

ESCOLA POLITÉCNICA DA USP
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE TELECOMUNICAÇÕES
E CONTROLE

LABORATÓRIO DE AUTOMAÇÃO E CONTROLE

PTC 3441

MODELAGEM E CONTROLE DE
MANIPULADORES ROBÓTICOS

JOSÉ JAIME DA CRUZ

São Paulo

2018

Digitação de Texto

FÁBIO DE OLIVEIRA FIALHO

DANIEL GUZMÁN DEL RIO

SANTOS ANDRÉS CASTILLO VARGAS

VERSÃO 2018.1

PROGRAMA DO CURSO

1. INTRODUÇÃO
2. DESCRIÇÕES ESPACIAIS E TRANSFORMAÇÕES
3. CINEMÁTICA DIRETA DO MANIPULADOR
4. CINEMÁTICA INVERSA DO MANIPULADOR
5. CINEMÁTICA DE VELOCIDADE E JACOBIANO
6. DINÂMICA DO MANIPULADOR
7. GERAÇÃO DE TRAJETÓRIAS
8. CONTROLE INDEPENDENTE POR JUNTA
9. CONTROLE MULTIVARIÁVEL
10. APRESENTAÇÃO DE UM ROBÔ INDUSTRIAL

BIBLIOGRAFIA

- [1] CRAIG, J. J. **“Introduction to Robotics – Mechanics and Control”**, Addison-Wesley, 1989, 2nd edition.¹
- [2] SPONG, M. W.; VIDYASAGAR, M. **“Robot Dynamics and Control”**, Wiley, 1989.²

¹ Esta é a referência básica para os sete primeiros capítulos.

² Esta é a referência básica para os capítulos 8 e 9.

CRITÉRIO DE APROVAÇÃO

Haverá dois exames ao longo do semestre. A média de provas MP , com $0 \leq MP \leq 10$, será dada por

$$MP = \frac{P1 + 2P2}{3}$$

Haverá ainda sete pequenas listas de exercícios. A média de listas ME , com $0 \leq ME \leq 10$, será dada por

$$ME = \frac{\sum_{i=1}^7 LE_i}{7}, \text{ com } LE_i = \text{nota da } i\text{ésima lista de exercícios}$$

Por fim, haverá um exercício global de simulação em ambiente MATLAB composto por sete listas. A média de listas de simulação MS , com $0 \leq MS \leq 10$, será dada por

$$MS = \frac{\sum_{i=1}^7 LS_i}{7}, \text{ com } LS_i = \text{nota da } i\text{ésima lista de simulação}$$

A média final MF será dada por

$$MF = 0.75MP + 0.10ME + 0.15MS$$

SUMÁRIO

PROGRAMA DO CURSO	II
BIBLIOGRAFIA	II
CRITÉRIO DE APROVAÇÃO	III
SUMÁRIO.....	IV
LISTA DE FIGURAS.....	VII
1 INTRODUÇÃO.....	1
1.1 CONFIGURAÇÕES CINEMÁTICAS USUAIS	7
1.1.1 CONFIGURAÇÃO ARTICULADA (RRR).....	7
1.1.2 CONFIGURAÇÃO ESFÉRICA (RRP).....	8
1.1.3 CONFIGURAÇÃO SCARA (RRP).....	8
1.1.4 CONFIGURAÇÃO CILÍNDRICA (RPP).....	9
1.1.5 CONFIGURAÇÃO CARTESIANA (PPP).....	9
1.2 PUNHOS E EFETUADORES	9
2 DESCRIÇÕES ESPACIAS E TRANSFORMAÇÕES	11
2.1 INTRODUÇÃO	11
2.2 POSIÇÕES, ORIENTAÇÕES E DESCRIÇÃO DE UM SISTEMA DE COORDENADAS	11
2.2.1 POSIÇÕES	11
2.2.2 ORIENTAÇÕES.....	12
2.2.3 DESCRIÇÃO DE UM SISTEMA DE COORDENADAS.....	13
2.3 TRANSFORMAÇÕES ENTRE SISTEMAS.....	13
2.3.1 TRANSFORMAÇÃO ENTRE DOIS SISTEMAS	13
2.3.2 TRANSFORMAÇÕES COMPOSTAS	14
2.3.3 TRANSFORMAÇÃO INVERSA	17
2.4 OUTRAS DESCRIÇÕES DE ORIENTAÇÃO	18
2.5 TRANSFORMAÇÃO DE VETORES LIVRES.....	18
3 CINEMÁTICA DIRETA DO MANIPULADOR.....	19
3.1 INTRODUÇÃO	19
3.2 DESCRIÇÃO DOS LIGAMENTOS.....	19
3.3 DESCRIÇÃO DA CONEXÃO ENTRE LIGAMENTOS	20
3.3.1 LIGAMENTOS INTERMEDIÁRIOS.....	20
3.3.2 LIGAMENTOS INICIAL E FINAL	20
3.3.3 PARÂMETROS DOS LIGAMENTOS	21
3.4 CONVENÇÃO PARA FIXAR SISTEMAS DE REFERÊNCIA A LIGAMENTOS	21
3.4.1 LIGAMENTOS INTERMEDIÁRIOS.....	21
3.4.2 LIGAMENTOS INICIAL E FINAL	22
3.4.3 RESUMO	22
3.4.4 EXEMPLOS.....	23
3.5 CINEMÁTICA DO MANIPULADOR	25
3.5.1 TRANSFORMAÇÕES ENTRE LIGAMENTOS.....	25
3.5.2 ENCADEAMENTO DE TRANSFORMAÇÕES	27
3.5.3 CÁLCULO DAS POSIÇÕES DOS CENTROS DE MASSA DOS LIGAMENTOS	27
3.6 EXERCÍCIOS	28
3.6.1 SCARA[2].....	28
3.6.2 PUMA 560.....	30

