}_m^2 + \frac{1}{24} y_m' \mathfrak{y}_m^3 - \frac{1}{192} \mathfrak{y}_m^4 \right. \\ & \left. - \mathfrak{e}_m^2 \left(-y_m'^2 \mathfrak{x}_m + y_m' \mathfrak{x}_m \mathfrak{y}_m - \frac{1}{4} \mathfrak{x}_m \mathfrak{y}_m^2 \right) + \frac{1}{6} \varepsilon_m'^2 y_m'^4 \right\} + Gl_6; \end{aligned}$$

ferner ist

$$\begin{aligned} 4 \log \frac{m_m}{m_0} = & 4 \log \cos i \frac{y_m}{\mathfrak{e}_m} + \frac{4}{6} M \varepsilon_m'^2 y_m'^4 + Gl_8 \\ = & M \left\{ 4 \left(\frac{1}{2} y_m'^2 - \frac{1}{12} y_m'^4 + \frac{1}{45} y_m'^6 \right) + \frac{4}{6} M \varepsilon_m'^2 y_m'^4 \right\} + Gl_8. \end{aligned}$$

Mithin wird

$$\begin{aligned} \frac{1}{6} \log \frac{m_1 m_m^4 m_2}{m_0^6} = & M \left\{ \left(\frac{1}{2} y_m'^2 - \frac{1}{12} y_m'^4 + \frac{1}{45} y_m'^6 \right) + \frac{1}{24} (1 - y_m'^2) \mathfrak{y}_m^2 - \frac{1}{576} \mathfrak{y}_m^4 \right. \\ & \left. - \frac{1}{3} \mathfrak{e}_m^2 \mathfrak{x}_m \mathfrak{y}_m + \frac{1}{6} \varepsilon_m'^2 y_m'^4 \right\} + Gl_6. \end{aligned}$$

Damit folgt aus (32):

$$\begin{aligned} \log \frac{r}{s} = & \frac{1}{6} \left(\log \frac{m_1}{m_0} + 4 \log \frac{m_m}{m_0} + \log \frac{m_2}{m_0} \right) \\ & + M \left\{ \frac{1}{24} y_m'^2 (\mathfrak{x}_m^2 - \mathfrak{y}_m^2) + \frac{1}{1440} \mathfrak{x}_m^2 \mathfrak{y}_m^2 + \frac{1}{3} \varepsilon_m'^2 y_m'^3 \mathfrak{y}_m \right\} + Gl_6. \end{aligned} \quad (32***)$$

Nach vorhergehendem ist demnach für Hauptdreiecksseiten, deren Mitten vom Hauptmeridian 700 km entfernt sind, die Formel

$$\log \frac{r}{s} = \frac{1}{6} \left(\log \frac{m_1}{m_0} + 4 \log \frac{m_m}{m_0} + \log \frac{m_2}{m_0} \right) \quad (32\dagger)$$

im ungünstigsten Falle noch bis auf etwa 3 Einheiten der 8. Dezimalstelle genau, während die Formel

$$\log \frac{r}{s} = \log \frac{m_m}{m_0} + \frac{1}{24} M \psi_m^2 \quad (32\dagger\dagger)$$

noch auf etwa 6 Einheiten der 8. Dezimalstelle genau ist.

§ 28.

Richtungsreduktionen beim Erdellipsoid. Zahlenbeispiele und Genauigkeitsuntersuchungen.

Mittels der in (29) gegebenen Werte für S_1 und S_2 , die zusammen nach (26) S ergeben, läßt sich $\sin \psi_2$ nun wieder leicht nach (8) herstellen. Dazu ist:

$$\begin{aligned} \eta_1 \frac{\partial S}{\partial \xi_1} - \xi_1 \frac{\partial S}{\partial \eta_1} &= \left(y_1' - \frac{1}{3} y_1'^3 + \frac{2}{15} y_1'^5 \right) \xi_1 + \frac{2}{3} (1 - 3y_1'^2) \xi_1 \eta_1 + \frac{1}{12} y_1' \xi_1^3 - \frac{23}{12} y_1' \xi_1 \eta_1^2 + \frac{2}{45} \xi_1^3 \eta_1 - \frac{22}{45} \xi_1 \eta_1^3 + G l_6 \\ &+ e_1'^2 \left(2y_1'^2 \eta_1 - \frac{8}{3} y_1' (\xi_1^2 - \eta_1^2) - 2\xi_1^2 \eta_1 + \eta_1^3 \right) + \frac{2}{3} e_1'^2 y_1'^3 \xi_1 + e'^2 G l_4. \end{aligned}$$

Von den $G l_6$ bzw. den $e'^2 G l_4$ sind hierin die Glieder mit den höchsten Potenzen von y_1' mitgenommen aus dem auf S. 91 angegebenen Grunde. Der erste Teil des vorstehenden Ausdrucks wird auch aus dem auf S. 87 für die Mercator-Projektion abgeleiteten durch Substitution von

$$t_1 = y_1' - \frac{1}{3} y_1'^3 + \frac{2}{15} y_1'^5 - \dots$$

erhalten. Auch die Werte für $\frac{1}{\sqrt{S}}$ und für $\frac{m_2}{m_1}$ können von dort mit hier ausreichender Genauigkeit entnommen werden. Man hat

$$\frac{1}{\sqrt{S}} = 1 + \frac{1}{2} \left(y_1' - \frac{1}{3} y_1'^3 \right) \eta_1 + \frac{1}{24} y_1'^2 \xi_1^2 + \frac{1}{12} (2 - y_1'^2) \eta_1^2 + \frac{1}{24} y_1' \xi_1^2 \eta_1 - \frac{1}{24} y_1' \eta_1^3 + \dots + e'^2 G l_3$$

und

$$\frac{m_2}{m_1} = 1 + \left(y_1' - \frac{1}{3} y_1'^3 \right) \eta_1 + \frac{1}{2} \eta_1^2 + \frac{1}{6} y_1' \eta_1^3 + \frac{1}{24} \eta_1^4 + \dots + e'^2 G l_3.$$

Folglich wird nach (8) (vgl. (17)):

$$\begin{aligned} \sin \psi_2 &= \frac{1}{2} \left(y_1' - \frac{1}{3} y_1'^3 + \frac{2}{15} y_1'^5 \right) \xi_1 + \frac{1}{12} (4 - 3y_1'^2) \xi_1 \eta_1 + \frac{1}{24} y_1' (\xi_1^3 - 3\xi_1 \eta_1^2) + \frac{1}{45} (\xi_1^3 \eta_1 - \xi_1 \eta_1^3) + G l_6 \\ &+ e_1'^2 \left(y_1'^2 \eta_1 - \frac{4}{3} y_1' (\xi_1^2 - \eta_1^2) - \xi_1^2 \eta_1 + \frac{1}{2} \eta_1^3 \right) + \frac{1}{3} e_1'^2 y_1'^3 \xi_1 + e'^2 G l_4. \end{aligned} \quad (33)$$

An Stelle von $\sin \psi_2$ kann man auch $\frac{\psi_2}{\rho''}$ schreiben, ohne daß die Genauigkeit geändert wird.

Statt der Koordinaten des Anfangspunktes von $p_1 p_2 = \bar{r}$ und der darauf bezüglichen Werte sollen nun diejenigen eines in der Entfernung $\nu \bar{r}$ liegenden Punktes p_ν von $p_1 p_2$ eingeführt werden; es ist also zu setzen:

$$x_1 + \nu (x_2 - x_1) = x_\nu, \quad y_1 + \nu (y_2 - y_1) = y_\nu.$$

Zu x_ν gehöre die Breite B'_ν ; ferner sei

$$\frac{1}{e'_\nu} = \frac{1 + e'^2 \cos^2 B'_\nu}{a \sqrt{1 + e'^2}} \quad \text{und} \quad e'^2 \cos^2 B'_\nu = \varepsilon'_\nu{}^2, \quad Q'_\nu = 1 + \varepsilon'_\nu{}^2, \quad \frac{\varepsilon'_\nu{}^2 \operatorname{tg} B'_\nu}{\sqrt{Q'_\nu}} = \epsilon_\nu{}^2.$$

Weiter wird gesetzt

$$\frac{x_2 - x_1}{e'_\nu} = \xi_\nu, \quad \frac{y_2 - y_1}{e'_\nu} = \eta_\nu; \quad \frac{y_\nu}{e'_\nu} = y'_\nu. \quad (34)$$

Nun ist

$$\begin{aligned} \frac{1}{e'_1} &= \frac{1}{e'_\nu} (1 + 2\epsilon_\nu{}^2 \nu \xi_\nu + e'^2 G l_3), \\ \frac{y_1}{e'_1} &= y'_1 = (y'_\nu - \nu \eta_\nu) (1 + 2\epsilon_\nu{}^2 \nu \xi_\nu) + e'^2 G l_3, \\ \xi_1 &= \xi_\nu (1 + 2\epsilon_\nu{}^2 \nu \xi_\nu) + e'^2 G l_3, \quad \eta_1 = \eta_\nu (1 + 2\epsilon_\nu{}^2 \nu \xi_\nu) + e'^2 G l_3. \end{aligned}$$

Die Substitution dieser Werte in (33) liefert:

$$\begin{aligned} \frac{\psi_2}{p'} &= \frac{1}{2} \left(y'_\nu - \frac{1}{3} y'_\nu{}^3 + \frac{2}{15} y'_\nu{}^5 \right) \xi_\nu + \frac{1}{12} (4 - 6\nu - (3 - 6\nu) y'_\nu{}^2) \xi_\nu \eta_\nu \\ &+ \frac{1}{24} y'_\nu (\xi_\nu{}^3 - 3(1 - 2\nu)^2 \xi_\nu \eta_\nu{}^2) + \frac{1}{360} ((8 - 15\nu) \xi_\nu{}^3 \eta_\nu - (8 - 45\nu + 90\nu^2 - 60\nu^3) \xi_\nu \eta_\nu{}^3) + G l_6 \\ &+ \epsilon_\nu{}^2 \left\{ y'_\nu{}^2 \eta_\nu - 2\left(\frac{2}{3} - \nu\right) (y'_\nu (\xi_\nu{}^2 - \eta_\nu{}^2) - \nu (\xi_\nu{}^2 \eta_\nu - \frac{1}{2} \eta_\nu{}^3)) - \left(1 - \frac{4}{3}\nu\right) (\xi_\nu{}^2 \eta_\nu - \frac{1}{2} \eta_\nu{}^3) \right\} \\ &+ \frac{1}{3} \epsilon_\nu{}^2 y'_\nu{}^3 \xi_\nu + e'^2 G l_4. \end{aligned} \quad (35)$$

Man sieht hieraus, daß für

$$\nu = \frac{2}{3}$$

das Glied 2. Ordnung $\frac{1}{12}(4 - 6\nu - (3 - 6\nu) y'_\nu{}^2) \xi_\nu \eta_\nu$ am kleinsten wird und ferner die mit $\epsilon_\nu{}^2$ multiplizierten Glieder auf die einfachste Form kommen. In diesem Falle ist also

$$y_{\frac{2}{3}} = y_1 + \frac{2}{3} (y_2 - y_1) = y_2 - \frac{1}{3} (y_2 - y_1) = \frac{1}{3} (y_1 + 2y_2).$$

Gehören nun zum Argument $x_1 + \frac{2}{3}(x_2 - x_1)$ die Werte $\frac{1}{e'_\frac{2}{3}}, \epsilon'_\frac{2}{3}{}^2, \epsilon_\frac{2}{3}{}^2$, und setzt man

$$\frac{x_2 - x_1}{e'_\frac{2}{3}} = \xi_{\frac{2}{3}}, \quad \frac{y_2 - y_1}{e'_\frac{2}{3}} = \eta_{\frac{2}{3}}, \quad \frac{y_1 + 2y_2}{3e'_\frac{2}{3}} = y'_{\frac{2}{3}}, \quad (36)$$

so folgt für $\nu = \frac{2}{3}$ aus (35):

$$\begin{aligned} \frac{\psi_2}{p'} &= \frac{1}{2} \xi_{\frac{2}{3}} \left\{ y'_{\frac{2}{3}} - \frac{1}{3} (1 - 2\epsilon'_\frac{2}{3}{}^2) y'_{\frac{2}{3}}{}^3 + \frac{2}{15} y'_{\frac{2}{3}}{}^5 + \frac{1}{6} y'_{\frac{2}{3}}{}^2 \eta_{\frac{2}{3}} + \frac{1}{12} y'_{\frac{2}{3}} (\xi_{\frac{2}{3}}{}^2 - \frac{1}{3} \eta_{\frac{2}{3}}{}^2) - \frac{1}{90} \eta_{\frac{2}{3}} (\xi_{\frac{2}{3}}{}^2 + \frac{1}{9} \eta_{\frac{2}{3}}{}^2) \right\} \\ &+ \epsilon'_\frac{2}{3} \eta_{\frac{2}{3}} \left\{ y'_{\frac{2}{3}}{}^2 - \frac{1}{9} (\xi_{\frac{2}{3}}{}^2 - \frac{1}{2} \eta_{\frac{2}{3}}{}^2) \right\} + G l_6. \end{aligned} \quad (37)$$

Im ersten Teile dieser Formel kann man die Glieder 4. Ordnung noch in eine einfachere Form bringen, indem man berücksichtigt, daß auch

$$y_{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2} (y_1 + y_2) + \frac{1}{6} (y_2 - y_1)$$

ist. Wird noch

$$\frac{y_1 + y_2}{2e'_3} = y'_{II}, \quad \text{also} \quad y'_3 = y'_{II} + \frac{1}{6} \eta_{II} \quad (36*)$$

gesetzt, so geht (37) über in:

$$\begin{aligned} \psi_2 &= \frac{1}{2} \xi_{II} \left\{ y'_3 - \frac{1}{3} (1 - 2e'^2_3) y'^3_{II} + \frac{2}{15} y'^5_{II} + \frac{1}{12} y'_{II} \xi^2_{II} + \frac{1}{360} \eta_{II} (\xi^2_{II} - \eta^2_{II}) \right\} \\ &\quad + e'^2_3 \eta_{II} \left\{ y'^2_3 - \frac{1}{18} (2\xi^2_{II} - \eta^2_{II}) \right\} + G l_6. \end{aligned} \quad (37*)$$

Für e'^2 und e^2 in (37) und (37*) kann man auch Werte nehmen, die zu irgendeiner Abszisse zwischen x_1 und x_2 gehören.

Es sei innerhalb mittlerer Breiten

$$\frac{1}{2} (y_1 + y_2) = 700 \text{ km}, \quad x_2 - x_1 = 70 \text{ km}, \quad y_2 - y_1 = 70 \text{ km}.$$

Hierfür kommen die Glieder $\frac{1}{720} \rho'' \xi^3_{II} \eta_{II}$ und $\frac{1}{720} \rho'' \xi_{II} \eta^3_{II}$ nicht in Betracht, sie beeinflussen erst die 6. Dezimalstelle der Sekunde. Die Glieder $\frac{1}{9} \rho'' e^2 \xi^2_{II} \eta_{II}$ und $\frac{1}{18} \rho'' e^2 \eta^2_{II}$ betragen $0'',0001$ und $0'',00005$; sie können mithin ebenfalls vernachlässigt werden.

Da die Glieder $\frac{1}{15} \rho'' y'^5_3 \xi_{II}$ und $\frac{1}{24} \rho'' y'_{II} \xi^3_{II}$ für die angegebenen Werte $0'',002$ und $0'',001$ liefern, so wird man folglich annehmen können, daß für Hauptdreiecksseiten, deren Mitten um 700 km vom Hauptmeridian abstehen, die Formel

$$\psi_2 = \frac{1}{2} \rho'' \xi_{II} \left\{ y'_3 - \frac{1}{3} (1 - 2e'^2_3) y'^3_{II} \right\} + \rho'' e'^2_3 \eta_{II} y'^2_3 \quad (37**)$$

noch auf etwa $0'',003$ genau ist. Vernachlässigt man hierin auch noch $\frac{1}{3} \rho'' e'^2 y'^3_{II} \xi_{II}$, so kann der Fehler um $0'',003$ wachsen.

Das Glied $\rho'' e^2 \eta_{II} y'^2_3$ beträgt für die obigen Werte bei $40^\circ:0'',093$, bei $45^\circ:0'',095$, bei $50^\circ:0'',093$ und bei $60^\circ:0'',082$. Für Dreiecksmessungen 3. Ordnung, also für $y_2 - y_1 = 12 \text{ km}$, gibt das Glied $\rho'' e^2 \eta_{II} y'^2_3$ erst etwa $0'',015$. Man kann es daher bei diesen Messungen immer vernachlässigen.

Die Formel (37*) selbst kann für Hauptdreiecksseiten, deren mittlere Entfernung vom Hauptmeridian 700 km beträgt, nur auf 1 bis 2 Einheiten der 4. Dezimalstelle der Sekunde ungenau werden. Vgl. auch den folgenden Paragraphen.

Vertauscht man in (37) bzw. (37*) die Koordinaten der Endpunkte, so geht ψ_2 in $-\psi_1$ über.

Gehören also jetzt zum Argument $x_1 + \frac{1}{3}(x_2 - x_1)$ die Werte $\frac{1}{e'_3}$, e'^2_3 , e^2_3 , und wird

$$\frac{x_2 - x_1}{e'_3} = \xi_1, \quad \frac{y_2 - y_1}{e'_3} = \eta_1, \quad \frac{2y_1 + y_2}{3e'_3} = y'_3, \quad \frac{y_1 + y_2}{2e'_3} = y'_1 \quad (38)$$

gesetzt, so hat man

$$\begin{aligned} \frac{\psi_1}{\rho''} &= \frac{1}{2} \xi_1 \left\{ y'_3 - \frac{1}{3} (1 - 2 \varepsilon'_3^2) y'^3 + \frac{2}{15} y'^5 + \frac{1}{12} y'_1 \xi_1^2 - \frac{1}{360} \eta_1 (\xi_1^2 - \eta_1^2) \right\} \\ &\quad + \varepsilon'_3^2 \eta_1 \left\{ y'^2 - \frac{1}{18} (2 \xi_1^2 - \eta_1^2) \right\} + G l_6, \end{aligned} \quad (39)$$

und abgekürzt, der Gl. (37**) entsprechend:

$$\psi_1 = \frac{1}{2} \rho'' \xi_1 \left\{ y'_3 - \frac{1}{3} (1 - 2 \varepsilon'_3^2) y'^3 \right\} + \rho'' \varepsilon'_3^2 \eta_1 y'^2. \text{ 1)} \quad (39*)$$

1) Im GAUSS'schen Nachlaß (Werke, Band IX, S. 159) findet sich eine Formel für die Richtungskorrektion, die wohl bei den entfernten Dreiecksseiten der hannoverschen Landesvermessung Verwendung gefunden hat. Sie lautet, wenn wie hier x nach Norden und y nach Osten positiv ist:

$$\frac{\psi_1}{\rho''} = \alpha(x_2 - x_1)\eta - \beta(x_2 - x_1)\eta^3 + \gamma(y_2 - y_1)\eta^2$$

mit

$$\eta = \frac{1}{3} (2y_1 + y_2);$$

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{2a^2(1-e^2)q^2}, \quad \beta = \frac{1-3e^2+(e^2+15e^4)\sin^2 B'_3 + 14e^4 \sin^4 B'_3}{6a^4(1-e^2)^3q^3}, \quad \gamma = \frac{e^2 \sin 2B'_3}{2a^3(1-e^2)^2q^{\frac{5}{2}}}; \\ q &= \frac{1}{1-e^2 \sin^2 B'_3}; \end{aligned}$$

wo B'_3 zur Abszisse $\frac{1}{3}(2x_1 + x_2)$ gehört.

Der Wert von ψ_1 ergibt sich durch entsprechende Vertauschung.

Um diese Formel mit (39*) vergleichen zu können, wird ε'_3 statt q eingeführt und $e^2 = \frac{e'^2}{1+e'^2}$ gesetzt. Es ist nun

$$q = \frac{1}{a\sqrt{1-e^2}} \rho'_3,$$

folglich wird

$$\alpha = \frac{1}{2\varepsilon'^2_3}.$$

Vernachlässigt man in β die mit e^4 multiplizierten Glieder, also in ψ_1 Glieder von der Ordnung $e^4 G l_4$, was umso mehr am Platze ist, als in dem vorstehenden Ausdrucke die Glieder der 4. Ordnung schon vernachlässigt sind, so erhält man

$$\beta = \frac{1-2e'^2 \cos^2 B'_3}{6\varepsilon'^4_3} = \frac{1-2\varepsilon'^2_3}{6\varepsilon'^4_3}.$$

Ferner wird

$$\gamma = \frac{e'^2 \sin 2B'_3}{2\sqrt{1+e'^2 \cos^2 B'_3}} \cdot \frac{1}{\varepsilon'^3_3} = \frac{\varepsilon'^2_3}{\varepsilon'^3_3}.$$

Mithin geht der obige Ausdruck für ψ_1 , wenn man die Beziehungen aus (38) benutzt, in den folgenden über:

$$\psi_1 = \frac{1}{2} \rho'' \xi_1 \left\{ y'_3 - \frac{1}{3} (1 - 2 \varepsilon'_3^2) y'^3 \right\} + \rho'' \varepsilon'_3^2 \eta_1 y'^2.$$

Dieser GAUSS'sche Ausdruck für die Richtungskorrektion ist demnach eine Abkürzung der aus (37) sich ergebenden Gleichung für ψ_1 . Er ist nicht so genau wie der Ausdruck (39*), denn er vernachlässigt ein quadratisches Glied von y'_3 , nämlich $\frac{1}{12} \rho'' y'^2 \xi_1 \eta_1$, was bei (39*) nicht der Fall ist. Für die vorher angegebenen Werte: $y = 700$ km,

Die beiden Formeln (39) und (37*) für ψ_1 und ψ_2 haben den Übelstand, daß in ihnen y und ξ, η verschiedene Bedeutung haben.

Es sollen deshalb auch hier, ebenso wie bei der Entfernungsreduktion, alle Werte auf die Mitte von $p_1 p_2$ bezogen werden. Man hat alsdann, um ψ_2 zu erhalten, in (35)

$$\nu = \frac{1}{2}$$

zu setzen. ψ_1 findet man wieder aus ψ_2 durch Vertauschung der Koordinaten der Endpunkte.

$x_2 - x_1 = 70 \text{ km}$, $y_2 - y_1 = 70 \text{ km}$, wird dies Glied gleich $0'',025$, so daß in diesem Falle die GAUSS'sche Gleichung für ψ_1 um etwa $0'',028$ ungenau würde.

Im Briefwechsel mit SCHUMACHER (Band II, S. 265) hat GAUSS nur das erste Glied in ψ_1 angegeben:

$$\psi_1 = \rho'' \alpha (x_1 - x_2) \eta = \frac{1}{2} \rho'' \xi_1 y'_1.$$

Für Dreiecksseiten von ungefähr 70 km Länge, deren mittlere Entfernung vom Hauptmeridian 200 km beträgt, ist sie etwa auf $0'',015$ genau; in einer mittleren Entfernung von 100 km kann ihr Fehler noch gegen $0'',003$ betragen.

O. SCHREIBER hat in seiner Theorie der Projektionsmethode der hannoverschen Landesvermessung die Entwicklungen für die Azimut- und für die Entfernungsreduktion nach dem Vorbilde ausgeführt, das GAUSS bei der Übertragung vom Erdsphäroid auf die Kugel gegeben hat (Untersuchungen über Gegenstände der höheren Geodäsie. Erste Abhandlung. GAUSS' Werke, Band IV. S. 275 u. f.). Die erste SCHREIBER'sche Entwicklung, a. a. O. S. 39—48, gibt außer den von GAUSS im Briefwechsel mit SCHUMACHER mitgeteilten Formeln auch noch die Zusatzglieder, die e'^2 als Faktor haben. In den nachfolgenden Formeln ist in der ersten Reihe das Ergebnis dieser ersten Ableitung angegeben. Die zweite Entwicklung, a. a. O. Zusatz I, S. 57—75, ist eine Fortsetzung der ersten; es werden auch noch die Glieder 4. Ordnung erhalten. Die SCHREIBER'schen Formeln lauten, wenn x und y , entgegengesetzt wie bei GAUSS und SCHREIBER, nach Norden und Osten positiv angenommen werden:

$$\begin{aligned} \psi_1 &= H_{\frac{1}{3}}(x_2 - x_1) \left(y_1 + \frac{1}{3}(y_2 - y_1) \right) + h_{\frac{1}{3}}(y_2 - y_1) \left(y_1^2 + \frac{1}{2}(y_1 + y_2)^2 - \frac{1}{3}(x_2 - x_1)^2 \right) \\ &\quad - H_{\frac{1}{3}}(x_2 - x_1) \left\{ \alpha(y_1 + y_2)^3 - \beta(y_2 - y_1)^3 - \gamma(x_2 - x_1)^2 \left(y_1 + \frac{7}{15}(y_2 - y_1) \right) \right\} \\ \psi_2 &= H_{\frac{2}{3}}(x_2 - x_1) \left(y_2 - \frac{1}{3}(y_2 - y_1) \right) + h_{\frac{2}{3}}(y_2 - y_1) \left(y_2^2 + \frac{1}{2}(y_1 + y_2)^2 - \frac{1}{3}(x_2 - x_1)^2 \right) \\ &\quad - H_{\frac{2}{3}}(x_2 - x_1) \left\{ \alpha(y_1 + y_2)^3 + \beta(y_2 - y_1)^3 - \gamma(x_2 - x_1)^2 \left(y_2 - \frac{7}{15}(y_2 - y_1) \right) \right\} \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} H_\nu &= \frac{1}{2} \rho'' \frac{(1 + e'^2 \cos^2 B_\nu')^2}{a^2(1 + e'^2)}, & h_\nu &= \frac{1}{6} \rho'' \frac{e'^2(1 + e'^2)}{a^3} \left(\frac{1 + e'^2 \cos^2 B_\nu'}{1 + e'^2} \right)^{\frac{3}{2}} \sin 2B_\nu', \\ \alpha &= \frac{1}{24a^2(1 + e'^2)}, & \beta &= \frac{1}{360a^2(1 + e'^2)}, & \gamma &= \frac{1}{12a^2(1 + e'^2)}. \end{aligned}$$

Bei ψ_1 gehören H und h zum Argument $x_1 + \frac{1}{3}(x_2 - x_1)$, bei ψ_2 zum Argument $x_2 - \frac{1}{3}(x_2 - x_1)$.

In unserer Bezeichnung ist $H_\nu = \frac{1}{2} \rho'' \xi_\nu^2$ und $h_\nu = \frac{1}{3} \rho'' \xi_\nu^2 \eta_\nu^2$.

Diese SCHREIBER'schen Formeln sind nicht so genau wie (39) und (37*). Im Vergleich mit diesen, mit denen sie sonst übereinstimmen, haben sie (wie auch die SCHREIBER'sche Formel für die Entfernungsreduktion) in den Gliedern 4. Ordnung den Faktor $(1 + e'^2 \cos^2 B_\nu')^2$ nicht, und es fehlen ihnen die Glieder

$$\frac{1}{3} \rho'' \xi_\nu^2 \xi_\nu^2 \eta_\nu^2 = \frac{1}{3} \rho'' \cdot \frac{e'^2 \cos^2 B_\nu'}{e_\nu^2} (x_2 - x_1) \left(\frac{y_1 + y_2}{2} \right)^5 \quad \text{und} \quad \frac{1}{15} \rho'' \xi_\nu \eta_\nu^5 = \frac{1}{15} \frac{\rho''}{e_\nu^6} (x_2 - x_1) \left(\frac{2y_1 + y_2}{3} \right)^5.$$

Setzt man also, vgl. (31) und (21*):

$$\begin{aligned} \frac{x_2 - x_1}{\varrho'_m} &= \xi_m, \quad \frac{y_2 - y_1}{\varrho'_m} = \eta_m, \quad \frac{y_1 + y_2}{2\varrho'_m} = y'_m; \\ \varepsilon'^2 &= e'^2 \cos^2 B'_m, \quad \epsilon_m^2 = \frac{\varepsilon'^2 \operatorname{tg} B'_m}{\sqrt{Q'_m}}, \quad \frac{1}{\varrho'_m} = \frac{1 + \varepsilon'^2}{a \sqrt{1 + e'^2}} = \frac{Q'_m}{a \sqrt{1 + e'^2}} = \frac{1}{\sqrt{R'_m N'_m}}, \end{aligned} \quad (40)$$

wobei B'_m zu $\frac{1}{2}(x_1 + x_2)$ gehört, so wird:

$$\left. \begin{aligned} \psi_1 &= \tau_1 - \tau_2 \\ \psi_2 &= \tau_1 + \tau_2 \end{aligned} \right\} \quad \begin{aligned} \tau_1 &= \frac{1}{2} \rho'' y'_m \xi_m \left\{ 1 - \frac{1}{3} (1 - 2\varepsilon'^2) y'^2_m + \frac{2}{15} y'^4_m + \frac{1}{12} \xi_m^2 \right\} + \rho'' \epsilon_m^2 \eta_m (y'^2_m - \frac{1}{6} \xi_m^2 + \frac{1}{12} \eta_m^2) + G l_6 \\ \tau_2 &= \frac{1}{12} \rho'' \xi_m \eta_m \left\{ 1 + \frac{1}{60} (\xi_m^2 - \eta_m^2) \right\} - \frac{1}{3} \rho'' \epsilon_m^2 y'_m (\xi_m^2 - \eta_m^2) + G l_6. \end{aligned} \quad (41)$$

Die Teile in τ_1 und τ_2 , die ϵ_m^2 und ε'^2 nicht als Faktor haben, stimmen mit den für die Mercator-Projektion geltenden Formeln (20) überein. Man braucht nur

$$t_m = \frac{1}{i} \operatorname{tg} i y'_m = y'_m - \frac{1}{3} y'^3_m + \frac{2}{15} y'^5_m - \dots$$

zu setzen.

Die Genauigkeit von (41) ist dieselbe wie die von (39) und (37*).

Nimmt man

$$\frac{1}{2}(y_1 + y_2) = 700 \text{ km}, \quad x_2 - x_1 = 70 \text{ km}, \quad y_2 - y_1 = 70 \text{ km}$$

an, so werden in mittleren Breiten die Glieder $\frac{1}{720} \rho'' \xi_m^3 \eta_m$ bzw. $\frac{1}{720} \rho'' \xi_m \eta_m^3$ gleich $0'',000\,004$ und die Glieder $\frac{1}{6} \rho'' \epsilon_m^2 \xi_m^2 \eta_m$ bzw. $\frac{1}{12} \rho'' \epsilon_m^2 \eta_m^3$ gleich $0'',00\,014$ bzw. $0'',00\,007$. Man kann demnach für beobachtete Dreiecksseiten innerhalb eines Abstandes von 700 km vom Hauptmeridian das Glied $\frac{1}{720} \rho'' \xi_m \eta_m (\xi_m^2 - \eta_m^2)$ immer und meistens auch das Glied $\frac{1}{6} \rho'' \epsilon_m^2 \eta_m (\xi_m^2 - \frac{1}{2} \eta_m^2)$ vernachlässigen.

Das Fehlen des ersten dieser beiden Glieder hat aber auf die Formel keinen Einfluß, denn das Glied

$$H_\nu(x_2 - x_1) \cdot \alpha(y_1 + y_2)^3,$$

in dem α durch Vernachlässigung der mit e'^2 multiplizierten Teile aus einem strengeren Ausdrucke (a. a. O. S. 70/71) entstanden, ist in hinreichender Annäherung gleich $\frac{1}{6} \rho'' (1 - 2\varepsilon'^2) \xi_\nu y_\nu^3$. Auch das Fehlen des Faktors $(1 + e'^2 \cos^2 B'_m)^2$ in β und γ ist innerhalb eines Gebietes mit dem mittleren Abstande von 700 km vom Hauptmeridian von keinem nennenswerten Einfluß auf die Genauigkeit der Formel, da Glieder von der Ordnung $e'^2 G l_4$ außerdem im allgemeinen in ihr vernachlässigt sind. Der Fehler der SCHREIBERSchen Formeln gegen (39) und (37*) ist demnach im großen und ganzen gleich $\frac{1}{15} \rho'' \xi_\nu y_\nu^5$. Für Hauptdreiecksseiten in der mittleren Entfernung von 700 km vom Hauptmeridian wird dies Glied etwa $0'',002$. Um diesen Betrag sind mithin in diesem Falle die SCHREIBERSchen Formeln ungenau. Bei kleineren Entfernungen von ungefähr 300 km, für welche SCHREIBER seine Formeln entwickelte, wird jedoch das Glied bedeutungslos.

Für vorstehende Werte wird ferner im Mittel

$$\frac{1}{24} \rho'' y'_m \xi_m^3 \quad \text{gleich } 0'',001$$

$$\frac{1}{15} \rho'' y'_m^5 \xi_m \quad , \quad 0'',002$$

und

$$\frac{1}{3} \rho'' \varepsilon_m^2 y'_m^3 \xi_m \quad \text{gleich } 0'',003$$

$$\frac{1}{3} \rho'' \varepsilon_m^2 y'_m \xi_m^2 \quad \text{bzw.} \quad \frac{1}{3} \rho'' \varepsilon_m^2 y'_m \eta_m^2 \quad , \quad 0'',003.$$

Mithin sind für Hauptdreiecksseiten in 700 km Abstand vom Hauptmeridian die Formeln

$$\left. \begin{array}{l} \psi_1 = \tau_1 - \tau_2 \quad \text{mit} \quad \tau_1 = \frac{1}{2} \rho'' y'_m \xi_m \left(1 - \frac{1}{3} y'^2_m \right) + \rho'' \varepsilon_m^2 y'^2_m \eta_m \\ \psi_2 = \tau_1 + \tau_2 \quad \quad \quad \tau_2 = \frac{1}{12} \rho'' \xi_m \eta_m \end{array} \right\} \quad (41*)$$

bis zu etwa 0'',009 genau, und wenn man in τ_1 noch das Glied $\frac{1}{3} \rho'' \varepsilon'^2 y'_m^3 \xi_m$ zufügt, bis zu 0'',006 genau. Indem man

$$\frac{2y_1 + y_2}{3 \varepsilon'_m} = y'_{\frac{1}{3},m} \quad \text{und} \quad \frac{y_1 + 2y_2}{3 \varepsilon'_m} = y'_{\frac{2}{3},m}$$

setzt, wird man alsdann die Formeln auch schreiben können:

$$\left. \begin{array}{l} \psi_1 = \frac{1}{2} \rho'' \xi_m \left\{ y'_{\frac{1}{3},m} - \frac{1}{3} (1 - 2 \varepsilon'^2_m) y'^3_m \right\} + \rho'' \varepsilon_m^2 y'^2_m \eta_m \\ \psi_2 = \frac{1}{2} \rho'' \xi_m \left\{ y'_{\frac{2}{3},m} - \frac{1}{3} (1 - 2 \varepsilon'^2_m) y'^3_m \right\} + \rho'' \varepsilon_m^2 y'^2_m \eta_m. \end{array} \right\} \quad (41**)$$

Beispiel. Wie in dem Beispiel des vorigen Paragraphen, S. 94 u. 95, sei

$$r = 80 \text{ km}, \quad x_2 - x_1 = 64 \text{ km}, \quad y_2 - y_1 = -48 \text{ km} \quad \text{und} \quad B_1' = 47^\circ;$$

die Richtungskorrektionen sind für

$$y_m = 200 \text{ km}, \quad 400 \text{ km}, \quad 600 \text{ km}$$

zu berechnen.

Die nach (40) abzuleitenden Hilfsgrößen sind dieselben, wie diejenigen, die bei der Berechnung der Entfernungsreduktion benutzt wurden. Mit ihnen erhält man:

	$y_m = 200\,000''$	$y_m = 400\,000''$	$y_m = 600\,000''$
$\frac{1}{2} \rho'' y'_m \xi_m$	= 32'',4408	= 64'',8815	= 97'',3223
- " $\cdot \frac{1}{3} y'^2_m$	= - 0,0106	= - 0,0850	= - 0,2870
+ $\rho'' e_m^2 y_m y'^2_m$	= - 0,0051	= - 0,0204	= - 0,0459
+ $\frac{1}{2} \rho'' y'_m \xi_m \cdot \frac{1}{3} y'^2_m \cdot 2 \varepsilon_m^2$	= + 0,0001	= + 0,0005	= + 0,0018
+ " $\cdot \frac{2}{15} y'^4_m$	= + .	= + 1	= + 10
+ " $\cdot \frac{1}{12} \xi_m^2$	= + 3	= + 5	= + 8
- $\rho'' e_m^2 y_m \cdot \frac{1}{6} \xi_m^2$	= + 1	= + 1	= + 1
+ " $\cdot \frac{1}{12} y_m^2$	= - .	= - .	= - .
τ_1	= 32'',4256	= 64'',7773	= 96'',9931
$\frac{1}{12} \rho'' \xi_m y_m$	= - 1'',2976	= - 1'',2976	= - 1'',2976
- $\frac{1}{3} \rho'' e_m^2 y'_m \cdot \xi_m^2$	= - 0,0007	= - 0,0015	= - 0,0022
+ " $\cdot y_m^2$	= + 4	= + 8	= + 12
τ_2	= - 1'',2979	= - 1'',2983	= - 1'',2986

Mithin wird nach (41):

ψ_1	=	33'',7235	=	66'',0756	=	98'',2917
ψ_2	=	31,1277	=	63,4790	=	95,6945

Die gleichen Werte würden auch die Formeln (39) und (37*) ergeben haben. Nach (41*) würde man dagegen erhalten:

ψ_1	=	33'',7227	=	66'',0737	=	98'',2870
ψ_2	=	31,1275	=	63,4785	=	95,6918

und nach (41**):

ψ_1	=	33'',7228	=	66'',0742	=	98'',2888
ψ_2	=	31,1276	=	63,4790	=	95,6936

Hätte man die Formeln (39*) und (37**) benutzt, so würde man gefunden haben:

ψ_1	=	33'',7231	=	66'',0749	=	98'',2897
ψ_2	=	31,1272	=	63,4784	=	95,6926

§ 29.

Numerische Prüfung der Genauigkeit der Korrektionsformeln für die Richtungen und für die Entfernung.

Eine numerische Prüfung der Genauigkeit der Formeln für die Richtungs- und Entfernungsreduktionen kann man erhalten, indem man sie auf ein geodätisches Dreieck anwendet. Aus den Richtungsreduktionen lässt sich nämlich der Exzess ableiten, den man anderseits, wie es gewöhnlich geschieht, mittels der Dreiecksfläche berechnen kann.

Für die Entfernungsreduktion gibt der Sinussatz des Dreiecks eine Prüfung.

Die konforme Projektion eines ellipsoidischen Dreiecks $P_1 P_2 P_3$ möge in der Ebene für die 3 Eckpunkte p_1, p_2, p_3 die folgenden Koordinaten ergeben haben:

$$x_1, \quad y_1 = 630\,000^m; \quad x_2 = x_1 + 75\,000^m, \quad y_2 = 670\,000^m; \quad x_3 = x_1 + 75\,000^m, \quad y_3 = y_1;$$

so daß also

$$r_{1,2} = 85\,000^m, \quad r_{1,3} = 75\,000^m, \quad r_{2,3} = 40\,000^m$$

wird. Hierbei ist angenommen, entweder daß der Verjüngungsfaktor $m_0 = 1$ ist, oder daß die obigen Werte der x, y durch Division mit m_0 aus den ursprünglichen Koordinatenwerten entstanden sind.

Dem Endpunkte von x_1 soll $B'_1 = 54^\circ$ entsprechen.

I. Es sollen nun zunächst die Richtungsreduktionen $\psi_{1,2}$ und $\psi_{2,1}$ für $p_1 p_2 = r_{1,2}$ nach (40) und (41) berechnet werden.