3.7	ESPAÇOS DAS JUNTAS E ESPAÇO CARTESIANO.....	32
3.8	SISTEMAS DE REFERÊNCIA PADRÕES	32
3.8.1	SISTEMA DA BASE $\{B\}$	32
3.8.2	SISTEMA DA ESTAÇÃO $\{S\}$	32
3.8.3	SISTEMA DO PUNHO OU DO EFETUADOR $\{W\}$	32
3.8.4	SISTEMA DA FERRAMENTA $\{T\}$	33
3.8.5	SISTEMA DO OBJETIVO $\{G\}$	33
3.9	ONDE ESTÁ A FERRAMENTA?.....	33
4	CINEMÁTICA INVERSA DO MANIPULADOR	34
4.1	INTRODUÇÃO	34
4.2	SOLUBILIDADE	34
4.2.1	EXISTÊNCIA DE SOLUÇÕES.....	34
4.2.2	MULTIPLICIDADE DE SOLUÇÕES	35
4.2.3	MÉTODO DE SOLUÇÃO	36
4.3	SUBESPAÇO DO MANIPULADOR	37
4.3.1	EXEMPLO.....	37
4.4	SOLUÇÃO ALGÉBRICA X GEOMÉTRICA.....	38
4.4.1	SOLUÇÃO ALGÉBRICA	38
4.4.2	SOLUÇÃO GEOMÉTRICA	40
4.5	SOLUÇÃO ALGÉBRICA VIA REDUÇÃO POLINOMIAL	41
4.6	SOLUÇÃO DE PIEPER QUANDO TRÊS EIXOS SE INTERSECTAM.....	41
4.7	EXEMPLOS DE CINEMÁTICA INVERSA.....	42
4.8	OS SISTEMAS PADRÕES.....	42
4.9	A SOLUÇÃO DE UM MANIPULADOR.....	43
4.10	REPETIBILIDADE E PRECISÃO	43
5	CINEMÁTICA DE VELOCIDADE E JACOBIANO	44
5.1	INTRODUÇÃO	44
5.2	NOTAÇÃO PARA POSIÇÃO E ORIENTAÇÃO VARIANTES NO TEMPO	44
5.2.1	DIFERENCIAÇÃO DE VETORES DE POSIÇÃO	44
5.2.2	O VETOR VELOCIDADE ANGULAR	46
5.3	VELOCIDADES LINEAR E ROTACIONAL DE CORPOS RÍGIDOS	47
5.3.1	VELOCIDADE LINEAR.....	47
5.3.2	VELOCIDADE DE ROTAÇÃO – UMA ABORDAGEM GEOMÉTRICA.....	47
5.3.3	MOVIMENTOS DE ROTAÇÃO E TRANSLAÇÃO	49
5.4	MOVIMENTOS DE ROTAÇÃO E TRANSLAÇÃO – UMA ABORDAGEM FORMAL	49
5.4.1	UMA PROPRIEDADE DA DERIVADA DE UMA MATRIZ DE ROTAÇÃO	49
5.4.2	PROPRIEDADE: MATRIZES ANTISSIMÉTRICAS E PRODUTO VETORIAL.....	50
5.4.3	ABORDAGEM FORMAL – O CASO GERAL	50
5.5	MOVIMENTO DE ROTAÇÃO.....	51
5.6	MOVIMENTO DOS LIGAMENTOS DE UM ROBÔ	51
5.6.1	CÁLCULO DA VELOCIDADE DO CENTRO DE MASSA DO LIGAMENTO	54
5.7	JACOBIANOS.....	56
5.7.1	MUDANÇA DE SISTEMA DE REFERÊNCIA DO JACOBIANO	59
5.8	SINGULARIDADES.....	60
5.8.1	EXEMPLO 5.4.....	60
5.8.2	EXEMPLO 5.5.....	61
5.9	FORÇAS E MOMENTOS ESTÁTICOS EM MANIPULADORES.....	61
5.9.1	EXEMPLO 5.7.....	63
5.10	JACOBIANOS NO DOMÍNIO DA FORÇA.....	64
6	DINÂMICA DO MANIPULADOR.....	67
6.1	INTRODUÇÃO	67
6.2	ACELERAÇÃO DE UM CORPO RÍGIDO	67
6.2.1	ACELERAÇÃO LINEAR.....	67

6.2.2	ACELERAÇÃO ANGULAR	69
6.3	DISTRIBUIÇÃO DE MASSA	69
6.4	EQUAÇÕES DE NEWTON E DE EULER	71
6.4.1	EQUAÇÃO DE NEWTON	71
6.4.2	EQUAÇÃO DE EULER	72
6.5	FORMULAÇÃO DINÂMICA ITERATIVA DE NEWTON-EULER	73
6.5.1	CÁLCULO DAS VELOCIDADES E ACELERAÇÕES DA BASE PARA O EFETUADOR	73
6.5.2	FORÇA E TORQUES ATUANTES NUM LIGAMENTO	76
6.5.3	CÁLCULO DAS FORÇAS E TORQUES DO EFETUADOR PARA A BASE	77
6.5.4	O ALGORITMO ITERATIVO DE NEWTON-EULER	79
6.5.5	RESUMO	79
6.5.6	FORÇA DE GRAVIDADE	80
6.6	FORMA ITERATIVA X FORMA FECHADA	80
6.7	EXEMPLO	80
6.8	ESTRUTURA DAS EQUAÇÕES DINÂMICAS	81
6.8.1	EXEMPLO 6.3	81
6.9	FORMULAÇÃO LAGRANGEANA	82
6.10	INCLUSÃO DE OUTROS EFEITOS NO MODELO DINÂMICO	85
6.11	SIMULAÇÃO DINÂMICA	86
7	GERAÇÃO DE TRAJETÓRIAS	87
7.1	INTRODUÇÃO	87
7.2	ESQUEMAS NO ESPAÇO DE JUNTAS	87
7.2.1	POLINÔMIOS CÚBICOS	87
7.2.2	POLINÔMIOS DE GRAU SUPERIOR	88
7.2.3	FUNÇÃO LINEAR COM EXTREMIDADES PARABÓLICAS	88
7.3	ESQUEMAS NO ESPAÇO CARTESIANO	88
7.4	OUTRAS QUESTÕES	89
8	CONTROLE INDEPENDENTE POR JUNTA	90
8.1	INTRODUÇÃO	90
8.2	DINÂMICA DO ATUADOR	90
8.3	ACOMPANHAMENTO DE SET-POINT	91
8.3.1	COMPENSADOR PROPORCIONAL COM REALIMENTAÇÃO AUXILIAR DE VELOCIDADE	92
8.3.2	COMPENSADOR PD	94
8.3.3	COMPENSADOR PID	95
8.4	PRÉ-COMPENSAÇÃO PELO MÉTODO DO TORQUE CALCULADO	96
9	CONTROLE MULTIVARIÁVEL	99
9.1	INTRODUÇÃO	99
9.2	CONTROLADOR PROPORCIONAL COM REALIMENTAÇÃO AUXILIAR DE VELOCIDADE REVISTO	99
9.3	CONTROLE BASEADO NA DINÂMICA INVERSA	100
	APÊNDICE	103
I.	TEOREMA DOS EIXOS PARALELOS	103
II.	MUDANÇA DA MATRIZ DE INÉRCIA DEVIDA A UMA ROTAÇÃO	104
III.	DEDUÇÃO DA EQUAÇÃO DE EULER	105
IV.	DEMONSTRAÇÃO - VELOCIDADES ANGULARES	107
V.	CÁLCULO DA ENERGIA CINÉTICA	110

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1.1: MANIPULADOR MECÂNICO INDUSTRIAL	1
FIGURA 1.2: SISTEMAS DE COORDENADAS	3
FIGURA 1.3: ÂNGULOS DAS JUNTAS	3
FIGURA 1.4: DESLOCAMENTO LINEAR DAS JUNTAS	4
FIGURA 1.5: CONFIGURAÇÃO ARTICULADA (RRR) (FONTE - CRAIG, 1989)	7
FIGURA 1.6: CONFIGURAÇÃO ESFÉRICA (RRP) (FONTE - CRAIG, 1989)	8
FIGURA 1.7: CONFIGURAÇÃO SCARA (RRP) (FONTE - CRAIG, 1989)	8
FIGURA 1.8: CONFIGURAÇÃO CILÍNDRICA (RPP) (FONTE - CRAIG, 1989)	9
FIGURA 1.9: CONFIGURAÇÃO CARTESIANA (PPP) (FONTE - CRAIG, 1989)	9
FIGURA 1.10: PUNHO ESFÉRICO. (FONTE - CRAIG, 1989).....	10
FIGURA 2.1: ORIENTAÇÕES	12
FIGURA 2.2: SISTEMAS DE COORDENADAS	13
FIGURA 2.3: TRANSFORMAÇÕES ENTRE SISTEMAS	14
FIGURA 2.4: TRANSFORMAÇÕES HOMOGÊNEAS.....	14
FIGURA 2.5: EXEMPLO DE TRANSFORMAÇÃO HOMOGÊNEA	16
FIGURA 2.6: TRANSFORMAÇÃO INVERSA	17
FIGURA 3.1: LIGAMENTO $I-I$	19
FIGURA 3.2: LIGAMENTOS $I-I$ E I	20
FIGURA 3.3: SISTEMAS DE REFERÊNCIA PARA LIGAMENTOS	22
FIGURA 3.4: EXEMPLO RRR PLANAR	23
FIGURA 3.5: SISTEMAS DOS LIGAMENTOS.....	25
FIGURA 3.6: SCARA	28
FIGURA 3.7: PUMA 560	31
FIGURA 3.8: SISTEMAS USUAIS	32
FIGURA 4.1: MANIPULADOR COM 2 G.D.L.....	34
FIGURA 4.2: MANIPULADOR COM 2 G.D.L.....	35
FIGURA 4.3: POSIÇÕES DE UM EFETUADOR.....	35
FIGURA 4.4: SOLUÇÕES DE POSICIONAMENTO DE UM EFETUADOR	36
FIGURA 4.5: MANIPULADOR PLANAR RRR.....	37
FIGURA 4.6: MANIPULADOR PLANAR RRR.....	38
FIGURA 4.7: SOLUÇÃO GEOMÉTRICA	40
FIGURA 4.8: SISTEMAS PADRÕES.....	42
FIGURA 5.1: VETOR Q	44
FIGURA 5.2: SISTEMAS DE COORDENADAS $\{O\}$ E $\{C\}$	45
FIGURA 5.3: EXEMPLO 5.1	45
FIGURA 5.4: SISTEMAS DE COORDENADAS $\{A\}$ E $\{B\}$	46
FIGURA 5.5: DESCRIÇÃO DE ${}^B Q$	47
FIGURA 5.6: VELOCIDADE DE ROTAÇÃO ${}^A \Omega_B$	48
FIGURA 5.7: EFEITO DA ROTAÇÃO ${}^A \Omega_B$ SOBRE O PONTO Q	48
FIGURA 5.8: DESCRIÇÃO DE ${}^B Q$	50
FIGURA 5.9: VELOCIDADES DOS LIGAMENTOS.....	52
FIGURA 5.10: ESQUEMA DOS SISTEMAS $\{I\}$ E $\{C_I\}$ DO LIGAMENTO I	54
FIGURA 5.11: EXEMPLO 5.3.....	55
FIGURA 5.12: EXEMPLO 5.5.....	61
FIGURA 5.13: FORÇAS E MOMENTOS ATUANTES NOS LIGAMENTOS	62
FIGURA 5.14: EXEMPLO 5.7.....	63
FIGURA 6.1: SISTEMAS DE COORDENADAS $\{A\}$ E $\{B\}$	67
FIGURA 6.2: TENSOR DE INÉRCIA	70

FIGURA 6.3: SISTEMAS DE COORDENADAS $\{A\}$ E $\{C\}$	70
FIGURA 6.4: ROTAÇÃO ENTRE SISTEMAS DE COORDENADAS	71
FIGURA 6.5: FORÇA DE <i>NEWTON</i> APLICADA AO LIGAMENTO.....	72
FIGURA 6.6: ILUSTRAÇÃO PARA A EQUAÇÃO DE EULER.	72
FIGURA 6.7: SISTEMAS DE COORDENADAS.	73
FIGURA 6.8: SISTEMAS DE COORDENADAS.	75
FIGURA 6.9: SISTEMAS DE COORDENADAS.	76
FIGURA 6.10: SISTEMAS DE COORDENADAS PARA O LIGAMENTO I	77
FIGURA 6.11: FORÇAS E TORQUES NO LIGAMENTO I	78
FIGURA 6.12: ROBÔ COM DOIS GRAUS DE LIBERDADE (FONTE - CRAIG, 1989).....	80
FIGURA 7.1: DESLOCAMENTO LINEAR DA JUNTA.....	88
FIGURA 7.2: SUAVIZAÇÃO DO DESLOCAMENTO DA JUNTA.....	88
FIGURA 8.1: MOTOR CC ACIONANDO UM LIGAMENTO	90
FIGURA 8.2: DIAGRAMA DE BLOCOS DO MOTOR	91
FIGURA 8.3: DIAGRAMA DE BLOCOS DE MALHA ABERTA.....	92
FIGURA 8.4: COMPENSADOR PROPORCIONAL COM REALIMENTAÇÃO AUXILIAR DE VELOCIDADE.....	93
FIGURA 8.5: COMPENSADOR PD.....	94
FIGURA 8.6: <i>LUGARES DAS RAÍZES</i> COM COMPENSADOR PD	94
FIGURA 8.7: COMPENSADOR PID	95
FIGURA 8.8: PRÉ-COMPENSAÇÃO.	96
FIGURA 8.9: PRÉ-COMPENSAÇÃO COM PERTURBAÇÃO.	96
FIGURA 8.10: PRÉ-COMPENSAÇÃO COM CANCELAMENTO DO EFEITO DA PERTURBAÇÃO.....	97
FIGURA 9.1: ESQUEMA DE CONTROLE BASEADO NA DINÂMICA INVERSA.....	101
FIGURA 9.2: SISTEMA DE CONTROLE MALHA INTERNA / MALHA EXTERNA	102
FIGURA I.1: TEOREMA DOS EIXOS PARALELOS	103
FIGURA II.2: MUDANÇA DA MATRIZ DE INÉRCIA	104
FIGURA III.3: CENTRO DE MASSA DO LIGAMENTO I	105

1 INTRODUÇÃO

A palavra robô é derivada da palavra tcheca “*robota*” que significa trabalho. Ela passou a fazer parte do nosso vocabulário depois que o tcheco *Karel Capek* escreveu a peça de teatro *Robôs Universais de Rossum* em 1920 [1].

Atualmente ela é utilizada para designar virtualmente qualquer equipamento que opere com algum grau de autonomia, em geral controlado por computador.

Para nós, a palavra robô significará um manipulador mecânico industrial do tipo abaixo:

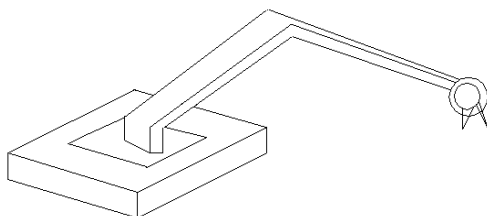


Figura 1.1: Manipulador mecânico industrial

O *Robot Institute of América* adota a seguinte definição oficial: “um robô é um manipulador multifuncional reprogramável projetado para movimentar materiais, peças, ferramentas ou dispositivos especiais segundo movimentos programados variáveis, tendo por objetivo a realização de tarefas variadas”.