Zu $\frac{1}{2}(x_1 + x_2) = x_1 + \frac{1}{2}(x_2 - x_1) = x_1 + 37\,500^m$ gehört $B'_m = 54^\circ 20' 13''$. Mit diesem Werte von B'_m erhält man:

$$\frac{1}{\epsilon_m'} \cdots 3,194\,8931 - 10, \quad \epsilon_m'^2 \cdots 7,3587 - 10, \quad \epsilon_m^2 \cdots 7,5023 - 10.$$

Folglich wird

$$y'_m \cdots 9,007\,8065 - 10, \quad \xi_m \cdots 8,069\,9544 - 10, \quad \eta_m \cdots 7,79\,695 - 10,$$

und damit:

$\begin{aligned} \frac{1}{2} \rho'' y'_m \xi_m &= 123'',3548 \\ - \quad " \cdot \frac{1}{3} y'_m^2 &= - 0,4262 \\ + \quad " \cdot \frac{2}{15} y'_m^4 &= + 0,0018 \\ + \quad " \cdot \frac{1}{12} \xi_m^2 &= + 0,0014 \\ + \frac{1}{3} \rho'' \epsilon_m'^2 y'_m^3 \xi_m &= + 0,0019 \\ + \rho'' \epsilon_m^2 \eta_m \cdot y'_m^2 &= + 0,0426 \\ - \quad " \cdot \frac{1}{6} \xi_m^3 &= - 0,0001 \\ + \quad " \cdot \frac{1}{12} \eta_m^2 &= . \\ \tau_1 &= \overline{122'',9762} \end{aligned}$	$\begin{aligned} \frac{1}{12} \rho'' \xi_m \eta_m &= 1'',2652 \\ - \frac{1}{3} \rho'' \epsilon_m'^2 y'_m \cdot \xi_m^2 &= - 0,0031 \\ + \quad " \cdot \eta_m^2 &= + 0,0009 \\ \tau_2 &= \overline{1'',2630} \\ \psi_{1,2} = \tau_1 - \tau_2 &= 121'',7132 \\ \psi_{2,1} = \tau_1 + \tau_2 &= 124,2392. \end{aligned}$
--	---

Die Näherungsformeln (41*) ergeben hiernach:

$$\begin{aligned} \tau_1 &= 122'',9712 & \psi_{1,2} &= 121'',7060, \quad \text{Fehler: } 0'',0072, \\ \tau_2 &= 1,2652 & \text{mithin} & \psi_{2,1} = 124,2364, \quad " : 0,0028; \end{aligned}$$

Krüger: Konforme Abbildung des Erdellipsoids in der Ebene.

und die Näherungsformeln (41**):

$$\psi_{1,2} = 121'',7079, \text{ Fehler: } 0'',0053,$$

$$\psi_{2,1} = 124',2383, \text{ Fehler: } 0',0009.$$

Rechnet man nach den Formeln (38) und (39) sowie (36), (36*) und (37*), so hat man:

$$\text{Zu } x_1 + \frac{1}{3}(x_2 - x_1) = x_1 + 25000^m \text{ gehört}$$

$$B'_\frac{1}{3} = 54^\circ 13' 29'' \text{ und hierzu}$$

$$1 : \varrho'_\frac{1}{3} \cdots 3,194\,8985 - 10, \quad \varepsilon'^2_\frac{1}{3} \cdots 7,3611 - 10 \\ \varepsilon^2_\frac{1}{3} \cdots 7,5029 - 10.$$

$$\text{Zu } x_1 + \frac{2}{3}(x_2 - x_1) = x_1 + 50000^m \text{ gehört}$$

$$B'_\frac{2}{3} = 54^\circ 26' 57'' \text{ und hierzu}$$

$$1 : \varrho'_\frac{2}{3} \cdots 3,194\,8877 - 10, \quad \varepsilon'^2_\frac{2}{3} \cdots 7,3563 - 10 \\ \varepsilon^2_\frac{2}{3} \cdots 7,5017 - 10.$$

Damit findet man:

$$y'_\frac{1}{3} \cdots 9,003\,3346 - 10, \quad y'_1 \cdots 9,00\,781 - 10,$$

$$\xi_1 \cdots 8,069\,9598 - 10, \quad \eta_1 \cdots 7,79\,696 - 10,$$

$$y'_\frac{2}{3} \cdots 9,012\,2327 - 10, \quad y'_{11} \cdots 9,00\,780 - 10,$$

$$\xi_{11} \cdots 8,069\,9490 - 10, \quad \eta_{11} \cdots 7,79\,695 - 10,$$

und weiter:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \rho'' \xi_1 \cdot y'_\frac{1}{3} &= 122'',0926 \\ - \quad " \cdot \frac{1}{3} y'^3_1 &= - 0',4262 \\ + \quad " \cdot \frac{2}{15} y'^5_1 &= + 0',0017 \\ + \quad " \cdot \frac{1}{12} y'_1 \xi_1^2 &= + 0',0014 \\ + \frac{1}{2} \rho'' \xi_1 \cdot \frac{1}{3} y'^3_1 \cdot 2 \varepsilon'^2_\frac{1}{3} &= + 0',0020 \\ + \rho'' \varepsilon^2_\frac{1}{3} \eta_1 \cdot y'^2_1 &= + 0',0418 \\ - \quad " \cdot \frac{1}{9} \xi_1^2 &= - 0',0001 \\ + \quad " \cdot \frac{1}{18} \eta_1^2 &= + . \\ \psi_{1,2} &= 121'',7132 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \rho'' \xi_{11} \cdot y'_\frac{2}{3} &= 124'',6169 \\ - \quad " \cdot \frac{1}{3} y'^3_{11} &= - 0',4262 \\ + \quad " \cdot \frac{2}{15} y'^5_{11} &= + 0',0019 \\ + \quad " \cdot \frac{1}{12} y'_{11} \xi_{11}^2 &= + 0',0014 \\ + \frac{1}{2} \rho'' \xi_{11} \cdot \frac{1}{3} y'^3_{11} \cdot 2 \varepsilon'^2_\frac{2}{3} &= + 0',0019 \\ + \rho'' \varepsilon^2_\frac{2}{3} \eta_{11} \cdot y'^2_{11} &= + 0',0434 \\ - \quad " \cdot \frac{1}{9} \xi_{11}^2 &= - 0',0001 \\ + \quad " \cdot \frac{1}{18} \eta_{11}^2 &= + . \\ \psi_{2,1} &= 124'',2392, \end{aligned}$$

übereinstimmend mit den Werten nach (41).

Mit den Näherungsformeln (39*) und (37**) würde man demnach erhalten haben:

$$\psi_{1,2} = 121'',7102 \quad \psi_{2,1} = 124'',2360$$

$$\text{Fehler } 0',0030 \quad \text{Fehler } 0',0032.$$

Wenn man die im GAUSS'schen Nachlaß enthaltene Formel, s. Anmerkung S. 100, benutzt, so findet man

$$\begin{array}{ll} \psi_{1,2} = 121''\,7230 & \psi_{2,1} = 124''\,2228 \\ \text{Fehler} - 0,0098 & \text{Fehler} + 0,0164. \end{array}$$

Der Fehler ist hierbei, wie schon erwähnt, viel beträchtlicher als bei den vorigen Näherungen.

Die SCHREIBERSchen Formeln, s. Anmerkung S. 101, liefern:

$$\begin{array}{ll} \psi_{1,2} = 121''\,7114 & \psi_{2,1} = 124''\,2373 \\ \text{Fehler} + 0,0018 & \text{Fehler} + 0,0019. \end{array}$$

Wir gehen nun zur Berechnung der Entfernungsrückrechnung für $p_1 p_2$ über. Dazu können wir die bei der Ableitung der Richtungsreduktionen nach (40) erhaltenen Größen verwenden. Es wird mit diesen nach (32):

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} M y_m'^2 &= 0,002\,2509\,5.8 \\ - \quad " \quad \cdot \frac{1}{6} y_m'^2 &= - \quad 38\,8.9 \\ + \quad " \quad \cdot \frac{2}{45} y_m'^4 &= + \quad 1.1 \\ + \quad " \quad \cdot \frac{1}{12} \xi_m^2 &= + \quad 2.6 \\ - \quad " \quad \cdot \frac{1}{6} \eta_m^2 &= - \quad 1.5 \\ + \frac{1}{24} M \eta_m^2 &= + \quad 7\,1.0 \\ - \frac{1}{3} M \epsilon_m^2 y_m' \xi_m \eta_m &= - \quad .3 \\ + \frac{1}{6} M \epsilon_m'^2 y_m'^3 \cdot y_m' &= + \quad 1.8 \\ + \quad " \quad \cdot 2 \eta_m &= + \quad .2 \\ \log r_{1,2} - \log s_{1,2} &= 0,002\,2478\,1.8 \\ \log r_{1,2} = \log 85\,000 &= 4,929\,4189\,2.6 \\ \log s_{1,2} &= 4,927\,1711\,0.8. \end{aligned}$$

Mit der Näherungsformel (32*) würde sich hiernach ergeben:

$$\begin{array}{ll} \log s_{1,2} = 4,927\,1711\,5 & \\ \text{Fehler} - 4. & \end{array}$$

Nach der von O. SCHREIBER in der „Theorie der Projektionsmethode der hannoverschen Landesvermessung“, S. 81, angegebenen Formel würde man erhalten:¹⁾

$$\log r_{1,2} - \log s_{1,2} = 0,002\,2478\,0.5,$$

also 1.3 Einheiten der 8. Dezimalstelle kleiner als vorher.

1) Diese Formel, deren Entwicklung, Projektionsmethode S. 48—50 u. S. 75—81, ebenso wie diejenige für die Richtungsreduktion, vgl. Anmerkung S. 101, der GAUSS'schen Ableitung bei der konformen Abbildung der Ellipsoid-

II. Zur Berechnung der Richtungsreduktionen $\psi_{1,3}$ und $\psi_{3,1}$ für die Seite $p_1 p_3 = 75$ km, die parallel zur x -Achse verläuft, nach (40) und (41) hat man wie vorher

$$B'_m = 54^\circ 20' 13'',$$

$$1 : \rho'_m \cdots 3,194\,8931 - 10, \quad \varepsilon'_m \cdots 7,3587 - 10, \quad \xi'_m \cdots 7,5023 - 10;$$

hiermit wird

$$y'_m \cdots 8,994\,2336 - 10, \quad \xi_m \cdots 8,069\,9544 - 10, \quad \eta_m = 0,$$

und ferner

$\begin{aligned} \frac{1}{2} \rho'' y'_m \xi_m &= 119,5592 \\ - " \cdot \frac{1}{3} y'^2_m &= - 0,3881 \\ + " \cdot " \cdot 2 \varepsilon'_m &= + 0,0018 \\ + " \cdot \frac{2}{15} y'^4_m &= + 0,0015 \\ + " \cdot \frac{1}{12} \xi^2_m &= + 0,0014 \\ \tau_1 &= \underline{\underline{- 119,1758}} \end{aligned}$	$\begin{aligned} \tau_2 &= - \frac{1}{3} \rho'' \varepsilon'_m y'_m \xi^2_m = - 0,0030 \\ \psi_{1,3} &= 119,1788 \\ \psi_{3,1} &= 119,1728. \end{aligned}$
--	--

Für die Entfernungsreduktion ergibt sich nach (32):

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} M y'^2_m &= 0,002\,1145\,6.7 \\ - " \cdot \frac{1}{6} y'^2_m &= - 34\,3.2 \\ + " \cdot " \cdot 2 \varepsilon'_m &= + 1.6 \\ + " \cdot \frac{2}{45} y'^4_m &= + 0.9 \\ + " \cdot \frac{1}{12} \xi^2_m &= + 2.4 \\ \log r_{1,3} - \log s_{1,3} &= 0,002\,1111\,8.4 \\ \log r_{1,3} = \log 75000 &= 4,875\,0612\,6.3 \\ \log s_{1,3} &= 4,872\,9500\,7.9. \end{aligned}$$

Fläche auf die Kugelfläche nachgebildet ist, lautet, wenn die Abszissen nach Norden und die Ordinaten nach Osten positiv angenommen werden:

$$\begin{aligned} \log r - \log s &= M \left\{ H' \left(\frac{1}{4} (y_1 + y_2)^2 + \frac{1}{12} (y_2 - y_1)^2 \right) - \frac{1}{2} h' (y_1 + y_2)(y_2 - y_1)(x_2 - x_1) \right. \\ &\quad \left. - H' \left(\gamma_1 (y_1 + y_2)^4 + \gamma_2 (y_2 - y_1)^4 + \gamma_3 (y_1 + y_2)^2 (y_2 - y_1)^2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - (x_2 - x_1)^2 (y_4 (y_1 + y_2)^2 + \gamma_5 (y_2 - y_1)^2) \right) \right\} \end{aligned}$$

mit

$$H' = \frac{1}{2} \frac{(1 + e'^2 \cos^2 B'_m)^2}{a^2 (1 + e'^2)}, \quad h' = \frac{e'^2 (1 + e'^2)}{6 a^3} \left(\frac{1 + e'^2 \cos^2 B'_m}{1 + e'^2} \right)^{\frac{5}{2}} \sin 2 B'_m,$$

$$\gamma_1 = \frac{1}{96 a^2 (1 + e'^2)}, \quad \gamma_2 = \frac{1}{288 a^2 (1 + e'^2)}, \quad \gamma_3 = \frac{1}{24 a^2 (1 + e'^2)}, \quad \gamma_4 = \frac{1}{48 a^2 (1 + e'^2)}, \quad \gamma_5 = \frac{1}{720 a^2 (1 + e'^2)}.$$

Sie ist nur weniger genau als (32). Im wesentlichen besteht ihre Abweichung gegen (32) in den Fehlern des Gliedes:

$$\frac{1}{45} M y'^6_m = \frac{1}{360} M H'^3_m (y_1 + y_2)^6.$$

III. Berechnet man weiter die Richtungsreduktionen $\psi_{3,2}$ und $\psi_{2,3}$ für die Seite $p_3 p_2 = 40 \text{ km}$, die normal zur x -Achse steht, so wird nach (40) und (41) erhalten, da jetzt für $x_3 = x_2 = x_1 + 75\,000''$

$$B'_2 = B'_m = 54^{\circ}40'26''$$

ist:

$$1 : \varrho'_m \cdots 3,194\,8769 - 10, \quad \varepsilon'^2_m \cdots 7,3515 - 10, \quad \varrho^2_m \cdots 7,5006 - 10,$$

$$y'_m \cdots 9,007\,7904 - 10, \quad \xi_m = 0, \quad \eta_m \cdots 7,79\,694 - 10;$$

$$\varrho'' \varrho^2_m \eta_m \cdot y'^2_m = 0'',04\,241$$

$$+ \quad " \cdot \frac{1}{12} \eta^2_m = + 0,00\,001$$

$$\tau_1 = 0'',04\,242, \quad \tau_2 = \frac{1}{3} \varrho'' \varrho^2_m y'_m \eta^2_m = 0'',00\,087;$$

$$\psi_{3,2} = 0'',0416, \quad \psi_{2,3} = 0'',0433.$$

Nach (32) findet man hier für die Entfernungsreduktion:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} M y'^2 &= 0,002\,2507\,9.1 \\ - \quad " \cdot \frac{1}{6} y'^2_m &= - 38\,8.8 \\ + \quad " \cdot \frac{2}{45} y'^4_m &= + 1.1 \\ - \quad " \cdot \frac{1}{6} \eta^2_m &= - 1.5 \\ + \frac{1}{24} M \eta^2 &= + 7\,1.0 \\ + \frac{1}{6} M \varepsilon'^2_m y'^3_m \cdot y'_m &= + 1.7 \\ + \quad " \cdot 2 \eta_m &= + .2 \\ \log r_{3,2} - \log s_{3,2} &= 0,002\,2476\,2.8 \\ \log r_{3,2} = \log 40\,000 &= 4,602\,0599\,9.1 \\ \log s_{3,2} &= 4,599\,8123\,6.3. \end{aligned}$$

IV. Aus den Richtungsreduktionen für die Seiten des Dreiecks $p_1 p_2 p_3$ kann man nun leicht den Exzess E des geodätischen Dreiecks $P_1 P_2 P_3$ herstellen. Da die Winkelsumme im Dreiecke $p_1 p_2 p_3$ gleich 180° ist, so wird die Winkelsumme des Dreiecks $P_1 P_2 P_3$ gleich

$$180^\circ - \psi_{1,3} + \psi_{1,2} + \psi_{2,1} - \psi_{2,3} - \psi_{3,2} - \psi_{3,1};$$

mithin ist der Exzess

$$E = (\psi_{1,2} + \psi_{2,1}) - (\psi_{3,2} + \psi_{2,3}) - (\psi_{1,3} + \psi_{3,1}) = 7'',5159.$$

Nach (41) erhält man demnach den Exzess auch aus den τ_i für die 3 Seiten.

Obgleich man also zur Berechnung des Exzesses die Kenntnis der einzelnen Winkel des Dreiecks $P_1 P_2 P_3$ nicht braucht, sollen diese doch abgeleitet werden, um eine Kontrolle der oben erhaltenen Seiten ausüben zu können. Die Winkel des ebenen Dreiecks $p_1 p_2 p_3$ erhält man leicht aus den Koordinaten der Endpunkte. Für die Winkel des geodätischen Dreiecks $P_1 P_2 P_3$ ergibt sich

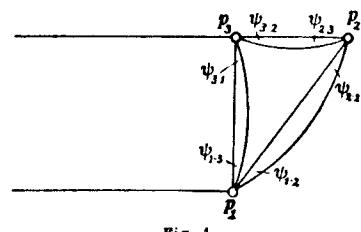


Fig. 4.

$$\begin{aligned}\cancel{\Delta} P_1 &= \cancel{\Delta} p_1 - \psi_{1,3} + \psi_{1,2} = 28^\circ 4' 20'',9531 + 0' 2'',5344 \\ \cancel{\Delta} P_2 &= \cancel{\Delta} p_2 + \psi_{2,1} - \psi_{2,3} = 61 55 39 ,0469 + 2 4 ,1959 \\ \cancel{\Delta} P_3 &= \cancel{\Delta} p_3 - \psi_{3,2} - \psi_{3,1} = 90 0 0 ,0000 - 1 59 ,2144\end{aligned}$$

folglich wird im Dreieck $P_1 P_2 P_3$:

$$\begin{array}{c|c|c} \cancel{\Delta} P_1 = 28^\circ 4' 23'',4875 & 20'',9822 = \cancel{\Delta} P'_1 & 4,599\ 8123\ 6.3 \\ \cancel{\Delta} P_2 = 61 57 43 ,2428 & 40 ,7375 = \cancel{\Delta} P'_2 & 4,872\ 9500\ 7.9 \\ \cancel{\Delta} P_3 = 89 58 0 ,7856 & - 1 ,7197 = \cancel{\Delta} P'_3 & 4,927\ 1711\ 0.8 \\ \hline E = 7'',5159 & 0 ,0000 & \end{array}$$

hierbei ist $\cancel{\Delta} P' = \cancel{\Delta} P - \frac{1}{3} E$.

Man kann nun ein zweites Mal den Exzess des Dreiecks $P_1 P_2 P_3$ auch mittels der Fläche berechnen. Für beobachtete Dreiecksseiten ist hinreichend genau

$$\frac{E}{\rho''} = \frac{F'}{\varrho^2} \left(1 + \frac{\mu^2}{8\varrho^2} \right).$$

Dabei ist F' die Fläche desjenigen ebenen Dreiecks, das dieselben Seiten wie das geodätische Dreieck hat, und dessen Winkel je um $\frac{1}{3} E$ verkleinert sind. Ferner ist $\frac{1}{\varrho^2}$ das arithmetische Mittel der Werte für das GAUSSsche Krümmungsmaß in P_1 , P_2 und P_3 . Weiter ist $\mu^2 = \frac{1}{3} (s_{1,2}^2 + s_{2,3}^2 + s_{3,1}^2)$.

Um $\frac{1}{\varrho^2}$ für die Eckpunkte P_1 , P_2 , P_3 zu erhalten, muß man ihre geographischen Breiten B kennen. Diese findet man aus den Breiten B' der Fußpunkte der Ordinaten von p_1 , p_2 , p_3 hier genau genug nach (10) § 13 S. 39 durch die Gleichung

$$B - B' = - \frac{1}{2} \rho'' \left(\frac{y}{N'} \right)^2 Q' \operatorname{tg} B'.$$

Mit

$$B'_1 = 54^\circ 0' 0'', \quad B'_3 = 54^\circ 40' 26'', \quad B'_2 = 54^\circ 40' 26'',$$

ergibt sich:

$$\begin{array}{lll} B_1 - B'_1 = - 23 2 , & B_3 - B'_3 = - 24 6 , & B_2 - B'_2 = - 27 15 , \\ \text{und} \quad B_1 = 53 36 58 , & B_3 = 54 16 20 , & B_2 = 54 13 11 . \end{array}$$

Dazu gehören der Reihe nach die folgenden Werte von $\log \frac{1}{\varrho^2}$:

$$6,389\ 856 - 20, \quad 6,389\ 792 - 20, \quad 6,389\ 796 - 20; \text{ im Mittel } 6,389\ 815 - 20.$$

Für μ^2 genügt es $\frac{1}{3} (85^2 + 40^2 + 75^2) \cdot 10^6$ zu nehmen.

Daher hat man zur Berechnung des Exzesses:

$$\begin{array}{ll} s_{3,2} \dots 4,599\ 812 & \frac{M}{8} \dots 8,735 \\ s_{3,1} \dots 4,872\ 950 & \mu^2 \dots 9,683 \\ \sin P'_3 \dots 0,000\ 000 & 1 : \varrho^2 \dots 6,390 \\ \frac{\rho''}{2\varrho^2} \dots 1,403\ 210 & 4,808 \\ \frac{M\mu^2}{8\varrho^2} = & 6 \\ E \dots 0,875\ 978 & E = 7'',5159. \end{array}$$

Diese Rechnung liefert mithin denselben Wert für den Exzeß wie die vorige aus den Richtungskorrektionen.

Die Prüfung der Seiten des Dreiecks $P_1 P_2 P_3$ und damit der Entfernungsreduktionen kann durch den Sinussatz geschehen. Es muß

$$\log \frac{s_{1,2}}{\sin P'_3} = \log \frac{s_{1,3}}{\sin P'_2} = \log \frac{s_{2,3}}{\sin P'_1}$$

sein. Man erhält nun dafür der Reihe nach:

$$\begin{array}{r} 4,927\,1711\,8,4 \\ \quad " \quad \quad 7 \\ \quad " \quad \quad 2 \end{array}$$

Die numerische Rechnung bestätigt mithin hier, daß für Hauptdreiecksseiten, deren mittlere Entfernung vom Hauptmeridian 650 km beträgt, der Fehler der Formel (32) für die Entfernungsreduktion nur wenige Einheiten der 9. Dezimalstelle im Logarithmus betragen kann. Die Formel (41) für die Richtungsreduktionen hat in diesem Falle die 4. Dezimalstelle der Sekunde genau ergeben.

Eine andere Prüfung der Richtungsreduktionen ergibt sich bei der Transformation der Koordinaten, (41) § 46 II.

Beziehungen zwischen der geodätischen Linie und den ebenen rechtwinkligen Koordinaten ihrer Endpunkte.

§ 30.

Die GAUSS sche und die geodätische Konvergenz des Meridians.

Es sei s' das Bild einer geodätischen Linie s des Erdellipsoids in der Ebene. Den Richtungswinkel ϑ , den eine Parallele zur Abszissenachse mit der Verbindungsgeraden der Endpunkte p_1 und p_2 von s' bildet, nennt GAUSS das Azimut in plano. Sind \bar{x}_1, \bar{y}_1 und \bar{x}_2, \bar{y}_2 die Koordinaten von p_1 und p_2 , und $\bar{x} = m_0 x, \bar{y} = m_0 y$, so ist in p_1 :

$$\operatorname{tg} \vartheta_{1,2} = \frac{\bar{y}_2 - \bar{y}_1}{\bar{x}_2 - \bar{x}_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}; \quad (1)$$

im Punkte p_2 ist $\vartheta_{2,1} = 180^\circ + \vartheta_{1,2}$.

Der Winkel $\vartheta_{1,2} + \psi_1$, den die Parallele zur Abszissenachse in p_1 mit der Tangente an s' bildet, wird von GAUSS Azimut auf dem Sphäroid genannt. In p_2 ist das Azimut auf dem Sphäroid gleich $\vartheta_{2,1} - \psi_2 = 180^\circ + \vartheta_{1,2} - \psi_2$. Infolge der Konformität ist es auch gleich dem Winkel, den das Urbild der Parallelen zur Abszissenachse auf dem Ellipsoid mit der geodätischen Linie s macht.

Es seien c_1 und c_2 die GAUSSschen Meridiankonvergenzen in p_1 und p_2 . Ferner seien $a_{1,2}$ und $a_{2,1}$ die geodätischen Azimute von s in P_1 und P_2 . Dann bestehen die folgenden Beziehungen, vgl. Fig. 5:

$$\begin{aligned} a_{1,2} &= c_1 + \vartheta_{1,2} + \psi_1 \\ a_{2,1} &= c_2 + 180^\circ + \vartheta_{1,2} - \psi_2; \end{aligned} \quad (2)$$

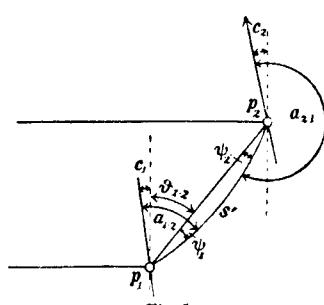


Fig. 5.

mithin ist:

$$a_{2,1} - 180^\circ - a_{1,2} = c_2 - c_1 - (\psi_1 + \psi_2). \quad (3)$$

Der sphäroidische Richtungswinkel α ist der Winkel, den eine Parallele zum Anfangsmeridian mit der geodätischen Linie bildet; er wird ebenso wie das Azimut von Nord über Ost gezählt. Es sei γ der Winkel, den der durch P gehende Meridian mit der Parallelen zum Hauptmeridian macht; γ wird gewöhnlich in der Geodäsie als Meridiantkonvergenz bezeichnet, sie ist von der GAUSSschen Meridiantkonvergenz verschieden. Für die Azimute hat man

$$a_{1,2} = \alpha_{1,2} + \gamma_1 = \alpha_{1,2} + c_1 - (c_1 - \gamma_1), \quad a_{2,1} = \alpha_{2,1} + \gamma_2 = \alpha_{2,1} + c_2 - (c_2 - \gamma_2). \quad (4)$$

Um die Differenz $c - \gamma$ zu bestimmen, falle man von P ein geodätisches Lot auf den Hauptmeridian, seine Darstellung in der Ebene sei die Kurve pq (s. Fig. 6). Bildet diese mit der Verbindungsgeraden der Endpunkte die Winkel ψ_1 und ψ_2 , so ist nach (3), da jetzt $a_{1,2} = 90^\circ$, $a_{2,1} = 270^\circ + \gamma$, $c_1 = 0$ und $c_2 = c$ ist,

$$\gamma = c - (\psi_1 + \psi_2). \quad (5)$$

Bei der Mercator-Projektion der Kugel ist das Bild des auf dem Hauptmeridian senkrecht stehenden Kreisbogens die Ordinate selbst, folglich ist bei ihr $\gamma = c$.

Man kann hieraus schließen, daß beim Ellipsoid die Entwicklung von $c - \gamma$ den Faktor e'^2 haben muß.

Es sei p' der Fußpunkt der Ordinate \bar{y} . Das Bild pq des geodätischen Lotes steht infolge der Konformität in q senkrecht auf der Abszissenachse; mithin wird $\angle p'pq = \psi_1$ und $qp' = \bar{y} \operatorname{tg} \psi_1$, d. i. die Differenz der Abszissen, die zu p und q gehören. Diese kann aber nur sehr klein sein, da sie mit e'^2 multipliziert sein wird; für die Kugel ist sie Null. Setzt man daher in erster Näherung in der Formel (41) S. 102 für ψ_1 die Abszissendifferenz gleich Null, so wird ψ_1 von der Ordnung $e'^2 G l_3$. Die Vernachlässigung, die dadurch hervorgerufen wird, daß man qp' in der Formel für ψ_1 bzw. ψ_2 vernachlässigt, wird mithin erst Fehler von der Ordnung $e'^2 G l_5$ nach sich ziehen. Folglich ist hier nach (41) S. 102 zunächst

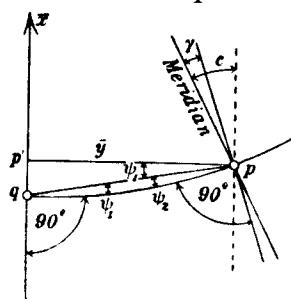


Fig. 6.

$$\psi_1 = \rho'' e_m^2 y_m \left(y_m'^2 + \frac{1}{12} y_m^2 - \frac{1}{3} y_m' y_m \right) + e'^2 G l_4, \quad \psi_2 = \rho'' e_m^2 y_m \left(y_m'^2 + \frac{1}{12} y_m^2 + \frac{1}{3} y_m' y_m \right) + e'^2 G l_4;$$

darin ist nach (40) S. 102

$$y_m = \frac{y}{e_m'} \quad \text{und} \quad y_m' = \frac{1}{2} \frac{y}{e_m'}.$$

e_m^2 und e_m' beziehen sich auf die Mitte von qp' ; es ändert aber an der Genauigkeit der vorstehenden Ausdrücke für ψ_1 und ψ_2 nichts, wenn man sie auf p' bezieht. Es wird also

$$\psi_1 = \frac{1}{6} \rho'' e^2 \left(\frac{y}{e'} \right)^3 + e'^2 G l_4, \quad \psi_2 = \frac{1}{2} \rho'' e^2 \left(\frac{y}{e'} \right)^3 + e'^2 G l_4; \quad (6)$$

folglich geht (5) über in die Gleichung

$$c - \gamma = \frac{2}{3} \rho'' e^2 \left(\frac{y}{e'} \right)^3 + e'^2 G l_4. \quad (7)$$

Nach (11) § 13 S. 39 ist

$$\frac{y}{N'} = \frac{L}{\rho''} \cos B' + Gl_3;$$

man hat daher auch

$$c - \gamma = \frac{2}{3} \rho'' \varepsilon'^2 Q' \sin B' \cos^2 B' \left(\frac{L}{\rho''} \right)^3 + e'^2 Gl_4. \quad (8)$$

§ 31.

Ableitung der linearen Länge der geodätischen Linie und ihrer Richtungswinkel aus den ebenen rechtwinkligen Koordinaten.

In dem vorhergehenden Kapitel wurde die geodätische Linie mittels der aus den ebenen Koordinaten berechneten Entfernung hergeleitet, indem an diese die Reduktionen auf die lineare Länge und auf die Richtungswinkel angebracht wurden. Es sollen nun auch noch Formeln entwickelt werden, die den direkten Zusammenhang zwischen der geodätischen Linie und den ebenen Koordinaten ergeben.

Aus den Gleichungen (1) und (2), § 24 S. 83, folgt für eine von einem festen Punkte P_1 nach P_2 gehende geodätische Linie s :

$$\begin{aligned} s \cos(\vartheta_{1,2} - \psi_2) &= \frac{1}{2} \frac{m_2}{m_0} \frac{\partial s^2}{\partial x_2} \\ s \sin(\vartheta_{1,2} - \psi_2) &= \frac{1}{2} \frac{m_2}{m_0} \frac{\partial s^2}{\partial y_2}, \end{aligned} \quad (9)$$

wo $\vartheta_{1,2}$ das Azimut in plano im Anfangspunkte und $180^\circ + \vartheta_{1,2} - \psi_2$ das GAUSSsche Azimut auf dem Sphäroid in P_2 ist. Benutzt man auch hier die Substitution (5) S. 83:

$$s^2 = \left(\frac{m_0}{m_1} \right)^2 r^2 S \quad \text{mit} \quad r^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2,$$

so wird, wenn wieder

$$\frac{x_2 - x_1}{e_1} = \xi_1 \quad \text{und} \quad \frac{y_2 - y_1}{e_1} = \eta_1 \quad (10)$$

gesetzt wird, wo e_1' wie früher den mittleren Krümmungsradius im Endpunkte von x_1 bedeutet:

$$\begin{aligned} \frac{s}{e_1} \cos(\vartheta_{1,2} - \psi_2) &= \frac{m_0 m_2}{m_1^2} \left(S \xi_1 + \frac{1}{2} (\xi_1^2 + \eta_1^2) \frac{\partial S}{\partial \xi_1} \right) \\ \frac{s}{e_1} \sin(\vartheta_{1,2} - \psi_2) &= \frac{m_0 m_2}{m_1^2} \left(S \eta_1 + \frac{1}{2} (\xi_1^2 + \eta_1^2) \frac{\partial S}{\partial \eta_1} \right). \end{aligned} \quad (11)$$

Hierzu kann man den Wert von $S = S_1 + S_2$ aus (29) § 26 S. 92 entnehmen. Ferner ist noch m_2/m_1 in eine Reihe zu verwandeln. Nun ist

$$\begin{aligned} \frac{m_2}{m_0} &= 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{y_2}{e_2} \right)^2 + \frac{1}{24} \left(\frac{y_2}{e_2} \right)^4 + Gl_6 \\ &= 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{e_1'^2} + \frac{d}{dx_1} \left(x_2 - x_1 \right) \right) (y_1 + (y_2 - y_1))^2 + \frac{1}{24} \left(\frac{y_1 + (y_2 - y_1)}{e_1'} \right)^4 + Gl_6, \end{aligned}$$

worin $\frac{d}{dx_1} \frac{1}{e_1'^2} = -4 \frac{e_1'^2}{e_1^3}$ ist. Mit der Bezeichnung (10) wird daher, wenn man gleichzeitig $\frac{m_1}{m_0}$ einführt:

$$\frac{m_2}{m_1} = 1 + \left(1 - \frac{1}{3} y_1'^2 \right) y_1' \eta_1 + \frac{1}{2} \eta_1^2 + \frac{1}{6} y_1' \eta_1^3 + \frac{1}{24} \eta_1^4 - 2 e_1'^2 \xi_1 (y_1' + \eta_1)^2 + Gl_6.$$

114 Beziehungen zwischen der geodätischen Linie und den ebenen rechtwinkligen Koordinaten ihrer Endpunkte.

Mithin erhält man aus (11):

$$\left. \begin{aligned} \frac{m_1}{m_0} \frac{s}{e_1} \cos(\vartheta_{1,2} - \psi_2) &= \xi_1 \left\{ 1 + \frac{1}{6} \eta_1^2 - \frac{1}{6} y_1' y_2' (\xi_1^2 + \eta_1^2) - \frac{1}{360} \eta_1^2 (16 \xi_1^2 + 13 \eta_1^2) \right\} \\ &\quad + e_1^2 \left\{ y_1'^2 (\xi_1^2 + \eta_1^2) + \frac{4}{3} y_1' \eta_1^3 - \frac{1}{2} \eta_1^2 (\xi_1^2 - \eta_1^2) \right\} + G l_i \\ \frac{m_1}{m_0} \frac{s}{e_1} \sin(\vartheta_{1,2} - \psi_2) &= \eta_1 - \frac{1}{2} y_2' \left(1 - \frac{1}{3} y_1' y_2' \right) (\xi_1^2 + \eta_1^2) + \frac{1}{6} \eta_1 (\xi_1^2 + 2 \eta_1^2) - \frac{1}{24} y_2' (\xi_1^4 - \eta_1^4) \\ &\quad + \frac{1}{360} \xi_1^2 \eta_1 (7 \xi_1^2 + 4 \eta_1^2) + e_1^2 \xi_1^3 \left(\frac{4}{3} y_2' - \frac{1}{3} \eta_1 \right) + G l_i. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Dabei ist noch

$$\frac{y_1}{e_1} = y_1' \quad \text{und} \quad \frac{y_2}{e_1} = y_2' \quad (10^*)$$

gesetzt worden.

Vertauscht man die Endpunkte der geodätischen Linien miteinander, so geht

$$\xi_1 \text{ in } \frac{x_1 - x_2}{e_2} = -\xi_2, \quad \eta_1 \text{ in } \frac{y_1 - y_2}{e_2} = -\eta_2, \quad y_1' \text{ in } \frac{y_2}{e_2} = y_2'', \quad y_2' \text{ in } \frac{y_1}{e_2} = y_1'', \quad m_1 \text{ in } m_2, \quad e_1^2 \text{ in } e_2^2$$

und $\vartheta_{1,2} - \psi_2$ in $180^\circ + \vartheta_{1,2} + \psi_1$ über.

An Stelle von $\vartheta_{1,2} - \psi_2$ soll in (12) jetzt der Richtungswinkel $a_{2,1}$ eingeführt werden. Nach (2) und (4) ist

$$\vartheta_{1,2} - \psi_2 = a_{2,1} - 180^\circ - (c_2 - \gamma_2),$$

worin nach (7) für Bogenmaß

$$c_2 - \gamma_2 = \frac{2}{3} e_2^2 \left(\frac{y_2}{e_2} \right)^3 + e'^2 G l_4$$

ist. e^2 und ϱ' kann man in diesem Ausdrucke auch auf den Punkt P_1 beziehen ohne die Ordnung der vernachlässigten Glieder zu ändern.