O ponto-chave nessa definição é a reprogramabilidade dos robôs. É, portanto, o computador que dá ao robô sua utilidade e sua adaptabilidade.

A utilização de robôs em ambientes industriais traz, em geral, os seguintes benefícios:

- redução dos custos de mão-de-obra;
- aumentos de precisão e produtividade;
- aumento de flexibilidade quando comparado com máquinas especializadas;
- realização de tarefas maçantes, repetitivas e/ou perigosas.

Os robôs prestam-se não apenas à substituição do ser humano, mas, também, à utilização em áreas onde é impossível o trabalho do homem, tais como: exploração submarina e planetária, recuperação de satélites, desmontagem de explosivos, tarefas em ambientes radioativos, etc.

O entendimento da complexidade dos robôs e suas aplicações requerem conhecimentos de:

- engenharia (elétrica, mecânica, industrial);
- ciência da computação;
- economia;
- matemática;
- etc.

Neste curso estaremos envolvidos com cinemática, dinâmica e controle de manipuladores robóticos. No entanto, há outras áreas da robótica que são igualmente importantes, tais como:

- locomoção e guiagem;
- visão artificial;
- inteligência artificial;
- arquitetura de computadores;
- linguagens de programação;
- CAD;
- sensoramento;
- efetadores (garras, punhos).

São descritos a seguir de maneira breve os conteúdos dos diversos capítulos que fazem parte deste curso.

CAP. 2 - DESCRIÇÕES ESPACIAIS E TRANSFORMAÇÕES

Ao trabalhar com manipuladores, estamos continuamente envolvidos com a questão da localização de objetos no espaço tridimensional. Isto significa, na verdade, definir a posição do objeto e sua orientação. Para isso, nós fixamos rigidamente ao objeto um sistema de coordenadas e basta então descrever a posição e a orientação desse sistema em relação a um sistema fixo.

Além disso, com frequência é necessário efetuar mudanças de sistemas de coordenadas.

No capítulo 2 nós vamos estudar essas questões.

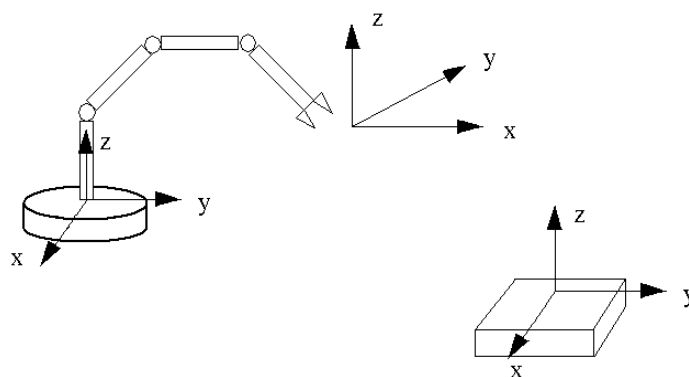


Figura 1.2: Sistemas de coordenadas

CAP. 3 - CINEMÁTICA DIRETA DO MANIPULADOR

A cinemática dos manipuladores trata da evolução temporal da geometria dos mesmos.

Os manipuladores consistem de elementos praticamente rígidos, denominados ligamentos ou elos (“*links*”, em inglês), os quais são conectados entre si através de juntas que permitem o movimento relativo de ligamentos vizinhos.

As juntas são, normalmente, dotadas de sensores de posição que permitem medir o deslocamento relativo dos ligamentos.

No caso de juntas rotacionais, esses deslocamentos são angulares e denominados ângulos das juntas.

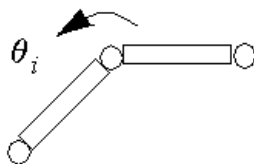


Figura 1.3: Ângulos das juntas

No caso de juntas prismáticas, em que os deslocamentos são translações, falamos em deslocamento linear das juntas.

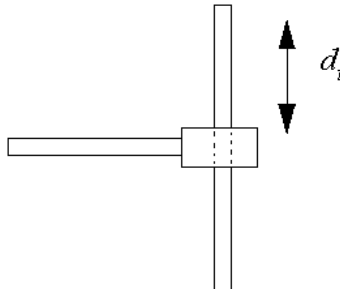


Figura 1.4: Deslocamento linear das juntas

O número de graus de liberdade de um manipulador é definido como o número de variáveis de posição independentes que devem ser especificadas para que se possam localizar todos os componentes do manipulador. No caso de manipuladores industriais, em geral cada junta tem apenas um grau de liberdade e, portanto, o número de graus de liberdade é normalmente igual ao número de juntas.

Na extremidade livre da cadeia de ligamentos situa-se o efetuador (“*end-effector*”, em inglês). Dependendo do tipo de tarefa a ser executada pelo manipulador, o efetuador pode ser uma garra, um eletroímã ou outro dispositivo.

Geralmente é necessário descrever a posição e a orientação do sistema de coordenadas localizado no efetuador (sistema da ferramenta) com relação ao sistema da base do manipulador (sistema fixo no ambiente de trabalho).

O problema da cinemática direta consiste em determinar a posição e a orientação do sistema da ferramenta a partir dos ângulos (no caso de juntas rotacionais) ou deslocamentos lineares (no caso de juntas prismáticas) das juntas.

Este problema será tratado no capítulo 3.

CAP. 4 - CINEMÁTICA INVERSA DO MANIPULADOR

Neste caso, dadas a posição e a orientação do efetuador, deseja-se determinar todos os possíveis conjuntos de coordenadas das juntas que produzem tais posição e orientação.

Este problema é mais complicado que o da cinemática direta, pois as equações cinemáticas são não-lineares, em geral; além disso, surgem as questões da existência e da multiplicidade de soluções.

O conjunto de todas as possíveis posições e orientações que podem ser atingidas pelo sistema da ferramenta do manipulador constitui o seu espaço de trabalho. Em outras

palavras, este é o conjunto de posições e orientações do sistema da ferramenta para os quais o problema da cinemática inversa tem solução.

CAP. 5 - CINEMÁTICA DE VELOCIDADE E JACOBIANO

O objetivo aqui é estabelecer a relação entre as velocidades de translação e rotação do efetuador com as velocidades das juntas.

Matematicamente, a cinemática direta do manipulador pode ser encarada como uma função que mapeia as coordenadas das juntas na posição e orientação do efetuador. As velocidades das juntas e do efetuador são então relacionadas pelo Jacobiano desta função.

O Jacobiano também aparece em diversos outros problemas, como, por exemplo, na determinação dos torques estáticos nas juntas necessários para produzir força e torque estáticos desejados no efetuador.

CAP. 6 - DINÂMICA DO MANIPULADOR

O objetivo aqui será apresentar duas metodologias que permitem escrever as equações de movimento do manipulador, isto é, as equações que relacionam os torques/forças aplicados nas juntas com as posições, velocidades e acelerações dos ligamentos.

A importância deste tópico decorre de dois fatores:

- i. controle - as equações dinâmicas do manipulador podem ser utilizadas na formulação de algoritmos de controle (um exemplo é a estrutura de controle com pré-compensação (“*feedforward*”));
- ii. simulação - as mesmas equações podem ser utilizadas para prever a evolução temporal do manipulador como decorrência de torques/forças aplicados nas juntas.