Es ist nun

$$\cos(\vartheta_{1,2} - \psi_2) = -\cos a_{2,1} - (c_2 - \gamma_2) \sin a_{2,1} + e'^4 G l_6$$

$$\sin(\vartheta_{1,2} - \psi_2) = -\sin a_{2,1} + (c_2 - \gamma_2) \cos a_{2,1} + e'^4 G l_6;$$

setzt man

$$x_2 - x_1 = \Delta x, \quad y_2 - y_1 = \Delta y, \quad \Delta x^2 + \Delta y^2 = r^2, \quad \frac{1}{2} (y_1 + y_2) = y_m, \quad (13)$$

so folgt daher aus (12):

$$\left. \begin{aligned} \frac{m_1}{m_0} s \cos a_{2,1} &= -\Delta x \left(1 + \frac{\Delta y^2}{6 e_1'^2} + \frac{\Delta y^4}{120 e_1'^4} - \frac{r^2}{6 e_1'^4} \left(y_m^2 + \frac{1}{60} \Delta y^2 \right) \right) \\ &\quad - \frac{e_1^2}{e_1'^3} \left(\frac{1}{2} r^2 (2 y_1^2 - \Delta y^2) + \frac{2}{3} y_2 \Delta y (2 \Delta y^2 - y_2^2) - \frac{1}{3} \Delta y^4 \right) + e_1' G l_i \\ \frac{m_1}{m_0} s \sin a_{2,1} &= -\Delta y \left(1 - \frac{\Delta x^2}{6 e_1'^2} + \frac{\Delta x^4}{120 e_1'^4} \right) + \frac{r^2}{e_1'^2} \left(\frac{y_2}{2} \left(1 - \frac{y_m^2}{3 e_1'^2} + \frac{\Delta x^2}{12 e_1'^2} \right) - \frac{\Delta y}{3} \left(1 + \frac{\Delta x^2}{30 e_1'^2} \right) \right) \\ &\quad - \frac{e_1^2}{e_1'^3} \Delta x \left(\frac{2}{3} y_2^3 + \frac{1}{3} \Delta x^2 (4 y_2 - \Delta y) \right) + e_1' G l_i. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Durch Vertauschung der Indizes erhält man hieraus:

$$\left. \begin{aligned} \frac{m_2}{m_0} s \cos \alpha_{1.2} &= \Delta x \left(1 + \frac{\Delta y^2}{6 \varrho_2'^{-2}} + \frac{\Delta y^4}{120 \varrho_2'^{-4}} - \frac{r^2}{6 \varrho_2'^{-4}} \left(y_m^2 + \frac{1}{60} \Delta y^2 \right) \right) \\ &\quad - \frac{\varrho_2'^{-2}}{6 \varrho_2'^{-2}} \left(\frac{1}{2} r^2 (2y_2^2 - \Delta y^2) - \frac{2}{3} y_1 \Delta y (2\Delta y^2 - y_1^2) - \frac{1}{3} \Delta y^4 \right) + \varrho_2' G l_7, \\ \frac{m_2}{m_0} s \sin \alpha_{1.2} &= \Delta y \left(1 - \frac{\Delta x^2}{6 \varrho_2'^{-2}} + \frac{\Delta x^4}{120 \varrho_2'^{-4}} \right) + \frac{r^2}{6 \varrho_2'^{-2}} \left(\frac{y_1}{2} \left(1 - \frac{y_m^2}{3 \varrho_2'^{-2}} + \frac{\Delta x^2}{12 \varrho_2'^{-2}} \right) + \frac{\Delta y}{3} \left(1 + \frac{\Delta x^2}{30 \varrho_2'^{-2}} \right) \right) \\ &\quad + \frac{\varrho_2'^{-2}}{6 \varrho_2'^{-2}} \Delta x \left(\frac{2}{3} y_1^3 + \frac{1}{3} \Delta x^2 (4y_1 + \Delta y) \right) + \varrho_2' G l_7. \end{aligned} \right\} \quad (14*)$$

In (14) gehören ϱ' und ϵ^2 zum Argument x_1 , in (14*) zum Argument x_2 ; statt dessen sollen diejenigen Werte ϱ'_m und ϵ_m^2 eingeführt werden, die zu $x_m = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$ gehören. Man kann aber in den vorstehenden Formeln ϵ_1^2 und ϵ_2^2 sofort durch ϵ_m^2 ersetzen, ohne daß dadurch die Ordnung der vernachlässigten Glieder geändert wird. Es ist nun

$$\frac{1}{\varrho_1'^{-2}} = \frac{1}{\varrho_m'^{-2}} \left(1 + 2 \epsilon_m^2 \frac{\Delta x}{\varrho_m'} + \dots \right), \quad \frac{1}{\varrho_2'^{-2}} = \frac{1}{\varrho_m'^{-2}} \left(1 - 2 \epsilon_m^2 \frac{\Delta x}{\varrho_m'} + \dots \right).$$

Die ersten Teile der Formeln (14) und (14*) erfahren also hierdurch nur die Änderung, daß ϱ'_m an Stelle von ϱ_1' und ϱ_2' tritt; die zweiten Teile dagegen lauten jetzt

$$\left. \begin{aligned} \text{in } \frac{m_2}{m_0} s \cos \alpha_{1.2} &: - \frac{\epsilon_m^2}{\varrho_m'^{-2}} \left(\Delta x^2 \left(y_2^2 - \frac{1}{6} \Delta y^2 \right) + \frac{2}{3} y_m \Delta y \left(y_m^2 + \frac{1}{4} \Delta y^2 \right) \right) \\ \text{„ } \frac{m_2}{m_0} s \sin \alpha_{1.2} &: + \frac{\epsilon_m^2}{\varrho_m'^{-2}} \Delta x \left(\frac{2}{3} y_m^2 (y_1 - \Delta y) - \frac{1}{2} y_2 \Delta y^2 + \frac{1}{3} y_1 \Delta x^2 \right) \\ \text{„ } \frac{m_1}{m_0} s \cos \alpha_{2.1} &: - \frac{\epsilon_m^2}{\varrho_m'^{-2}} \left(\Delta x^2 \left(y_1^2 - \frac{1}{6} \Delta y^2 \right) - \frac{2}{3} y_m \Delta y \left(y_m^2 + \frac{1}{4} \Delta y^2 \right) \right) \\ \text{„ } \frac{m_1}{m_0} s \sin \alpha_{2.1} &: - \frac{\epsilon_m^2}{\varrho_m'^{-2}} \Delta x \left(\frac{2}{3} y_m^2 (y_2 + \Delta y) - \frac{1}{2} y_1 \Delta y^2 + \frac{1}{3} y_2 \Delta x^2 \right). \end{aligned} \right\} \quad (14**)$$

Vernachlässigt man in (14) und (14*) schon die Glieder $\varrho' G l_5$, so wird:

$$\left. \begin{aligned} s \cos \alpha_{1.2} &= + \Delta x \left(1 - \frac{3y_2^2 - \Delta y^2}{6 \varrho_2'^{-2}} \right) \\ s \sin \alpha_{1.2} &= + \Delta y \left(1 - \frac{12y_m^2 + \Delta y^2}{24 \varrho_2'^{-2}} \right) + (2y_1 + y_2) \frac{\Delta x^2}{6 \varrho_2'^{-2}}, \\ s \cos \alpha_{2.1} &= - \Delta x \left(1 - \frac{3y_1^2 - \Delta y^2}{6 \varrho_1'^{-2}} \right) \\ s \sin \alpha_{2.1} &= - \Delta y \left(1 - \frac{12y_m^2 + \Delta y^2}{24 \varrho_1'^{-2}} \right) + (y_1 + 2y_2) \frac{\Delta x^2}{6 \varrho_1'^{-2}}. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Der mittlere Krümmungsradius ϱ' kann hierbei zu irgendeinem Werte zwischen x_1 und x_2 genommen werden.

Die Formeln vereinfachen sich, wenn der Anfangspunkt der geodätischen Linie dem Anfangspunkte der ebenen rechtwinkligen Koordinaten entspricht.

Sind jetzt x, y die zum Endpunkte der geodätischen Linie gehörigen Koordinaten und c die Konvergenz des Meridians in ihm, so wird mit Benutzung von (7):

$$s \cos a_{1,2} = x \left(1 - \frac{y^2}{3 \epsilon_m'^2} - \frac{2y^2(x^2 - 2y^2)}{45 \epsilon_m'^4} \right) + \epsilon_m^2 \frac{y^2(x^2 - y^2)}{6 \epsilon_m'^3} + \varrho_m' G l_7 \quad (16)$$

$$s \sin a_{1,2} = y \left(1 + \frac{x^2 - y^2}{6 \epsilon_m'^2} + \frac{7x^4 - 26x^2y^2 + 15y^4}{360 \epsilon_m'^4} \right) + \epsilon_m^2 \frac{xy(x^2 - y^2)}{3 \epsilon_m'^3} + \varrho_m' G l_7$$

und

$$s \cos(a_{2,1} - c) = -x \left(1 + \frac{y^2}{6 \epsilon_m'^2} - \frac{y^2(16x^2 + 13y^2)}{360 \epsilon_m'^4} \right) + \epsilon_m^2 \frac{y^2(x^2 - 3y^2)}{6 \epsilon_m'^3} + \varrho_m' G l_7 \quad (17)$$

$$s \sin(a_{2,1} - c) = -y \left(1 - \frac{2x^2 + y^2}{6 \epsilon_m'^2} - \frac{8x^4 - 4x^2y^2 - 15y^4}{360 \epsilon_m'^4} \right) - \epsilon_m^2 \frac{xy(x^2 - y^2)}{3 \epsilon_m'^3} + \varrho_m' G l_7.$$

ϱ_m' und ϵ_m^2 gehören hier zum Endpunkte der Abszisse $\frac{x}{2}$. Anstelle der letzten beiden Gleichungen kann man auch die Gl. (25*) des folgenden Paragraphen benutzen.

§ 32.

Formeln mit einem mittleren Richtungswinkel.

Mittels der Formeln (14) und (14*) mit (14**), in denen ϱ_m' eingeführt ist, lässt sich ein Ausdruck für

$$\Delta a = a_{2,1} - 180^\circ - a_{1,2} \quad (18)$$

gewinnen. Zunächst findet man aus ihnen:

$$\begin{aligned} s \left(\frac{m_1}{m_0} \cos a_{2,1} + \frac{m_2}{m_0} \cos a_{1,2} \right) &= -\epsilon_m^2 \frac{\Delta x^2}{\epsilon_m'^3} \left(2y_m^2 + \frac{1}{6} \Delta y^2 \right) + \varrho_m' G l_7 \\ s \left(\frac{m_1}{m_0} \sin a_{2,1} + \frac{m_2}{m_0} \sin a_{1,2} \right) &= \frac{r^2}{\epsilon_m'^2} y_m \left(1 - \frac{y_m^2}{3 \epsilon_m'^2} + \frac{\Delta x^2}{12 \epsilon_m'^2} \right) \\ &\quad - \epsilon_m^2 \frac{\Delta x \Delta y}{\epsilon_m'^3} \left(2y_m^2 + \frac{1}{6} \Delta y^2 + \frac{1}{3} r^2 \right) + \varrho_m' G l_7. \end{aligned}$$

Multipliziert man die erste dieser Gleichungen mit $-\frac{m_2}{m_0} s \sin a_{1,2} = -\Delta y + \varrho_m' G l_3$, die zweite mit $\frac{m_1}{m_0} s \cos a_{1,2} = \Delta x \left(1 + \frac{\Delta y^2}{6 \epsilon_m'^2} \right) + \varrho_m' G l_5$ und addiert beide, so ergibt sich:

$$\frac{m_1 m_2}{m_0^2} s^2 \sin(a_{2,1} - a_{1,2}) = r^2 \left\{ \frac{y_m \Delta x}{\epsilon_m'^2} \left(1 - \frac{y_m^2}{3 \epsilon_m'^2} + \frac{\Delta x^2}{12 \epsilon_m'^2} + \frac{\Delta y^2}{6 \epsilon_m'^2} \right) - \frac{1}{3} \epsilon_m^2 \frac{\Delta x^2 \Delta y}{\epsilon_m'^3} \right\} + \varrho_m'^2 G l_8.$$

Nun wird aber nach (14) und (14*)

$$\frac{m_1^2}{m_0^2} s^2 = r^2 \left(1 - \frac{y_1 \Delta y}{\epsilon_m'^2} + \frac{2}{3} \frac{\Delta y^2}{\epsilon_m'^2} \right) + \varrho_m'^2 G l_6$$

$$\frac{m_2^2}{m_0^2} s^2 = r^2 \left(1 + \frac{y_1 \Delta y}{\epsilon_m'^2} + \frac{2}{3} \frac{\Delta y^2}{\epsilon_m'^2} \right) + \varrho_m'^2 G l_6,$$

also

$$\frac{m_1 m_2}{m_0^2} s^2 = r^2 \left(1 + \frac{1}{6} \frac{\Delta y^2}{\epsilon_m'^2} \right) + \varrho_m'^2 G l_6;$$

folglich erhält man:

$$\sin(\alpha_{2.1} - 180^\circ - \alpha_{1.2}) = -\frac{y_m \Delta x}{e_m'^2} \left(1 - \frac{y_m^2}{3 e_m'^2} + \frac{\Delta x^2}{12 e_m'^2}\right) + \frac{1}{3} e_m^2 \frac{\Delta x^2 \Delta y}{e_m'^3} + G l_6$$

und hieraus in Sekunden:

$$\Delta \alpha = -\rho'' \frac{\Delta x}{e_m'} \left\{ \frac{y_m}{e_m'} \left(1 - \frac{y_m^2}{3 e_m'^2} + \frac{\Delta x^2}{12 e_m'^2}\right) - \frac{1}{3} e_m^2 \frac{\Delta x \Delta y}{e_m'^3} + G l_6 \right\}. \quad (19)$$

Zu demselben Ergebnis gelangt man, wenn man nach (3) und (4) ansetzt:

$$\alpha_{2.1} - 180^\circ - \alpha_{1.2} = \Delta \alpha = (c_2 - \gamma_2) - (c_1 - \gamma_1) - (\psi_1 + \psi_2),$$

und hierin den Wert von $c - \gamma$ nach (7) und den von $\psi_1 + \psi_2$ nach (41) § 28 S. 102 einführt.

Wenn y_m sehr groß ist, so muß man in $\Delta \alpha$ noch die am größten werdenden Glieder 6. Ordnung mitnehmen. Alsdann kommt zu dem Ausdrucke rechter Hand (19) noch hinzu:

$$-\rho'' \frac{\Delta x}{e_m'} \left\{ \frac{2}{15} \left(\frac{y_m}{e_m'}\right)^5 + \frac{2}{3} e_m^2 \left(\frac{y_m}{e_m'}\right)^3 \right\}. \quad (19^*)$$

Mit Hilfe von (19) kann man nun Formeln erhalten, die anstelle von $\alpha_{1.2}$ und $\alpha_{2.1}$ einen mittleren Richtungswinkel

$$\alpha = \frac{1}{2} (\alpha_{2.1} - 180^\circ + \alpha_{1.2}) \quad (20)$$

ergeben.

Aus den Gleichungen für $\frac{m_2}{m_0} s \cos \alpha_{1.2}$ und $\frac{m_1}{m_0} s \cos \alpha_{2.1}$ (mit (14**)) bilde man den Ausdruck $s(\cos \alpha_{1.2} + \cos(\alpha_{2.1} - 180^\circ))$, in dem man $\frac{m_0}{m_2}$ und $\frac{m_0}{m_1}$ in $\frac{m_0}{m_m}$ umwandelt, wo m_m sich auf den Punkt $\frac{1}{2}(x_1 + x_2) = x_m$, $\frac{1}{2}(y_1 + y_2) = y_m$ bezieht. Dasselbe geschieht für $s(\sin \alpha_{1.2} + \sin(\alpha_{2.1} - 180^\circ))$. Mittels des TAYLORSchen Satzes findet sich:

$$\begin{aligned} m_0 \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) &= 2 \frac{m_0}{m_m} \left\{ 1 - \frac{1}{8} \left(1 - 2 \left(\frac{y_m}{e_m'}\right)^2\right) \left(\frac{\Delta y}{e_m'}\right)^2 + \frac{5}{384} \left(\frac{\Delta y}{e_m'}\right)^4 + e_m^2 \frac{y_m \Delta x \Delta y}{e_m'^3} + G l_6 \right\} \\ \frac{m_0}{m_1} &= \frac{m_0}{m_m} \left\{ 1 + \frac{1}{2} \frac{y_m \Delta y}{e_m'^2} - \frac{1}{8} \left(\frac{\Delta y}{e_m'}\right)^2 + G l_4 \right\} \\ \frac{m_0}{m_2} &= \frac{m_0}{m_m} \left\{ 1 - \frac{1}{2} \frac{y_m \Delta y}{e_m'^2} - \frac{1}{8} \left(\frac{\Delta y}{e_m'}\right)^2 + G l_4 \right\}. \end{aligned}$$

Mit Benutzung von (19) wird ferner:

$$s(\cos \alpha_{1.2} + \cos(\alpha_{2.1} - 180^\circ)) = 2 s \cos \alpha \left(1 - \frac{1}{8} \frac{y_m^2 \Delta x^2}{e_m'^4} + G l_6\right)$$

$$s(\sin \alpha_{1.2} + \sin(\alpha_{2.1} - 180^\circ)) = 2 s \sin \alpha \left(1 - \frac{1}{8} \frac{y_m^2 \Delta x^2}{e_m'^4} + G l_6\right).$$

Ersetzt man nun die Ausdrücke linker Hand durch ihre Werte, so ergibt sich hieraus:

$$\left. \begin{aligned} s \cos \alpha &= \frac{m_0}{m_m} \left\{ \Delta x \left(1 + \frac{\Delta y^2}{24 e_m'^2} \left(1 + 2 \frac{y_m^2}{e_m'^2} - \frac{13 \Delta x^2}{240 e_m'^2}\right) - \frac{\Delta x^2}{24 e_m'^2} \left(\frac{y_m^2}{e_m'^2} + \frac{\Delta y^2}{15 e_m'^2}\right)\right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{2}{3} e_m^2 \frac{y_m \Delta y}{e_m'^3} \left(y_m^2 + \frac{1}{4} \Delta y^2\right) + e_m' G l_7 \right\} \\ s \sin \alpha &= \frac{m_0}{m_m} \left\{ \Delta y \left(1 - \frac{\Delta y^2}{24 e_m'^2} \left(1 - 2 \frac{y_m^2}{e_m'^2} - \frac{\Delta x^2}{60 e_m'^2} - \frac{\Delta y^2}{16 e_m'^2}\right) - \frac{\Delta x^2}{12 e_m'^2} \left(1 + \frac{y_m^2}{2 e_m'^2} + \frac{\Delta x^2}{60 e_m'^2}\right)\right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{2}{3} e_m^2 \frac{y_m \Delta x}{e_m'^3} \left(y_m^2 + \frac{1}{2} \Delta x^2 + \frac{3}{4} \Delta y^2\right) + e_m' G l_7 \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Ist α hieraus berechnet, so ist weiter

$$\alpha_{1,2} = \alpha - \frac{1}{2} \Delta \alpha, \quad \alpha_{2,1} - 180^\circ = \alpha + \frac{1}{2} \Delta \alpha. \quad (22)$$

Aus den Gl. (21) folgt noch, mit $\tan \vartheta = \frac{\Delta y}{\Delta x}$,

$$\tan \alpha = \tan \vartheta \left(1 - \frac{r^2}{12 \rho_m'^2} + \frac{r^2(-r^2 + 7\Delta y^2)}{720 \rho_m'^4} \right) + \frac{2}{3} \epsilon_m^2 \frac{y_m}{\rho_m'} \left(\frac{1}{2} \frac{r^2}{\rho_m'^2} + \left(\frac{y_m^2}{\rho_m'^2} + \frac{1}{4} \frac{\Delta y^2}{\rho_m'^2} \right) \sec^2 \vartheta \right) + Gl_6$$

und

$$s^2 = \frac{m_0^2}{m_m^2} r^2 \left\{ 1 - \frac{\Delta y^2}{12 \rho_m'^2} \left(1 - 2 \frac{y_m^2}{\rho_m'^2} - \frac{\Delta y^2}{12 \rho_m'^2} \right) - \frac{\Delta x^2}{12 \rho_m'^2} \left(\frac{y_m^2}{\rho_m'^2} + \frac{\Delta y^2}{60 \rho_m'^2} \right) + \frac{2}{3} \epsilon_m^2 \frac{y_m \Delta x \Delta y}{\rho_m'^3} + Gl_6 \right\}. \quad (21^*)$$

Wird bei der letzten Gleichung zu Logarithmen übergegangen, so wird wieder die Gl. (32**) § 27 S. 96 erhalten.

Werden in (21) und (19) die Glieder $\rho_m' Gl_5$ und Gl_4 fortgelassen, so hat man:

$$\left. \begin{aligned} s \cos \alpha &= \Delta x \left(1 - \frac{12 y_m^2 - \Delta y^2}{24 \rho'^2} \right) \\ s \sin \alpha &= \Delta y \left(1 - \frac{12 y_m^2 + 2 \Delta x^2 + \Delta y^2}{24 \rho'^2} \right) \\ \Delta \alpha &= -\rho'' \frac{y_m \Delta x}{\rho'^2}, \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

worin ρ' zu irgendeinem x zwischen x_1 und x_2 gehört.

Ist der Anfangspunkt der geodätischen Linie gleichzeitig der Koordinatenanfangspunkt, so folgt aus (21), wenn x, y zu ihrem Endpunkten gehören:

$$\begin{aligned} s \cos \alpha &= x \left(1 - \frac{y^2}{12 \rho_m'^2} - \frac{38 x^2 y^2 + 31 y^4}{2880 \rho_m'^4} \right) - \epsilon_m^2 \frac{y^4}{6 \rho_m'^3} + \rho_m' Gl_7 \\ s \sin \alpha &= y \left(1 - \frac{x^2 + 2y^2}{12 \rho_m'^2} + \frac{-2x^4 + x^2 y^2 + 60 y^4}{1440 \rho_m'^4} \right) + \epsilon_m^2 \frac{xy(x^2 + 2y^2)}{6 \rho_m'^3} + \rho_m' Gl_7 \\ &= y \left(1 - \frac{x^2 + 2y^2}{12 \rho_m'^2} + \frac{-2x^4 + x^2 y^2 + 60 y^4}{1440 \rho_m'^2} \right) + \rho_m' Gl_7 \end{aligned} \quad (24)$$

und aus (19):

$$\Delta \alpha = -\rho'' \frac{xy}{2 \rho_m'^2} \left(1 + \frac{x^2 - y^2}{12 \rho_m'^2} - \frac{2}{3} \epsilon_m^2 \frac{x}{\rho_m'} \right) + Gl_6. \quad (25)$$

Da hier nach (4) $\alpha_{1,2} = \alpha_{1,2}$ und $\alpha_{2,1} = \alpha_{2,1} - c + (c - \gamma)$ ist, so wird mit dem Werte von $c - \gamma$ nach (7) weiter aus (25) erhalten:

$$\alpha_{2,1} - 180^\circ - \alpha_{1,2} = c - \rho'' \frac{y}{\rho_m'} \left\{ \frac{x}{2 \rho_m'} \left(1 + \frac{x^2 - y^2}{12 \rho_m'^2} \right) - \epsilon_m^2 \frac{x^2 - 2y^2}{3 \rho_m'^2} \right\} + Gl_6. \quad (25^*)$$

In diesen Gleichungen gehören ρ_m' und ϵ_m^2 zu $\frac{1}{2}x$, ρ_m' zu x ; ferner ist c die Konvergenz des Meridians in x, y . Das Klammerglied in (25*) ergibt sich in Sekunden.

§ 33.

Zahlenbeispiel.

Es sind die ebenen rechtwinkligen Koordinaten der Bildpunkte zweier Punkte P_1 und P_2 des Erdellipsoids gegeben:

$$\begin{array}{ll} x_1 = 5348940,146^m & y_1 = 596724,110^m, \\ x_2 = 5418141,733 & y_2 = 630446,600; \end{array}$$

aus ihnen sollen die lineare Länge der geodätischen Linie $P_1 P_2 = s$ und ihre Azimute $A_{1,2}$ und $A_{2,1}$ abgeleitet werden. Die Abszissen sind vom Äquator an gerechnet.

Hier nach ist

$$\begin{array}{ll} \Delta x = 69201,587 & \Delta y = 33722,490 \\ x_m = 5383540,9, & y_m = 613585,4; \end{array}$$

dem Werte von x_m entspricht $B'_m = 48^\circ 35,431$ und diesem $\varrho'_m \dots 6,8048228$; folglich wird

$$\frac{y_m}{\varrho'_m} = y'_m \dots 8,9830522 - 10, \quad \frac{\Delta x}{\varrho'_m} = \xi_m \dots 8,03529 - 10, \quad \frac{\Delta y}{\varrho'_m} = \eta_m \dots 7,72310 - 10;$$

ferner

$$\varepsilon'^2_m = e'^2 \cos^2 B'_m \dots 7,4683 - 10, \quad \varepsilon^2_m = \frac{\varepsilon'^2_m \operatorname{tg} B'_m}{\sqrt{1 + \varepsilon'^2_m}} \dots 7,5222 - 10.$$

Zunächst ist nun das Vergrößerungsverhältnis $\frac{m_m}{m_0}$ zu berechnen; aus (29*) § 16 S. 48 folgt dafür:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} M y'^2_m &= +0,002008439 \\ -\frac{1}{12} M y'^4_m &= -30,96 \\ +\frac{1}{45} M y'^6_m &= +8 \\ +\frac{1}{6} M \varepsilon'^2_m y'^4_m &= +18 \\ \hline \frac{m_m}{m_0} &= 0,002005369 \end{aligned}$$

Jetzt ist alles vorhanden, um die Gl. (21) anwenden zu können; man erhält:

$\frac{m_0}{m_m} \Delta x$	$= 68882,7830$	$\frac{m_0}{m_m} \Delta y$	$= 33567,1342$
$+ \text{ " } \cdot \frac{1}{24} \eta^2_m$	$= +802$	$- \text{ " } \cdot \frac{1}{24} \eta^2_m$	$= -391$
$+ \text{ " } \cdot \text{ " } \cdot 2y'^2_m$	$= +15$	$+ \text{ " } \cdot \text{ " } \cdot 2y'^2_m$	$= +6$
$- \text{ " } \cdot \text{ " } \cdot \frac{13}{240} \eta^2_m$	$= -$	$+ \text{ " } \cdot \text{ " } \cdot \frac{1}{60} \xi^2_m$	$= +$
$- \text{ " } \cdot \frac{1}{24} \xi^2_m \cdot y'^2_m$	$= -31$	$+ \text{ " } \cdot \text{ " } \cdot \frac{1}{16} \eta^2_m$	$= +$
$- \text{ " } \cdot \text{ " } \cdot \frac{1}{15} \eta^2_m$	$= -$	$- \text{ " } \cdot \frac{1}{12} \xi^2_m$	$= -3291$
$- \frac{m_0}{m_m} \Delta y \cdot \frac{2}{3} \varepsilon^2_m y'_m \cdot y'^2_m$	$= -663$	$- \text{ " } \cdot \text{ " } \cdot \frac{1}{2} y'^2_m$	$= -15$
$- \text{ " } \cdot \text{ " } \cdot \frac{1}{4} \eta^2_m$	$= -$	$- \text{ " } \cdot \text{ " } \cdot \frac{1}{60} \xi^2_m$	$= -$
$s \cos \alpha = 68882,7953$		$+ \frac{m_0}{m_m} \Delta x \cdot \frac{2}{3} \varepsilon^2_m y'_m \cdot y'^2_m$	$= +1360$
		$+ \text{ " } \cdot \text{ " } \cdot \frac{1}{2} \xi^2_m$	$= +8$
		$+ \text{ " } \cdot \text{ " } \cdot \frac{3}{4} \eta^2_m$	$= +3$
		$s \sin \alpha = 33566,9022$	

und hieraus:

$$\begin{aligned}
 s \sin \alpha &\cdots 4,525 9112 63 & 9,641 5339 04 \cdots \sin \alpha \\
 s \cos \alpha &\cdots 4,838 1107 63 & 9,953 7334 04 \cdots \cos \alpha \\
 \operatorname{tg} \alpha &\cdots 9,687 8005 00 \\
 \alpha &= 25^{\circ} 58' 48'', 6716 & 4,884 3773 59 = \log s.
 \end{aligned}$$

Weiter ist nach (19):

$$\begin{aligned}
 -\rho'' \xi_m \cdot y'_m &= -215'', 1644 \\
 + \quad " \cdot " \cdot \frac{1}{3} y'^2_m &= + \quad 6634 \\
 - \quad " \cdot " \cdot \frac{1}{12} \xi_m^2 &= - \quad 21 \\
 + \quad " \cdot \frac{1}{3} \epsilon_m^2 \xi_m y_m &= + \quad 1 \\
 \Delta \alpha &= -214'', 5030;
 \end{aligned}$$

folglich ergibt sich nach (22):

$$\begin{aligned}
 \alpha &= 25^{\circ} 58' 48'', 6716 \\
 \frac{1}{2} \Delta \alpha &= - \quad 147, 2515 \\
 \alpha_{1,2} &= 26^{\circ} 0' 35'', 923 \\
 \alpha_{2,1} &= 205 57 1, 420.
 \end{aligned}$$

Der Übergang von den Richtungswinkel zu den Azimuten erfolgt nach (4). Dazu ist die GAUSSSCHE Meridankonvergenz c und die Differenz $c - \gamma$ zu berechnen. Die Berechnung der erstenen in den beiden Endpunkten P_1 und P_2 geschieht nach § 18 I S. 55.

	P_1	P_2
R' =	48°16'45'',5510	48°54'6'',1068
y ...	5,775 7735 85	5,799 6483 07
N' ...	6,805 4524 00	6,805 4680 79
η' ...	8,970 3211 85	8,994 1802 28
$- \frac{1}{3} M \eta'^2$ =	- 1 2627 16	- 1 4093 65
$+ \frac{7}{90} M \eta'^4$ =	+ 25 70	+ 32 02
$- \frac{62}{2835} M \eta'^6$ =	- 6	- 9
$\sin u'$...	8,969 0610 33	8,992 7740 56
$\operatorname{tg} B'$...	0,049 8225 52	0,059 3324 02
$+ \mathfrak{B}_1 \eta'^2$ =	+ 37 80	+ 41 16
$+ \mathfrak{B}_2 \eta'^4$ =	+ 74	+ 92
$- \mathfrak{B}_3 \eta'^6$ =	.	.
$\operatorname{tg} c$...	9,018 8874 39	9,052 1106 66
c =	5°57'45'',4889	6°25'58'',2414

Die Werte von B'_1 und B'_2 gehören zu x_1 und x_2 , sie sind aus einer Tafel der Meridianbogen von O. KOLL entnommen.

Die Differenzen $c_1 - \gamma_1$ und $c_2 - \gamma_2$ erhält man nach (7), dabei kann man beidemal ϵ_m^2 und ρ'_m statt ϵ^2 und ρ' an den Endpunkten nehmen.

P_1	P_2
$\frac{2}{3} \rho'' \dots 5,1383$	5,1383
$\epsilon_m^2 \dots 7,5222$	7,5222
$y_m'^3 \dots 6,9129$	6,9845
$c - \gamma \dots 9,5734$	9,6450
$c - \gamma = 0'',3744$	0'',4416.

Stellt man jetzt nach (4) zusammen, so ergibt sich:

$$\begin{array}{ll|ll} a_{1,2} = 26^\circ 0'35'',923 & a_{2,1} = 205^\circ 57' 1'',420 \\ c_1 = 5 57 45 ,489 & c_2 = 6 25 58 ,241 \\ -(c_1 - \gamma_1) = -0 ,374 & -(c_2 - \gamma_2) = -0 ,442 \\ a_{1,2} = 31^\circ 58' 21'',038 & a_{2,1} = 212^\circ 22' 59'',219. \end{array}$$

Hätte man zur Berechnung von Δa noch die Glieder aus (19*) hinzugezogen, so müßte zu dem vorher angegebenen Werte von Δa noch hinzugefügt werden:

$$-\rho'' \xi_m \left(\frac{2}{3} \epsilon_m^2 y_m'^3 + \frac{2}{15} y_m'^5 \right) = -0'',0039 - 0'',0025 = -0'',0064,$$

so daß also $\frac{1}{2} \Delta a = -1'47'',2547$ ist. Mit diesem Werte würde aber

$$\begin{array}{ll} a_{1,2} = 26^\circ 0'35'',926 & a_{2,1} = 205^\circ 57' 1'',417, \\ \text{mithin} & \\ a_{1,2} = \underline{\underline{31^\circ 58' 21'',041}} & a_{2,1} = \underline{\underline{212^\circ 22' 59'',216}}. \end{array}$$

Wendet man zur Ableitung der Azimute die Formeln (2) an, in denen ψ_1 und ψ_2 nach den früher gegebenen Formeln (41) § 28 S. 102 berechnet werden, so findet man (s. § 46 II):

$$\begin{array}{ll|ll} \vartheta_{1,2} = 25^\circ 58' 49'',248 & 180^\circ + \vartheta_{1,2} = 205^\circ 58' 49'',248 \\ c_1 = 5 57 45 ,489 & c_2 = 6 25 58 ,241 \\ + \psi_1 = 1 46 ,303 & - \psi_2 = -1 48 ,274 \\ a_{1,2} = 31^\circ 58' 21'',040 & a_{2,1} = 212^\circ 22' 59'',215. \end{array}$$

Die Berechnung der linearen Länge der geodätischen Linie s mit Hilfe der früheren Entwicklung (32) § 27 S. 94 liefert (s. § 46 II):

$$\begin{aligned} \log s - \log \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} &= -0,002\,0058\,8 \\ \log \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} &= 4,886\,3832\,4 \\ \log s &= 4,884\,3773\,6, \end{aligned}$$

in Übereinstimmung mit dem vorher gefundenen Werte.

Die Rechnung nach (32) § 27 und (41) § 28 ist etwas genauer, weil in diesen Formeln die am merkbarsten werdenden Glieder 6. Ordnung mitgenommen sind.

§ 34.

Ableitung der Differenzen der ebenen Koordinaten aus der linearen Länge und der Richtung der geodätischen Linie.

Sind die lineare Länge s und der Richtungswinkel $\alpha_{1,2}$ einer geodätischen Linie, ferner die zu ihrem Anfangspunkte gehörigen ebenen rechtwinkligen Koordinaten gegeben, so sollen jetzt hieraus die Koordinaten des Endpunktes bestimmt werden. Diese findet man aber mittels der Δx und Δy , die sich durch Umkehrung der Gleichungen (14*) ergeben. Wird

$$\frac{m_2}{m_0} s \cos \alpha_{1,2} = u_1, \quad \frac{m_2}{m_0} s \sin \alpha_{1,2} = v_1 \quad (26)$$

gesetzt, so erhält man:

$$\left. \begin{aligned} \Delta x &= u_1 \left\{ 1 - \frac{v_1^2}{6 \varrho_2'^2} + \frac{v_1^2 (4u_1^2 + 7v_1^2)}{40 \varrho_2'^4} + \frac{s^2 y_1}{6 \varrho_2'^4} (y_1 + 2v_1) \right\} \\ &\quad + \frac{\varrho_2'^2}{3 \varrho_2'^3} (y_1^2 (3s^2 + 2v_1 y_1) + \frac{1}{2} v_1 (4y_1 + v_1) (3s^2 - 2v_1^2)) + \varrho_2' G l_7 \\ \Delta y &= v_1 \left(1 - \frac{u_1^2 + 2v_1^2}{6 \varrho_2'^2} + \frac{u_1^4 + 32u_1^2v_1^2 + 40v_1^4}{120 \varrho_2'^4} \right) - \frac{s^2 y_1}{2 \varrho_2'^2} \left(1 + \frac{2y_1(y_1 + v_1)}{3 \varrho_2'^2} - \frac{u_1^2 + 9v_1^2}{12 \varrho_2'^2} \right) \\ &\quad - \frac{\varrho_2'^2}{3 \varrho_2'^3} u_1 (2y_1^2 + (4y_1 + v_1) u_1^2) + \varrho_2' G l_7. \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

Die Formeln erfordern indirektes Rechnen, da zur Ableitung von $\frac{m_2}{m_0}$, ϱ_2' und $\varrho_2'^2$ die Kenntnis von x_2 und y_2 notwendig ist. In erster Annäherung ist $x_2 - x_1 = s \cos \alpha_{1,2}$, $y_2 - y_1 = s \sin \alpha_{1,2}$.

Die Glieder von der Ordnung $\varrho' G l_5$ in (27) betragen für Hauptdreiecksseiten im Abstande von 100 km vom Hauptmeridian im ungünstigsten Falle eine Einheit der 8. Dezimalstelle. Läßt man die $\varrho' G l_5$ fort, so wird mit der Bezeichnung

$$\left. \begin{aligned} s \cos \alpha_{1,2} &= u, \quad s \sin \alpha_{1,2} = v : \\ \Delta y &= v \left(1 + \frac{y_1^2}{2 \varrho'^2} \right) - (3y_1 + v) \frac{u^2 - v^2}{6 \varrho'^2} \\ \Delta x &= u \left(1 + \frac{y_2^2}{2 \varrho'^2} - \frac{v^2}{6 \varrho'^2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

Hierbei kann man ϱ' zu irgend einem x zwischen x_1 und x_2 nehmen.

Der Anfangspunkt der geodätischen Linie entspreche jetzt dem Anfangspunkte des ebenen Koordinatensystems, also $y_1 = 0$ und $\alpha_{1,2} = \alpha_{1,2}$. Zu dem Endpunkte der geodätischen Linie gehören die Koordinaten x , y . Setzt man

$$s \cos \alpha_{1,2} = u' \quad s \sin \alpha_{1,2} = v', \quad (29)$$

so findet man alsdann, wenn außerdem $\frac{1}{\varrho_2'^2}$ durch $\frac{1}{\varrho_1'^2} \left(1 - 4 \varrho_1'^2 \frac{u'}{\varrho_1'} + \dots \right)$ ersetzt wird:

$$\left. \begin{aligned} x &= u' \left(1 + \frac{v'^2}{3\varrho_1'^2} - \frac{v'^2(u'^2 - 2v'^2)}{15\varrho_1'^4} \right) - \epsilon_1^2 \frac{v'^2(5u'^2 - v'^2)}{6\varrho_1'^3} + \varrho_1' G l_7 \\ y &= v' \left(1 - \frac{u'^2 - v'^2}{6\varrho_1'^2} + \frac{u'^4 - 18u'^2v'^2 + 5v'^4}{120\varrho_1'^4} \right) + \epsilon_1^2 \frac{u'v'(u'^2 - 2v'^2)}{3\varrho_1'^3} + \varrho_1' G l_7. \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

Zu diesen Gleichungen kommt man auch, wenn man die Gl. (16) umkehrt.

§ 35.

Zahlenbeispiel.

Der Anfangspunkt eines ebenen rechtwinkligen Koordinatensystems soll zu

$$B = 52^\circ 30' 0'',0000 \quad L = 0^\circ 0' 0'',0000$$

gehören. Eine geodätische Linie von $s = 70\,000''$ Länge geht von einem Punkte P_1 aus, dessen ebene rechtwinklige Koordinaten für $m_0 = 1$:

$$x_1 = -277\,248,781'', \quad y_1 = +95\,581,196''$$

sind, unter dem Azimut $a_{1,2} = 330^\circ$ nach dem Punkte P_2 .

Die ebenen rechtwinkligen Koordinaten x_2, y_2 von P_2 sind abzuleiten, ferner das Azimut $a_{2,1}$ von s in P_2 .

I. Um Gl. (28) anwenden zu können, sind vorher aus x_1, y_1 die Meridiankonvergenz c_1 nach (60) § 21 S. 71 sowie $c_1 - \gamma_1$ nach (7) zu berechnen.

$y_1 \dots 4,980\,3724\,6$			Hiermit erhält man nach (4):
$\varrho'': N'_1 \dots 8,508\,9293\,1$	$\frac{2}{3}\varrho'' \dots 5,138$		$a_{1,2} = 330^\circ 0' 0'',0000$
$\eta'_1 \dots 3,489\,3017\,7$	$\epsilon^2 \dots 7,518$		$-c_1 = -1\,117,2898$
$\operatorname{tg} B'_1 \dots 0,076\,3044\,0$	$(y_1 : \varrho')^3 \dots 4,526$		$+c_1 - \gamma_1 = +0,0015$
$-\tau_{\eta'_1} \sec^2 B'_1 = -784\,1$	$c_1 - \gamma_1 \dots 7,182$		$a_{1,2} = 328^\circ 58' 49'',7117$
$+u_2 = +9$	$c_1 - \gamma_1 = 0,0015$		
$c_1 \dots 3,565\,5278\,5$			
$c_1 = 3677'',2898$			

Die zu x_1 gehörige Breite $B'_1 = 50^\circ 0' 27'',579$ ist aus einer Tafel für die Meridianbögen entnommen.