CAP. 7 - GERAÇÃO DE TRAJETÓRIAS

Entende-se trajetória aqui como uma história temporal da posição, velocidade e aceleração para cada grau de liberdade.

A geração de trajetórias inclui o problema da interface com o homem, isto é, o problema de como especificar de forma simples uma trajetória no espaço. Ou seja, o

usuário não deve ser obrigado a escrever funções complicadas do tempo e do espaço para definir a tarefa. Por exemplo o usuário pode desejar especificar apenas a posição e a orientação finais do efetuador e deixar a cargo do sistema a decisão sobre a forma da trajetória geométrica, a duração do movimento, o perfil de velocidades, etc.

Outro problema dentro deste assunto refere-se à forma como as trajetórias são representadas pelo computador após terem sido planejadas.

Por fim, há a questão de gerar efetivamente em tempo real a trajetória a partir da representação interna adotada.

Os problemas da representação interna e da geração das trajetórias em tempo real devem ser resolvidos da forma mais simples possível.

CAP. 8 - CONTROLE LINEAR DE MANIPULADORES

Nós vamos nos limitar a estudar manipuladores com acionamento através de motores CC por ser este o caso mais comum na prática do acionamento elétrico.

Motores de passo também podem ser utilizados em manipuladores, mas são adequados apenas a aplicações leves. Além disso, eles são usados tipicamente em aplicações em malha aberta, não envolvendo problemas de controle. Assim, eles não serão objeto de atenção neste curso.

Mais recentemente tem-se passado a considerar motores CA como alternativa de acionamento, utilizando-se para tanto uma eletrônica de potência adequada. No entanto, atualmente, ainda não são muitas as aplicações em ambientes industriais.

Com referência então ao acionamento por motores CC, as aplicações industriais baseiam-se, em sua grande maioria, em esquemas de controle de posição lineares, isto é, que utilizam aproximações lineares para a dinâmica do manipulador.

O mecanismo básico de controle consiste em definir trajetórias de referência para cada junta (através da solução de um problema de cinemática inversa) e, então, seguir essas trajetórias através de servomecanismos.

CAP. 9 - CONTROLE NÃO LINEAR DE MANIPULADORES

Mais recentemente tem havido uma tendência à utilização de técnicas de controle não-lineares na solução do problema de controle de posição de manipuladores.

Vamos estudar dois tipos de controladores neste capítulo:

- i. controladores baseados no método de *Lyapunov*;
- ii. controladores por torque calculado.

1.1 CONFIGURAÇÕES CINEMÁTICAS USUAIS

A configuração cinemática de um manipulador é escolhida com base na aplicação a que se destina.

A classificação que se segue baseia-se nas primeiras três juntas do manipulador (“braço”), com o “punho” sendo descrito em separado. Essas denominações são baseadas na analogia com o ser humano.

1.1.1 CONFIGURAÇÃO ARTICULADA (RRR)³

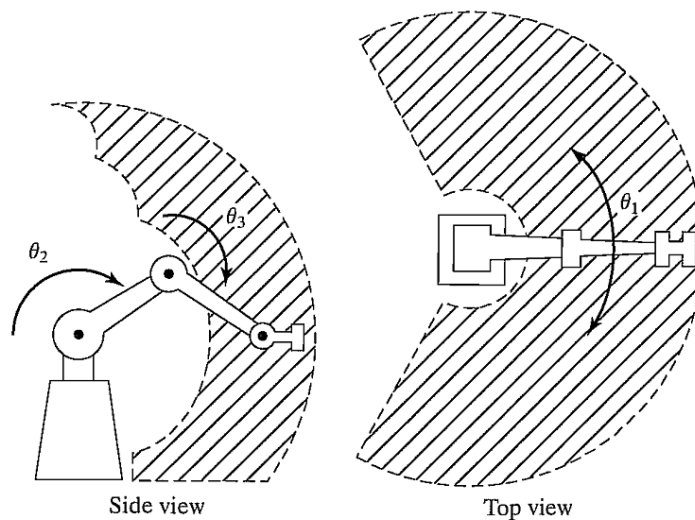


Figura 1.5: Configuração articulada (RRR) (Fonte - Craig, 1989)

Este tipo de manipulador é também chamado de antropomórfico, articulado ou em cotovelo.

Esta configuração apresenta liberdade de movimento relativamente elevada em espaços pequenos.

³ A sigla RRR é utilizada para representar o fato de que as três primeiras juntas do manipulador (contadas a partir da base) são rotacionais.

1.1.2 CONFIGURAÇÃO ESFÉRICA (RRP)⁴

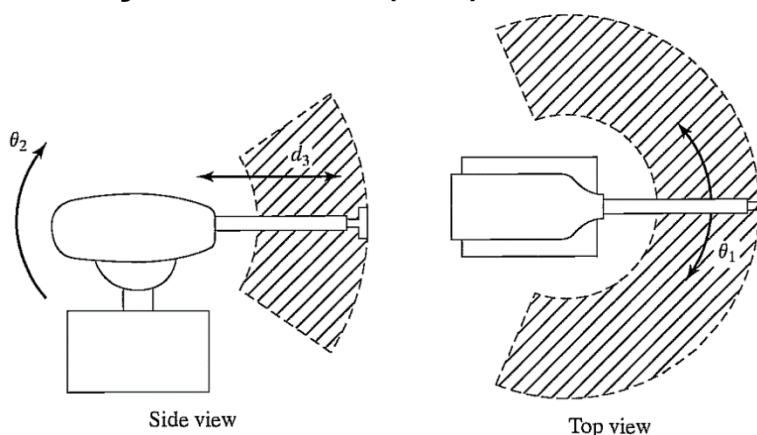


Figura 1.6: Configuração esférica (RRP) (Fonte - Craig, 1989)

Esta configuração é similar à anterior, com a diferença de que a junta do cotovelo é aqui substituída por uma do tipo prismática.

A designação “esférica” provém do fato de que as coordenadas esféricas que definem a posição do efetuator (com relação a um sistema cuja origem coincide com a intersecção dos dois eixos de rotação) são dadas pelas três primeiras variáveis de juntas.

1.1.3 CONFIGURAÇÃO SCARA (RRP)

A sigla “SCARA” provém do inglês e significa “*Selective Compliant Articulated Robot for Assembly*” ou “*Selectively Compliant Assembly Robot Arm*”.

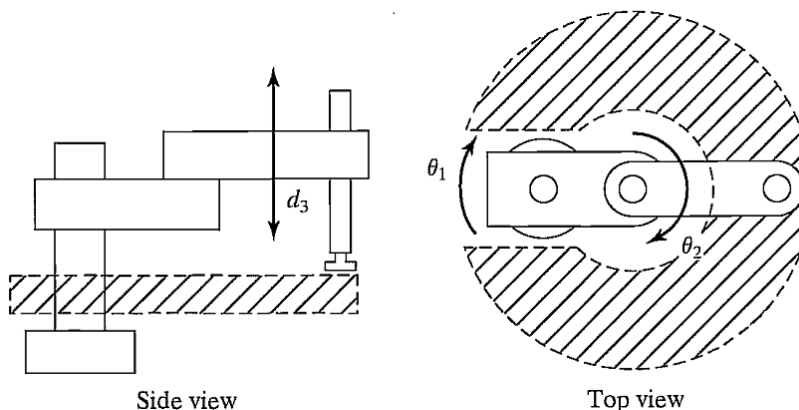


Figura 1.7: Configuração SCARA (RRP) (Fonte - Craig, 1989)

A principal vantagem desta configuração é que os atuadores das duas primeiras juntas estão livres de suportar os pesos do próprio manipulador e da carga. Além disso, como os atuadores das duas primeiras juntas podem ser alocados na base do manipulador, eles podem ser relativamente grandes, o que garante altas velocidades de movimento.

Como o próprio nome indica, esta configuração é recomendada para tarefas de montagem.

⁴ De maneira semelhante ao caso anterior, a sigla RRP é utilizada para representar o fato de que as duas primeiras juntas do manipulador são rotacionais, enquanto que a terceira é prismática.

1.1.4 CONFIGURAÇÃO CILÍNDRICA (RPP)

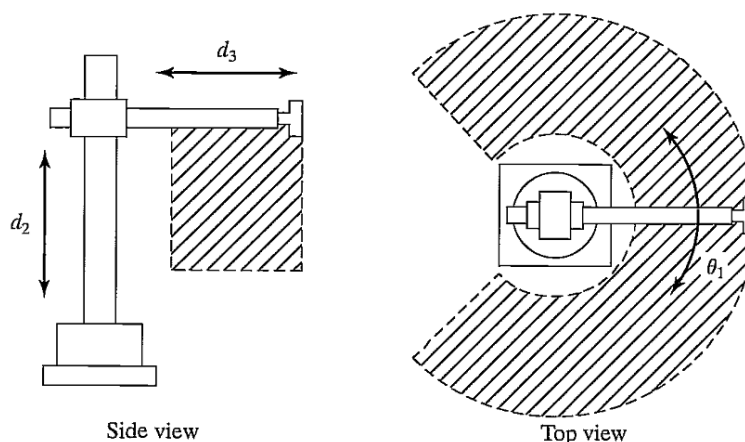


Figura 1.8: Configuração cilíndrica (RPP) (Fonte - Craig, 1989)

A designação “cilíndrica” para esta configuração provém do fato de que as variáveis das juntas são as coordenadas cilíndricas do efetuador com relação a um sistema fixo na base.

1.1.5 CONFIGURAÇÃO CARTESIANA (PPP)

Neste caso, as três primeiras juntas são prismáticas e ortogonais entre si.

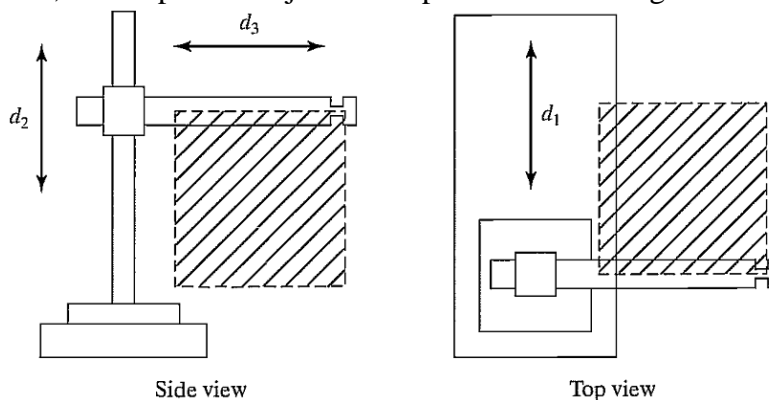


Figura 1.9: Configuração cartesiana (PPP) (Fonte - Craig, 1989)

Esta configuração, em geral, corresponde a robôs de grande rigidez estrutural, sendo por isso possível a construção de robôs de grande porte, normalmente chamados de robôs em pórtico. Robôs deste tipo são utilizados, por exemplo, na indústria automobilística para mover automóveis inteiros.

Como os movimentos das três juntas são desacoplados, o projeto resulta simplificado.

1.2 PUNHOS E EFETUADORES

Em geral, as juntas dos punhos são do tipo rotação. Têm se tornado cada vez mais comuns os punhos esféricos, isto é, punhos cujos eixos das juntas se intersectam num único ponto. Uma das vantagens do punho esférico (Figura 1.10) é que seu uso simplifica

consideravelmente a cinemática do manipulador, permitindo o desacoplamento entre a posição e a orientação do efetuador.

Tipicamente, os manipuladores possuem três graus de liberdade para posicionamento. O número de graus de liberdade para orientação depende, então, do punho. São comuns os casos em que este tem um, dois ou três graus de liberdade.

O braço e o punho são utilizados basicamente para o posicionamento e a orientação do efetuador e de qualquer ferramenta que ele possa carregar. É o efetuador ou a ferramenta que, na realidade, executa o trabalho.

O tipo mais simples de garra é capaz apenas de realizar duas operações: abertura e fechamento. Isto é, em geral, satisfatório para operações tais como transferência de material, manuseio de peças ou mesmo o ato de segurar uma ferramenta simples. Outras tarefas (como soldagem, polimento ou montagem) exigem efetuadores e ferramentas específicas.

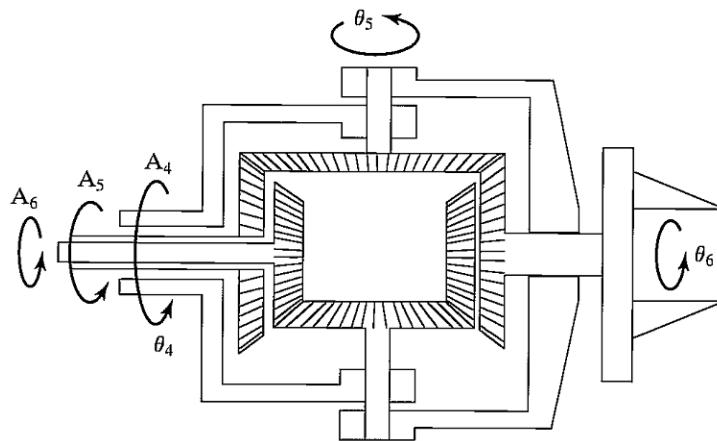


Figura 1.10: Punho esférico. (Fonte - Craig, 1989)