Nun hat man nach (28):

$s \dots 4,845\,0980\,4$	$v \dots 4,5572_n$	$3y_1 + v \dots 5,3991$	$u \dots 4,7781$	$u \dots 4,7781$
$\cos a_{1,2} \dots 9,932\,9677\,7$	$y_1^2 \dots 9,9607$	$u + v \dots 4,3786$	$y_2^2 \dots 9,5490$	$v^2 \dots 9,1144$
$\sin a_{1,2} \dots 9,712\,1100\,6_n$	$1 : 2\varrho'^2 \dots 6,0892$	$u - v \dots 4,9826$	$1 : 2\varrho'^2 \dots 6,0892$	$1 : 6\varrho'^2 \dots 5,6121$
$u \dots 4,778\,0658\,1$	$0,6071_n$	$1 : 6\varrho'^2 \dots 5,6121$	$0,4163$	$9,5046$
$v \dots 4,557\,2081\,0_n$		$0,3724$		

16*

124 Beziehungen zwischen der geodätischen Linie und den ebenen rechtwinkligen Koordinaten ihrer Endpunkte.

$$\begin{array}{ll}
 v = -36\,075,146 & u = + 59\,988,198 \\
 vy_1^2 : 2\rho'^2 = - 4,047 & + uy_2^2 : 2\rho'^2 = + 2,608 \\
 -(3y_1 + v)(u^2 - v^2) : 6\rho'^2 = - 2,357 & - uv^2 : 6\rho'^2 = - 0,320 \\
 \Delta y = -36\,081,550 & \Delta x = + 59\,990,486 \\
 y_1 = + 95\,581,196 & x_1 = - 277\,248,781 \\
 y_2 = + 59\,499,646^m & x_2 = - 217\,258,295^m
 \end{array}$$

Zur Ableitung des Azimutes $a_{2,1}$ ist zunächst Δa zu berechnen. Nach (19) wird, da zu $x_m = -247\,253,5^m$ die Breite $B'_m = 50^\circ 16' 64''$ und dazu $\log \rho'_m = 6,804\,907$, ferner $\log e_m^2 = 7,518 - 10$ gehört:

$$\begin{array}{llll}
 y_m \dots 4,889\,528 & \rho'' \dots 5,314\,425 & 1 : 3 \dots 9,523 & 1 : 12 \dots 8,921 \\
 \Delta x \dots 4,778\,082 & y_m \Delta x : \rho'^2 \dots 6,057\,796 & y_m^2 : \rho'^2 \dots 6,169 & \Delta x^2 : \rho'^2 \dots 5,946 \\
 1 : \rho'_m \dots 3,195\,093 - 10 & 1,372\,221 & 7,064 & \Delta x^2 : \rho'_m \dots 5,946 \\
 y_m : \rho'_m \dots 8,084\,621 - 10 & & & 6,239 \Delta y : \rho'_m \dots 7,752_n \\
 \Delta x : \rho'_m \dots 7,973\,175 - 10 & & & 6,053_n
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 & - \rho'' \frac{\Delta x}{\rho'_m} \cdot \frac{y_m}{e_m} = - 23'',5625 \\
 & + " " " \cdot \frac{y_m^2}{3\rho'^2} = + 12 \\
 & - " " " \cdot \frac{\Delta x^2}{12\rho'^2} = - 2 \\
 & + " " \cdot \frac{1}{3} e_m^2 \frac{\Delta x \Delta y}{\rho'^2} = - 1 \\
 \Delta a = - 23'',5616;
 \end{aligned}$$

folglich hat man nach (18):

$$a_{2,1} = 180^\circ + a_{1,2} + \Delta a = 148^\circ 58' 19'',1501.$$

Soll nun von $a_{2,1}$ zu $a_{2,1}$ übergegangen werden, so muß man c_2 und $c_2 - \gamma_2$ kennen. Für diese ergibt sich, wenn man berücksichtigt, daß zu dem Werte von x_2 die Breite $B'_2 = 50^\circ 32' 49'',337$ gehört:

$y_2 \dots 4,774\,5143\,9$ $\rho'': N'_2 \dots 8,508\,9158\,5$ $\eta'_2 \dots 3,283\,4302\,4$ $\operatorname{tg} B'_2 \dots 0,084\,6220\,8$ $- r_{\eta'_2} \sec^2 B'_2 = - 310\,7$ $u_2 = + 3$ $c_2 \dots 3,368\,0212\,8$ $c_2 = 2233'',5724$	$\frac{2}{3} \rho'' \dots 5,138$ $e^2 \dots 7,518$ $(y_2 : \rho')^3 \dots 3,909$ $c_2 - \gamma_2 \dots 6,565$ $c_2 - \gamma_2 = 0'',0004$	<p>mithin wird nach (4):</p> $a_{2,1} = 148^\circ 58' 19'',1501$ $+ c_2 = + 0 38 53 ,5724$ $- (c_2 - \gamma_2) = - 0 ,0004$ $a_{2,1} = \underline{\underline{149^\circ 37' 12'',7221}}$
--	---	--

Hätte man zur Berechnung von Δa nur das Glied $-\rho'' \frac{\Delta x}{\rho'_m} \frac{y_m}{e_m}$ benutzt, so würde sich $a_{2,1}$ um $0'',0009$ kleiner ergeben haben, also gleich ... $12'',721$.

II. Die Ableitung von x_2 , y_2 und $a_{1,2}$ soll nun auch nach den Formeln für die Entfernungs- und Richtungsreduktionen erfolgen.

Um von x_1 , y_1 zu x_2 , y_2 zu gelangen, ist die Kenntnis von r und $\vartheta_{1,2}$ erforderlich, denn es ist

$$r \cos \vartheta_{1,2} = x_2 - x_1, \quad r \sin \vartheta_{1,2} = y_2 - y_1,$$

wobei nach (2)

$$\vartheta_{1,2} = a_{1,2} - c_1 - \psi_1.$$

Zuerst muß also c_1 , wie bei I., berechnet werden. Darauf sind genäherte Werte von x_2 , y_2 zu suchen; hierzu wird als erste Annäherung

$$r = s = 70\,000^m \text{ und } \vartheta_{1,2} = a_{1,2} - c_1 = 328^\circ 58' 43''$$

angenommen. Mit diesen Werten wird:

$$\begin{array}{lll} s \dots 4,84\,510 & x_1 + \frac{1}{2}(x_2 - x_1) = x_m = -247\,255 \\ \cos \vartheta_{1,2} \dots 9,93\,297 & x_2 - x_1 \dots 4,77\,807 & y_1 + \frac{1}{2}(y_2 - y_1) = y_m = +77\,544 \\ \sin \vartheta_{1,2} \dots 9,71\,211_n & y_2 - y_1 \dots 4,55\,721_n & y_1 + \frac{1}{3}(y_2 - y_1) = y_{\frac{1}{3}} = 83\,556 \\ & & y_1 + \frac{2}{3}(y_2 - y_1) = y_{\frac{2}{3}} = 71\,531. \end{array}$$

Dem Werte von x_m entspricht $B'_m = 50^\circ 16', 64$ und $1 : \rho'_m \dots 3,195\,093 - 10$.

Nach (41**) § 28 S. 103 hat man für die Richtungsreduktionen ψ_1 und ψ_2 in erster Annäherung die Formeln

$$\psi_1 = \frac{\rho''}{2\rho'^2} (x_2 - x_1) y_{\frac{1}{3}}, \quad \psi_2 = \frac{\rho''}{2\rho'^2} (x_2 - x_1) y_{\frac{2}{3}},$$

also

$$\begin{array}{lll} \frac{1}{2} \rho'' \dots 5,01\,340 & & \\ x_2 - x_1 \dots 4,77\,807 & & \\ 1 : \rho'^2 \dots 6,39\,019 & & \\ \hline 6,18\,166 & & \\ y_{\frac{1}{3}} \dots 4,92\,198 & \psi_1 \dots 1,10\,364 & \psi_1 = 12', 695 \\ y_{\frac{2}{3}} \dots 4,85\,450 & \psi_2 \dots 1,03\,616 & \psi_2 = 10', 868. \end{array}$$

Diese Werte von ψ_1 und ψ_2 ändern sich nicht, wenn man für ρ'^2 bei ψ_1 den zu $x_1 + \frac{1}{3}(x_2 - x_1)$ und bei ψ_2 den zu $x_1 + \frac{2}{3}(x_2 - x_1)$ gehörigen Wert benutzt.

Nun ergibt sich

$$\vartheta_{1,2} = 330^\circ 0' 0'', 000 - 1^\circ 1' 17'', 290 - 12'', 695 = 328^\circ 58' 30'', 015.$$

Die Entfernungsreduktion wird nach (32*) § 27 S. 94 in erster Annäherung durch die Formel

$$\log r - \log s = M \left(\frac{1}{2} \left(\frac{y_m}{\rho'_m} \right)^2 + \frac{1}{24} \left(\frac{\Delta y}{\rho'_m} \right)^2 \right)$$

erhalten.

$1 : \varrho_m' \dots 3,19\,509$	$M : 2 \dots 9,33\,675$	$M : 24 \dots 8,2576$	$s \dots 4,845\,0980\,4$
$y_m \dots 4,88\,955$	$(y_m : \varrho_m')^2 \dots 6,16\,928$	$(\Delta y : \varrho_m')^2 \dots 5,5046$	$\frac{1}{2} M \left(\frac{y_m}{\varrho_m'} \right)^2 = 320\,6$
$\Delta y \dots 4,55\,721_n$	$5,50\,603$	$3,7622$	$\frac{1}{24} M \left(\frac{\Delta y}{\varrho_m'} \right)^2 = 5\,8$
$7,75\,230_n$			$r \dots 4,845\,1306\,8.$

Mit diesen Werten für $\vartheta_{1,2}$ und $\log r$ findet man weiter:

$$\begin{aligned} r &= 4,845\,1306\,8 \\ \cos \vartheta_{1,2} &= 9,932\,9517\,0 \quad 4,778\,0823\,8 \dots \Delta x = + 59\,990,486'' \\ \sin \vartheta_{1,2} &= 9,712\,1545\,1_n \quad 4,557\,2851\,9_n \dots \Delta y = - 36\,081,550 \end{aligned},$$

in Übereinstimmung mit der Angabe unter I.

Um die Genauigkeit dieser Werte zu erkennen, wurde die Rechnung noch einmal mit den Formeln (41) S. 102 und (32) S. 94 wiederholt, wobei die vorher erhaltenen Werte von x_2, y_2 benutzt wurden. Es ergab sich

$$\psi_1 = 12'',6941, \quad \psi_2 = 10'',8663,$$

während der Wert von $\log r$ keine Änderung mehr erfuhr. Mit dem zuletzt angegebenen Werte von ψ_1 wird

$$\vartheta_{1,2} = 328^\circ 58' 30'',0160 \text{ und weiter } \Delta x = + 59\,990,486'', \quad \Delta y = - 36\,081,549''.$$

Es hätte mithin genügt, bei der ersten Rechnung stehen zu bleiben.

Für das Azimut $a_{2,1}$ ist auch hier c_2 , wie bei I, zu berechnen. Man erhält alsdann nach (2)

erste Rechnung	zweite Rechnung
$180^\circ + \vartheta_{1,2} = 148^\circ 58' 30'',015$	$30'',0160$
$+ c_2 = + 38\,53\,,572$	$53\,,5724$
$- \psi_2 = - 10\,,8668$	$10\,,8663$
$a_{2,1} = 149^\circ 37' 12'',719$	$12'',7221.$

Der zweite Wert ist in genauer Übereinstimmung mit dem unter I erhaltenen.

Die Bildkurve der geodätischen Linie.

§ 36.

Der Lauf der Bildkurve.

Rücken die beiden Endpunkte p_1 und p_2 der Abbildung s' der geodätischen Linie s einander unendlich nahe, so geht s' in ds' über. Der Kontingenzwinkel, den die beiden aufeinander folgenden Tangenten von ds' bilden, wird dann aus der Gleichung für $\psi_1 + \psi_2 = 2\tau_1$ erhalten, wenn in dieser $x_2 - x_1 = dx$ und $y_2 - y_1 = dy$ gesetzt wird. Bezeichnet man ihn durch $d2\tau_1$, so ergibt sich mithin aus (41) § 28 S. 102:

mit

$$d^2\tau_1 = x_1 dx - x_2 dy \quad (1)$$

$$x_1 = \frac{y}{\epsilon'^2} \left\{ 1 - \frac{1}{3} (1 - 2\epsilon'^2) \left(\frac{y}{\epsilon'}\right)^2 + \frac{2}{15} \left(\frac{y}{\epsilon'}\right)^4 + \dots \right\}$$

$$x_2 = -2\epsilon^2 \frac{y^2}{\epsilon'^3} + \dots, \quad (1^*)$$

worin zu ds' die Koordinaten \bar{y} und \bar{x} , und zu letzterer ϵ' , ϵ'^2 und ϵ^2 gehören.

Ist \Re der Krümmungsradius von ds' , so ist

$$\Re = \frac{ds'}{d^2\tau_1};$$

hierbei ist angenommen, daß die konkave Seite der Bildkurve nach der Abszissenachse gewendet ist.

Der Winkel, den ds' mit der Parallelen zu $p_1 p_2$ macht, sei ψ , ferner ϑ das Azimut von $p_1 p_2$; dann ist

$$\frac{d\bar{y}}{ds'} = m_0 \frac{dy}{ds'} = \sin(\vartheta + \psi), \quad \frac{d\bar{x}}{ds'} = m_0 \frac{dx}{ds'} = \cos(\vartheta + \psi).$$

Damit wird

$$\frac{\Re}{m_0} = \frac{1}{x_1 \cos(\vartheta + \psi) - x_2 \sin(\vartheta + \psi)}. \quad (2)$$

Man beziehe nun die Bildkurve auf ein neues Koordinatensystem $(\bar{\xi}, \bar{\eta})$, dessen $\bar{\xi}$ -Achse in die Richtung $p_1 p_2$ fällt. Dem Übergange von der positiven $\bar{\xi}$ -Achse zur positiven $\bar{\eta}$ -Achse sollen wachsende Azimute entsprechen. Alsdann hat man

$$\cos \psi = \frac{d\bar{\xi}}{ds'} = m_0 \frac{d\xi}{ds'}, \quad \sin \psi = \frac{d\bar{\eta}}{ds'} = m_0 \frac{d\eta}{ds'}, \quad \operatorname{tg} \psi = \frac{d\eta}{d\xi},$$

$$ds' = m_0 \sqrt{1 + \left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)^2} d\xi,$$

und da die hohle Seite der Bildkurve der $\bar{\xi}$ -Achse zugewendet ist:

$$-\frac{1}{\Re} = \frac{d^2\bar{\eta}}{d\xi^2} : \left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)^3$$

oder

$$\frac{m_0}{\Re} = -\frac{d^2\eta}{d\xi^2} : \left(\sqrt{1 + \left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)^2}\right)^3.$$

Diese Werte in (2) eingeführt ergeben:

$$\frac{d^2\eta}{d\xi^2} = \left(1 + \left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)^2\right) \left\{ x_1 \left(-\cos \vartheta + \sin \vartheta \frac{d\eta}{d\xi}\right) + x_2 \left(\sin \vartheta + \cos \vartheta \frac{d\eta}{d\xi}\right) \right\}, \quad (3)$$

die Differentialgleichung der Bildkurve s' ; in ihr sind noch x_1 und x_2 als Funktionen von ξ und η auszudrücken.

Nach (2) und (1*) wird \Re unendlich, erstens wenn $y = 0$ und zweitens wenn

$$\operatorname{ctg}(\vartheta + \psi) = -2\epsilon^2 \frac{y}{\epsilon'} \left\{ 1 + \frac{1}{3} (1 - 2\epsilon'^2) \left(\frac{y}{\epsilon'}\right)^2 + \dots \right\}$$

ist. Es folgt hieraus:

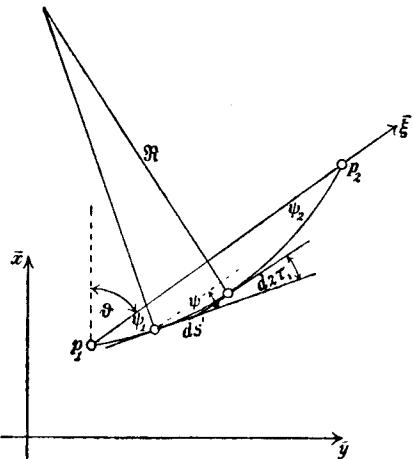


Fig. 7.

Die Bildkurve s' hat stets einen Wendepunkt, wenn sie den Hauptmeridian schneidet. Sie besitzt in diesem Falle noch einen, wenn die zweite der vorstehenden Gleichungen statthat.

Liegt die Bildkurve außerhalb des Hauptmeridians, so kann sie nur dann einen Wendepunkt haben, wenn $\operatorname{ctg}(\vartheta + \psi) = -2e^2 \frac{y}{\rho} + \dots$ ist. Dies wird eintreten, wenn ϑ etwas über 90° oder etwas kleiner als 270° ist. Z. B. ist für $B' = 50^\circ$ und $y = 650$ km nach der letzten Gleichung $\vartheta + \psi$ gleich $90^\circ 2' 19''$.

Aus den Formeln (41) S. 102 oder (39*) S. 100 und (37**) S. 99 folgt:

$$\frac{\psi_1}{\rho''} = \frac{x_2 - x_1}{2e'_m} \left(\frac{2y_1 + y_2}{3e'_m} + \dots \right) + e_m^2 \frac{y_2 - y_1}{e'_m} \left(\left(\frac{2y_1 + y_2}{3e'_m} \right)^2 + \dots \right)$$

$$\frac{\psi_2}{\rho''} = \frac{x_2 - x_1}{2e'_m} \left(\frac{y_1 + 2y_2}{3e'_m} + \dots \right) + e_m^2 \frac{y_2 - y_1}{e'_m} \left(\left(\frac{y_1 + 2y_2}{3e'_m} \right)^2 + \dots \right).$$

Daraus erkennt man, daß im allgemeinen die Bildkurve ihre hohle Seite dem Hauptmeridian zuwendet; vgl. O. SCHREIBER, Projektionsmeth., S. 47.

Steht die Verbindungsgeraden $p_1 p_2$ der Endpunkte der Bildkurve senkrecht zum Hauptmeridian,

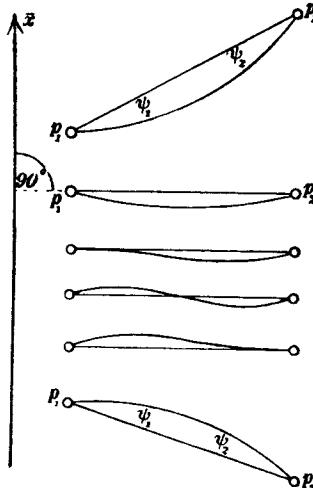


Fig. 8.

ist also $x_2 - x_1 = 0$, so haben ψ_1 und ψ_2 gleichfalls dasselbe Vorzeichen; die Bildkurve liegt südlich von $p_1 p_2$. Wenn $\psi_1 = 0$ ist, was angenähert für $x_2 - x_1 = -2e_m^2(y_2 - y_1) \frac{2y_1 + y_2}{3e'_m}$ eintritt, so wird $\frac{\psi_2}{\rho''}$ angenähert gleich $+\frac{1}{3}e_m^2 \left(\frac{y_2 - y_1}{e'_m} \right)^2 \frac{y_1 + 2y_2}{3e'_m}$. Und ist angenähert $x_2 - x_1 = -2e_m^2(y_2 - y_1) \frac{y_1 + 2y_2}{3e'_m}$, so wird nahezu $\psi_2 = 0$ und $\frac{\psi_1}{\rho''} = -\frac{1}{3}e_m^2 \left(\frac{y_2 - y_1}{e'_m} \right)^2 \frac{2y_1 + y_2}{3e'_m}$. Für Werte von $x_2 - x_1$, die zwischen den beiden eben angegebenen Werten liegen, haben ψ_1 und ψ_2 entgegengesetzte Vorzeichen: die Bildkurve muß mithin die Verbindungsgeraden $p_1 p_2$ ihrer Endpunkte innerhalb p_1 und p_2 schneiden. In diesen drei letzten Fällen muß die Kurve einen Wendepunkt besitzen. Der Verlauf der Bildkurve ist demnach, wie Fig. 8 zeigt. Für negative Ordinaten, also westwärts vom Hauptmeridian, ist der Verlauf das Spiegelbild des vorigen in bezug auf dem Hauptmeridian.

Schneidet die Bildkurve den Hauptmeridian, so ist immer der Schnittpunkt ein Wendepunkt. Wir setzen zunächst voraus, daß die mit e_m^2 multiplizierten Glieder in ψ_1 und ψ_2 gegen die ersten Glieder klein sind, so daß die Gleichung $\operatorname{ctg}(\vartheta + \psi) = -2e^2 \frac{y}{\rho} + \dots$ für die Bildkurve jedenfalls nicht stattfindet. Solange nun

$$y_2 > -2y_1$$

oder solange

$$-y_1 > 2y_2$$

ist, haben alsdann ψ_1 und ψ_2 das gleiche Vorzeichen. Da die Bildkurve jetzt nur einen Wendepunkt besitzt, so kann sie $p_1 p_2$ nicht schneiden. Die Kurve hat die Form, wie Fig. 9 zeigt.

Ist aber

$$2y_2 > -y_1 > \frac{y_2}{2} \quad \text{oder} \quad 2y_1 > -2y_2 > \frac{y_1}{2},$$

so werden ψ_1 und ψ_2 entgegengesetzte Vorzeichen erhalten. Die Bildkurve schneidet die Verbindungsline ihrer Endpunkte innerhalb p_1 und p_2 ; siehe Fig. 10. In den Figuren ist hier wie auch späterhin die Abweichung der Bildkurve von der Geraden $p_1 p_2$ stark übertrieben gezeichnet.

Wenn die den Hauptmeridian schneidende Bildkurve zwei Wendepunkte besitzt, so kann man nicht von vornherein wissen, ob die Bildkurve nun die Verbindungsline ihrer Endpunkte zweimal oder ob sie diese gar nicht schneidet. Um dies erkennen zu können, muß die Gleichung der Bild-

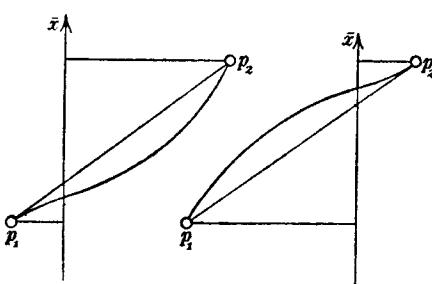


Fig. 9.

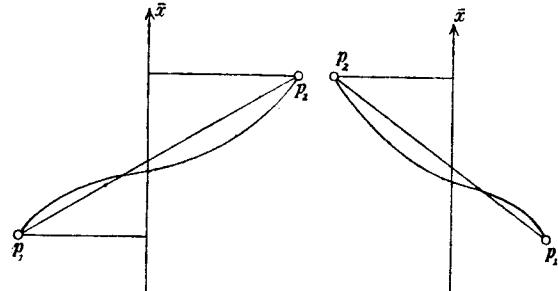


Fig. 10.

kurve bekannt sein. Diese soll jetzt entwickelt werden, besonders auch deshalb, weil sich dabei eine neue Ableitung der Formeln (41) § 28 für die Richtungsreduktionen ergeben wird. Im den folgenden Paragraphen wird dann untersucht werden, wann die Bildkurve zwei Schnittpunkte mit $p_1 p_2$ haben kann. Es sei hier noch erwähnt, daß man zur Berechnung der rechtwinkligen Koordinaten usw. nur die Richtungskorrektions der Bildkurve in p_1 und p_2 zu kennen braucht, nicht aber den Lauf derselben; dieser hat nur ein theoretisches Interesse.

§ 37.

Die Gleichung der Bildkurve. Ableitung der Formeln für die Richtungsreduktionen.

Als Ausgang für die Ableitung der Gleichung der Bildkurve kann man die Gleichung (3) benutzen. Um jedoch von den früheren Entwicklungen, auf denen (3) beruht, unabhängig zu sein, wird diese Gleichung zunächst nochmals hergeleitet und zwar allgemein für die Abbildung irgend einer krummen Fläche in der Ebene.

Das Element der kürzesten Linie auf irgend einer krummen Fläche sei ds , seine Abbildung in der Ebene ds' . Dann ist, wenn $\xi = m_0 \xi$ und $\eta = m_0 \eta$ die zu ds' gehörigen rechtwinkligen Koordinaten sind:

$$ds = \frac{1}{m} ds' = \frac{m_0}{m} \sqrt{1 + \left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)^2} d\xi.$$

Das Vergrößerungsverhältnis m ist eine Funktion von ξ und η .

Da nun

$$s = \int \frac{m_0}{m} \sqrt{1 + \left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)^2} d\xi = \text{Min.}$$

sein soll, so muß, wenn für den Augenblick $\frac{d\eta}{d\xi} = \eta'$, $\frac{d\eta'}{d\xi} = \eta''$, sowie $\frac{m_0}{m} = \frac{1}{\mu}$ und $\frac{1}{\mu} \sqrt{1 + \eta'^2} = F$ gesetzt wird, die Gleichung

$$\frac{d \frac{\partial F}{\partial \eta'}}{d\xi} - \frac{\partial F}{\partial \eta} = 0$$

erfüllt sein. Also wird

$$\frac{d}{d\xi} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\eta'}{\sqrt{1+\eta'^2}} \right) - \sqrt{1+\eta'^2} \frac{\partial \frac{1}{\mu}}{\partial \eta} = 0,$$

woraus folgt, da

$$\frac{d}{d\xi} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\eta'}{\sqrt{1+\eta'^2}} \right) = \frac{1}{\mu} \frac{\eta''}{(\sqrt{1+\eta'^2})^3} - \frac{1}{\mu} \frac{\eta'}{\sqrt{1+\eta'^2}} \left(\frac{\partial \ln \mu}{\partial \xi} + \frac{\partial \ln \mu}{\partial \eta} \eta' \right)$$

ist:

$$\frac{\eta''}{(\sqrt{1+\eta'^2})^3} = -\frac{m_0}{R} = \frac{1}{\sqrt{1+\eta'^2}} \left(\eta' \frac{\partial \ln \mu}{\partial \xi} - \frac{\partial \ln \mu}{\partial \eta} \right), \quad (4)$$

wenn R der Krümmungsradius der Bildkurve ist und vorausgesetzt wird, daß deren hohle Seite der ξ -Achse zugekehrt ist.

Aus (4) ergibt sich als Differentialgleichung der Bildkurve der geodätischen Linie bei der konformen Abbildung irgend einer krummen Fläche in der Ebene:

$$\frac{d^2 \eta}{d\xi^2} = \left(1 + \left(\frac{d\eta}{d\xi} \right)^2 \right) \left\{ \frac{d\eta}{d\xi} \frac{\partial \ln \frac{m}{m_0}}{\partial \xi} - \frac{\partial \ln \frac{m}{m_0}}{\partial \eta} \right\}. \quad (5)$$

Wir nehmen nun an, daß die $\bar{\xi}$ -Achse in der Verbindungsstrecke $p_1 p_2$ der Endpunkte der Bildkurve liege, und daß ihre positive Richtung von der Mitte p_m von $p_1 p_2$ nach p_2 gezählt werde. Dem Übergange von der positiven ξ -Achse zur positiven $\bar{\eta}$ -Achse sollen wachsende Azimute entsprechen.

Bei der konformen Übertragung des Erdellipsoids in der Ebene ist $\frac{m}{m_0}$ als Funktion von x, y in (29) § 16 S. 48 gegeben; es müssen $\frac{\partial \ln \frac{m}{m_0}}{\partial \xi}$ und $\frac{\partial \ln \frac{m}{m_0}}{\partial \eta}$ nun als Funktionen von ξ, η dargestellt werden. Es ist aber, wenn $\bar{x}_m = m_0 x_m$ und $\bar{y}_m = m_0 y_m$ die rechtwinkligen Koordinaten von p_m in bezug auf den Hauptmeridian sind:

$$x - x_m = \xi \cos \vartheta - \eta \sin \vartheta$$

$$y - y_m = \xi \sin \vartheta + \eta \cos \vartheta,$$

wobei ϑ der Richtungswinkel von $p_1 p_2$ ist; mithin wird

$$\frac{\partial \ln \frac{m}{m_0}}{\partial \xi} = \frac{\partial \ln \frac{m}{m_0}}{\partial x} \cos \vartheta + \frac{\partial \ln \frac{m}{m_0}}{\partial y} \sin \vartheta, \quad \frac{\partial \ln \frac{m}{m_0}}{\partial \eta} = -\frac{\partial \ln \frac{m}{m_0}}{\partial x} \sin \vartheta + \frac{\partial \ln \frac{m}{m_0}}{\partial y} \cos \vartheta.$$

Damit gehen aber (4) und (5) über in:

$$\frac{m_0}{R} = -\frac{\partial \ln \frac{m}{m_0}}{\partial x} \sin (\vartheta + \psi) + \frac{\partial \ln \frac{m}{m_0}}{\partial y} \cos (\vartheta + \psi) \quad (4*)$$

oder

$$\frac{d^2 \eta}{d\xi^2} = \left(1 + \left(\frac{d\eta}{d\xi} \right)^2 \right) \left\{ \frac{\partial \ln \frac{m}{m_0}}{\partial x} \left(\frac{d\eta}{d\xi} \cos \vartheta + \sin \vartheta \right) + \frac{\partial \ln \frac{m}{m_0}}{\partial y} \left(\frac{d\eta}{d\xi} \sin \vartheta - \cos \vartheta \right) \right\}. \quad (5*)$$

Nun ist nach (29) S. 48:

$$\ln \frac{m}{m_0} = \ln \cos i \frac{y}{e} + \frac{1}{6} \varepsilon'^2 \left(\frac{y}{e} \right)^4 + G l_s,$$

wo $\varrho' = \sqrt{R'N'}$ zu x gehört; wenn man hierin ε'^2 konstant, gleich $\varepsilon_m'^2$, annimmt, so sind die vernachlässigten Glieder von der 7. Ordnung. Folglich ist

$$\begin{aligned}\frac{\partial \ln \frac{m}{m_0}}{\partial y} &= x_1 = \frac{1}{\varrho'} \left(\frac{1}{i} \operatorname{tg} i \frac{y}{\varrho'} + \frac{2}{3} \varepsilon_m'^2 \left(\frac{y}{\varrho'} \right)^3 + Gl_6 \right) = \frac{1}{\varrho'} \left(\frac{y}{\varrho'} - \frac{1}{3} (1 - 2\varepsilon_m'^2) \left(\frac{y}{\varrho'} \right)^3 + \frac{2}{15} \left(\frac{y}{\varrho'} \right)^5 + Gl_6 \right) \\ \frac{\partial \ln \frac{m}{m_0}}{\partial x} &= x_2 = \frac{1}{2} y^2 \frac{d \frac{1}{\varrho'^2}}{dx} + \dots = \frac{1}{\varrho'} \left(-2\varepsilon_m^2 \frac{y^2}{\varrho'^2} + Gl_5 \right).\end{aligned}$$

Die Gleichung (5*) ist demnach in Übereinstimmung mit der früher gefundenen Gleichung (3).

In x_1 und x_2 ist $y = y_m + \xi \sin \vartheta + \eta \cos \vartheta$ zu setzen. Wir werden dabei wieder die kleinen Glieder 5. Ordnung vernachlässigen; nur die mit $\varepsilon_m'^2 \left(\frac{y_m}{\varrho'_m} \right)^3$ und $\left(\frac{y_m}{\varrho'_m} \right)^5$ multiplizierten Glieder werden beibehalten, weil für Seiten geodätischer Dreiecke, die vom Hauptmeridian weit abstehen, y_m größer als ξ ist. In der Gleichung für x_1 wird außerdem ϱ' durch den zu x_m gehörigen Wert ϱ'_m ersetzt:

$$\frac{1}{\varrho'^2} = \frac{1}{\varrho_m'^2} \left(1 - 4\varepsilon_m^2 \frac{x - x_m}{\varrho'_m} + \varepsilon'^2 Gl_2 \right), \quad \frac{1}{\varrho_m'^2} = \frac{(1 + \varepsilon'^2 \cos^2 B_m')^2}{a^2(1 + \varepsilon'^2)};$$

bei x_2 kann man gleich ohne Änderung der Genauigkeit ϱ'_m statt ϱ' schreiben. Wie man nun aus (5*) erkennt, ist $\varrho'_m \frac{d^2 \eta}{d\xi^2}$ von der 1. Ordnung, wenn $\frac{y_m}{\varrho'_m}$ und $\frac{\xi}{\varrho'_m}$ als kleine Größen 1. Ordnung angesehen werden; mithin muß $\frac{\eta}{\varrho'_m}$ von der 3. Ordnung sein. Man erhält:

$$\begin{aligned}x_1 &= \frac{1}{\varrho'_m} \left\{ A_0 + A_1 \frac{\xi}{\varrho'_m} + A_2 \left(\frac{\xi}{\varrho'_m} \right)^2 + A_3 \left(\frac{\xi}{\varrho'_m} \right)^3 + \frac{\eta}{\varrho'_m} \cos \vartheta + Gl_5 \right\} \\ x_2 &= -\frac{2\varepsilon_m^2}{\varrho'_m} \left\{ B_0 + B_1 \frac{\xi}{\varrho'_m} + B_2 \left(\frac{\xi}{\varrho'_m} \right)^2 + Gl_3 \right\}\end{aligned}$$

mit

$$A_0 = \frac{y_m}{\varrho'_m} - \frac{1}{3} (1 - 2\varepsilon_m'^2) \left(\frac{y_m}{\varrho'_m} \right)^3 + \frac{2}{15} \left(\frac{y_m}{\varrho'_m} \right)^5$$

$$A_1 = \sin \vartheta - \sin \vartheta \left(\frac{y_m}{\varrho'_m} \right)^2 - 4\varepsilon_m^2 \cos \vartheta \frac{y_m}{\varrho'_m}$$

$$A_2 = -\sin^2 \vartheta \frac{y_m}{\varrho'_m} - 4\varepsilon_m^2 \sin \vartheta \cos \vartheta$$

$$A_3 = -\frac{1}{3} \sin^3 \vartheta,$$

$$B_0 = \left(\frac{y_m}{\varrho'_m} \right)^2 \quad B_1 = 2 \sin \vartheta \frac{y_m}{\varrho'_m} \quad B_2 = \sin^2 \vartheta.$$

Da ferner $\frac{d\eta}{d\xi}$ eine kleine Größe 2., also $\left(\frac{d\eta}{d\xi} \right)^2$ eine kleine Größe 4. Ordnung sein wird, so geht mithin die Gl. (5*), wenn man $\frac{1}{\varrho'_m} Gl_5$ vernachlässigt, in die folgende über:

$$-\frac{d^2 \eta}{d\xi^2} = x_1 \left(\cos \vartheta - \sin \vartheta \frac{d\eta}{d\xi} \right) - x_2 \sin \vartheta + \frac{1}{\varrho'_m} Gl_5. \quad (6)$$

Hieraus ergibt sich:

$$-\frac{d^2 \eta}{d\xi^2} = -x_1 \sin \vartheta \frac{d^2 \eta}{d\xi^2} + \left(\cos \vartheta - \sin \vartheta \frac{d\eta}{d\xi} \right) \frac{dx_1}{d\xi} - \sin \vartheta \frac{dx_2}{d\xi} + \frac{1}{\varrho_m'^2} Gl_4; \quad (6*)$$

17*

darin ist

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{d\xi} &= \frac{1}{\varrho_m'^2} \left\{ A_1 + 2 A_2 \frac{\xi}{\varrho_m'} + 3 A_3 \left(\frac{\xi}{\varrho_m'}\right)^3 + \cos \vartheta \frac{d\eta}{d\xi} + Gl_4 \right\} \\ \frac{dx_2}{d\xi} &= -\frac{2\varrho_m^2}{\varrho_m'^2} \left\{ B_1 + 2 B_2 \frac{\xi}{\varrho_m'} + Gl_3 \right\}.\end{aligned}$$

Weiter wird:

$$-\frac{d^4\eta}{d\xi^4} = -x_1 \sin \vartheta \frac{d^3\eta}{d\xi^3} - 2 \sin \vartheta \frac{dx_1}{d\xi} \frac{d^2\eta}{d\xi^2} + \left(\cos \vartheta - \sin \vartheta \frac{d\eta}{d\xi} \right) \frac{d^3x_1}{d\xi^3} - \sin \vartheta \frac{d^2x_2}{d\xi^2} + \frac{1}{\varrho_m'^3} Gl_3, \quad (6**)$$

mit

$$\begin{aligned}\frac{d^3x_1}{d\xi^3} &= \frac{1}{\varrho_m'^3} \left(2 A_2 + 6 A_3 \frac{\xi}{\varrho_m'} \right) + \frac{1}{\varrho_m'^2} \cos \vartheta \frac{d^2\eta}{d\xi^2} + \frac{1}{\varrho_m'^3} Gl_3 \\ \frac{d^2x_2}{d\xi^2} &= -4 \frac{\varrho_m^2}{\varrho_m'^3} B_2 + \frac{1}{\varrho_m'^3} Gl_3,\end{aligned}$$

und ferner:

$$-\frac{d^5\eta}{d\xi^5} = -x_1 \sin \vartheta \frac{d^4\eta}{d\xi^4} - 3 \sin \vartheta \frac{dx_1}{d\xi} \frac{d^3\eta}{d\xi^3} + \cos \vartheta \frac{d^3x_1}{d\xi^3} + \frac{1}{\varrho_m'^4} Gl_3 \quad (6***)$$

mit

$$\frac{d^3x_1}{d\xi^3} = \frac{1}{\varrho_m'^4} 6 A_3 + \frac{1}{\varrho_m'^3} \cos \vartheta \frac{d^2\eta}{d\xi^2} + \frac{1}{\varrho_m'^4} Gl_3.$$

Die Gleichung der Bildkurve setzen wir nun in der Form an:

$$\eta = \eta_m + \xi \left(\frac{d\eta}{d\xi} \right)_m + \frac{1}{2} \xi^2 \left(\frac{d^2\eta}{d\xi^2} \right)_m + \frac{1}{6} \xi^3 \left(\frac{d^3\eta}{d\xi^3} \right)_m + \frac{1}{24} \xi^4 \left(\frac{d^4\eta}{d\xi^4} \right)_m + \frac{1}{120} \xi^5 \left(\frac{d^5\eta}{d\xi^5} \right)_m + \dots,$$

worin sich die Koeffizienten auf die Mitte p_m von $p_1 p_2 = \bar{r} = m_0 r$ beziehen.

Für $\xi = -\frac{r}{2}$ und $+\frac{r}{2}$ muß $\eta = 0$ sein, also:

$$0 = \eta_m - \frac{1}{2} r \left(\frac{d\eta}{d\xi} \right)_m + \frac{1}{8} r^2 \left(\frac{d^2\eta}{d\xi^2} \right)_m - \frac{1}{48} r^3 \left(\frac{d^3\eta}{d\xi^3} \right)_m + \frac{1}{384} r^4 \left(\frac{d^4\eta}{d\xi^4} \right)_m - \frac{1}{3840} r^5 \left(\frac{d^5\eta}{d\xi^5} \right)_m + \dots$$

$$0 = \eta_m + \frac{1}{2} r \left(\frac{d\eta}{d\xi} \right)_m + \frac{1}{8} r^2 \left(\frac{d^2\eta}{d\xi^2} \right)_m + \frac{1}{48} r^3 \left(\frac{d^3\eta}{d\xi^3} \right)_m + \frac{1}{384} r^4 \left(\frac{d^4\eta}{d\xi^4} \right)_m + \frac{1}{3840} r^5 \left(\frac{d^5\eta}{d\xi^5} \right)_m + \dots;$$

mithin wird:

$$\begin{aligned}\eta_m &= -\frac{1}{8} r^2 \left(\frac{d^2\eta}{d\xi^2} \right)_m - \frac{1}{384} r^4 \left(\frac{d^4\eta}{d\xi^4} \right)_m - \dots \\ \left(\frac{d\eta}{d\xi} \right)_m &= -\frac{1}{24} r^2 \left(\frac{d^3\eta}{d\xi^3} \right)_m - \frac{1}{1920} r^4 \left(\frac{d^5\eta}{d\xi^5} \right)_m - \dots,\end{aligned} \quad (7)$$

und wenn man diese Werte in die Gleichung für η einträgt:

$$\begin{aligned}\frac{\eta}{r} &= -\frac{1}{8} \left(1 - 4 \left(\frac{\xi}{r} \right)^2 \right) \left\{ r \left(\frac{d^2\eta}{d\xi^2} \right)_m + \frac{1}{3} \frac{\xi}{r} \cdot r^2 \left(\frac{d^3\eta}{d\xi^3} \right)_m + \frac{1}{48} \left(1 + 4 \left(\frac{\xi}{r} \right)^2 \right) \cdot r^3 \left(\frac{d^4\eta}{d\xi^4} \right)_m \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{240} \frac{\xi}{r} \left(1 + 4 \left(\frac{\xi}{r} \right)^2 \right) \cdot r^4 \left(\frac{d^5\eta}{d\xi^5} \right)_m + \dots \right\}.\end{aligned} \quad (8)$$

Die Werte von $\left(\frac{d^2\eta}{d\xi^2} \right)_m$ usw. werden aus den Gleichungen (6), (6*) usw. erhalten, indem man in ihnen $\xi = 0$ setzt.

Zunächst findet man nun aus (6*):

$$\left(\frac{d^3 \eta}{d \xi^3}\right)_m = -\frac{1}{\epsilon_m'^2} \sin \vartheta \cos \vartheta + \frac{1}{\epsilon_m'^2} G l_2$$

und damit aus der zweiten Gl. (7):

$$\left(\frac{d \eta}{d \xi}\right)_m = \frac{1}{24} r^2 \left(\frac{1}{\epsilon_m'^2} \sin \vartheta \cos \vartheta + \frac{1}{\epsilon_m'^2} G l_2 \right) = \frac{1}{24} \frac{r^2}{\epsilon_m'^2} \sin \vartheta \cos \vartheta + G l_4;$$

da ferner nach (6):

$$\left(\frac{d^2 \eta}{d \xi^2}\right)_m = \frac{1}{\epsilon_m'} \left(-\frac{y_m}{\epsilon_m'} \cos \vartheta + G l_3 \right)$$

wird, so ist nach der ersten Gl. (7):

$$\eta_m = \frac{1}{8} \frac{r^2}{\epsilon_m'} \frac{y_m}{\epsilon_m'} \cos \vartheta + r G l_4$$

$(r^4 \left(\frac{d^4 \eta}{d \xi^4}\right)_m)$ ist, wie aus (6***) folgt, von der Ordnung $\frac{r^4}{\epsilon_m'^3} G l_1 = r G l_4$.

Mit diesen Werten ergibt sich jetzt der Reihe nach aus (6) bis (6***), wenn wieder wie früher, vgl. (31) S. 93 oder (40) S. 102,

$$\frac{r}{\epsilon_m'} \cos \vartheta = \xi_m, \quad \frac{r}{\epsilon_m'} \sin \vartheta = \eta_m, \quad \frac{y_1 + y_2}{2 \epsilon_m'} = \frac{y_m}{\epsilon_m'} = y'_m \quad (9)$$

gesetzt wird:

$$\begin{aligned} -r \left(\frac{d^3 \eta}{d \xi^3}\right)_m &= \xi_m \left(y'_m - \frac{1}{3} (1 - 2 \epsilon_m'^2) y_m'^3 + \frac{2}{15} y_m'^5 + \frac{1}{24} y_m' (3 \xi_m^2 - \eta_m^2) \right) + 2 \epsilon_m^2 y_m'^2 \eta_m + G l_6 \\ -r^2 \left(\frac{d^2 \eta}{d \xi^2}\right)_m &= \xi_m \eta_m \left(1 + \frac{1}{24} (\xi_m^2 - \eta_m^2) \right) - 4 \epsilon_m^2 y_m' (\xi_m^2 - \eta_m^2) + G l_6 \\ -r^3 \left(\frac{d \eta}{d \xi}\right)_m &= -y'_m \xi_m (\xi_m^2 - \eta_m^2) - 4 \epsilon_m^2 \eta_m (2 \xi_m^2 - \eta_m^2) + G l_6 \\ -r^4 \left(\frac{d \eta}{d \xi}\right)_m &= -\xi_m \eta_m (\xi_m^2 - \eta_m^2) + G l_6. \end{aligned}$$

Setzt man diese Ausdrücke in (8) ein, so erhält man endlich als Gleichung der Bildkurve der geodätischen Linie bei der konformen Übertragung des Erdellipsoids in die Ebene:

$$\frac{\eta}{r} = \frac{1}{8} \left(1 - 4 \left(\frac{\xi}{r} \right)^2 \right) \left\{ c_0 + c_1 \frac{\xi}{r} + c_2 \left(\frac{\xi}{r} \right)^2 + c_3 \left(\frac{\xi}{r} \right)^3 + \dots \right\}, \quad (10)$$

worin

$$\begin{aligned} c_0 &= \xi_m \left(y'_m - \frac{1}{3} (1 - 2 \epsilon_m'^2) y_m'^3 + \frac{2}{15} y_m'^5 + \frac{1}{48} y_m' (5 \xi_m^2 - \eta_m^2) \right) + \epsilon_m^2 \eta_m \left(2 y_m'^2 - \frac{1}{12} (2 \xi_m^2 - \eta_m^2) \right) + G l_6 \\ c_1 &= \frac{1}{3} \xi_m \eta_m \left(1 + \frac{7}{240} (\xi_m^2 - \eta_m^2) \right) - \frac{4}{3} \epsilon_m^2 y_m' (\xi_m^2 - \eta_m^2) + G l_6 \\ c_2 &= -\frac{1}{12} \xi_m y'_m (\xi_m^2 - \eta_m^2) - \frac{1}{3} \epsilon_m^2 \eta_m (2 \xi_m^2 - \eta_m^2) + G l_6 \\ c_3 &= -\frac{1}{60} \xi_m \eta_m (\xi_m^2 - \eta_m^2) + G l_6 \end{aligned} \quad (10^*)$$

ist.

Hieraus folgen sofort die Ausdrücke für die Richtungsreduktionen, denn es ist

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{d \eta}{d \xi},$$

worin $\psi = \psi_1$ wird für $\frac{\xi}{r} = -\frac{1}{2}$ und $\psi = -\psi_2$ für $\frac{\xi}{r} = +\frac{1}{2}$. Da $\psi = \operatorname{tg} \psi - \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 \psi + \dots$ ist, $\operatorname{tg} \psi$ aber nach (10) und (10*) von der 2. Ordnung wird, so kann man, wenn man Gl_6 vernachlässigt, einfach $\psi = \frac{d\eta}{d\xi}$ setzen. Demnach wird, ψ_1 und ψ_2 in Sekunden vorausgesetzt:

$$\frac{\psi_1}{\rho''} = \left(\frac{1}{2} c_0 + \frac{1}{8} c_2 \right) - \left(\frac{1}{4} c_1 + \frac{1}{16} c_3 \right)$$

$$\frac{\psi_2}{\rho''} = \left(\frac{1}{2} c_0 + \frac{1}{8} c_2 \right) + \left(\frac{1}{4} c_1 + \frac{1}{16} c_3 \right),$$

oder nach (2) § 30 S. 111:

$$+ \psi_1 = a_{1.2} - \vartheta_{1.2} - c_1 = + \tau_1 - \tau_2$$

$$- \psi_2 = a_{2.1} - \vartheta_{2.1} - c_2 = - \tau_1 - \tau_2$$

mit

$$\left. \begin{aligned} \tau_1 &= \frac{1}{2} \rho'' \xi_m y'_m \left(1 - \frac{1}{3} (1 - 2 \varepsilon_m'^2) y_m'^2 + \frac{2}{15} y_m'^4 + \frac{1}{12} \xi_m^2 \right) + \rho'' e_m^2 \eta_m \left(y_m'^2 - \frac{1}{12} (2 \xi_m^2 - \eta_m^2) \right) + Gl_6 \\ \tau_2 &= \frac{1}{12} \rho'' \xi_m \eta_m \left(1 + \frac{1}{60} (\xi_m^2 - \eta_m^2) \right) - \frac{1}{3} \rho'' e_m^2 y'_m (\xi_m^2 - \eta_m^2) + Gl_6. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Das sind wieder die früher entwickelten Formeln (41) § 28 S. 102.

Auch die Formel für die Entfernungsreduktion lässt sich mit Hilfe der obigen Entwicklung ableiten. Man hat von der Gleichung

$$s = \int_{\frac{m_0}{m}}^{\frac{m_0}{m}} \sqrt{1 + \left(\frac{d\eta}{d\xi} \right)^2} d\xi$$

auszugehen, worin der Wert von η aus (10) zu entnehmen ist.

§ 38.

Die Schnittpunkte der Bildkurve mit der Verbindungsgeraden ihrer Endpunkte.

An der Hand der Gl. (10) und (11) soll nun untersucht werden, wann die Bildkurve die Verbindungsgerade $p_1 p_2$ ihrer Endpunkte, und zwar innerhalb derselben, schneidet. Für die Endpunkte ist $\frac{\xi}{r} = \pm \frac{1}{2}$, dafür wird (10) wie es sein muß Null.

Sind in (10*) ξ_m , η_m und y'_m von derselben Ordnung, so ergibt sich der Schnittpunkt der Bildkurve mit $p_1 p_2$ angenähert aus der Gleichung:

$$y'_m + \frac{1}{3} \eta_m \frac{\xi}{r} = 0,$$

woraus

$$\frac{\xi}{r} = - \frac{3 y'_m}{\eta_m} = - \frac{3}{2} \frac{y_2 + y_1}{y_2 - y_1}. \quad (12)$$

Da $\left| \frac{\xi}{r} \right| < \frac{1}{2}$ sein muß, wenn der Schnittpunkt zwischen die Endpunkte der Bildkurve fallen soll, so kann es keinen solchen Schnittpunkt geben, wenn die Bildkurve außerhalb der Abszissenachse liegt. Nur wenn y_1 und y_2 entgegengesetzte Vorzeichen haben, kann $\frac{\xi}{r}$ die vorstehende Bedingung erfüllen. Alsdann folgt aus (12)

$$\frac{\xi}{r} = 3 \frac{r'}{r} \quad \text{oder} \quad \xi = 3 r', \quad (12^*)$$

wenn $m_0 r'$ die Entfernung der Mitte von $p_1 p_2$ vom Schnittpunkte mit der Abszissenachse ist. Damit der Schnittpunkt zwischen p_1 und p_2 fällt, muß also

$$3 \frac{r'}{r} < \frac{1}{2} \quad \text{oder} \quad r' < \frac{1}{6} r$$

sein.

Schneidet die Bildkurve die Abszissenachse, so wird sie mithin mit der Verbindungsgeraden ihrer Endpunkte $p_1 p_2$ zwischen p_1 und p_2 einen Schnittpunkt haben, wenn die Entfernung der Mitte von $p_1 p_2$ vom Schnittpunkte mit der Abszissenachse kleiner als $\frac{1}{6} p_1 p_2$ ist; vgl. Fig. 9 u. 10.

Die Bildkurve kann auch einen Wendepunkt haben, wenn, wie aus § 36 folgt, $x_2 - x_1$ von der Ordnung $\frac{2e_m^2}{\varrho_m} y(y_2 - y_1)$ ist. Dementsprechend wird nun gesetzt

$$\xi_m = -2e_m^2 y_m (y'_m + \beta y_m), \quad (13)$$

d. i.

$$\operatorname{ctg} \vartheta = \frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1} = -\frac{2e_m^2}{\varrho_m} \left(\frac{y_1 + y_2}{2} + \beta (y_2 - y_1) \right),$$

worin β eine vorläufig willkürliche Konstante bedeuten soll. Dann wird aus (10) und (10*) erhalten:

$$\frac{\eta}{r} = \frac{1}{24} \left(1 - 4 \left(\frac{\xi}{r} \right)^2 \right) e_m^2 y_m^3 \left(-6\beta \frac{y'_m}{y_m} + \frac{1}{4} + 2 \left(\frac{y'_m}{y_m} - \beta \right) \frac{\xi}{r} + \left(\frac{\xi}{r} \right)^2 \right); \quad (14)$$

hierbei sind in den Koeffizienten der Potenzen von $\frac{\xi}{r}$ Glieder von der Ordnung $e_m^2 G l_4$ vernachlässigt worden. Für die Richtungsreduktionen (11) ergibt sich mit (13):

$$\begin{aligned} \frac{\psi_1}{\rho''} &= -e_m^2 y_m^3 \left\{ \left(\beta + \frac{1}{6} \right) \frac{y'_m}{y_m} - \left(\frac{1}{6} \beta + \frac{1}{12} \right) \right\} \\ \frac{\psi_2}{\rho''} &= -e_m^2 y_m^3 \left\{ \left(\beta - \frac{1}{6} \right) \frac{y'_m}{y_m} + \left(\frac{1}{6} \beta - \frac{1}{12} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (15)$$

In diesen Gleichungen können die Werte für e^2 und ϱ' anstatt zu der Mitte auch zu x_1 oder x_2 gehören.

Unter Zugrundelegung der Gl. (14) und (15), die jedenfalls eine große Annäherung ergeben, soll nun untersucht werden, unter welchen Bedingungen $p_1 p_2$ von der Bildkurve geschnitten wird.

Nach (14) findet man den Schnittpunkt der Bildkurve mit der Verbindungsgeraden $p_1 p_2$, d. i. der ξ -Achse, aus der Gleichung:

$$\left(\frac{\xi}{r} \right)^2 + 2 \left(\frac{y'_m}{y_m} - \beta \right) \frac{\xi}{r} - 6\beta \frac{y'_m}{y_m} + \frac{1}{4} = 0$$

oder

$$\frac{\xi}{r} = -\frac{y'_m}{y_m} + \beta \pm \sqrt{\left(\frac{y'_m}{y_m} + 2\beta \right)^2 - 3\beta^2 - \frac{1}{4}}. \quad (16)$$

Damit überhaupt Schnittpunkte möglich sind, muß

$$\left(\frac{y'_m}{y_m} + 2\beta \right)^2 \geq 3\beta^2 + \frac{1}{4}$$

und damit sie zwischen p_1 und p_2 fallen, muß

$$\left| \frac{\xi}{r} \right| > \frac{1}{2}$$

sein.

Es sei

$$\beta = -\frac{y'_m}{y_m}, \quad (17)$$

dann wird

$$x_m = 0$$

und

$$\frac{\xi}{r} = +2\beta \pm i\sqrt{2\beta^2 + \frac{1}{4}}.$$

In diesem Falle gibt es also keinen Schnittpunkt zwischen p_1 und p_2 , gleichviel welchen Wert $\frac{y'_m}{y_m} = \frac{y_2 + y_1}{2(y_2 - y_1)}$ hat. Nach (15) ist jetzt:

$$\frac{\psi_1}{\rho''} = e_m^2 y_m^3 \left\{ \left(\beta + \frac{1}{6} \right)^2 + \frac{1}{18} \right\}$$

$$\frac{\psi_2}{\rho''} = e_m^2 y_m^3 \left\{ \left(\beta - \frac{1}{6} \right)^2 + \frac{1}{18} \right\};$$

mithin sind beide Richtungsreduktionen positiv.

Steht die Verbindungsgeraden $p_1 p_2$ der Endpunkte der Bildkurve senkrecht zur x -Achse, einerlei ob sie diese schneidet oder nicht, so verläuft die Bildkurve südlich von $p_1 p_2$.

Bei der Mercator-Projektion der Kugel ist dagegen die Senkrechte auf dem Hauptmeridian das Bild eines größten Kreises selbst.

Liegt die Bildkurve außerhalb der x -Achse, so ist $\left| \frac{y'_m}{y_m} \right| = \left| \frac{y_2 + y_1}{2(y_2 - y_1)} \right| \geq \frac{1}{2}$; $\frac{y'_m}{y_m}$ ist positiv oder negativ, je nachdem $y_2 \geq y_1$ ist. Der Wert $\pm \frac{1}{2}$ findet statt, wenn die eine Ordinate Null ist. Je weiter die Bildkurve von der \bar{x} -Achse entfernt ist, um so größer wird $\left| \frac{y'_m}{y_m} \right|$. Angenommen die Bildkurve liege östlich von der \bar{x} -Achse und $y_2 > y_1$, dann ist mithin

$$\frac{y'_m}{y_m} = \frac{1}{2} + \gamma,$$

wo γ irgendeine positive Zahl bedeutet. Damit folgt nach (15) für die Richtungsreduktionen:

$$\begin{aligned} \frac{\psi_1}{\rho''} &= -e_m^2 y_m \left\{ \beta \left(\frac{1}{3} + \gamma \right) + \frac{1}{6} \gamma \right\} \\ \frac{\psi_2}{\rho''} &= -e_m^2 y_m^3 \left\{ \beta \left(\frac{2}{3} + \gamma \right) - \frac{1}{6} (1 + \gamma) \right\}. \end{aligned} \quad (18)$$

Ist

$$\beta \text{ positiv,}$$

so gibt es für

$$\frac{\xi}{r} = -\frac{1}{2} - \gamma + \beta \pm \sqrt{(\gamma + \beta)^2 + \gamma + 2\beta(1 + \gamma)}$$

stets 2 reelle Wurzeln, aber nur eine kann in den Grenzen $\pm \frac{1}{2}$ enthalten sein, die andere ist stets kleiner als $-\frac{1}{2} - 2\gamma$. Nun ist aber ψ_1 immer negativ; dagegen wird ψ_2 positiv, wenn

$$\beta < \frac{1+\gamma}{4+6\gamma} \quad \text{oder} \quad \beta < \frac{y_2}{2(y_1 + 2y_2)} \quad (19)$$

ist. Für solche Werte von β wird mithin die Bildkurve einmal innerhalb p_1 und p_2 die Gerade schneiden.

Es sei beispielsweise $y_1 = k$, $y_2 = 3k$, dann ist $\frac{y_2 + y_1}{2(y_2 - y_1)} = 1 = \frac{y'_m}{y_m}$ und folglich $\gamma = \frac{1}{2}$. Soll nun ein Schnittpunkt innerhalb $p_1 p_2$ vorhanden sein, so muß $\beta < \frac{3}{14}$ sein. Nimmt man $\beta = \frac{1}{5}$, so daß also $x_2 - x_1 = -\frac{48}{5} e_m^2 \frac{k^2}{e'_m}$ ist, so wird $\frac{\xi}{r} = -0,8 \pm \frac{\sqrt{1,59}}{10} = -0,8 \pm 1,26$, d. h. der Schnittpunkt liegt bei $m_0 \xi = 0,46 m_0 r = 0,46 \bar{r}$.

Ist

$$\beta = 0,$$

so ist, da jetzt ψ_1 und ψ_2 entgegengesetztes Vorzeichen haben, stets ein Schnittpunkt innerhalb p_1 und p_2 vorhanden, und zwar ist für ihn $\frac{\xi}{r} = -\frac{1}{2} - \gamma + \sqrt{\gamma + \gamma^2}$.

Wenn

$$\beta \text{ negativ}$$

ist, so wird ψ_2 immer positiv sein, während ψ_1 negativ wird, wenn

$$-\beta < \frac{\gamma}{2(1+3\gamma)} \quad \text{oder} \quad -\beta < \frac{y_1}{2(2y_1+y_2)} \quad (20)$$

ist. In diesem Falle gibt es einen Schnittpunkt zwischen p_1 und p_2 . Das zeigt auch der Ausdruck für $\frac{\xi}{r}$:

$$\frac{\xi}{r} = -\frac{1}{2} - \gamma + \beta \pm \sqrt{(\gamma - \beta)^2 + \gamma + 2\beta(1+3\gamma)},$$

dem infolge (20) zwei reelle Wurzeln entsprechen, von denen aber nur eine zwischen $\pm \frac{1}{2}$ liegt. Es sei z. B. $\beta = -\frac{1}{8}$, dann muß, wenn ein Schnittpunkt innerhalb $p_1 p_2$ liegen soll, nach (20) $\gamma > 1$ sein. Wird dementsprechend $\gamma = \frac{3}{2}$ oder $\frac{y'_m}{y_m} = 2$ angenommen, woraus $5y_1 = 3y_2$ folgt, so wird $x_2 - x_1 = -\frac{15}{4} e_m^2 \frac{(y_2 - y_1)^2}{e'_m}$, und für den Schnittpunkt hat man $\frac{\xi}{r} = \frac{-17 + \sqrt{177}}{8} = -0,46$.

§ 39.

Fortsetzung; die Bildkurve wird von der Abszissenachse geschnitten.

Die Bildkurve möge nun die Abszissenachse schneiden; es sei y_1 negativ und y_2 positiv. Ferner werde angenommen, daß $y_2 > -y_1$ sei; dann ist $\frac{y'_m}{y_m} = \frac{1}{2} \frac{y_2 + y_1}{y_2 - y_1}$ positiv, und zwar ist jetzt der größte Wert, den $\frac{y'_m}{y_m}$ erreichen kann, gleich $\frac{1}{2}$, wenn $y_1 = 0$ ist; sein kleinster Wert ist Null für $y_2 = -y_1$. Setzt man

$$\frac{y'_m}{y_m} = \frac{1}{2} - \delta, \quad 0 \leq \delta \leq \frac{1}{2},$$

so wird nach (15):

$$\begin{aligned}\frac{\psi_1}{\rho''} &= -e_m^2 y_m^3 \left\{ \beta \left(\frac{1}{3} - \delta \right) - \frac{1}{6} \delta \right\} \\ \frac{\psi_2}{\rho''} &= -e_m^2 y_m^3 \left\{ \beta \left(\frac{2}{3} - \delta \right) - \frac{1}{6} (1 - \delta) \right\}.\end{aligned}\tag{21}$$

A. Es sei

β negativ,

dann ist ψ_2 stets positiv, und auch ψ_1 ist positiv, wenn

$$\frac{1}{3} \geq \delta, \quad \text{oder} \quad \frac{y'_m}{y_m} \geq \frac{1}{6} \quad \text{oder} \quad y_2 \geq -2y_1\tag{22}$$

ist. Alsdann hat die Bildkurve entweder keinen Schnittpunkt zwischen p_1 und p_2 oder sie hat deren zwei. Da aber für einen Schnittpunkt innerhalb $p_1 p_2$ $|\frac{\xi}{r}| < \frac{1}{2}$ sein muß, so würde, wenn $-\beta \geq \frac{1}{3}$ ist, für die Wurzelgröße in (16) nur das positive Vorzeichen in Betracht kommen. Es könnte also nur eine Wurzel für $\frac{\xi}{r}$ innerhalb $\pm \frac{1}{2}$ vorhanden sein. Ein einziger Schnittpunkt ist aber nicht möglich, da ψ_1 und ψ_2 dasselbe Vorzeichen haben, also an derselben Seite von $p_1 p_2$ liegen. Mithin gibt es für $-\beta \geq \frac{1}{3}$ keinen Schnittpunkt innerhalb $p_1 p_2$. Ist aber $-\beta < \frac{1}{3}$, so wird $-4\beta \frac{y'_m}{y_m} > \beta^2$ und daher

$$\sqrt{\left(\frac{y'_m}{y_m}\right)^2 - \frac{1}{4} + 4\beta \frac{y'_m}{y_m} + \beta^2} \text{ in (16) imaginär.}$$

Wenn demnach $y_2 \geq -2y_1$ und β negativ ist, so besitzt die Bildkurve keinen Schnittpunkt zwischen p_1 und p_2 .

Z. B. für $\beta = -\frac{1}{6}$ und $\frac{y'_m}{y_m} = \frac{1}{2}$ oder $\delta = 0$ ist $\frac{\xi}{r} = -\frac{2}{3} \pm \frac{i\sqrt{11}}{6}$; für $\beta = -2$ und $\delta = \frac{1}{4}$, d. i. $y_2 = -3y_1$, ergibt sich $\frac{\xi}{r} = \frac{-9 \pm \sqrt{29}}{4} = \frac{-9 \pm 5,4}{4}$.

Ist

$$\delta > \frac{1}{3}, \quad \text{also} \quad \frac{1}{6} > \frac{y'_m}{y_m} \quad \text{oder} \quad y_2 < -2y_1,\tag{23}$$

so wird ψ_1 positiv oder negativ, je nachdem $-\beta \leq \frac{\delta}{2(3\delta - 1)}$ ist. Findet das erste statt, so hat die Bildkurve keinen Schnittpunkt innerhalb $p_1 p_2$. Denn damit die Wurzelgröße in

$$\frac{\xi}{r} = -\frac{1}{2} + \delta + \beta \pm \sqrt{\beta^2 + 2\beta(1 - 2\delta) - \delta + \delta^2}\tag{24}$$

einen reellen Wert hat, muß noch

$$-\beta \geq 1 - 2\delta + \sqrt{1 - 3\delta + 3\delta^2}$$

sein. δ liegt zwischen $\frac{1}{3}$ und $\frac{1}{2}$; der kleinste Wert, den $-\beta$ haben kann, ist daher gleich $\frac{1}{2}$, für $\delta = \frac{1}{2}$. Folglich ist der kleinste Wert von $-\frac{1}{2} + \delta + \beta$ gleich $-\frac{1}{2}$; daher könnte für eine Wurzel zwischen $\pm \frac{1}{2}$ nur das positive Vorzeichen der Wurzelgröße in $\frac{\xi}{r}$ in Betracht kommen. Eine einzige Wurzel ist aber wiederum nicht möglich, da ψ_1 und ψ_2 beide positiv sind.

Wird

$$-\beta > \frac{\delta}{2(3\delta - 1)}, \quad (25)$$

so gibt es zwar für

$$\frac{\xi}{r} = -\frac{1}{2} + \delta + \beta \pm \sqrt{(\delta + \beta)^2 - 2(3\delta - 1)\beta - \delta} \quad (24^*)$$

stets 2 reelle Werte, aber nur einer von ihnen kann zwischen $-\frac{1}{2}$ und $+\frac{1}{2}$ liegen, weil ψ_1 negativ und ψ_2 positiv ist. Wenn $-\beta$ sich der Grenze nähert, so nähert sich dieser Wert $-\frac{1}{2}$, der für $-\beta = \frac{\delta}{2(3\delta - 1)}$ erhalten wird.

Es sei z. B. $\delta = 0,46$, d. i. $y_2 = -\frac{27}{23}y_1$, dann muß, wenn ein Schnittpunkt zwischen p_1 und p_2 liegen soll, nach (25) $-\beta > \frac{23}{38}$ sein. Nimmt man hiernach $-\beta = \frac{7}{10}$, so erhält man

$$\frac{\xi}{r} = -0,74 + \sqrt{0,1296} = -0,38; \quad \frac{\psi_1}{p'} = -0,076 e_m^2 \left(\frac{y_2}{e_m}\right)^3, \quad \frac{\psi_2}{p'} = +1,490 e_m^2 \left(\frac{y_2}{e_m}\right)^3$$

und $\operatorname{ctg} \vartheta = \frac{22}{9} e_m^2 \frac{y_2}{e_m'}$. Für $y_1 = -92$ km, $y_2 = +108$ km und bei $B = 50^\circ$ wird $\vartheta = 89^\circ 59' 31'',8$.

Für

$$\beta = 0$$

ist kein Schnittpunkt innerhalb $p_1 p_2$ vorhanden, denn alsdann ist

$$\frac{\xi}{r} = -\frac{y_m'}{y_m} \pm \sqrt{\left(\frac{y_m'}{y_m}\right)^2 - \frac{1}{4}};$$

der größte Wert von $\frac{y_m'}{y_m}$ ist aber $\frac{1}{2}$. Da jetzt ψ_1 und ψ_2 beide positiv sind, verläuft die Bildkurve südlich von $p_1 p_2$.

B. Nun werde

$$\beta \text{ positiv}$$

vorausgesetzt.

Ist erstens

$$\delta \geq \frac{1}{3}, \quad \text{also} \quad y_2 \leq -2y_1, \quad (26)$$

so ist ψ_1 positiv; dagegen ist ψ_2 negativ, wenn

$$\beta > \frac{1-\delta}{2(2-3\delta)} \quad (27)$$

ist. Die Kurve besitzt nur einen Schnittpunkt zwischen p_1 und p_2 . In diesem Falle hat

$$\frac{\xi}{r} = -\frac{1}{2} + \delta + \beta \pm \sqrt{(1-\delta-\beta)^2 - (1-\delta) + 2(2-3\delta)\beta} \quad (24^{**})$$

zwei reelle Werte, aber nur einer liegt innerhalb $\pm \frac{1}{2}$.

Ist z. B. $\delta = \frac{2}{5}$ und $\beta = \frac{2}{5}$, wodurch (27) genügt wird, so ergibt sich

$$\frac{\xi}{r} = 0,3 \pm \frac{\sqrt{2}}{5} = 0,3 \pm 0,28.$$

Wenn

$$\beta < \frac{1-\delta}{2(2-3\delta)} \quad (27^*)$$

ist, so ist auch ψ_2 positiv. Die Kurve hat entweder 2 Schnittpunkte innerhalb p_1 und p_2 oder gar keine. Trifft das erstere zu, so muß $\frac{\xi}{r}$ zwei reelle Wurzeln haben, die von $\pm \frac{1}{2}$ eingeschlossen sind. Dazu muß aber hier

$$\beta \geq -1 + 2\delta + \sqrt{1 - 3\delta + 3\delta^2}$$

sein. Es wird mithin 2 Schnittpunkte geben, wenn

$$\frac{1-\delta}{2(2-3\delta)} > \beta > -1 + 2\delta + \sqrt{1 - 3\delta + 3\delta^2} \quad (28)$$

ist. Für $\delta = \frac{1}{3}$ liegt β zwischen $\frac{1}{3}$ und $-\frac{1+\sqrt{3}}{3} = 0,244$, für $\delta = \frac{1}{2}$ ist $\beta = \frac{1}{2}$ und $\frac{\xi}{r} = +\frac{1}{2}$.

Die Werte von $\beta + \delta$ sind demnach zwischen $+\sqrt{\frac{1}{3}} = 0,577$ und 1 enthalten. Nun wird aber nach (24**) die eine Wurzel von $\frac{\xi}{r}$ zwischen $-\frac{1}{2} + \delta + \beta$ und $+\frac{1}{2}$, und die andere zwischen $-\frac{1}{2} + \delta + \beta$ und $-\frac{3}{2} + 2(\delta + \beta)$ liegen. Beide Wurzeln liegen also stets innerhalb $-\frac{1}{2}$ und $+\frac{1}{2}$.

Wenn β kleiner ist als die untere Grenze in der Ungleichheit (28), so gibt es keinen Schnittpunkt zwischen p_1 und p_2 ; die Kurve verläuft südlich von $p_1 p_2$.

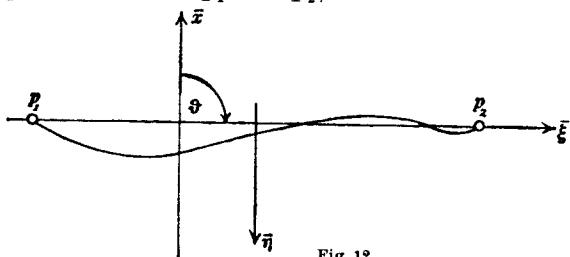


Fig. 12.

Es sei $\delta = \frac{2}{5}$, dann ist $y_2 = -\frac{3}{2}y_1$; nach (28) hat man nun

$$\frac{3}{8} > \beta > \left(-\frac{1+\sqrt{7}}{5} = 0,329\right).$$

Setzt man dementsprechend $\beta = \frac{17}{48}$, so werden die beiden Wurzelwerte von $\frac{\xi}{r}$ gleich $+0,089$ und $+0,419$; die Bildkurve hat also 2 Schnittpunkte zwischen p_1 und p_2 . Nach (13) ist hierbei $x_2 - x_1 = -\frac{109}{120} \frac{e_m^2}{e_m'} \frac{(y_2 - y_1)^2}{y_1^2}$, daher wird das Azimut ϑ von $p_1 p_2$ erhalten aus der Gleichung $\operatorname{ctg} \vartheta = -\frac{109}{120} \frac{e_m^2}{e_m'} \frac{y_2 - y_1}{y_1}$. Nimmt man $y_1 = -80$ km, $y_2 = +120$ km, so ergibt sich bei $B = 50^\circ$: $\vartheta = 90^\circ 0' 19''$. S. Fig. 12.

Ist $\delta = \frac{5}{12}$, also $y_2 = -\frac{7}{5}y_1$, und $\beta = \frac{9}{25}$, so wird die Bedingung (28) erfüllt, und die Gleichung der Bildkurve lautet nach (14):

$$\frac{\eta}{r} = \frac{72}{343} \frac{e_m^2}{e_m'} \left(\frac{y_2}{y_1}\right)^3 \left(1 - 4\left(\frac{\xi}{r}\right)^2\right) \left(\frac{7}{100} - \frac{83}{150} \frac{\xi}{r} + \left(\frac{\xi}{r}\right)^2\right).$$

Die Kurve schneidet $p_1 p_2$ für $\frac{\xi}{r} = +0,36$ und $+0,20$, zwischen diesen Punkten sind die Koordinaten negativ.

Für $\delta = \frac{1}{3}$, d. i. $y_2 = -2y_1$, und $\beta = \frac{3}{10}$, welche beiden Werte die Ungleichheit (28) erfüllen, werden die Wurzeln von $\frac{\xi}{r}$ gleich +0,394 und -0,127.

Zweitens sei

$$\delta < \frac{1}{3}, \quad \text{d. h.} \quad -2y_1 < y_2. \quad (29)$$

I. ψ_1 und ψ_2 werden nun entgegengesetztes Vorzeichen haben, also an verschiedenen Seiten von $p_1 p_2$ liegen, einmal wenn

$$\frac{1-\delta}{2(2-3\delta)} > \beta > \frac{\delta}{2(1-3\delta)} \quad (30)$$

ist; alsdann ist ψ_1 negativ und ψ_2 positiv. Diese Ungleichheit kann aber nur stattfinden, wenn

$$\delta \text{ zwischen } 0 \text{ und } \frac{3-\sqrt{3}}{6} = 0,211$$

liegt oder

$$0 < -y_1 < \frac{3-\sqrt{3}}{6} (y_2 - y_1) \quad (30^*)$$

ist.

Soll das anderemal ψ_1 positiv und ψ_2 negativ werden, so muß

$$\frac{1-\delta}{2(2-3\delta)} < \beta < \frac{\delta}{2(1-3\delta)} \quad (31)$$

sein. Damit diese Ungleichheit bestehen kann, muß

$$\delta \text{ zwischen } \frac{3-\sqrt{3}}{6} \text{ und } \frac{1}{3}$$

liegen oder

$$\frac{3-\sqrt{3}}{6} (y_2 - y_1) < -y_1 < \frac{1}{3} (y_2 - y_1) \quad (31^*)$$

sein.

In diesen beiden Fällen kann die Bildkurve die Verbindungsline ihrer Endpunkte nur einmal zwischen p_1 und p_2 schneiden.

Es sei z. B. $\delta = \frac{3}{10}$, also $y_2 = -\frac{7}{3}y_1$; dann ist nach (31) $\frac{7}{22} < \beta < \frac{3}{2}$. Nimmt man $\beta = 1$, so wird $\frac{\xi}{r} = +0,8 \pm \sqrt{1,59}$; nur die Wurzel -0,46 gibt einen Schnittpunkt innerhalb $p_1 p_2$.

Ist $\delta = \frac{1}{10}$, also $y_2 = -9y_1$, ferner nach (30) $\frac{9}{34} > \beta > \frac{1}{14}$, und wird dementsprechend $\beta = \frac{1}{4}$ angenommen, so ergibt sich $\frac{\xi}{r} = -0,15 \pm \sqrt{0,3725}$. Nur die Wurzel +0,46 liefert einen Schnittpunkt zwischen p_1 und p_2 .

In dem Grenzfalle

$$\delta = \frac{3-\sqrt{3}}{6}, \quad \text{d. h.} \quad y_2 = -(2+\sqrt{3})y_1, \quad (32)$$

wird

$$\beta = \frac{y'_m}{y_m} = \frac{1}{2} - \delta = \frac{\sqrt{3}}{6} \quad \text{und} \quad \frac{\xi}{r} = \pm \frac{1}{2},$$

denn die Gleichung der Bildkurve lautet alsdann nach (14):

$$\frac{\eta}{r} = - \frac{(3 - \sqrt{3})^3}{96} e_m^2 \left(\frac{y_2}{e'_m} \right)^3 \left(1 - 4 \left(\frac{\xi}{r} \right)^2 \right)^2.$$

(Auf diesen speziellen Fall wird noch auf S. 145 zurückgekommen werden.) Ferner ist nach (21) dafür $\psi_1 = \psi_2 = 0$. Die Bildkurve, die sich an den Endpunkten tangential an $p_1 p_2$ legt, und die nördlich von $p_1 p_2$ verläuft, muß mithin 2 Wendepunkte besitzen, deren einer der Schnittpunkt mit der \bar{x} -Achse ist. Die Kurve ist symmetrisch zur $\bar{\eta}$ -Achse, Fig. 13. Das Azimut von $p_1 p_2$ ergibt sich aus der Gleichung $\operatorname{ctg} \vartheta = - \frac{2}{\sqrt{3}} e_m^2 \frac{y_2 - y_1}{e'_m}$; für $y_2 - y_1 = 200$ km, also $y_1 = -42,265$ km und $y_2 = +157,735$ km, und bei $B' = 50^\circ$ ist hiernach $\vartheta = 90^\circ 0' 24'',7$.

In dem andern Grenzfalle

$$\delta = 0, \quad \text{d. h.} \quad y_1 = 0, \quad (33)$$

liegt β zwischen 0 und $\frac{1}{4}$, wenn die Bildkurve einen Schnittpunkt zwischen p_1 und p_2 hat. Für $\beta = 0$ wird $\operatorname{ctg} \vartheta = - e_m^2 \frac{y_2}{e'_m}$, ferner $\psi_1 = 0$ und $\frac{\psi_2}{\rho''} = + \frac{1}{6} e_m^2 \left(\frac{y_2}{e'_m} \right)^3$; die Bildkurve verläuft südlich von $p_1 p_2$ und tangiert in p_1 . Für $\beta = \frac{1}{4}$ ist $\operatorname{ctg} \vartheta = - \frac{3}{2} e_m^2 \frac{y_2}{e'_m}$, sowie $\frac{\psi_1}{\rho''} = - \frac{1}{12} e_m^2 \left(\frac{y_2}{e'_m} \right)^3$ und $\psi_2 = 0$; mithin befindet sich die Bildkurve nördlich von $p_1 p_2$ und tangiert in p_2 .

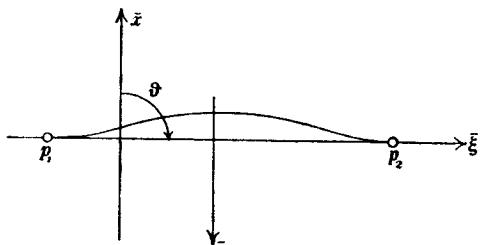


Fig. 13.

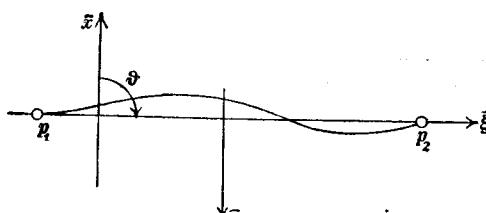


Fig. 14.

II. Im allgemeinen wird in (21) ψ_1 gleich Null, wenn

$$\beta = \frac{\delta}{2(1 - 3\delta)} \quad (34)$$

ist. Dafür ist $\frac{\psi_2}{\rho''} = + \frac{e_m^2 y_m^3}{6(1 - 3\delta)} (1 - 6\delta + 6\delta^2)$ und für die beiden Wurzeln von $\frac{\xi}{r}$ ergibt sich nach (24) $-\frac{1}{2}$ und $-\frac{1 - 9\delta + 12\delta^2}{2(1 - 3\delta)}$. Der letztere Wert liegt aber nur dann innerhalb $-\frac{1}{2}$ und $+\frac{1}{2}$, wenn $0 < \delta < \frac{3 - \sqrt{3}}{6}$ ist. Für diese Werte von δ hat die Bildkurve einen Schnittpunkt zwischen p_1 und p_2 ; da sie in p_1 tangiert, so muß sie daher 2 Wendepunkte besitzen, und zwar ist der eine der Schnittpunkt mit der \bar{x} -Achse.

Beispielsweise sei $\delta = \frac{1}{6}$, d. h. $-5y_1 = y_2$, dann ist $\beta = \frac{1}{6}$ nach (34) und $\frac{\psi_2}{\rho''} = + \frac{12}{125} e_m^2 \left(\frac{y_2}{e'_m} \right)^3$; ferner ist die zweite Wurzel von $\frac{\xi}{r} = + \frac{1}{6}$. Für das Azimut von $p_1 p_2$ erhält man $\operatorname{ctg} \vartheta = - \frac{6}{5} e_m^2 \frac{y_2}{e'_m}$; mit $y_2 - y_1 = \frac{6}{5} y_2 = 200$ km und bei $B' = 50^\circ$ wird $\vartheta = 90^\circ 0' 21'',4$. S. Fig. 14.

ψ_2 wird Null, wenn

$$\beta = \frac{1-\delta}{2(2-3\delta)} \quad (35)$$

ist. Alsdann werden die beiden Wurzeln von $\frac{\xi}{r}$ gleich $+\frac{1}{2}$ und $-\frac{4-15\delta+12\delta^2}{2(2-3\delta)}$, und für ψ_1 ergibt sich $\frac{\psi_1}{\rho''} = -\frac{e_m^2 y_m^3}{6(2-3\delta)}(1-6\delta+6\delta^2)$. Also ist ψ_1 negativ, wenn $0 < \delta < \frac{3-\sqrt{3}}{6}$ ist. Dafür wird aber die zweite Wurzel von $\frac{\xi}{r}$ kleiner als $-\frac{1}{2}$; folglich hat für diese Werte von δ die Bildkurve keinen Schnittpunkt zwischen p_1 und p_2 . Ist dagegen $\frac{1}{2} > \delta > \frac{3-\sqrt{3}}{6}$, so wird ψ_1 positiv und die zweite Wurzel von $\frac{\xi}{r}$ liefert Werte, die größer als $-\frac{1}{2}$ und kleiner als $+\frac{1}{2}$ sind. In diesem Falle besitzt mithin die Bildkurve einen Schnittpunkt innerhalb $p_1 p_2$, aber sie hat wie vorher zwei Wendepunkte.