2 DESCRIÇÕES ESPACIAS E TRANSFORMAÇÕES

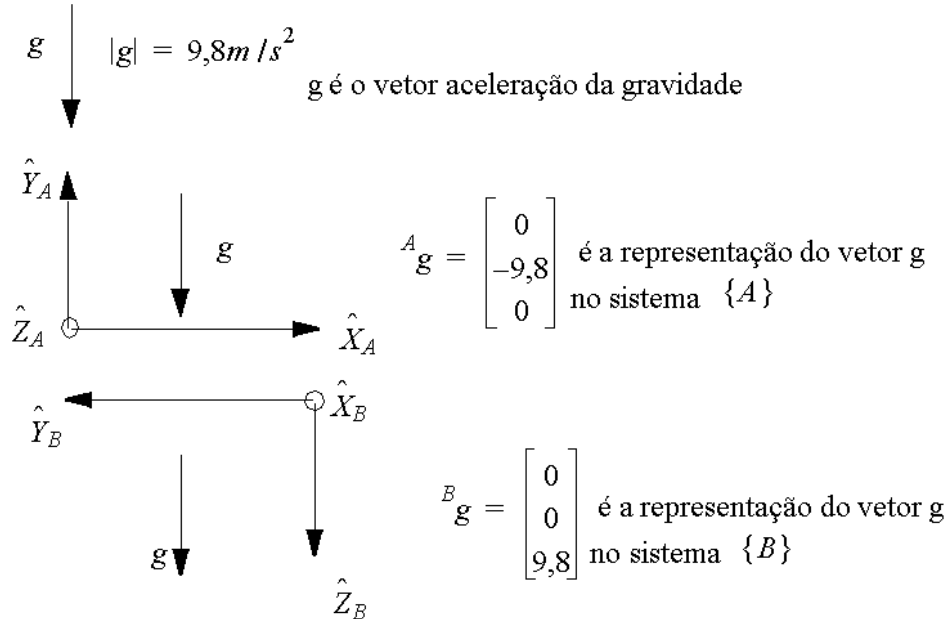
2.1 INTRODUÇÃO

O estudo da manipulação através de robôs pressupõe que ligamentos, efetadores e ferramentas se movimentem no espaço. Daí surge a necessidade de se representar matematicamente a posição e a orientação de objetos no espaço.

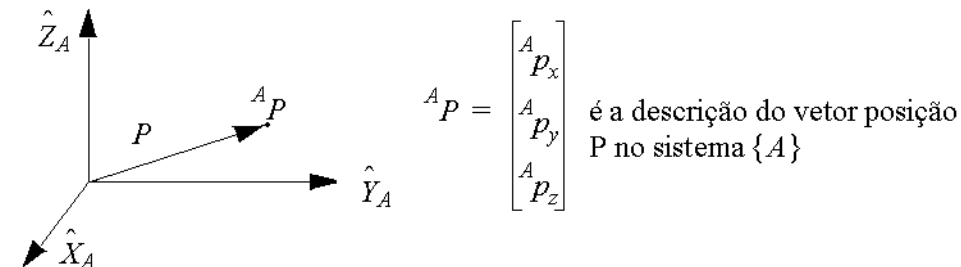
Neste capítulo nós vamos estudar as operações de rotação e translação e introduzir o conceito de transformação homogênea.

2.2 POSIÇÕES, ORIENTAÇÕES E DESCRIÇÃO DE UM SISTEMA DE COORDENADAS

De início, é oportuno notar a distinção entre um vetor e sua representação num dado sistema de referência. Para isso, consideremos a aceleração da gravidade como exemplo.



2.2.1 POSIÇÕES



Denotam-se por \hat{X}_A , \hat{Y}_A e \hat{Z}_A os versores dos eixos de coordenadas do sistema $\{A\}$.

2.2.2 ORIENTAÇÕES

Para definir a orientação de um objeto no espaço em relação a um dado sistema de referência nós vamos fixar um sistema de coordenadas a ele e, então, descrever este sistema em relação ao outro.

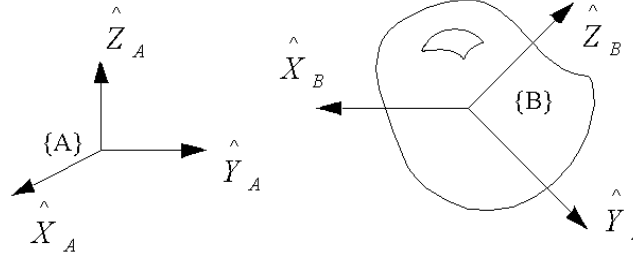


Figura 2.1: Orientações

Uma forma de descrever a orientação de $\{B\}$ em relação a $\{A\}$ é escrevendo os versores dos eixos de $\{B\}$ através de suas componentes com relação a $\{A\}$: ${}^A\hat{X}_B$, ${}^A\hat{Y}_B$ e ${}^A\hat{Z}_B$. É conveniente colocar lado a lado esses versores de forma a constituir uma matriz:

$${}^A_R = [{}^A\hat{X}_B : {}^A\hat{Y}_B : {}^A\hat{Z}_B]$$

A_R é chamada matriz de rotação de $\{B\}$ com referência ao sistema $\{A\}$ e pode ser escrita de imediato como:

$${}^A_R = \begin{bmatrix} \hat{X}_B \cdot \hat{X}_A & \hat{Y}_B \cdot \hat{X}_A & \hat{Z}_B \cdot \hat{X}_A \\ \hat{X}_B \cdot \hat{Y}_A & \hat{Y}_B \cdot \hat{Y}_A & \hat{Z}_B \cdot \hat{Y}_A \\ \hat{X}_B \cdot \hat{Z}_A & \hat{Y}_B \cdot \hat{Z}_A & \hat{Z}_B \cdot \hat{Z}_A \end{bmatrix}$$

onde o símbolo “.” representa o produto escalar.

Os elementos desta matriz são pois os cossenos diretores dos versores dos eixos de $\{B\}$ com referência ao sistema $\{A\}$.

Vejamos agora qual a relação entre A_R e B_R . Para isso, escrevemos B_R :

$${}^B_R = [{}^B\hat{X}_A : {}^B\hat{Y}_A : {}^B\hat{Z}_A] = \begin{bmatrix} \hat{X}_A \cdot \hat{X}_B & \hat{Y}_A \cdot \hat{X}_B & \hat{Z}_A \cdot \hat{X}_B \\ \hat{X}_A \cdot \hat{Y}_B & \hat{Y}_A \cdot \hat{Y}_B & \hat{Z}_A \cdot \hat{Y}_B \\ \hat{X}_A \cdot \hat{Z}_B & \hat{Y}_A \cdot \hat{Z}_B & \hat{Z}_A \cdot \hat{Z}_B \end{bmatrix}$$

de onde se observa que:

$${}^A_R = {}^B_R^T$$

Notando que:

$${}^A_R^T \cdot {}^B_R = \begin{bmatrix} {}^A\hat{X}_B^T \\ {}^A\hat{Y}_B^T \\ {}^A\hat{Z}_B^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^A\hat{X}_B & {}^A\hat{Y}_B & {}^A\hat{Z}_B \end{bmatrix} = I_3,$$

é óbvio que

$${}^A_R^{-1} = {}^B_R^T,$$

o que, em palavras, significa que a inversa de uma matriz de rotação é sua transposta, ou seja, a matriz de rotação é ortogonal.

2.2.3 DESCRIÇÃO DE UM SISTEMA DE COORDENADAS

Para definir completamente a localização de um objeto no espaço em relação a um dado sistema de referência, basta especificarmos a posição de um ponto arbitrário do objeto e a orientação de um sistema de coordenadas fixo a ele com relação ao sistema dado. Por simplicidade, vamos adotar o ponto arbitrário como sendo a origem do sistema fixo ao corpo.