Ist z. B. $\delta = \frac{3}{8}$, also $y_2 = -\frac{5}{3}y_1$, so wird nach (35) $\beta = \frac{5}{14}$. Die Gleichung der Bildkurve (Fig. 15) lautet daher:

$$\frac{\eta}{r} = -\frac{32}{375} e_m^2 \left(\frac{y_2}{\rho'_m}\right)^3 \left(1 - 4\left(\frac{\xi}{r}\right)^2\right) \left(1 - 2\frac{\xi}{r}\right) \left(\frac{1}{28} + \frac{\xi}{r}\right);$$

η wird mithin außer für $\frac{\xi}{r} = \pm \frac{1}{2}$ noch für $\frac{\xi}{r} = -\frac{1}{28}$ gleich Null. Das Azimut von $p_1 p_2$ ergibt sich aus der Gleichung $\operatorname{ctg} \vartheta = -\frac{27}{28} e_m^2 y_m = -\frac{54}{35} e_m^2 \frac{y_2}{\rho'_m}$; daraus folgt bei $B' = 50^\circ$ und für $y_1 = -75$ km und $y_2 = 125$ km: $\vartheta = 90^\circ 0' 20'', 6$.

III. Wir wenden uns nun zu dem Falle, daß ψ_1 und ψ_2 gleiches Vorzeichen haben. Vorausgesetzt wird wieder, daß $\delta < \frac{1}{3}$ ist.

Ist

$$0 < \delta < \frac{3-\sqrt{3}}{6}, \quad (36)$$

so wird,

$$\text{wenn } \beta > \frac{1-\delta}{2(2-3\delta)} \text{ ist, auch } \beta > \frac{\delta}{2(1-3\delta)} \text{ sein,}$$

und ist

$$\frac{3-\sqrt{3}}{6} < \delta < \frac{1}{3}, \quad (36*)$$

so wird,

$$\text{wenn } \beta > \frac{\delta}{2(1-3\delta)} \text{ ist, auch } \beta > \frac{1-\delta}{2(2-3\delta)}.$$

Erfüllt β diese Bedingung, so sind aber ψ_1 und ψ_2 beide negativ. Für

$$\frac{\xi}{r} = -\frac{1}{2} + \delta + \beta \pm \sqrt{(\delta + \beta)^2 - \delta + 2(1-3\delta)\beta} \quad (24***)$$

oder

$$\frac{\xi}{r} = -\frac{1}{2} + \delta + \beta \pm \sqrt{(1-\delta-\beta)^2 - (1-\delta) + 2(2-3\delta)\beta}$$

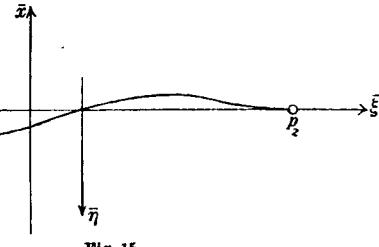


Fig. 15.

ergeben sich zwar stets zwei reelle Werte, die jedoch immer außerhalb $-\frac{1}{2}$ und $+\frac{1}{2}$ liegen. Denn einmal ist die Wurzelgröße in $\frac{\xi}{r}$ größer als $\delta + \beta$, so daß also der eine Wert von $\frac{\xi}{r} < -\frac{1}{2}$ wird, das andere Mal ist sie größer als $1 - \delta - \beta$, infolgedessen der eine Wert von $\frac{\xi}{r} > +\frac{1}{2}$ ist. Da nun die Bildkurve entweder gar nicht oder zweimal innerhalb $p_1 p_2$ schneiden kann, so muß auch der zweite Wert von $\frac{\xi}{r}$, absolut genommen, größer als $\frac{1}{2}$ sein.

Wenn ψ_1 und ψ_2 beide negativ sind, so gibt es mithin keinen Schnittpunkt zwischen p_1 und p_2 .

Ist z. B. $\delta = 0,1$ und $\beta = \frac{1}{3}$, so ist die Ungleichung (36) erfüllt; alsdann ist $\frac{\xi}{r} = -\frac{2 + \sqrt{499}}{30}$, also gleich $+0,68$ und $-0,81$. Und ist $\delta = 0,3$ und $\beta = 1,6$, so daß die Ungleichung (36*) stattfindet, so sind die beiden Wurzeln von $\frac{\xi}{r}$ gleich $+3,31$ und $-0,51$.

Es sollen jetzt ψ_1 und ψ_2 beide positiv werden.

Soll außerdem die Wurzelgröße in $\frac{\xi}{r}$ einen reellen Wert haben, so muß dazu

$$\left. \begin{array}{l} \text{für} \quad 0 < \delta < \frac{3 - \sqrt{3}}{6} : \\ \quad -1 + 2\delta + \sqrt{1 - 3\delta + 3\delta^2} < \beta < \frac{\delta}{2(1 - 3\delta)} \end{array} \right\} \quad (37)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{und für} \quad \frac{3 - \sqrt{3}}{6} < \delta \leq \frac{1}{3} : \\ \quad -1 + 2\delta + \sqrt{1 - 3\delta + 3\delta^2} < \beta < \frac{1 - \delta}{2(2 - 3\delta)} \end{array} \right\} \quad (37*)$$

sein. Bei (37) ist $\frac{1 - \delta}{2(2 - 3\delta)} > \frac{\delta}{2(1 - 3\delta)}$, bei (37*) ist es umgekehrt.

Wenn diese Ungleichheiten stattfinden, so besitzt die Bildkurve zwei Schnittpunkte zwischen p_1 und p_2 . Denn nach der ersten Gleichung (24***) wird für $0 < \delta < \frac{3 - \sqrt{3}}{6}$ der eine Wert von $\frac{\xi}{r}$ zwischen $-\frac{1}{2} + \delta + \beta$ und $-\frac{1}{2}$ liegen; dabei ist nach (37) $\beta + \delta$ in den Grenzen 0 und $+\frac{1}{2}$ eingeschlossen. Und nach der zweiten Gleichung (24***) wird für $\frac{3 - \sqrt{3}}{6} < \delta < \frac{1}{3}$ die eine Wurzel von $\frac{\xi}{r}$ zwischen $-\frac{1}{2} + \delta + \beta$ und $+\frac{1}{2}$ enthalten sein; hierbei liegt $\beta + \delta$ nach (37*) zwischen $1 + \sqrt{2} - \sqrt{3} = 0,341$ und $\frac{2}{3}$. In beiden Fällen liegt mithin die eine Wurzel von $\frac{\xi}{r}$ innerhalb $-\frac{1}{2}$ und $+\frac{1}{2}$. Da aber ein einziger Schnittpunkt zwischen p_1 und p_2 nicht möglich ist, wenn ψ_1 und ψ_2 gleiches Vorzeichen haben, so muß folglich auch die andere Wurzel von $\frac{\xi}{r}$ in das Intervall von $-\frac{1}{2}$ bis $+\frac{1}{2}$ fallen.

Es sei z. B. $\delta = \frac{1}{5}$; dann muß nach (37): $\frac{-3 + \sqrt{13}}{5} < \beta < \frac{1}{4}$ sein. Wählt man $\beta = \frac{3}{20}$, so wird $\frac{\xi}{r} = -\frac{3 \pm \sqrt{17}}{20}$; also sind die beiden Wurzeln $+0,056$ und $-0,356$.

Ist $\delta = \frac{3}{10}$, so hat man nach (37*): $\frac{-4 + \sqrt{37}}{10} < \beta < \frac{7}{22}$. Wird hiernach $\beta = \frac{1}{4}$ angenommen, so findet man $\frac{\xi}{r} = \frac{+1 \pm \sqrt{21}}{20}$; die beiden Wurzeln sind mithin $+0,279$ und $-0,179$.

Für $\delta = \frac{1}{3}$ und $\beta = \frac{1}{4}$, wodurch (37*) genügt wird, erhält man $\frac{\xi}{r} = \frac{1 \pm 1}{12}$, also 0 und $\pm \frac{1}{6}$.

Die Ungleichheiten (37*) lassen sich mit (28) und (26) vereinigen, so daß man als Bedingung für zwei Schnittpunkte innerhalb $p_1 p_2$ hat:

$$\left. \begin{aligned} \text{für} & \quad \frac{3 - \sqrt{3}}{6} < \delta < \frac{1}{2} \\ \text{ist} & \quad -1 + 2\delta + \sqrt{1 - 3\delta + 3\delta^2} < \beta < \frac{1 - \delta}{2(2 - 3\delta)} . \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

IV. Ein spezieller Fall, der in den Gl. (37) und (38) enthalten ist, ergibt sich für

$$\beta = \frac{1}{2} - \delta = \frac{y'_m}{y_m} = \frac{y_2 + y_1}{2(y_2 - y_1)}. \quad (39)$$

Zu dieser Form für β war man bereits durch (32) geführt worden. Alsdann wird

$$\operatorname{ctg} \vartheta = -4 \frac{\epsilon_m^2}{\eta_m} (y_2 - y_1) \beta = -2 \frac{\epsilon_m^2}{\eta_m} (y_2 + y_1),$$

$$\psi_1 = \psi_2 = -\rho'' \frac{\epsilon_m^2}{\eta_m} \eta_m^3 \left(\beta^2 - \frac{1}{12} \right),$$

$$\frac{\eta}{r} = \frac{1}{24} \frac{\epsilon_m^2}{\eta_m} \eta_m^3 \left(1 - 4 \left(\frac{\xi}{r} \right)^2 \right) \left(\frac{1}{4} - 6\beta^2 + \left(\frac{\xi}{r} \right)^2 \right);$$

die Bildkurve verläuft symmetrisch zur $\bar{\eta}$ -Achse. Ihre Schnittpunkte außer $\frac{\xi}{r} = \pm \frac{1}{2}$ ergeben sich aus der Gleichung

$$\frac{\xi}{r} = \pm \sqrt{6\beta^2 - \frac{1}{4}}.$$

Sollen die Schnittpunkte innerhalb $p_1 p_2$ liegen, so muß hiernach

$$\frac{1}{4} > 6\beta^2 - \frac{1}{4} > 0$$

oder

$$+\sqrt{\frac{1}{12}} > \beta > +\sqrt{\frac{1}{24}} \quad (40)$$

sein. Diese Bedingung folgt auch aus (37) und (38), wenn man β aus (39) substituiert. Wenn die Ungleichheit (40) besteht, besitzt mithin die Bildkurve zwei Schnittpunkte zwischen p_1 und p_2 . Sie kann aber nur dann stattfinden, wenn die Kurve den Hauptmeridian schneidet. Denn liegt diese außerhalb des letzteren, so ist β größer als $\frac{1}{2}$.

Für $\beta = \sqrt{\frac{1}{12}} = \frac{\sqrt{3}}{6} = 0,289$, also $y_2 = -(2 + \sqrt{3})y_1 = -3,73y_1$, wird $\psi_1 = \psi_2 = 0$ und es ergibt sich die durch (32) gegebene Form, bei der die Kurve in p_1 und p_2 tangiert und nördlich von $p_1 p_2$ verläuft.

Für kleinere Werte von β , die (40) genügen, schneidet die Kurve dann $p_1 p_2$ zweimal; ist z. B. $\beta = \frac{1}{4}$, also $y_2 = -3y_1$, so ist $\frac{\xi}{r} = \pm \frac{1}{4}\sqrt{2} = \pm 0,354$.

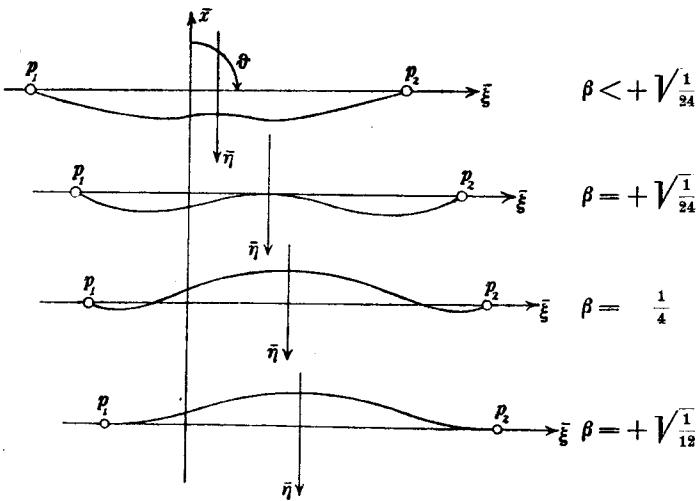


Fig. 16.

$$\text{Wird } \beta = \sqrt{\frac{1}{24}} = \frac{\sqrt{6}}{12} = 0,204,$$

also $y_2 = -\frac{7+2\sqrt{6}}{5} y_1 = -2,38 y_1$, so wird $\frac{\xi}{r} = 0$ und $\psi_1 = \psi_2 = +\frac{1}{24} \rho'' e_m^2 y_m^3$. Die Kurve berührt $p_1 p_2$ in der Mitte.

Für kleinere Werte von β als $\sqrt{\frac{1}{24}}$, also für $y_2 < -\frac{7+2\sqrt{6}}{5} y_1$, gibt es keinen Schnittpunkt, und die Kurve verläuft südlich von $p_1 p_2$.

Entspricht β der untern Grenze in (37) und (38), also

$$\beta = -1 + 2\delta + \sqrt{1 - 3\delta + 3\delta^2}, \quad (41)$$

so ist

$$\frac{\eta}{r} = \frac{1}{24} e_m^2 y_m^3 \left(1 - 4 \left(\frac{\xi}{r} \right)^2 \right) \left(\frac{\xi}{r} + \frac{1}{2} - \delta - \beta \right)^2.$$

Die Werte von δ liegen zwischen 0 und $+\frac{1}{2}$; zwischen diesen Grenzen wird nach (41) auch β liegen,

daher gehen die Werte von $\frac{\xi}{r} = -\frac{1}{2} + \delta + \beta$ von $-\frac{1}{2}$ (für $\delta = 0$) bis $+\frac{1}{2}$ (für $\delta = \frac{1}{2}$). Die Bildkurve, die nur positive η hat, wird mithin südlich von $p_1 p_2$ verlaufen, aber in einem Punkte zwischen p_1 und p_2 berühren. Die Kurve muß also zwei Wendepunkte haben. Für $\delta = 0,2$, d. i. $y_2 = -4y_1$, ist $\beta = -0,6 + \sqrt{0,52} = +0,12$ und $\frac{\xi}{r} = -0,18$; ist $\delta = 0,4$, d. i. $y_2 = -\frac{3}{2} y_1$, so hat man $\beta = -0,2 + \sqrt{0,28} = +0,33$ und $\frac{\xi}{r} = +0,23$; s. Fig. 17.

Wenn

$$\beta < -1 + 2\delta + \sqrt{1 - 3\delta + 3\delta^2} \quad (42)$$

ist, so hat die Bildkurve keinen Schnittpunkt zwischen $p_1 p_2$; sie verläuft südlich davon.

§ 40.

Zusammenstellung.

Es soll nun zusammengestellt werden, wann die Bildkurve, deren Endpunkte p_1 und p_2 auf verschiedenen Seiten der Abszissenachse liegen, innerhalb $p_1 p_2$ Schnittpunkte besitzt.

Vorausgesetzt war, daß y_1 negativ und $-y_1 < y_2$ ist.

Im allgemeinen, wenn das Azimut ϑ von $p_1 p_2$ nicht in der Nähe von 90° liegt, wird die Bildkurve einen Schnittpunkt haben, wenn

$$-2y_1 > y_2 \quad \text{oder} \quad 3p_1 p_0 > p_1 p_2$$

ist. p_0 ist der Schnittpunkt von $p_1 p_2$ mit der x -Achse. Ist $-2y_1 < y_2$, so gibt es keinen Schnittpunkt. Die Bildkurve verläuft, da der Schnittpunkt der Bildkurve mit der \bar{x} -Achse immer ein Wendepunkt ist, stets so, daß ihre hohle Seite der \bar{x} -Achse zugekehrt ist.

Wenn nun $p_1 p_2$ in die Nähe der senkrechten Richtung zur \bar{x} -Achse kommt, so daß

$$\operatorname{ctg} \vartheta = -\frac{2e_m^2}{e'_m} \left(\frac{y_1 + y_2}{2} + \beta(y_2 - y_1) \right)$$

ist, so findet folgendes statt.

Ist β negativ und $y_2 > -2y_1$, so hat wie vorhin die Bildkurve keinen Schnittpunkt innerhalb; sie verläuft südlich von $p_1 p_2$. Wenn aber

$$-2y_1 > y_2 \quad \text{oder} \quad 2p_1 p_0 > p_0 p_2$$

ist, so besitzt sie einen Schnittpunkt für

$$-\beta > \frac{y_1}{2(2y_1 + y_2)};$$

dagegen keinen, wenn $-\beta < \frac{y_1}{2(2y_1 + y_2)}$ ist, sie verläuft dann südlich von $p_1 p_2$.

Für $-\beta = \frac{y_2 + y_1}{2(y_2 - y_1)}$, wenn $\vartheta = 90^\circ$ ist, hat die Bildkurve keinen Schnittpunkt und liegt südlich von $p_1 p_2$, auch wenn sie sich außerhalb der Abszissenachse befindet.

Für $\beta = 0$ erstreckt sich die Kurve gleichfalls südlich von $p_1 p_2$.

Es sei nun β positiv.

Ist erstens

$$\beta < \left(-\frac{y_2 + y_1}{y_2 - y_1} + \frac{1}{2} \sqrt{1 + 3 \left(\frac{y_2 + y_1}{y_2 - y_1} \right)^2} \right),$$

so hat die Bildkurve zwischen den beiden Endpunkten keinen Schnittpunkt mit $p_1 p_2$; sie liegt südlich von $p_1 p_2$.

Und ist

$$\beta = -\frac{y_2 + y_1}{y_2 - y_1} + \frac{1}{2} \sqrt{1 + 3 \left(\frac{y_2 + y_1}{y_2 - y_1} \right)^2},$$

so verläuft die Kurve ebenfalls südlich von $p_1 p_2$, berührt aber in einem Punkte zwischen p_1 und p_2 die Kurve eben falls südlich von $p_1 p_2$, berührt aber in einem Punkte zwischen p_1 und p_2 . Für $y_1 = 0$ oder $y_2 = -y_1$ liegt der Berührungs punkt in p_1 oder p_2 .

Zweitens sei

$$-(2 + \sqrt{3}) y_1 > y_2 \quad \text{oder} \quad (3 + \sqrt{3}) p_1 p_0 > p_1 p_2.$$

Nun kann es zwei Schnittpunkte geben, wenn

$$\text{Ist } \left(-\frac{y_2 + y_1}{y_2 - y_1} + \frac{1}{2} \sqrt{1 + 3 \left(\frac{y_2 + y_1}{y_2 - y_1} \right)^2} \right) < \beta < \frac{y_2}{2(y_1 + 2y_2)}.$$

$$\beta = \frac{y_2}{2(y_1 + 2y_2)},$$

so tangiert die Bildkurve in p_2 und hat einen Schnittpunkt zwischen p_1 und p_2 .

Ist

$$-(2 + \sqrt{3}) y_1 > y_2 > -2y_1 \text{ oder } (3 + \sqrt{3}) p_1 p_0 > p_1 p_2 > 3p_1 p_0,$$

so hat die Kurve einen Schnittpunkt zwischen p_1 und p_2 , wenn

$$\frac{y_2}{2(y_1 + 2y_2)} < \beta < \frac{-y_1}{2(2y_1 + y_2)}$$

ist; sie hat keinen Schnittpunkt für

$$\frac{-y_1}{2(2y_1 + y_2)} < \beta,$$

alsdann verläuft die Bildkurve nördlich von $p_1 p_2$.

Und ist

$$-2y_1 > y_2 \text{ oder } 3p_1 p_0 > p_1 p_2,$$

so besitzt sie wieder einen Schnittpunkt innerhalb $p_1 p_2$, wenn

$$\frac{y_2}{2(y_1 + 2y_2)} < \beta$$

ist; bei p_1 liegt sie südlich, bei p_2 nördlich von $p_1 p_2$.

Drittens sei

$$-(2 + \sqrt{3}) y_1 = y_2 \text{ oder } (2 + \sqrt{3}) p_1 p_0 = p_0 p_2;$$

in diesem Falle tangiert die Bildkurve in p_1 und p_2 und verläuft nördlich von $p_1 p_2$.

Viertens sei

$$-(2 + \sqrt{3}) y_1 < y_2 \text{ oder } (3 + \sqrt{3}) p_1 p_0 < p_1 p_2.$$

Ist nun

$$\left(-\frac{y_2 + y_1}{y_2 - y_1} + \frac{1}{2} \sqrt{1 + 3 \left(\frac{y_2 + y_1}{y_2 - y_1} \right)^2} \right) < \beta < \frac{-y_1}{2(2y_1 + y_2)},$$

so hat die Bildkurve zwei Schnittpunkte innerhalb $p_1 p_2$.

Ist

$$\beta = \frac{-y_1}{2(2y_1 + y_2)},$$

so tangiert sie in p_1 und hat einen Schnittpunkt zwischen p_1 und p_2 .

Ist

$$\frac{-y_1}{2(2y_1 + y_2)} < \beta < \frac{y_2}{2(y_1 + 2y_2)},$$

so schneidet die Bildkurve einmal innerhalb $p_1 p_2$.

Und ist

$$\frac{y_2}{2(y_1 + 2y_2)} < \beta,$$

so liegen innerhalb $p_1 p_2$ keine Schnittpunkte; zwischen $p_1 p_2$ erstreckt sich die Bildkurve nördlich davon.

Transformation der Koordinaten.

§ 41.

Aufstellung der Grundgleichung.

Die ebenen rechtwinkligen Koordinaten, welche die Ergebnisse der Vermessung eines Landes darstellen, sind entweder auf ein Koordinatensystem bezogen, oder sie gehören zu verschiedenen Systemen, deren Abszissenachsen aufeinanderfolgenden Meridianen mit in der Regel gleichen Längenunterschieden entsprechen. Für die Zwecke der Kleinvermessung ist es nun nötig, von einem Hauptkoordinatensystem zu einem besonderen System, oder von diesem zu einem benachbarten überzugehen.

Der Übergang von einem Koordinatensystem zu einem andern kann nun erstens dadurch erfolgen, daß man die geographischen Koordinaten einschaltet. Man berechnet im ersten Koordinatensystem aus den gegebenen Koordinaten die geographische Breite und Länge desjenigen Punktes, der auf ein zweites Koordinatensystem bezogen werden soll. In diesem werden umgekehrt aus Breite und Länge die gesuchten ebenen Koordinaten gefunden. Vgl. § 46 I S. 163.

Man kann zweitens den Übergang von einem zum andern Koordinatensystem mit Hilfe der Formeln für die Entferungs- und Richtungsreduktionen bewerkstelligen. Es seien P und P_1 zwei Punkte des Ellipsoids, deren entsprechende Koordinaten im ersten Koordinatensystem gegeben sind. Vom Punkte P seien die zugehörigen Koordinaten auch im zweiten System bekannt, bzw. sei P dessen Anfangspunkt. Man leitet nun im ersten Koordinatensystem aus dem ebenen Richtungswinkel und der Entfernung der beiden Bildpunkte von P und P_1 das Anfangsazimut und die lineare Länge der geodätischen Linie PP_1 auf dem Ellipsoid ab. Um das Azimut zu erhalten, muß die GAUSS'sche Konvergenz des Meridians in P bekannt sein. Darauf werden im zweiten Koordinatensystem aus den Werten für die geodätische Linie der ebene Richtungswinkel und die ebene Entfernung hergeleitet, aus denen sich dann leicht die gesuchten Koordinatendifferenzen ergeben, die zu PP_1 gehören. Da man zur Berechnung der Reduktionen von der geodätischen Linie auf die ebene Entfernung schon der Koordinaten beider Bildpunkte von P und P_1 bedarf, so muß man zunächst Näherungswerte für die zu letzterm gehörigen Koordinaten benutzen. Vgl. § 46 II S. 164.

Diese beiden Verfahren haben aber den Übelstand, der sich besonders bei einer größeren Anzahl von Punkten, deren Koordinaten zu transformieren sind, geltend macht, daß für jeden Punkt die ganze Rechnung zu wiederholen ist. Wenn daher mehrere solcher Punkte vorhanden sind, so wird es vorteilhafter sein, besondere Transformationsgleichungen aufzustellen. Dies soll im folgenden geschehen.

Der Anfangspunkt eines ebenen rechtwinkligen Koordinatensystems entspreche dem Punkte des Hauptmeridians, $L = 0$, zu dem die geographische Breite B_0' gehört. Der Meridianbogen vom Äquator bis B_0' sei

$$x_0 = \int_0^{B_0'} R dB, \quad R = \frac{a \sqrt{1 + e'^2}}{(V^2 + e'^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad e'^2 = e'^2 \cos^2 B.$$

Der Punkt P auf dem Ellipsoid, der die geographischen Koordinaten B, L besitzt, werde in der Ebene durch die rechtwinkligen Koordinaten $\bar{x}' = m_0 x'$, $\bar{y} = m_0 y$ und der Punkt P_1 , zu dem B_1, L_1 gehören, durch $\bar{x}_1' = m_0 x_1'$, $\bar{y}_1 = m_0 y_1$ dargestellt. Für die Abbildung des Punktes P gilt alsdann nach (10) § 1 S. 3 die Gleichung

$$f(x_0 + x' + iy) = f(X) + iL \quad (1)$$

mit

$$X = \int_0^B R dB,$$

und für die Abbildung von P_1 die Gleichung

$$f(x_0 + x_1' + iy_1) = f(X_1) + iL_1 \quad (2)$$

mit

$$X_1 = \int_0^{B_1} R dB.$$

Setzt man

$$x_0 + x' = x = \int_0^{B'} R dB, \quad (3)$$

wo B' die Breite ist, die zu x' gehört, so daß also x die Länge des Meridianbogens vom Äquator bis zu B' ist, und ferner

$$x_1' - x' + i(y_1 - y) = z, \quad (4)$$

so gibt die Subtraktion der Gl. (1) von (2):

$$f(x + iy + z) - f(x + iy) = f(X_1) - f(X) + i(L_1 - L). \quad (5)$$

Es werde jetzt eine zweite Abbildung des Ellipsoids in der Ebene ausgeführt, derart, daß der durch P gehende Meridian zum Hauptmeridian wird. Der dem Punkte P entsprechende Punkt in der Ebene soll dabei als Anfangspunkt eines rechtwinkligen Koordinatensystems genommen werden. Das Verhältnis zwischen Strecken auf der Abszissenachse und den entsprechenden Bogen des neuen Hauptmeridians sei m_* . Bei dieser zweiten konformen Übertragung soll der Punkt P_1 des Ellipsoids, dessen geographische Koordinaten nach vorhergehendem $B_1, L_1 - L$ sind, durch einen Punkt mit den ebenen Koordinaten $\xi = m_* \bar{x}', \eta = m_* \bar{y}$ dargestellt werden.

Die Längen der Meridianbogen vom Äquator bis zu den Breiten B und B_1 sind wie schon angegeben X und X_1 ; die Abbildungsgleichung lautet mithin jetzt:

$$f(X + \xi + i\eta) = f(X_1) + i(L_1 - L). \quad (6)$$

Um eine Beziehung zwischen den beiden ebenen Koordinatensystemen zu erhalten, subtrahiere man (5) von (6). Wird noch

$$\xi + i\eta = \xi \quad (7)$$

gesetzt, so ergibt sich:

$$f(X + \xi) - f(X) = f(x + iy + z) - f(x + iy). \quad (8)$$

Diese Gleichung kann zur Herstellung der Ausdrücke für die Koordinatentransformation dienen, indem man aus ihr ξ als Potenzreihe von z darstellt.

Man kann ihr auch noch eine andere Form geben. Nach (1) und (3) ist

$$f(x + iy) = f(X) + iL,$$

und

$$f(x - iy) = f(X) - iL;$$

daher wird

$$f(X) = \frac{1}{2} f(x + iy) + \frac{1}{2} f(x - iy);$$

setzt man noch

$$X - x + \xi = Z, \quad (9)$$

so folgt aus (8):

$$f(x + Z) = f(x + iy + z) - \frac{1}{2} f(x + iy) + \frac{1}{2} f(x - iy). \quad (10)$$

In dieser Form ist die Gleichung von GAUSS (Werke, Band IX, S. 168), ohne Ableitung, angegeben.

§ 42.

Erste Entwicklung der Transformationsgleichungen.

Es soll nun zuerst die Gl. (10) zum Ausgang der Entwicklung genommen werden. Indem man darauf die TAYLORSche Reihe anwendet, erhält man:

$$\begin{aligned} & f(x) + Zf'(x) + \frac{1}{2} Z^2 f''(x) + \frac{1}{6} Z^3 f'''(x) + \frac{1}{24} Z^4 f^{IV}(x) + \dots \\ &= f(x) + zf'(x) + \frac{1}{2} (z^2 - y^2 + i2zy)f''(x) + \frac{1}{6} (z^3 - 3zy^2 + i3z^2y)f'''(x) \\ & \quad + \frac{1}{24} (z^4 - 6z^2y^2 + y^4 + i(4z^3y - 4zy^3))f^{IV}(x) + \dots \end{aligned}$$

Wie früher wird wieder

$$\frac{f^{(\nu+1)}(x)}{f'(x)} = g_\nu(x)$$

gesetzt, wofür kurz g_ν geschrieben wird.

Setzt man jetzt

$$Z + \frac{1}{2} g_1 Z^2 + \frac{1}{6} g_2 Z^3 + \frac{1}{24} g_3 Z^4 + \dots = u,$$

so ist umgekehrt

$$Z = u - \frac{1}{2} g_1 u^2 + \left(\frac{1}{2} g_1^2 - \frac{1}{6} g_2 \right) u^3 + \left(\frac{5}{12} g_1 g_2 - \frac{5}{8} g_1^3 - \frac{1}{24} g_3 \right) u^4 + \dots$$

Darin ist, wie aus der zuerst angegebenen Gleichung folgt,

$$\begin{aligned} u &= z + \frac{1}{2} g_1 (z^2 - y^2 + i2zy) + \frac{1}{6} g_2 (z^3 - 3zy^2 + i3z^2y) + \frac{1}{24} g_3 (z^4 - 6z^2y^2 + y^4 \\ & \quad + i(4z^3y - 4zy^3)) + \dots \end{aligned}$$

zu setzen. Das gibt, wenn zugleich nach z geordnet wird,

$$\begin{aligned} Z &= -\frac{1}{2} g_1 y^2 + \left(\frac{1}{24} g_3 - \frac{1}{8} g_1^3 \right) y^4 + \dots + z \left\{ 1 + ig_1 y - \left(\frac{1}{2} g_2 - \frac{1}{2} g_1^2 \right) y^2 \right. \\ & \quad \left. - \left(\frac{1}{6} g_3 - \frac{1}{2} g_1^3 \right) iy^3 + \dots \right\} + z^2 \left\{ \left(\frac{1}{2} g_2 - g_1^2 \right) iy - \left(\frac{1}{4} g_3 - \frac{3}{4} g_1 g_2 \right) y^2 + \dots \right\} \\ & \quad + z^3 \left\{ \left(\frac{1}{6} g_3 - g_1 g_2 + g_1^3 \right) iy + \dots \right\} + \dots \end{aligned} \quad (11)$$

Da aber nach (9)

$$\xi = Z + (x - X)$$

und nach (6) § 13 S. 38

$$x - X = \frac{1}{2} g_1 y^2 - \left(\frac{1}{24} g_3 - \frac{1}{8} g_1^3 \right) y^4 + \dots$$

ist, so wird endlich erhalten, wenn man zugleich die Rechnung noch ein Glied weiter führt:

$$\xi = (a_1 + i b_1) z + \frac{1}{2} (a_2 + i b_2) z^2 + \frac{1}{6} (a_3 + i b_3) z^3 + \frac{1}{24} (a_4 + i b_4) z^4 + \dots \quad (12)$$

Die Werte der a und b ergeben sich aus den entsprechenden Ausdrücken in (11), wenn in diese die Werte der g aus (8) § 13 S. 38 eingeführt werden. Es wird

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 - \frac{1}{2} (Q' + \operatorname{tg}^2 B') \left(\frac{y}{N'} \right)^2 + \frac{1}{24} (Q'^2 (5 - 4 \varepsilon'^2) + 2 Q' \operatorname{tg}^2 B' (7 - 8 \varepsilon'^2 + 3 \varepsilon'^4) + 9 \operatorname{tg}^4 B') \left(\frac{y}{N'} \right)^4 - \dots, \\ b_1 &= \operatorname{tg} B' \left(\frac{y}{N'} \right) - \frac{1}{6} \operatorname{tg} B' (Q' (5 - 4 \varepsilon'^2) + 3 \operatorname{tg}^2 B') \left(\frac{y}{N'} \right)^3 + \dots; \\ a_2 &= \frac{Q'}{N'} \left\{ - \operatorname{tg} B' (1 - 2 \varepsilon'^2) \left(\frac{y}{N'} \right)^2 + \dots \right\}, \\ b_2 &= \frac{Q'}{N'} \left\{ \left(\frac{y}{N'} \right) - \frac{1}{6} (Q' (5 - 4 \varepsilon'^2) + 3 \operatorname{tg}^2 B' (1 - 4 \varepsilon'^2 + 8 \varepsilon'^4)) \left(\frac{y}{N'} \right)^3 + \dots \right\}; \\ a_3 &= \frac{Q'}{N'^2} \left\{ - (Q' (1 - 2 \varepsilon'^2) - 2 \operatorname{tg}^2 B' (1 + \varepsilon'^2 - 6 \varepsilon'^4)) \left(\frac{y}{N'} \right)^2 + \dots \right\}, \\ b_3 &= \frac{Q'}{N'^2} \left\{ - \operatorname{tg} B' (1 + 4 \varepsilon'^2) \left(\frac{y}{N'} \right) + \dots \right\}; \\ a_4 &= \frac{Q'}{N'^3} \left\{ \dots \right\}, \\ b_4 &= \frac{Q'}{N'^3} \left\{ - (Q' (1 + 4 \varepsilon'^2) - 12 \operatorname{tg}^2 B' \cdot \varepsilon'^2 (1 + 2 \varepsilon'^2)) \left(\frac{y}{N'} \right) + \dots \right\}; \\ &\text{usw.} \end{aligned} \quad (13)$$

Hierin ist B' , wie schon gesagt, die geographische Breite, die x' entspricht; $Q' = 1 + \varepsilon'^2 = 1 + e'^2 \cos^2 B'$, $N' = \frac{a \sqrt{1 + e'^2}}{\sqrt{1 + \varepsilon'^2}}$.

Setzt man

$$x_1 - x = x_1' - x' = \Delta x, \quad y_1 - y = \Delta y, \quad \text{also } z = \Delta x + i \Delta y, \quad (14)$$

so findet man für die Koordinaten des Bildes von P_1 im zweiten Koordinatensystem:

$$\left. \begin{aligned} \xi &= a_1 \Delta x - b_1 \Delta y + \frac{1}{2} a_2 (\Delta x^2 - \Delta y^2) - b_2 \Delta x \Delta y + \frac{1}{6} a_3 \Delta x (\Delta x^2 - 3 \Delta y^2) - \frac{1}{6} b_3 \Delta y (3 \Delta x^2 - \Delta y^2) \\ &\quad + \frac{1}{24} a_4 (\Delta x^4 - 6 \Delta x^2 \Delta y^2 + \Delta y^4) - \frac{1}{6} b_4 \Delta x \Delta y (\Delta x^2 - \Delta y^2) + \dots \\ \eta &= b_1 \Delta x + a_1 \Delta y + \frac{1}{2} b_2 (\Delta x^2 - \Delta y^2) + a_2 \Delta x \Delta y + \frac{1}{6} b_3 \Delta x (\Delta x^2 - 3 \Delta y^2) + \frac{1}{6} a_3 \Delta y (3 \Delta x^2 - \Delta y^2) \\ &\quad + \frac{1}{24} b_4 (\Delta x^4 - 6 \Delta x^2 \Delta y^2 + \Delta y^4) + \frac{1}{6} a_4 \Delta x \Delta y (\Delta x^2 - \Delta y^2) + \dots \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

§ 43.

Zweite Entwicklung der Transformationsgleichungen.

Die Ausdrücke für die Koeffizienten in den Transformationsgleichungen lassen sich übersichtlicher als in (11) darstellen, wenn man die Gl. (8) zur Entwicklung benutzt. Aus dieser folgt, wenn

$$\frac{f'(x+iy)}{f'(X)} = F_0, \quad \frac{f''(x+iy)}{f'(X)} = F_1, \quad \frac{f'''(x+iy)}{f'(X)} = F_2 \text{ usw.}$$

und wie früher

$$\frac{f''(X)}{f'(X)} = G_1, \quad \frac{f'''(X)}{f'(X)} = G_2 \text{ usw.}$$

gesetzt wird:

$$\xi + \frac{1}{2} G_1 \xi^2 + \frac{1}{6} G_2 \xi^3 + \frac{1}{24} G_3 \xi^4 + \cdots = F_0 z + \frac{1}{2} F_1 z^2 + \frac{1}{6} F_2 z^3 + \frac{1}{24} F_3 z^4 + \cdots,$$

und daraus

$$\xi = h_1 z + \frac{1}{2} h_2 z^2 + \frac{1}{6} h_3 z^3 + \frac{1}{24} h_4 z^4 + \cdots \quad (16)$$

mit

$$h_1 = F_0 = \frac{m_0}{m} e^{ic}, \text{ nach (18) § 2 S. 5,} \quad (17)$$

und

$$\left. \begin{aligned} h_2 &= F_1 - G_1 h_1^2 = F_1 - G_1 F_0^2 \\ h_3 &= F_2 - 3G_1 h_1 h_2 - G_2 h_1^3 = F_2 - 3F_0 F_1 G_1 + 3F_0^3 G_1^2 - F_0^3 G_2 \\ h_4 &= F_3 - G_1 (4h_1 h_3 + 3h_2^2) - 6G_2 h_1^2 h_2 - G_3 h_1^4 \\ &= F_3 - (4F_0 F_2 + 3F_1^2) G_1 + 18F_0^2 F_1 G_1^2 - 6F_0^2 F_1 G_2 \\ &\quad - F_0^4 (15G_1^3 - 10G_1 G_2 + G_3) \\ &\quad \text{usw.} \end{aligned} \right\} \quad (17^*)$$

Die Werte von h_2, h_3, \dots kann man nun erhalten, indem man F_v und G_v , also $f^{(v)}(x+iy)$, $f'(X)$ und $f^{(v)}(X)$, in Potenzreihen von y entwickelt, wobei (6) § 13 S. 38 zu berücksichtigen ist.

Für h_1 ergibt sich nach (17) S. 5:

$$h_1 = \frac{\partial X}{\partial x} - i \frac{\partial X}{\partial y}; \quad (17^{**})$$

dafür findet man, vgl. S. 47:

$$h_1 = 1 + g_1 \cdot iy - \frac{1}{2} (g_2 - g_1^2) y^2 - \frac{1}{6} (g_3 - 3g_1^3) iy^3 + \frac{1}{24} (g_4 - g_1 g_3 - 9g_1^2 g_2 + 9g_1^4) y^4 + \cdots \quad (18)$$

Ferner wird

$$F_1 = g_1 + g_2 \cdot iy - \frac{1}{2} (g_3 - g_1^3) y^2 - \frac{1}{6} (g_4 - 3g_1^2 g_2) iy^3 + \cdots$$

$$F_2 = g_2 + g_3 \cdot iy - \frac{1}{2} (g_4 - g_1^2 g_2) y^2 + \cdots$$

$$F_3 = g_3 + g_4 \cdot iy - \cdots$$

und

$$G_1 = g_1 - \frac{1}{2} (g_1 g_2 - g_1^3) y^2 + \frac{1}{24} (g_2 g_3 + 2g_1^2 g_3 - 12g_1^3 g_2 + 9g_1^5) y^4 - \cdots$$

$$G_2 = g_2 - \frac{1}{2} (g_1 g_3 - g_1^2 g_2) y^2 + \cdots$$

$$G_3 = g_3 - \cdots \quad \text{usw.}$$

Die Werte von $g_v = \frac{f^{(v+1)}(x)}{f'(x)}$ sind wieder aus (8) § 13 S. 38 zu entnehmen.

Die h in (16) lassen sich aber noch in eine einfachere Form bringen. Zu dieser wird man in folgender Weise geführt. Man denke sich $\xi = \xi + i\eta$ nach dem TAYLORSCHEN Satze nach Potenzen von $z = \Delta x + i\Delta y$ entwickelt:

$$\xi = z \frac{d\xi}{dz} + \frac{1}{2} z^2 \frac{d^2\xi}{dz^2} + \frac{1}{6} z^3 \frac{d^3\xi}{dz^3} + \dots, \quad (16^*)$$

worin sich die Differentialquotienten auf den Bildpunkt von P beziehen.

Aus (8) ergibt sich nun, wenn man P_1 unendlich nahe an P rücken läßt,

$$f'(X) d\xi = f'(x + iy) dz,$$

mithin wird nach (18) und (17), S. 5

$$\frac{d\xi}{dz} = \frac{f'(x + iy)}{f'(X)} = \frac{\partial X}{\partial x} - i \frac{\partial X}{\partial y} = \frac{m_0}{m} e^{ic}; \quad (18^*)$$

m und c sind das Vergrößerungsverhältnis und die Meridiankonvergenz in P , e ist die Basis der natürlichen Logarithmen.

Die Gl. (18) kann man auch durch geometrische Anschauung erhalten.

Aus ihr lassen sich jetzt die weiteren Ableitungen wie folgt bilden. Setzt man

$$\frac{d^r \xi}{dz^r} = h_r,$$

so ist

$$\frac{d^{r+1}\xi}{dz^{r+1}} = \frac{\frac{\partial h_r}{\partial x} dx + \frac{\partial h_r}{\partial y} dy}{dx + idy} = \frac{\frac{\partial h_r}{\partial x} + \frac{\partial h_r}{\partial y} \frac{dy}{dx}}{1 + i \frac{dy}{dx}},$$

worin $\frac{dy}{dx} = -\operatorname{tg} c$ zu setzen ist, weil die Differentialquotienten in Richtung des neuen Hauptmeridians zu nehmen sind; also wird:

$$\begin{aligned} \frac{d^{r+1}\xi}{dz^{r+1}} &= h_{r+1} = e^{ic} \left(\frac{\partial h_r}{\partial x} \cos c - \frac{\partial h_r}{\partial y} \sin c \right) \\ &= h_1 \frac{m}{m_0} \left(\frac{\partial h_r}{\partial x} \cos c - \frac{\partial h_r}{\partial y} \sin c \right), \end{aligned} \quad (19)$$

oder da nach (17) S. 5,

$$\cos c = \frac{m}{m_0} \frac{\partial X}{\partial x} \quad \text{und} \quad \sin c = -\frac{m}{m_0} \frac{\partial X}{\partial y}$$

ist:

$$\frac{d^{r+1}\xi}{dz^{r+1}} = h_{r+1} = h_1 \left(\frac{m}{m_0} \right)^2 \left(\frac{\partial h_r}{\partial x} \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial h_r}{\partial y} \frac{\partial X}{\partial y} \right). \quad (19^*)$$

Hiernach ergeben sich die Differentialquotienten sukzessive aus h_1 nach (18).

Aus (19*) erhält man aber wieder die in (17*) gegebenen Ausdrücke, wenn man berücksichtigt, daß

$$h_1 = F_0;$$

$$\frac{\partial F_r}{\partial x} = F_{r+1} - G_1 F_r \frac{\partial X}{\partial x}$$

$$\frac{\partial G_r}{\partial x} = (G_{r+1} - G_1 G_r) \frac{\partial X}{\partial x}$$

$$\frac{\partial F_r}{\partial y} = i F_{r+1} - G_1 F_r \frac{\partial X}{\partial y}$$

$$\frac{\partial G_r}{\partial y} = (G_{r+1} - G_1 G_r) \frac{\partial X}{\partial y},$$

und nach § 2, (15) und (17):

$$\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial X}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{m_0}{m}\right)^2 \quad \text{und} \quad \frac{\partial X}{\partial x} + i \frac{\partial X}{\partial y} = \frac{m_0}{m} e^{-ic} = \left(\frac{m_0}{m}\right)^2 \frac{1}{h_1},$$

also

$$\left(\frac{m}{m_0}\right)^2 h_1 \left(\frac{\partial F_r}{\partial x} \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial F_r}{\partial y} \frac{\partial X}{\partial y} \right) = F_{r+1} - F_0 F_r G_1$$

$$\left(\frac{m}{m_0}\right)^2 \left(\frac{\partial G_r}{\partial x} \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial G_r}{\partial y} \frac{\partial X}{\partial y} \right) = G_{r+1} - G_1 G_r$$

ist.

Die Werte für $\frac{\partial X}{\partial x}$ und $\frac{\partial X}{\partial y}$, die man nach (19*) zur Berechnung der h braucht, und die man aus (6) § 13 S. 38 erhält, sind bereits auf S. 153 benutzt worden:

$$\frac{\partial X}{\partial x} = 1 - \frac{1}{2}(g_2 - g_1^2)y^3 + \frac{1}{24}(g_4 - g_1 g_3 - 9g_1^2(g_2 - g_1^2))y^4 - \dots$$

$$\frac{\partial X}{\partial y} = -g_1 y + \frac{1}{6}(g_3 - 3g_1^3)y^3 - \frac{1}{120}(g_5 - 15g_1^3g_2 - 15g_1^2(g_3 - 3g_1^3))y^5 + \dots;$$

damit wird

$$h_1 \left(\frac{m}{m_0}\right)^2 = \frac{1}{\frac{\partial X}{\partial x} + i \frac{\partial X}{\partial y}} = 1 + ig_1 y + \frac{1}{2}(g_2 - 3g_1^2)y^3 + \dots$$

Will man (19) anwenden, so hat man außerdem noch

$$\sin c = g_1 y - \frac{1}{6}(g_3 - 3g_1 g_2 + 3g_1^3)y^3 + \dots$$

$$\cos c = 1 - \frac{1}{2}g_1^2 y^2 + \frac{1}{24}(4g_1 g_3 - 12g_1^2 g_2 + 9g_1^4)y^4 - \dots$$

Da ferner

$$\frac{dg_r}{dx} = g_{r+1} - g_r g_r$$

ist, so findet man zu h_1 aus (18) mittels (19*):

$$\begin{aligned} h_2 &= h_1 \left\{ (g_2 - 2g_1^2)iy - \frac{1}{2}(g_3 - 5g_1 g_2 + 4g_1^3)y^2 + \frac{1}{6}(-g_4 + 5g_1 g_3 + 3g_2^2 - 9g_1^2 g_2)iy^3 - \dots \right\} \\ h_3 &= h_1 \left\{ (g_3 - 6g_1 g_2 + 6g_1^3)iy - \frac{1}{2}(g_4 - 6g_1 g_3 - 3g_2^2 + 12g_1^2 g_2)y^2 + \dots \right\} \\ h_4 &= h_1 \left\{ (g_4 - 8g_1 g_3 - 6g_2^2 + 36g_1^2 g_2 - 24g_1^4)iy - \dots \right\} \\ &\quad \text{usw.} \end{aligned} \tag{18**}$$

und hieraus, wenn die Werte der g aus (8) S. 38 eingeführt werden und

$$h_1 = h_{1,1} + ih_{1,2} = a_1 + ib_1$$

$$h_2 = h_1(h_{2,1} + ih_{2,2})$$

$$h_3 = h_1(h_{3,1} + ih_{3,2})$$

$$h_4 = h_1(h_{4,1} + ih_{4,2})$$

usw.

20*

gesetzt wird:

$$\begin{aligned}
 h_{1 \cdot 1} &= \frac{m_0}{m} \cos c, & h_{1 \cdot 2} &= \frac{m_0}{m} \sin c; \\
 h_{2 \cdot 1} &= \frac{Q'}{N'} \left\{ 2 \varepsilon'^2 \operatorname{tg} B' \left(\frac{y}{N'} \right)^2 + \dots \right\}, \\
 h_{2 \cdot 2} &= \frac{Q'}{N'} \left\{ \frac{y}{N'} - \frac{1}{3} (Q' (1 - 2 \varepsilon'^2) + 12 \varepsilon'^4 \operatorname{tg}^2 B') \left(\frac{y}{N'} \right)^3 + \dots \right\}; \\
 h_{3 \cdot 1} &= - \frac{Q'}{N'^3} \left\{ (Q' (1 - 2 \varepsilon'^2) - \operatorname{tg}^2 B' (1 - 2 \varepsilon'^2 - 12 \varepsilon'^4)) \left(\frac{y}{N'} \right)^3 - \dots \right\}, \\
 h_{3 \cdot 2} &= - \frac{Q'}{N'^3} \left\{ \operatorname{tg} B' (1 + 4 \varepsilon'^2) \frac{y}{N'} - \dots \right\}; \\
 h_{4 \cdot 1} &= - \frac{Q'}{N'^5} G l_2, \\
 h_{4 \cdot 2} &= - \frac{Q'}{N'^5} \left\{ (Q' (1 + 4 \varepsilon'^2) - 12 \varepsilon'^2 \operatorname{tg}^2 B' (1 + 2 \varepsilon'^2)) \frac{y}{N'} - \dots \right\}; \\
 &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots
 \end{aligned} \tag{21}$$

Diese Ausdrücke werden etwas einfacher, wenn man

$$\frac{1}{\varepsilon'} = \frac{1}{\sqrt{R' N'}} = \frac{1 + \varepsilon'^2}{a \sqrt{1 + \varepsilon'^2}} \quad \text{und} \quad \varepsilon^2 = \frac{\varepsilon'^2 \operatorname{tg} B'}{\sqrt{Q'}}, \quad Q' = 1 + \varepsilon'^2,$$

einführt. Dann wird

$$\begin{aligned}
 h_{2 \cdot 1} &= \frac{1}{\varepsilon'} \left\{ 2 \varepsilon^2 \left(\frac{y}{\varepsilon'} \right)^2 + \dots \right\}, \\
 h_{2 \cdot 2} &= \frac{1}{\varepsilon'} \left\{ \frac{y}{\varepsilon'} - \frac{1}{3} (1 - 2 \varepsilon'^2 + 12 \varepsilon^4) \left(\frac{y}{\varepsilon'} \right)^3 + \dots \right\}; \\
 h_{3 \cdot 1} &= \frac{1}{\varepsilon'^3} \left\{ \left(\left(\frac{\operatorname{tg}^2 B'}{Q'} - 1 \right) (1 - 2 \varepsilon'^2) - 12 \varepsilon^4 \right) \left(\frac{y}{\varepsilon'} \right)^3 - \dots \right\}, \\
 h_{3 \cdot 2} &= - \frac{1}{\varepsilon'^3} \left\{ \left(\frac{\operatorname{tg} B'}{\sqrt{Q'}} + 4 \varepsilon^2 \right) \frac{y}{\varepsilon'} - \dots \right\}; \\
 h_{4 \cdot 1} &= \frac{1}{\varepsilon'^5} G l_2, \\
 h_{4 \cdot 2} &= - \frac{1}{\varepsilon'^5} \left\{ \left(1 + 4 \varepsilon'^2 - 12 \varepsilon'^2 \frac{\operatorname{tg}^2 B'}{Q'} - 24 \varepsilon^4 \right) \frac{y}{\varepsilon'} - \dots \right\}; \\
 &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots
 \end{aligned} \tag{21*}$$

Die Werte beziehen sich auf den Bildpunkt von P .

Will man aus $h_{r \cdot 1}$ und $h_{r \cdot 2}$ die vorher, S. 152, gebrauchten a_r, b_r herstellen, so hat man

$$\begin{aligned}
 h_{1 \cdot 1} &= a_1, & h_{1 \cdot 2} &= b_1, \\
 a_1 h_{r \cdot 1} - b_1 h_{r \cdot 2} &= a_r, \\
 b_1 h_{r \cdot 1} + a_1 h_{r \cdot 2} &= b_r.
 \end{aligned} \tag{20*}$$

§ 44.

Schärfere Form der Koeffizienten in den Transformationsgleichungen.

Die Gleichungen für $h_{v,1}$ und $h_{v,2}$, (21) bzw. (21*), sind als Potenzreihen von y erhalten worden. Man kann nun für sie andere, genauere Ausdrücke ableiten, welche die von der Exzentrizität freien Glieder vollständig, in geschlossener Form, enthalten.

Nach (19*) ist

$$\frac{d^3\xi}{dz^3} = h_1 \left(\frac{m}{m_0} \right)^2 \left(\frac{\partial h_1}{\partial x} \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial h_1}{\partial y} \frac{\partial X}{\partial y} \right),$$

woraus folgt, wenn in der Klammer $h_1 = \frac{\partial X}{\partial x} - i \frac{\partial X}{\partial y}$ gesetzt und darauf berücksichtigt wird, daß $\left(\frac{\partial X}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial X}{\partial y} \right)^2 = \left(\frac{m_0}{m} \right)^2$

ist:

$$\frac{d^3\xi}{dz^3} = h_1 \left(-\frac{\partial \ln m}{\partial x} + i \frac{\partial \ln m}{\partial y} \right). \quad (22)$$

Nun ist nach (29*) § 16 I S. 48

$$\ln \frac{m}{m_0} = \ln \cos i \frac{y}{e'} + \frac{1}{6} (\epsilon'^2 - 6 e^4) \left(\frac{y}{e'} \right)^4 + e'^2 G l_4; \quad (23)$$

folglich wird

$$\frac{\partial \ln m}{\partial x} = i \frac{2 e^2}{e'} \frac{y}{e'} \operatorname{tg} i \frac{y}{e'} + \frac{1}{e'} e'^2 G l_4$$

$$\frac{\partial \ln m}{\partial y} = -i \frac{1}{e'} \operatorname{tg} i \frac{y}{e'} + \frac{2}{3 e'} (\epsilon'^2 - 6 e^4) \left(\frac{y}{e'} \right)^3 + \frac{1}{e'} e'^2 G l_5,$$

und daher

$$\frac{d^3\xi}{dz^3} = h_2 = h_1 \frac{1}{e'} \operatorname{tg} i \frac{y}{e'} \left(1 - i 2 e^2 \frac{y}{e'} + \frac{2}{3} (\epsilon'^2 - 6 e^4) \left(\frac{y}{e'} \right)^2 + e'^2 G l_3 \right). \quad (22^*)$$

Setzt man nun für den Augenblick

$$k_2 = \frac{1}{e'} \operatorname{tg} i \frac{y}{e'} \left(1 - i 2 e^2 \frac{y}{e'} + \frac{2}{3} (\epsilon'^2 - 6 e^4) \left(\frac{y}{e'} \right)^2 + e'^2 G l_3 \right), \quad \text{also } h_2 = h_1 k_2,$$

so wird nach (19):

$$\frac{d^3\xi}{dz^3} = h_3 = h_2 k_2 + h_1^2 \frac{m}{m_0} \left(\frac{\partial k_2}{\partial x} \cos c - \frac{\partial k_2}{\partial y} \sin c \right).$$

Mit

$$\frac{\partial k_2}{\partial x} = -i \frac{1}{e'^2} \left\{ 4 e^2 \frac{y}{e'} + i \left(2 \epsilon'^2 \left(1 - \frac{\operatorname{tg}^2 B'}{Q'} \right) - 12 e^4 \right) \left(\frac{y}{e'} \right)^2 + e'^2 G l_3 \right\}$$

und

$$\frac{\partial k_2}{\partial y} = i \frac{1}{e'^2} \frac{1}{\cos^2 i \frac{y}{e'}} \left\{ 1 - i 4 e^2 \frac{y}{e'} + e'^2 G l_3 \right\}$$

wird danach, wenn man noch die Beziehung $\frac{m}{m_0} = \cos i \frac{y}{e'} + e'^2 G l_4$ benutzt:

$$\begin{aligned} \frac{d^3\xi}{dz^3} &= h_1 k_2^2 - h_1^2 \frac{1}{e'^2} \frac{m_0}{m} \left\{ 4 e^2 \frac{y}{e'} \sin c - \left(2 \epsilon'^2 \left(1 - \frac{\operatorname{tg}^2 B'}{Q'} \right) - 12 e^4 \right) \left(\frac{y}{e'} \right)^2 \cos c \right. \\ &\quad \left. + i \left(\sin c + 4 e^2 \frac{y}{e'} \cos c \right) + e'^2 G l_3 \right\} \end{aligned} \quad (24)$$

oder

$$\begin{aligned} h_3 &= h_1 \frac{1}{e'^2} \left(\frac{m_0}{m} \right)^2 \left\{ \sin^2 i \frac{y}{e'} + \sin^2 c + \left(2 \epsilon'^2 \left(1 - \frac{\operatorname{tg}^2 B'}{Q'} \right) - 12 e^4 \right) \left(\frac{y}{e'} \right)^2 \cos^2 c \right. \\ &\quad \left. - i \left(\sin c \cos c + 4 e^2 \frac{y}{e'} \right) + e'^2 G l_3 \right\}. \end{aligned}$$

Zur Herleitung von h_4 setze man

$$h_3 = h_1 k_2^2 - h_1^2 k_3 = h_1 \frac{1}{\epsilon'^2} \operatorname{tg}^2 i \frac{y}{\epsilon'} - h_1^2 k_3 + \frac{1}{\epsilon'^2} e'^2 G l_3,$$

wo die Bedeutung von k_3 aus der ersten Gl. (24) unmittelbar ersichtlich ist. Alsdann wird nach (19*):

$$h_4 = \left(\frac{1}{\epsilon'^2} \operatorname{tg}^2 i \frac{y}{\epsilon'} - 2 h_1 k_3 \right) h_2 + i \frac{2}{\epsilon'^3} h_1^2 \operatorname{tg} i \frac{y}{\epsilon'} \cdot \frac{\partial X}{\partial y} - h_1^3 \left(\frac{m_0}{m} \right)^2 \left(\frac{\partial k_3}{\partial x} \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial k_3}{\partial y} \frac{\partial X}{\partial y} \right) + \frac{1}{\epsilon'^2} e'^2 G l_2.$$

Berücksichtigt man, daß

$$\frac{\partial X}{\partial x} = \frac{m_0}{m} \cos c \quad \text{und} \quad \frac{\partial X}{\partial y} = - \frac{m_0}{m} \sin c$$

ist, und daß nach vorhergehendem

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x \partial y} \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial^2 X}{\partial y^2} \frac{\partial X}{\partial y} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{m_0}{m} \right)^2 = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} \left(1 + \operatorname{tg}^2 i \frac{y}{\epsilon'} + e'^2 G l_4 \right) = i \frac{1}{\epsilon'} \left(\frac{m_0}{m} \right)^2 \operatorname{tg} i \frac{y}{\epsilon'} + \frac{1}{\epsilon'} e'^2 G l_4$$

wird, so ergibt sich

$$\frac{\partial k_3}{\partial x} \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial k_3}{\partial y} \frac{\partial X}{\partial y} = \left(\frac{m_0}{m} \right)^2 \frac{1}{\epsilon'^3} \left\{ \operatorname{tg} i \frac{y}{\epsilon'} - i \left(8 \epsilon^2 \sin c \cos c - 4 \left[\epsilon'^2 \left(1 - \frac{\operatorname{tg}^2 B'}{Q'} \right) - 6 \epsilon^4 \right] \frac{y}{\epsilon'} \cos^2 c \right) + e'^2 G l_2 \right\}.$$

Hiermit erhält man nach einigen Reduktionen:

$$\begin{aligned} h_4 &= -h_2 \frac{1}{\epsilon'^2} \left(1 + i 6 h_1 \frac{m_0}{m} \sin c \right) + i h_1^3 \frac{1}{\epsilon'^3} \left(8 \epsilon^2 \sin c \cos c - 4 \left[\epsilon'^2 \left(1 - \frac{\operatorname{tg}^2 B'}{Q'} \right) - 6 \epsilon^4 \right] \frac{y}{\epsilon'} \cos^2 c \right) + \frac{1}{\epsilon'^2} e'^2 G l_2 \\ &= -h_1 \frac{1}{\epsilon'^3} \left\{ \operatorname{tg} i \frac{y}{\epsilon'} \left(1 + i 6 h_1 \frac{m_0}{m} \sin c \right) - i 4 h_1^2 \cos^2 c \left(2 \epsilon^2 \operatorname{tg} c - \left[\epsilon'^2 \left(1 - \frac{\operatorname{tg}^2 B'}{Q'} \right) - 6 \epsilon^4 \right] \frac{y}{\epsilon'} \right) + e'^2 G l_2 \right\}. \end{aligned} \quad (25)$$

Bei der Entwicklung von h_5 sind die mit e'^2 multiplizierten Glieder nicht mehr in Betracht gezogen. Setzt man

$$h_4 = -\frac{1}{\epsilon'^3} \operatorname{tg} i \frac{y}{\epsilon'} \cdot h_1 k_4, \quad k_4 = 1 + i 6 h_1 \frac{m_0}{m} \sin c = 1 - i 6 h_1 \frac{\partial X}{\partial y},$$

so hat man nach (19*) zunächst:

$$\frac{d^5 \zeta}{dz^5} = h_5 = -\frac{1}{\epsilon'^3} \operatorname{tg} i \frac{y}{\epsilon'} \left\{ h_2 k_4 + h_1^2 \left(\frac{m_0}{m} \right)^2 \left(\frac{\partial k_4}{\partial x} \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial k_4}{\partial y} \frac{\partial X}{\partial y} \right) \right\} + i \frac{1}{\epsilon'^4} h_1^2 k_4 \frac{m_0}{m} \sin c + \frac{1}{\epsilon'^4} e'^2 (\dots),$$

woraus man findet:

$$h_5 = -h_1 \frac{1}{\epsilon'^4} \left\{ \operatorname{tg}^2 i \frac{y}{\epsilon'} + 6 h_1^2 \left(\frac{m_0}{m} \right)^2 \left(\sin^2 i \frac{y}{\epsilon'} + \sin^2 c \right) - i h_1 \frac{m_0}{m} \sin c \left(1 - 12 \operatorname{tg}^2 i \frac{y}{\epsilon'} \right) + e'^2 (\dots) \right\}. \quad (26)$$

Wird wie vorher

$$h_v = h_1 (h_{v,1} + i h_{v,2}) \quad (27)$$

gesetzt, so ergeben sich nach (17) und (22*) bis (26) die folgenden Werte:

$$\left. \begin{aligned}
 h_{1,1} &= \frac{m_0}{m} \cos c, \quad h_{1,2} = \frac{m_0}{m} \sin c; \\
 h_{2,1} &= \frac{1}{e'} \operatorname{Tg} \frac{y}{e'} \left\{ 2 e^2 \frac{y}{e'} + \frac{1}{3} e^2 (1 + \varepsilon'^2 (11 - 6 \operatorname{tg}^2 B') - 18 e^4) \left(\frac{y}{e'}\right)^3 + e'^2 G l_5 \right\} = \frac{2 e^2}{e'} \operatorname{Tg} \frac{y}{e'} \operatorname{Sin} \frac{y}{e'} + \frac{1}{e'} e'^4 G l_5, \\
 h_{2,2} &= \frac{1}{e'} \operatorname{Tg} \frac{y}{e'} \left\{ 1 + \frac{2}{3} (\varepsilon'^2 - 6 e^4) \left(\frac{y}{e'}\right)^2 + e'^2 G l_4 \right\}; \\
 h_{3,1} &= \frac{1}{e'^2} \left(\frac{m_0}{m}\right)^2 \left\{ \operatorname{sin}^2 c - \operatorname{Sin}^2 \frac{y}{e'} + \left(2 \varepsilon'^2 \left(1 - \frac{\operatorname{tg}^2 B'}{Q'}\right) - 12 e^4\right) \cos^2 c \left(\frac{y}{e'}\right)^2 + e'^2 G l_4 \right\}, \\
 h_{3,2} &= -\frac{1}{e'^2} \left(\frac{m_0}{m}\right)^2 \left\{ \sin c \cos c + 4 e^2 \frac{y}{e'} + e'^2 G l_3 \right\}; \\
 h_{4,1} &= \frac{1}{e'^3} \left(\frac{m_0}{m}\right)^2 \left\{ \sin c \cos c \left(6 \operatorname{Tg} \frac{y}{e'} - 8 \cos c \left(2 e^2 \sin c - \left[\varepsilon'^2 \left(1 - \frac{\operatorname{tg}^2 B'}{Q'}\right) - 6 e^4\right] \cos c \cdot \frac{y}{e'}\right) + e'^2 G l_3\right) \right\}, \\
 h_{4,2} &= -\frac{1}{e'^3} \left\{ \operatorname{Tg} \frac{y}{e'} \left(1 - 6 \left(\frac{m_0}{m}\right)^2 \sin^2 c\right) - 4 \left(\frac{m_0}{m}\right)^2 \cos c \cos 2c \left(2 e^2 \sin c - \left[\varepsilon'^2 \left(1 - \frac{\operatorname{tg}^2 B'}{Q'}\right) - 6 e^4\right] \cos c \cdot \frac{y}{e'}\right) + e'^2 G l_3 \right\}; \\
 h_{5,1} &= -\frac{1}{e'^4} \left(\frac{m_0}{m}\right)^2 \left\{ \left(\sin^2 c - \operatorname{Sin}^2 \frac{y}{e'}\right) \left(1 + 6 \left(\frac{m_0}{m}\right)^2 \cos 2c\right) + 12 \operatorname{Tg}^2 \frac{y}{e'} \sin^2 c + e'^2 G l_2 \right\}, \\
 h_{5,2} &= \frac{1}{e'^4} \left(\frac{m_0}{m}\right)^2 \left\{ \sin c \cos c \left(1 - 12 \left(\frac{m_0}{m}\right)^2 \left(\sin^2 c - 2 \operatorname{Sin}^2 \frac{y}{e'}\right)\right) + e'^2 G l_1 \right\}. \\
 &\text{usw.}
 \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

Sollen hieraus wieder Potenzreihen von y hergestellt werden, vgl. (21*), so ist

$$\begin{aligned}
 \operatorname{Tg} \frac{y}{e'} &= \frac{y}{e'} - \frac{1}{3} \left(\frac{y}{e'}\right)^3 + \frac{2}{15} \left(\frac{y}{e'}\right)^5 - \dots \\
 \frac{m_0}{m} &= \sec i \frac{y}{e'} \left(1 - \frac{1}{6} (\varepsilon'^2 - 6 e^4) \left(\frac{y}{e'}\right)^4 + \dots\right) = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{e'}\right)^2 + \frac{1}{24} (5 - 4 (\varepsilon'^2 - 6 e^4)) \left(\frac{y}{e'}\right)^4 + \dots \\
 \sin c &= \frac{\operatorname{tg} B'}{\sqrt{Q'}} \left\{ \frac{y}{e'} - \left(\frac{1}{3} (1 - 2 \varepsilon'^2) + \frac{1}{2} \frac{\operatorname{tg}^2 B'}{Q'}\right) \left(\frac{y}{e'}\right)^3 + \dots \right\} \\
 \cos c &= 1 - \frac{\operatorname{tg}^2 B'}{Q'} \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{y}{e'}\right)^2 - \left(\frac{1}{3} (1 - 2 \varepsilon'^2) + \frac{3}{8} \frac{\operatorname{tg}^2 B'}{Q'}\right) \left(\frac{y}{e'}\right)^4 + \dots \right\}
 \end{aligned}$$

einzuführen. Die genauere Berechnung von c erfolgt nach § 18 I S. 55; ferner ist, vgl. S. 25,

$$\begin{aligned}
 \log \operatorname{Tg} \frac{y}{e'} &= \log \frac{1}{i} \operatorname{tg} i \frac{y}{e'} = \log \frac{y}{e'} - \frac{1}{3} M \left(\frac{y}{e'}\right)^2 + \frac{7}{90} M \left(\frac{y}{e'}\right)^4 - \dots \\
 \log \operatorname{Sin} \frac{y}{e'} &= \log \frac{1}{i} \sin i \frac{y}{e'} = \log \frac{y}{e'} + \frac{1}{6} M \left(\frac{y}{e'}\right)^2 - \frac{1}{180} M \left(\frac{y}{e'}\right)^4 + \dots \\
 \log \operatorname{Cos} \frac{y}{e'} &= \log \cos i \frac{y}{e'} = \log \frac{y}{e'} + \frac{1}{2} M \left(\frac{y}{e'}\right)^2 - \frac{1}{12} M \left(\frac{y}{e'}\right)^4 + \dots
 \end{aligned}$$

Von $h_{3,1}$ ab lassen sich die h auch durch die vorhergehenden ausdrücken. Man erhält, wenn man gleichzeitig in den mit e'^2 multiplizierten Gliedern die vorher angegebenen Reihenentwicklungen anwendet, aber etwas weniger genau als in (28):

$$\left. \begin{aligned}
 h_{3.1} &= -h_{2.2}^2 + \frac{1}{\epsilon'^2} h_{1.2}^2 - \frac{1}{\epsilon'^2} \left(2 \epsilon'^2 \left(\frac{\operatorname{tg}^2 B'}{Q'} - 1 \right) + 12 \epsilon^4 \right) \left(\frac{y}{\epsilon'} \right)^2 + \frac{1}{\epsilon'^2} e'^2 G l_4, \\
 h_{3.2} &= -\frac{1}{\epsilon'^2} h_{1.1} h_{1.2} - \frac{4 \epsilon^2}{\epsilon'^2} \frac{y}{\epsilon'} + \frac{1}{\epsilon'^2} e'^2 G l_3; \\
 h_{4.1} &= -6 h_{2.2} h_{3.2} + \frac{1}{\epsilon'^3} e'^2 G l_2 \\
 &= \frac{1}{\epsilon'^3} \left\{ 2 h_{1.1} h_{1.2} \left(3 \epsilon' h_{2.2} - 4 \epsilon'^2 \left(3 \frac{\operatorname{tg}^2 B'}{Q'} [1 + 2 \epsilon'^2] - 1 \right) \frac{y}{\epsilon'} + e'^2 G l_3 \right) \right\}, \\
 h_{4.2} &= -\frac{1}{\epsilon'^2} h_{2.2} (1 - 6 h_{1.2}^2) + \frac{4 \epsilon'^2}{\epsilon'^3} \left(3 \frac{\operatorname{tg}^2 B'}{Q'} [1 + 2 \epsilon'^2] - 1 \right) \frac{y}{\epsilon'} + \frac{1}{\epsilon'^3} e'^2 G l_3; \\
 h_{5.1} &= -\frac{1}{\epsilon'^2} h_{3.1} (1 + 6 (h_{1.1}^2 - h_{1.2}^2)) - \frac{12}{\epsilon'^2} h_{1.2}^2 h_{2.2}^2 + \frac{1}{\epsilon'^4} e'^2 G l_2, \\
 h_{5.2} &= -\frac{1}{\epsilon'^2} h_{3.2} (1 - 12 \epsilon'^2 h_{3.1} + 12 \epsilon'^2 h_{2.2}^2) + \frac{1}{\epsilon'^4} e'^2 G l_1.
 \end{aligned} \right\} \quad (28*)$$

Die Werte in (28) und (28*) gehören zum Bildpunkte von P .

Setzt man e'^2 und damit ϵ^2 und ϵ^2 gleich Null, so gelangt man zu den Ausdrücken der h , die für die Mercator-Projektion der Kugel gelten.

§ 45.

Verschiedene Formen der Transformationsgleichungen.

Die Transformation der Koordinaten wird jetzt, nachdem die h abgeleitet sind, durch die Gleichung (16) mit (17) und (20) bewerkstelligt:

$$\xi = \frac{m_0}{m} e^{ic} \left(z + \frac{1}{2} (h_{2.1} + i h_{2.2}) z^2 + \frac{1}{6} (h_{3.1} + i h_{3.2}) z^3 + \frac{1}{24} (h_{4.1} + i h_{4.2}) z^4 + \dots \right). \quad (29)$$

Setzt man

$$x_1 - x = \Delta x = r \cos \vartheta, \quad y_1 - y = \Delta y = r \sin \vartheta, \quad (30)$$

so geht (29) infolge (14) über in

$$\xi = \frac{m_0}{m} \left\{ r e^{i(c+\vartheta)} + \frac{1}{2} r^2 (h_{2.1} + i h_{2.2}) e^{i(c+2\vartheta)} + \frac{1}{6} r^3 (h_{3.1} + i h_{3.2}) e^{i(c+3\vartheta)} + \dots \right\}, \quad (31)$$

woraus dann folgt:

$$\left. \begin{aligned}
 \xi &= \frac{m_0}{m} \left\{ r \cos(c + \vartheta) + \frac{1}{2} r^2 (h_{2.1} \cos(c + 2\vartheta) - h_{2.2} \sin(c + 2\vartheta)) + \frac{1}{6} r^3 (h_{3.1} \cos(c + 3\vartheta) \right. \\
 &\quad \left. - h_{3.2} \sin(c + 3\vartheta)) + \frac{1}{24} r^4 (h_{4.1} \cos(c + 4\vartheta) - h_{4.2} \sin(c + 4\vartheta)) + \dots \right\} \\
 \eta &= \frac{m_0}{m} \left\{ r \sin(c + \vartheta) + \frac{1}{2} r^2 (h_{2.1} \sin(c + 2\vartheta) + h_{2.2} \cos(c + 2\vartheta)) + \frac{1}{6} r^3 (h_{3.1} \sin(c + 3\vartheta) \right. \\
 &\quad \left. + h_{3.2} \cos(c + 3\vartheta)) + \frac{1}{24} r^4 (h_{4.1} \sin(c + 4\vartheta) + h_{4.2} \cos(c + 4\vartheta)) + \dots \right\}.
 \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

Wird

$$\begin{aligned}
 h_{2.1} &= d_2 \cos \nu_2 & h_{3.1} &= d_3 \cos \nu_3 & h_{4.1} &= d_4 \cos \nu_4 \\
 h_{2.2} &= d_2 \sin \nu_2 & h_{3.2} &= d_3 \sin \nu_3 & h_{4.2} &= d_4 \sin \nu_4 \quad \text{usw.}
 \end{aligned} \quad (33)$$

gesetzt, so geben die Gl. (32):

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \frac{m_0}{m} \left\{ r \cos(c + \vartheta) + \frac{1}{2} r^2 d_2 \cos(c + 2\vartheta + \nu_2) + \frac{1}{6} r^3 d_3 \cos(c + 3\vartheta + \nu_3) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{24} r^4 d_4 \cos(c + 4\vartheta + \nu_4) + \frac{1}{120} r^5 d_5 \cos(c + 5\vartheta + \nu_5) + \dots \right\} \\ \eta &= \frac{m_0}{m} \left\{ r \sin(c + \vartheta) + \frac{1}{2} r^2 d_2 \sin(c + 2\vartheta + \nu_2) + \frac{1}{6} r^3 d_3 \sin(c + 3\vartheta + \nu_3) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{24} r^4 d_4 \sin(c + 4\vartheta + \nu_4) + \frac{1}{120} r^5 d_5 \sin(c + 5\vartheta + \nu_5) + \dots \right\} \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

Man kann sie auch in andere Formen bringen; setzt man z. B.

$$\begin{aligned} H \cos \lambda &= 1 + \frac{1}{2} r d_2 \cos(\vartheta + \nu_2) + \frac{1}{6} r^2 d_3 \cos(2\vartheta + \nu_3) + \frac{1}{24} r^3 d_4 \cos(3\vartheta + \nu_4) + \dots \\ H \sin \lambda &= -\frac{1}{2} r d_2 \sin(\vartheta + \nu_2) + \frac{1}{6} r^2 d_3 \sin(2\vartheta + \nu_3) + \frac{1}{24} r^3 d_4 \sin(3\vartheta + \nu_4) + \dots, \end{aligned} \quad (35)$$

so wird:

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \frac{m_0}{m} r H \cos(c + \vartheta + \lambda) \\ \eta &= \frac{m_0}{m} r H \sin(c + \vartheta + \lambda). \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

Will man wieder mit den Koordinatendifferenzen Δx und Δy direkt rechnen, was aber für die numerische Rechnung nicht so praktisch ist, als wenn man die obigen Gleichungen benutzt, so hat man in (32) $r \cos \vartheta = \Delta x$, $r \sin \vartheta = \Delta y$ zu nehmen. Man gelangt alsdann wieder zu den Gleichungen (15), in denen

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{m_0}{m} \cos c, \quad b_1 = \frac{m_0}{m} \sin c, \\ a_r &= \frac{m_0}{m} (h_{r,1} \cos c - h_{r,2} \sin c), \\ b_r &= \frac{m_0}{m} (h_{r,1} \sin c + h_{r,2} \cos c) \end{aligned} \quad (37)$$

zu setzen ist.

♦

In manchen Fällen ist es für die Rechnung vorteilhaft, wenn man von den neuen Koordinaten eines vorhergehenden Punktes ausgeht. Es seien z. B., nachdem man m_0 berücksichtigt hat, die Koordinaten eines Punktes im ersten Koordinatensystem x_1, y_1 , im zweiten ξ_1, η_1 ; die Transformierung von x_2, y_2 in ξ_2, η_2 soll mit Hilfe von ξ_1, η_1 erfolgen. Wie vorher möge der Punkt x, y der Anfangspunkt des zweiten Systems werden.

Mit

$$\xi_1 = \xi_1 + i\eta_1, \quad \xi_2 = \xi_2 + i\eta_2$$

und

$$z_1 = x_1 - x + i(y_1 - y), \quad z_2 = x_2 - x + i(y_2 - y)$$

ergibt sich mittels (29):

$$\begin{aligned} \xi_2 - \xi_1 &= \frac{m_0}{m} e^{ic} \cdot (z_2 - z_1) \left\{ 1 + \frac{1}{2} (h_{2,1} + i h_{2,2}) (z_2 + z_1) + \frac{1}{6} (h_{3,1} + i h_{3,2}) \left(\frac{3}{4} (z_2 + z_1)^2 + \frac{1}{4} (z_2 - z_1)^2 \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{24} (h_{4,1} + i h_{4,2}) \left(\frac{1}{2} (z_2 + z_1)^3 + \frac{1}{2} (z_2 + z_1)(z_2 - z_1)^2 \right) + \dots \right\}. \end{aligned}$$

Krüger: Konforme Abbildung des Erdellipsoide in der Ebene.

Setzt man nun

$$\begin{aligned} x_2 - x_1 &= r \cos \vartheta, & y_2 - y_1 &= r \sin \vartheta, \\ \frac{1}{2} (x_2 + x_1) - x &= k \cos \nu, & \frac{1}{2} (y_2 + y_1) - y &= k \sin \nu, \end{aligned} \quad (38)$$

also

$$z_2 - z_1 = r e^{i\vartheta} \quad \text{und} \quad \frac{1}{2} (z_2 + z_1) = k e^{i\nu},$$

und berücksichtigt man die Gl. (33), so folgt mithin:

$$\begin{aligned} \xi_2 - \xi_1 &= \frac{m_0}{m} \left\{ r e^{i(c+\vartheta)} \left(1 + k d_2 e^{i(\nu_2+\nu)} + \frac{1}{2} k^2 d_3 e^{i(\nu_2+2\nu)} + \frac{1}{6} k^3 d_4 e^{i(\nu_2+3\nu)} + \dots \right) \right. \\ &\quad + \frac{1}{3! 2^2} r^3 e^{i(c+3\nu)} (d_3 e^{i\nu_2} + k d_4 e^{i(\nu_2+\nu)} + \frac{1}{2} k^2 d_5 e^{i(\nu_2+2\nu)} + \dots) \\ &\quad + \frac{1}{5! 2^4} r^5 e^{i(c+5\nu)} (d_5 e^{i\nu_2} + \dots) \\ &\quad \left. + \dots \right\} \end{aligned} \quad (39)$$

oder

$$\begin{aligned} \xi_2 - \xi_1 &= \frac{m_0}{m} \left\{ r \cos(c+\vartheta) + r k d_2 \cos(c+\vartheta+\nu_2+\nu) + \frac{1}{2} r k^2 d_3 \cos(c+\vartheta+\nu_2+2\nu) + \dots \right. \\ &\quad + \frac{1}{24} r^3 d_3 \cos(c+3\vartheta+\nu_2) + \frac{1}{24} r^3 k d_4 \cos(c+3\vartheta+\nu_2+\nu) + \dots \} \\ \eta_2 - \eta_1 &= \frac{m_0}{m} \left\{ r \sin(c+\vartheta) + r k d_2 \sin(c+\vartheta+\nu_2+\nu) + \frac{1}{2} r k^2 d_3 \sin(c+\vartheta+\nu_2+2\nu) + \dots \right. \\ &\quad + \frac{1}{24} r^3 d_3 \sin(c+3\vartheta+\nu_2) + \frac{1}{24} r^3 k d_4 \sin(c+3\vartheta+\nu_2+\nu) + \dots \} \end{aligned} \quad (40)$$

§ 46.

Verschiedene Berechnungen einer Koordinatentransformation.

Die ebenen rechtwinkligen Koordinaten der Bildpunkte p und p_1 von P und P_1 seien:

$$\begin{aligned} x &= 5348940,146^m, & y &= 596724,110^m, \\ x_1 &= 5418141,733, & y_1 &= 630446,600. \\ &\quad (\text{vom Äquator ab}) \end{aligned}$$

Hierbei ist, wie auch in den folgenden Beispielen, angenommen, daß entweder $m_0 = 1$ sei, oder daß x, y aus \bar{x}, \bar{y} durch Division mit m_0 erhalten seien; es wird daher $\frac{m_0}{m}$ für $\frac{m_0}{m}$ geschrieben.

Der Punkt P soll der Anfangspunkt eines zweiten konformen Koordinatensystems werden. Welches sind in diesem die Koordinaten des Bildpunktes von P_1 ?

Die geographischen Koordinaten des Punktes P auf dem Erdellipsoid sind:

$$B = 48^\circ, \quad L = 8^\circ;$$

die Konvergenz des Meridians in ihm ist

$$c = 5^\circ 57' 45'', 4889.$$

Siehe § 10 II S. 27 und § 19 II S. 61.

I. Rechnung durch Vermittlung der geographischen Koordinaten von P_1 .

Man berechnet aus den gegebenen ebenen Koordinaten von p_1 die geographischen Koordinaten des zugehörigen Punktes P_1 nach § 18 I S. 54 u. f. Aus diesen findet man, indem man den durch P gehenden Meridian als Hauptmeridian annimmt, nach § 21 II S. 72 die gesuchten ebenen Koordinaten von p_1 im neuen System.

Die Rechnung ist folgende:

$$x_1 = 5418141,733 \quad y_1 = 630446,600.$$

Zu dem Meridianbogen x_1 gehört $B'_1 = 48^\circ 54' 6'', 1068$.

$\eta' \dots 8,994\ 1802\ 284$	$\eta' \dots 8,994\ 1802\ 284$	$\varepsilon'^2 \dots 7,827\ 3187\ 8$
$+ \frac{1}{2}(1) = + \quad 7046\ 826$	$- (1) = - \quad 14093\ 651$	$\cos^2 B'_1 \dots 9,635\ 5972\ 1$
$- \frac{1}{14}(2) = - \quad 2\ 287$	$+ (2) = + \quad 32\ 016$	$\varepsilon'^2 \dots 7,462\ 9159\ 9$
$+ \frac{1}{62}(3) = + \quad 1$	$- (3) = - \quad 88$	$\varepsilon'^2 = 0,002\ 9034\ 610$
$\text{tg } u' \dots 8,994\ 8846\ 824$	$\sin u' \dots 8,992\ 7740\ 561$	$Q' = 1 + \varepsilon'^2 \dots 0,001\ 2591\ 301$
$\sec B'_1 \dots 0,182\ 2013\ 935$	$\text{tg } B'_1 \dots 0,059\ 3324\ 022$	$\sqrt{Q'} \dots 0,000\ 6295\ 650$
$- \mathfrak{A}_1 \eta'^2 = - \quad 20\ 460$	$+ \mathfrak{B}_1 \eta'^2 = + \quad 41\ 158$	$6,806\ 0976\ 435$
$- \mathfrak{A}_2 \eta'^4 = - \quad 263$	$+ \mathfrak{B}_2 \eta'^4 = + \quad 924$	$N' \dots 6,805\ 4680\ 785$
$- \mathfrak{A}_3 \eta'^6 = \quad .$	$- \mathfrak{B}_3 \eta'^6 = - \quad 1$	$y'_1 \dots 5,799\ 6483\ 069$
$\text{tg } L_1 \dots 9,177\ 0840\ 036$	$\text{tg } c_1 \dots 9,052\ 1106\ 664$	$\eta' \dots 8,994\ 1802\ 284$
$L_1 = 8^\circ 33' 0'', 0000$	$c_1 = 6^\circ 25' 58'', 2414$	
$B'_1 - B_1 = 0^\circ 19' 6'', 1068$	$\text{tg } \frac{1}{2} c_1 \dots 8,749\ 7069\ 93$	$\frac{1}{3} M \dots 9,160\ 6630\ 6 \quad \frac{62}{2835} M \dots 7,9776$
$B'_1 = 48^\circ 54' 6'', 1068$	$\text{tg } \frac{1}{2} u' \dots 8,692\ 7980\ 92$	$\eta'^2 \dots 7,998\ 3604\ 6 \quad \eta'^6 \dots 3,9651$
$B'_1 = 48^\circ 35' 0'', 0000$	$+ \mathfrak{C}_1 \eta'^2 = + \quad 69\ 73$	$(1) \dots 7,149\ 0235\ 2 \quad (3) \dots 1,9427$
	$- \mathfrak{C}_2 \eta'^4 = - \quad 1\ 32$	
	$\text{tg } \frac{B'_1 - B_1}{2 Q'} \dots 7,442\ 5119\ 26$	$\frac{7}{90} M \dots 8,528\ 640 \quad 9,1607$
	$2 \rho'' Q' \dots 5,616\ 7142\ 59$	$\eta'^4 \dots 5,976\ 721 \quad \text{tg}^2 \frac{B'_1 - B_1}{2 Q'} \dots 4,8850$
	$- (5) = - \quad 11\ 11$	$(2) \dots 4,505\ 361 \quad (5) \dots 4,0457$
	$B'_1 - B_1 \dots 3,059\ 2250\ 74$	
	$B'_1 - B_1 = 1146'', 10676$	
	$\mathfrak{A}_1 \eta'^2 \dots 4,310\ 910$	$\frac{1}{2}(1) \dots 6,847\ 994 \quad \eta'^4 \dots 5,9767$
	$- 2,5 - 2 \varepsilon'^2 \dots 0,398\ 947_n$	$\varepsilon'^2 \dots 7,462\ 916 \quad \mathfrak{A}_2 \dots 6,4437$
	$4,5 \text{tg}^2 B'_1 \dots 0,771\ 878$	$\mathfrak{A}_1 \eta'^2 \dots 4,310\ 910 \quad \mathfrak{B}_2 \dots 6,9890$
	$- 51\ 269 \dots 4,709\ 857_n$	$2 + 4 \varepsilon'^2 \dots 0,303\ 545 \quad \mathfrak{C}_2 \dots 7,143$
	$+ 121\ 001 \dots 5,082\ 788$	$\mathfrak{B}_1 \eta'^2 \dots 4,614\ 455 \quad 2,4204$
	$69\ 732 = \mathfrak{C}_1 \eta'^2$	$2,9657$

Da hierbei c_1 nicht weiter gebraucht wird, so würde es genügt haben, die zweite Rubrik mit achtstelligen Logarithmen zu berechnen.

Man erhält nun ξ , η als die rechtwinkligen Koordinaten, die

$$B = 48^\circ 35' 0'' ,0000 \text{ und } L = 8^\circ 33' - 8^\circ 0' = 33' 0'' ,0000 = 1980'' ,0000$$

entsprechen; dabei gehört also der Nullpunkt der Koordinaten zur Breite 48° auf dem Meridian, dessen Länge 8° ist.

$$\begin{aligned} N : \rho'' &\dots 1,491\ 0349\ 3 \\ L &\dots 3,296\ 6651\ 9 \\ \cos B &\dots 9,820\ 5495\ 7 \\ - \frac{1}{2} \tau_L + \tau_{L \cos B} &= - \quad 83 \\ + \nu_1 &= + \quad 1 \\ y &\dots 4,608\ 2488\ 7 \\ y &= 40\ 574,097 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L &\dots 3,296\ 6651\ 9 \\ \sin B &\dots 9,875\ 0141\ 7 \\ + \tau_{L \cos B} &= + \quad 58\ 4 \\ + \nu_2 &= + \quad 5 \\ c'_1 &\dots 3,171\ 6852\ 5 \\ c'_1 &= 24' 44'', 8591 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1 : 2 \rho'' &\dots 4,384\ 5449 \\ N : \rho'' &\dots 1,491\ 0349 \\ L^2 &\dots 6,593\ 3304 \\ \cos B &\dots 9,820\ 5496 \\ \sin B &\dots 9,875\ 0142 \\ \frac{3}{2} \tau_{L \cos B} - \frac{1}{4} \tau_L &= + \quad 54 \\ x - X &\dots 2,164\ 4794 \\ x - X &= \quad 146,043 \\ X &= \quad 5\ 382\ 742,254 \\ - X_{48^\circ} &= - 5\ 317\ 885,232 \\ x &= \underline{\underline{65\ 003,065}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M : 3 \rho''^2 &\dots 8,53\ 181 \\ L^2 &\dots 6,59\ 333 \\ \tau_L &\dots 5,12\ 514 \\ \cos^2 B &\dots 9,64\ 110 \\ \tau_{L \cos B} &\dots 4,76\ 624 \\ \tau_L &= 0,000\ 0133\ 4 \\ \tau_{L \cos B} &= \quad 58\ 4 \end{aligned}$$

Die Meridianbogen X und X_{48° sind einer Tafel entnommen.

Die gesuchten Koordinaten sind hiernach

$$\xi = 65\ 003,065^m, \quad \eta = 40\ 574,097^m.$$

Die Berechnung der Meridiankonvergenz c'_1 in p_1 in diesem zweiten Koordinatensystem war hierzu nicht nötig; sie wie vorher die schärfere Berechnung von c_1 in p_1 im ersten Koordinatensystem ist erfolgt, um die Gl. (41) S. 167 durch Zahlenwerte prüfen zu können.

II. Rechnung mit Hilfe der Richtungs- und Entfernungsreduktionen.

Nachdem man aus den Koordinatendifferenzen des ersten Systems den ebenen Richtungswinkel ϑ und die Entfernung $r = \frac{x_1 - x}{\cos \vartheta} = \frac{y_1 - y}{\sin \vartheta}$ erhalten hat, sind zunächst die Reduktionen auf die geodätische Linie s nach (32) § 27 S. 94 und (41) § 28 S. 102 abzuleiten.

$$\begin{aligned} x_1 - x &= 69\ 201,587 & y_1 - y &= 33\ 722,490 \\ x_m = \frac{1}{2} (x_1 + x) &= 5\ 383\ 540,940 & y_m = \frac{1}{2} (y_1 + y) &= 613\ 585,355 \\ y_1 - y &= 4,527\ 9196\ 3 & \sin \vartheta &= 9,641\ 5363\ 9 \\ x_1 - x &= 4,840\ 1160\ 5 & \cos \vartheta &= 9,953\ 7328\ 1 \\ \operatorname{tg} \vartheta &= 9,687\ 8035\ 8, \quad \vartheta = 25^\circ 58' 49'', 248 & r &= 4,886\ 3832\ 4. \end{aligned}$$

Zu x_m gehört $B'_m = 48^\circ 35' 431$ und hierzu $1 : \rho'_m \dots 3,195\ 1772 - 10$, also wird

$$y'_m = \frac{y_m}{\rho'_m} \dots 8,983\ 0522 - 10, \quad \xi_m = \frac{x_1 - x}{\rho'_m} \dots 8,03\ 529 - 10, \quad \eta_m = \frac{y_1 - y}{\rho'_m} \dots 7,72\ 310 - 10;$$

ferner ist

$$\epsilon_m'^2 = e'^2 \cos^2 B_m' \dots 7,4683 - 10, \quad \epsilon_m^2 = \frac{\epsilon_m'^2 \operatorname{tg} B_m'}{\sqrt{Q_m'}} \dots 7,5222 - 10.$$

Damit ergibt sich zur Herleitung der linearen Länge s der geodätischen Linie PP_1 :

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} My_m'^2 &= + 0,002\,0084\,3.9 \\
 - " \cdot \frac{1}{6} y_m'^2 &= - 30\,9.6 \\
 + " \cdot \frac{2}{45} y_m'^4 &= + .8 \\
 + " \cdot \frac{1}{12} \xi_m^2 &= + 2.0 \\
 - " \cdot \frac{1}{6} \eta_m^2 &= - .9 \\
 + \frac{1}{24} M y_m^2 &= + 5\,0.6 \\
 - \frac{1}{3} M \epsilon_m^2 y_m' \xi_m \eta_m &= - .3 \\
 + \frac{1}{6} M \epsilon_m'^2 y_m'^3 \cdot y_m' &= + 1.8 \\
 + " \cdot 2 \eta_m &= + .2 \\
 \log r - \log s &= 0,002\,0058\,8 \\
 \log r &= 4,886\,3832\,4 \\
 \log s &= 4,884\,3773\,6,
 \end{aligned}$$

und für die Azimutreduktionen von PP_1 :

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} \rho'' y_m' \xi_m &= + 107'',5822 & \frac{1}{12} \rho'' \xi_m \eta_m &= + 0'',9854 \\
 - " \cdot \frac{1}{3} y_m'^2 &= - 3317 & - \frac{1}{3} \rho'' \epsilon_m^2 y_m' \xi_m^2 &= - 2 \\
 + " \cdot 2 \xi_m'^2 &= + 19 & + " \cdot \eta_m^2 &= + 1 \\
 + " \cdot \frac{2}{15} y_m'^4 &= + 12 & \tau_2 &= 0'',9853 \\
 + " \cdot \frac{1}{12} \xi_m'^2 &= + 11 \\
 + \rho'' \epsilon_m^2 \eta_m \cdot y_m'^2 &= + 336 \\
 - " \cdot \frac{1}{6} \xi_m^2 &= - 1 \\
 + " \cdot \frac{1}{12} \eta_m^2 &= . \\
 \tau_1 &= 107'',2882 \\
 \psi_1 &= \tau_1 - \tau_2 = 1'46'',3029 \\
 \psi_2 &= \tau_1 + \tau_2 = 1 48 ,2735.
 \end{aligned}$$

Das Azimut der geodätischen Linie $PP_1 = s$ im Anfangspunkte ist daher nach (2) § 30 S. 111:

$$a_{0.1} = c + \vartheta + \psi_1 = 31^\circ 58' 21'',040.$$

Überträgt man nun die geodätische Linie im zweiten Koordinatensystem, für welches der Hauptmeridian durch P geht, in die Ebene, so sind ξ und η die Koordinaten des Bildpunktes von P , also im Anfangspunkte P_1 . Es sei jetzt ϑ' der ebene Richtungswinkel nach diesem im Bildpunkte von P , also im Anfangspunkte P_1 .

punkte der neuen Koordinaten, und $r' = \frac{\xi}{\cos \vartheta'} = \frac{\eta}{\sin \vartheta'}$. Man findet nun ϑ' aus $a_{0.1}$, indem man die Richtungskorrektion ψ_1' berechnet:

$$\vartheta' = a_{0.1} - \psi_1',$$

und ferner r' aus s , indem man $\log \frac{r'}{s}$ berechnet. Alsdann ist

$$\xi = r' \cos (a_{0.1} - \psi_1') \text{ und } \eta = r' \sin (a_{0.1} - \psi_1').$$

Um ψ_1' und $\log \frac{r'}{s}$ zu erhalten, wird angenähert $\xi = s \cos a_{0.1}$ und $\eta = s \sin a_{0.1}$ gesetzt. Das gibt
 $\xi \dots 4,81\,293$ und $\eta \dots 4,60\,825$.

Zu $\frac{1}{2} \xi = 32\,501^m$ gehört $B_m' = 48^\circ 17',5$ und dazu $1 : \rho_m' \dots 3,19\,519 - 10$ und $\epsilon_m^2 \dots 7,522 - 10$. Ferner wird hier

$$y_m' = \frac{\eta}{2\rho_m'} \dots 7,50\,241 - 10, \quad \xi_m = \frac{\xi}{\rho_m'} \dots 8,00\,812 - 10, \quad \eta_m = \frac{\eta}{\rho_m'} \dots 7,80\,344 - 10.$$

Nach (32*) § 27 S. 94 ist daher

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} My_m'^2 &= 0,000\,0021\,9.6 \\ + \frac{1}{24} Mv_m'^2 &= + \quad 7\,3.2 \\ \log r' - \log s &= 0,000\,0029\,3 \\ \log s &= 4,884\,3773\,6 \\ \log r' &= 4,884\,3802\,9, \end{aligned}$$

und nach (41*) S. 103:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \rho'' y_m' \xi_m &= 3'',3414 & \tau_2 = \frac{1}{12} \rho'' \xi_m \eta_m &= 1'',1138 \\ + \rho'' \epsilon_m^2 \eta_m y_m'^2 &= + \quad 1 & \psi_1' &= 2'',2277 \\ \tau_1 &= 3'',3415 & \psi_2' &= 4,4553; \end{aligned}$$

also wird

$$\vartheta' = 31^\circ 58' 18'',812.$$

Für die neuen Koordinaten ergibt sich mithin:

$$\begin{aligned} r' &\dots 4,884\,3802\,9 \\ \cos \vartheta' &\dots 9,928\,5535\,4 & \xi &\dots 4,812\,9338\,3 \\ \sin \vartheta' &\dots 9,723\,8685\,6 & \eta &\dots 4,608\,2488\,5 \\ \xi &= 65\,003,064^m & \eta &= 40\,574,096^m. \end{aligned}$$

Wenn man diese Werte wiederum zur erneuten Berechnung von ψ_1' und $\log \frac{r'}{s}$ benutzt, so ändert sich an den vorher gefundenen Werten nichts; die vorstehenden Werte von ξ, η sind demnach die endgültigen.

Ehe nun zur Anwendung der Transformationsgleichungen übergegangen wird, soll noch aus den beiden vorstehenden Rechnungen eine Beziehung abgeleitet werden, die zur numerischen Prüfung der Richtungsreduktionen dient

Für das Azimut $a_{1,0}$ nach P im Endpunkte P_1 der geodätischen Linie s erhält man im ersten Koordinatensystem, wenn c_1 die Meridiankonvergenz in P_1 ist, nach (2) § 30 S. 111:

$$a_{1,0} = 180^\circ + c_1 + \vartheta - \psi_2.$$

Im zweiten Koordinatensystem ist, wenn hier c_1' die Konvergenz des Meridians in P_1 bezeichnet:

$$a_{1,0} = 180^\circ + c_1' + \vartheta' - \psi_2'.$$

Folglich ist

$$\vartheta' = c_1 - c_1' + \vartheta - \psi_2 + \psi_2',$$

nun ist aber auch mit (2) S. 111

$$\vartheta' = a_{0,1} - \psi_1' = c + \vartheta + \psi_1 - \psi_1';$$

mithin muß die Gleichung

$$c_1 - c - c_1' = \psi_1 + \psi_2 - (\psi_1' + \psi_2') \quad (41)$$

bestehen.

Nun liefert

die I. Rechnung

$$\begin{aligned} c_1 &= 6^{\circ}25'58'',2414 \\ -c &= -5\ 57\ 45\ ,4889 \\ -c_1' &= -24\ 44\ ,8591 \\ c_1 - c - c_1' &= 3'27'',8934 \end{aligned}$$

und die II. Rechnung

$$\begin{aligned} \psi_1 + \psi_2 &= 3'34'',5764 \\ -(\psi_1' + \psi_2') &= -6\ ,6830 \\ \psi_1 + \psi_2 - (\psi_1' + \psi_2') &= 3'27'',8934. \end{aligned}$$

Die Gleichung (41) ist also erfüllt.

III. Rechnung mittels der Transformationsgleichungen.

Zunächst sind die Koeffizienten $h_{r,1}$ und $h_{r,2}$ aus

$$x = 5\ 348\ 940,146'' \quad y = 596\ 724,110'' \quad c = 5^{\circ}57'45'',4889$$

zu berechnen.

Zu x gehört $B' = 48^{\circ}16'45'',6$ und dazu $1 : \varrho' \dots 3,195\ 1928 - 10$ und $\varepsilon'^2 \dots 7,47\ 362 - 10$, $\varepsilon^2 \dots 7,52\ 279 - 10$. Mit $\frac{y}{\varrho'} \dots 8,970\ 9664 - 10$ wird, vgl. S. 159, $m = \text{Cof } \frac{y}{\varrho'} \dots 0,001\ 8969\ 6$ und $\text{Tg } \frac{y}{\varrho'} \dots 8,969\ 703 - 10$, $\text{Sin } \frac{y}{\varrho'} \dots 8,9716 - 10$.

Nach (28) findet man damit:

$$\begin{aligned} h_{2,1} \dots 8,9603 - 20 &\quad h_{2,2} \dots 2,164\ 899 - 10 \quad \text{woraus } d_2 \dots 2,164\ 899 - 10, \quad \nu_2 = 89^{\circ}57'51'',2; \\ h_{3,1} \dots 3,6882 - 20 &\quad -h_{3,2} \dots 5,40\ 945 - 20 \quad \text{nach } d_3 \dots 5,40\ 952 - 20, \quad \nu_3 = -88\ 54\ 42; \\ h_{4,1} \dots 8,3391 - 30 &\quad -h_{4,2} \dots 8,5115 - 30 \quad (33) \quad d_4 \dots 8,5925 - 30, \quad \nu_4 = -56\ 5; \\ -h_{5,1} \dots 0,950 - 30 &\quad h_{5,2} \dots 1,8248 - 30, \quad \text{folgt } d_5 \dots 1,8285 - 30, \quad \nu_5 = 97\ 36. \end{aligned}$$

Zur Transformierung von

$$x_1 = 5\ 418\ 141,733'' \quad y_1 = 630\ 446,600''$$

kann man nun ein Gleichungspaar des § 45 anwenden; es sollen hier dazu die Gl. (34) genommen werden. Vorher sind noch aus $x_1 - x = r \cos \vartheta$ und $y_1 - y = r \sin \vartheta$ die Werte für r und ϑ zu berechnen, ebenso wie bei der II. Rechnung; es wird

$$r \dots 4,886\ 3832\ 4, \quad \vartheta = 25^{\circ}58'49'',248.$$

Man hat jetzt die folgende Rechnung:

$$\begin{aligned} c + \vartheta = w_1 &= 31^\circ 56' 34'', 737, & c + 2\vartheta + \nu_2 &= w_2 = 147^\circ 53' 15'', 2, \\ c + 3\vartheta + \nu_3 &= w_3 = -5^\circ 0' 29'', & c + 4\vartheta + \nu_4 &= w_4 = 53^\circ 48', & c + 5\vartheta + \nu_5 &= w_5 = 232^\circ 28'; \end{aligned}$$

$$\begin{array}{lll} 1:m \dots 9,998\,1030\,4 & 1:2 \dots 9,698\,970 - 10 & 1:6 \dots 9,2218 - 10 \\ r \dots 4,886\,3832\,4 & r^2 \dots 9,772\,766 & r^3 \dots 14,6591 \\ \cos w_1 \dots 9,928\,6902\,4 & d_2:m \dots \underline{2,163\,002 - 10} & d_3:m \dots \underline{5,4076 - 20} \\ \sin w_1 \dots 9,723\,5173\,0 & \quad \quad \quad 1,634\,738 & \quad \quad \quad 9,2885 - 10 \\ \frac{r}{m} \cos w_1 \dots 4,813\,1765\,2 & \cos w_2 \dots 9,927\,887_n & \cos w_3 \dots 9,9983 \\ \frac{r}{m} \sin w_1 \dots 4,608\,0035\,8 & \sin w_2 \dots \underline{9,725\,570} & \sin w_3 \dots \underline{8,9410}_n \\ \frac{1}{2m} r^3 d_2 \cos w_2 \dots 1,562\,625_n & & \frac{1}{6m} r^3 d_3 \cos w_3 \dots 9,2868 \\ , \sin w_2 \dots 1,360\,308 & & , \sin w_3 \dots 8,2295_n \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} 1:24 \dots 8,6198 - 10 & 1:120 \dots 7,9208 - 10 & \\ r^4 \dots 19,5455 & r^5 \dots 24,4319 & \\ d_4:m \dots \underline{8,5906 - 30} & d_5:m \dots \underline{1,8266 - 30} & \\ \quad \quad \quad 6,7559 - 10 & \quad \quad \quad 4,1793 - 10 & \\ \cos w_4 \dots 9,7713 & \cos w_5 \dots 9,7847_n & \\ \sin w_4 \dots 9,9068 & \sin w_5 \dots \underline{9,8983}_n & \\ \frac{1}{24m} r^4 d_4 \cos w_4 \dots 6,5272 & \frac{1}{120m} r^5 d_5 \cos w_5 \dots 3,9640_n & \\ , \sin w_4 \dots 6,6627 & , \sin w_5 \dots 4,0776_n & \end{array}$$

Diese (kleiner gedruckten) Glieder können hier schon vernachlässigt werden.

$$\begin{array}{ll} \frac{1}{m} r \cos w_1 = 65\,039,399 & \frac{1}{m} r \sin w_1 = 40\,551,188 \\ \frac{1}{2m} r^2 d_2 \cos w_2 = -36,528 & \frac{1}{2m} r^2 d_2 \sin w_2 = +22,925 \\ \frac{1}{6m} r^3 d_3 \cos w_3 = +0,194 & \frac{1}{6m} r^3 d_3 \sin w_3 = -0,017 \\ \xi = \underline{65\,003,065^m} & \eta = \underline{40\,574,096^m}. \end{array}$$

Wenn man die achtstellige Rechnung umgehen will, so hat man $\frac{1}{m} r \cos w_1$ und $\frac{1}{m} r \sin w_1$ durch $\Delta x - (1 - h_{1,1})\Delta x - h_{1,2}\Delta y$ und $\Delta y + h_{1,2}\Delta x - (1 - h_{1,1})\Delta y$

zu ersetzen; nach (28) ist $h_{1,1} \dots 9,995\,7471 - 10$, $h_{1,2} \dots 9,014\,6345 - 10$, also wird:

$$\begin{array}{ll|ll} \Delta x = 69\,201,587 & \Delta y = 33\,722,490 \\ -(1 - h_{1,1})\Delta x = -674,370 & +h_{1,2}\Delta x = 7\,157,323 \\ -h_{1,2}\Delta y = -3\,487,820 & -(1 - h_{1,1})\Delta y = -328,626 \\ \frac{1}{m} r \cos w_1 = 65\,039,397 & \frac{1}{m} r \sin w_1 = 40\,551,187. \end{array}$$

§ 47.

Zahlenbeispiele.

I. Um die Formeln (40) zur Anwendung zu bringen, werde angenommen, daß für die Punkte P, P_1, P_2

im ersten Koordinatensystem:		im zweiten Koordinatensystem:	
$x = 5348940,146^m$	$y = 596724,110^m$	$\xi = 0$	$\eta = 0$
$x_1 = 5418141,733$	$y_1 = 630446,600$	$\xi_1 = 65003,065^m$	$\eta_1 = 40574,096^m$
$x_2 = 5451312,551$ (vom Äquator an)	$y_2 = 660000,000$		

sei. Die Koordinaten ξ_2, η_2 des dritten Punktes sollen mit Hilfe der Koordinaten ξ_1, η_1 berechnet werden.
Die Werte der d und ν , sowie die Werte für c und $\log m$ sind bereits im vorhergehenden §, S. 167 u. S. 162, angegeben. Aus

$$x_2 - x_1 = 33170,818 \quad \text{und} \quad y_2 - y_1 = 29553,400$$

folgt nach (38):

$$r \dots 4,64764130, \quad \vartheta = 41^\circ 41' 57'', 501,$$

und aus:

$$\frac{1}{2}(x_2 + x_1) - x = 85786,996 \quad \text{und} \quad \frac{1}{2}(y_2 + y_1) - y = 48499,190: \\ k \dots 4,993645, \quad z = 29^\circ 28' 53'', 0.$$

Damit ergibt sich nach (40):

$$\begin{aligned} \frac{1}{m} r \cos(c + \vartheta) &= 29790,947 \\ \frac{1}{m} r k d_2 \cos(c + \vartheta + \nu_2 + z) &= -62,116 \\ \frac{1}{2m} r k^2 d_3 \cos(c + \vartheta + \nu_3 + 2z) &= +0,525 \\ \frac{1}{6m} r k^3 d_4 \cos(c + \vartheta + \nu_4 + 3z) &= +0,000 \\ \frac{1}{24m} r^3 d_3 \cos(c + 3\vartheta + \nu_3) &= +0,007 \\ \xi_2 - \xi_1 &= 29729,363 \\ \xi_1 &= 65003,065 \\ \xi_2 &= 94732,428^m \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \frac{1}{m} r \sin(c + \vartheta) &= 32696,166 \\ \frac{1}{m} r k d_2 \sin(c + \vartheta + \nu_2 + z) &= +14,218 \\ \frac{1}{2m} r k^2 d_3 \sin(c + \vartheta + \nu_3 + 2z) &= +0,168 \\ \frac{1}{6m} r k^3 d_4 \sin(c + \vartheta + \nu_4 + 3z) &= +0,003 \\ \frac{1}{24m} r^3 d_3 \sin(c + 3\vartheta + \nu_3) &= +0,006 \\ \eta_2 - \eta_1 &= 32710,561 \\ \eta_1 &= 40574,096 \\ \eta_2 &= 73284,657^m. \end{aligned}$$

Nach den Formeln (34) erhält man hier, da aus

$$x_3 - x = 102\,372,405 \quad y_3 - y = 63\,275,890$$

nach (30) folgt

$$r' \dots 5,080\,4434\,7 \quad \vartheta' = 31^\circ 43' 12'',041:$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{m} r' \cos(c + \vartheta') &= 94\,830,345 & \frac{1}{m} r' \sin(c + \vartheta') &= 73\,247,354 \\ \frac{1}{2m} r'^2 d_2 \cos(c + 2\vartheta' + \nu_2) &= -98,643 & \frac{1}{2m} r'^2 d_2 \sin(c + 2\vartheta' + \nu_2) &= +37,143 \\ \frac{1}{6m} r'^3 d_3 \cos(c + 3\vartheta' + \nu_3) &= +0,726 & \frac{1}{6m} r'^3 d_3 \sin(c + 3\vartheta' + \nu_3) &= +0,157 \\ \frac{1}{24m} r'^4 d_4 \cos(c + 4\vartheta' + \nu_4) &= +0,001 & \frac{1}{24m} r'^4 d_4 \sin(c + 4\vartheta' + \nu_4) &= +0,003 \\ \xi_3 &= 94\,732,429^m & \eta_3 &= 73\,284,657^m. \end{aligned}$$

Das erste Verfahren ist nur dann von Vorteil, wenn die Punkte x_1, y_1 und x_3, y_3 einander so nahe liegen, daß zur Berechnung der Glieder $\frac{r}{m} \begin{pmatrix} \cos(c + \vartheta) \\ \sin(c + \vartheta) \end{pmatrix}$ 7-stellige Rechnung genügt.

II. Die Formeln (28) zu (32) bis (36) sind auch für größere Entferungen von etwa 600 km Entfernung vom Anfangspunkte (der selbst von der Abszissenachse gegen 600 km entfernt sein kann) noch ausreichend.

In dem folgenden Beispiele sei

$$x_3 = 5\,750\,000,000^m, \quad y_3 = 650\,000,000^m, \quad (\text{vom Äquator an})$$

während wie vorher der Punkt x, y zum neuen Anfangspunkte werden soll.

Mit

$$x_3 - x = 401\,059,854 \quad y_3 - y = 53\,275,890$$

wird nach (30) erhalten

$$r \dots 5,607\,0075\,29 \quad \vartheta = 7^\circ 34' 0'',2744.$$

Damit und mit den früher gefundenen Werten von $\log m$ und c , sowie den Werten der h und ν , S. 162 u. S. 167, findet man weiter:

$$\begin{aligned} \frac{1}{m} r \cos(c + \vartheta) &= 391\,641,368 & \frac{1}{m} r \sin(c + \vartheta) &= 94\,237,191 \\ \frac{1}{2m} r^2 d_2 \cos(c + 2\vartheta + \nu_2) &= -428,062 & \frac{1}{2m} r^2 d_2 \sin(c + 2\vartheta + \nu_2) &= +1\,111,636 \\ \frac{1}{6m} r^3 d_3 \cos(c + 3\vartheta + \nu_3) &= +13,572 & \frac{1}{6m} r^3 d_3 \sin(c + 3\vartheta + \nu_3) &= -24,737 \\ \frac{1}{24m} r^4 d_4 \cos(c + 4\vartheta + \nu_4) &= +0,409 & \frac{1}{24m} r^4 d_4 \sin(c + 4\vartheta + \nu_4) &= -0,148 \\ \frac{1}{120m} r^5 d_5 \cos(c + 5\vartheta + \nu_5) &= -0,005 & \frac{1}{120m} r^5 d_5 \sin(c + 5\vartheta + \nu_5) &= +0,003 \\ \xi_3 &= 391\,227,282^m & \eta_3 &= 95\,323,945^m. \end{aligned}$$

III. Die ebenen rechtwinkligen Koordinaten eines Punktes x_1, y_1 seien

$$x_1 = -144\,436,136^m, \quad y_1 = 195\,738,682^m.$$

Dabei entspreche der Anfangspunkt des Koordinatensystems dem Durchschnitte des Hauptmeridians mit der Länge L_0 und des Parallelkreises mit der Breite 52° .

Der Punkt x_1, y_1 soll auf ein neues Koordinatensystem bezogen werden, dessen ξ -Achse zu dem Meridian $L_0 + 2^\circ$, als Hauptmeridian, und dessen Anfangspunkt zur geographischen Breite 50° gehört.
Zunächst sind im ursprünglichen Koordinatensystem für

$$B = 50^\circ \text{ und } L = 2^\circ$$

die ebenen rechtwinkligen Koordinaten x, y zu berechnen; nach § 20 II S. 68 ergibt sich:

$$\begin{aligned} L &\dots 3,857\,3324\,96 \\ \cos B &\dots 9,808\,0674\,97 \\ -\sigma_L + \sigma_u &= -517\,65 \\ +\nu_1 &= +1,01 \\ u &\dots 3,665\,3483\,29 \\ N: \rho'' &\dots 1,491\,0704\,97 \\ +\frac{1}{6}\frac{M}{\rho''^2}u^3 &= +364\,32 \\ +\frac{1}{36}\frac{M}{\rho''^4}u^4 &= +3 \\ y &\dots 5,156\,4552\,61 \\ y &= \underline{\underline{143\,369,002^m}} \\ \cos c &\dots 9,999\,8446\,6 \\ \sec L &\dots 0,000\,2646\,4 \\ 3\nu_1 &= 30 \\ m &\dots \underline{\underline{0,000\,1096\,0}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L &\dots 3,857\,3325 \\ \sin B &\dots 9,884\,2540 \\ +2\sigma_u &= +728 \\ +\nu_2 &= +6 \\ c &\dots 3,741\,6599 \\ N: 2\rho''^2 &\dots 5,875\,6154 \\ u &\dots 3,665\,3483 \\ +\frac{1}{2}\sigma_L &= +441 \\ -\nu_3 &= -3 \\ x - X_{50^\circ} &\dots 3,282\,6674 \\ x - X_{52^\circ} &= 1\,917,200 \\ X_{50^\circ} - X_{52^\circ} &= -222\,471,132 \\ x &= \underline{\underline{-220\,553,932^m}} \\ c &= \underline{\underline{1^\circ 31' 56'',453}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e'^2 &\dots 7,8273 \\ \cos^2 B &\dots 9,6161 \\ \epsilon^2 &\dots 7,4434 \\ \frac{1}{6}M &\dots 8,8596 \\ (\mu : \rho'')^2 &\dots 6,7018 \\ \nu_1 &\dots 3,0048 \\ 6 + 4\epsilon^2 &\dots 0,78 \\ 2,5 + 2\epsilon^2 &\dots 0,40 \\ \nu_2 &\dots 3,78 \\ \nu_3 &\dots 3,40 \\ \frac{1}{6}M : \rho''^2 &\dots 8,23\,078 \quad \frac{1}{180}M : \rho''^4 &\dots 6,13 \\ L^2 &\dots 7,71\,466 \quad L^4 &\dots 5,48 \\ u^2 &\dots 7,33\,070 \quad u^4 &\dots 4,66 \\ 5,94\,544 &\dots 1,56 \\ 5,56\,148 &\dots 0,79 \\ \sigma_L &= \begin{cases} 0,000\,0881\,94 \\ + 4 \end{cases} \\ \sigma_u &= \begin{cases} 0,000\,0864\,32 \\ + 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Die Meridianbogen X_{50° und X_{52°
sind aus einer Tafel entnommen.

Vgl. hierzu S. 34 u. S. 70.

Zu x gehört $B' = 50^\circ 1' 2''$ und dazu $\varphi' \dots 6,804\,895$ und $\epsilon'^2 \dots 7,4432 - 10$, $\epsilon^2 \dots 7,5190 - 10$.
Da $\frac{y}{\epsilon'} \dots 8,351\,560 - 10$ wird, so geben die Formeln (21*):

$$\begin{aligned} h_{2,1} &\dots 7,7182 - 20 & h_{2,2} &\dots 1,546\,593 - 10 \\ h_{3,1} &\dots 2,7120 - 20 & -h_{3,2} &\dots 4,8224 - 20 \\ && -h_{4,2} &\dots 7,92 - 30. \end{aligned}$$

Aus

$$x_1 - x = +76\,117,796, \quad y_1 - y = +52\,369,680$$

ergibt sich nun nach (30):

$$r \dots 4,965\,6399\,8, \quad \vartheta = 34^\circ 31' 41'',870.$$

Wendet man, um von x_1, y_1 zu ξ, η zu gelangen, die Formeln (32) an, so hat man dazu

$$\vartheta + c = 36^\circ 3' 38'',323, \quad 2\vartheta + c = 70^\circ 35' 20'', \quad 3\vartheta + c = 105^\circ 7', \quad 4\vartheta + c = 139^\circ 39',$$

22*

und es folgt für die Koordinaten ξ , η des zweiten Systems:

$$\begin{aligned}
 \frac{r}{m} \cos(\vartheta + c) &= 74\,671,292 & \frac{r}{m} \sin(\vartheta + c) &= 54\,372,720 \\
 \frac{1}{2} r^2 \frac{h_{2,1}}{m} \cos(2\vartheta + c) &= + 0,001 & \frac{1}{2} r^2 \frac{h_{2,1}}{m} \sin(2\vartheta + c) &= 0,002 \\
 -\frac{1}{2} r^3 \frac{h_{2,2}}{m} \sin(2\vartheta + c) &= - 14,168 & \frac{1}{2} r^2 \frac{h_{2,2}}{m} \cos(2\vartheta + c) &= 4,993 \\
 \frac{1}{6} r^3 \frac{h_{3,1}}{m} \cos(3\vartheta + c) &= - & \frac{1}{6} r^3 \frac{h_{3,1}}{m} \sin(3\vartheta + c) &= 0,001 \\
 -\frac{1}{6} r^3 \frac{h_{3,2}}{m} \sin(3\vartheta + c) &= + 0,084 & \frac{1}{6} r^3 \frac{h_{3,2}}{m} \cos(3\vartheta + c) &= 0,023 \\
 -\frac{1}{24} r^4 \frac{h_{4,2}}{m} \sin(4\vartheta + c) &= + & \frac{1}{24} r^4 \frac{h_{4,2}}{m} \cos(4\vartheta + c) &= . \\
 \xi &= 74\,657,209^m & \eta &= 54\,377,739^m.
 \end{aligned}$$

Wenn man zur Berechnung der h auch die genaueren Formeln (28) oder (28*) anwendet, so ändern sich dadurch doch die vorstehenden Ergebnisse nicht.