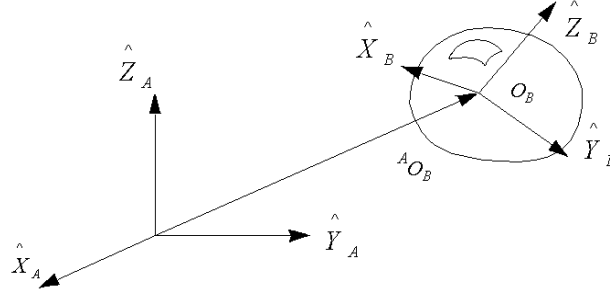


Figura 2.2: Sistemas de coordenadas

Assim, para nós será equivalente falar na localização do objeto no espaço ou na localização do sistema $\{B\}$ fixo a ele. Para isso, vamos usar a notação:

$$\{B\} = \{{}_B^A R, {}^A O_B\}$$

2.3 TRANSFORMAÇÕES ENTRE SISTEMAS

2.3.1 TRANSFORMAÇÃO ENTRE DOIS SISTEMAS

Suponhamos conhecida a descrição de $\{B\}$ com relação a $\{A\}$:

$$\{B\} = \{{}_B^A R, {}^A O_B\}$$

e suponhamos conhecida a descrição de um ponto P em relação a $\{B\}$, ${}^B P$. O problema que se coloca é obter a descrição de P em $\{A\}$, ${}^A P$.

Nós podemos resolver este problema em duas etapas:

- primeiramente expressamos P em um sistema com mesma orientação de $\{A\}$ e origem coincidente com ${}^B O$;
- em seguida, levamos em conta a translação entre as origens. Dessa forma:

$${}^A P = {}_B^A R \cdot {}^B P + {}^A O_B$$

5

$${}^A P = {}^B p_X \begin{bmatrix} \hat{X}_B \cdot \hat{X}_A \\ \hat{X}_B \cdot \hat{Y}_A \\ \hat{X}_B \cdot \hat{Z}_A \end{bmatrix} + {}^B p_Y \begin{bmatrix} \hat{Y}_B \cdot \hat{X}_A \\ \hat{Y}_B \cdot \hat{Y}_A \\ \hat{Y}_B \cdot \hat{Z}_A \end{bmatrix} + {}^B p_Z \begin{bmatrix} \hat{Z}_B \cdot \hat{X}_A \\ \hat{Z}_B \cdot \hat{Y}_A \\ \hat{Z}_B \cdot \hat{Z}_A \end{bmatrix} + {}^A O_B = {}_B^A R \cdot \begin{bmatrix} {}^B p_X \\ {}^B p_Y \\ {}^B p_Z \end{bmatrix} + {}^A O_B = {}_B^A R \cdot {}^B P + {}^A O_B$$

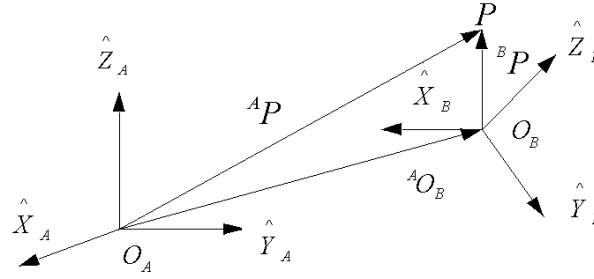


Figura 2.3: Transformações entre sistemas

Craig ([1]) chama a atenção para a seguinte regra (infame!): tudo se passa como se os B's fossem “cancelados”, resultando com isso apenas vetores expressos em $\{A\}$.

2.3.2 TRANSFORMAÇÕES COMPOSTAS

Consideremos três sistemas de coordenadas $\{A\}$, $\{B\}$ e $\{C\}$ e um ponto P .

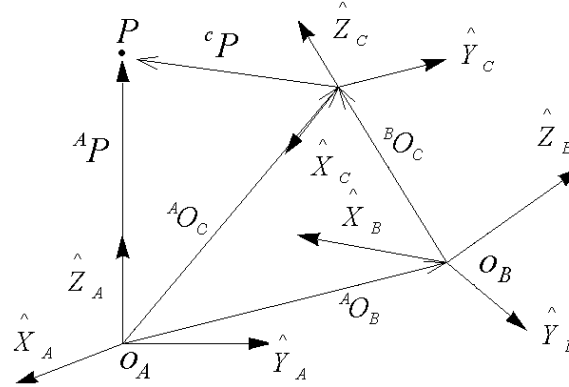


Figura 2.4: Transformações homogêneas

Suponhamos conhecidos A_O_B , B_R , B_O_C , C_R , A_O_C , C_R e C_P . Queremos expressar P no sistema $\{A\}$, isto é, queremos obter A_P .

Temos duas alternativas:

- i. expressar P em $\{B\}$ e, em seguida, em $\{A\}$:

$$B_P = B_R \cdot C_P + B_O_C$$

$$A_P = A_R \cdot B_P + A_O_B$$

de onde resulta:

$$A_P = A_R \cdot B_R \cdot C_P + A_R \cdot B_O_C + A_O_B$$

- ii. transformar P diretamente de $\{C\}$ para $\{A\}$:

$$A_P = A_R \cdot C_P + A_O_C$$

Comparando as duas expressões acima, podemos identificar:

$$A_R = A_R \cdot B_R$$

$$A_O_C = A_R \cdot B_O_C + A_O_B \quad (2.1)$$

Consideremos agora a seguinte identidade matricial:

$$\begin{bmatrix} A_R & A_O_B \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_R & B_O_C \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_R \cdot B_R & A_R \cdot B_O_C + A_O_B \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

onde $O = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Esta identidade sugere que a representação da mudança de coordenadas correspondentes a uma rotação e a uma translação seja feita por meio de uma matriz com a seguinte estrutura:

$${}^A_B T = \begin{bmatrix} {}^A_B R & {}^A O_B \\ O & 1 \end{bmatrix},$$

de maneira que resulta a expressão simples

$${}^A P = {}^A_B T \cdot {}^B P$$

se acrescentarmos “1” como 4ª componente tanto de ${}^A P$ como de ${}^B P$.

Note que, assim procedendo,

$${}^A T \cdot {}^B T = {}^A T,$$

o que torna simples as mudanças de coordenadas entre sistemas sucessivos.

Observando a expressão (2.1), verificamos que ela vai se tornando progressivamente mais complexa à medida que o número de sistemas intermediários cresce. Por outro lado, com a definição de ${}^A_B T$ acima, mudanças sucessivas de sistemas passam a ser representadas por produtos.

Matrizes 4x4 com a estrutura acima são chamadas de transformações homogêneas. Elas permitem escrever a mudança de coordenadas entre sistemas como um operador em forma de matriz.

Vetores de posição serão 3x1 ou 4x1 (com a última componente unitária) dependendo do contexto.

OBSERVAÇÕES

- 1) Pelo visto até aqui, uma transformação homogênea pode ser vista de duas formas: i) como representação de um sistema de referência em relação a outro; ii) como um mapeamento que transforma representações de vetores de um sistema para outro;
- 2) Podemos, além disso, encarar a transformação homogênea como um operador que associa a um vetor descrito num sistema de coordenadas, outro vetor descrito no mesmo sistema de coordenadas (esta interpretação é útil para computação gráfica):

$${}^A P_2 = T \cdot {}^A P_1$$

Exemplo: Seja o sistema $\{B\}$ obtido de $\{A\}$ por meio de uma rotação de 60° em torno do eixo \hat{Z}_A e tal que ${}^A O_B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$:

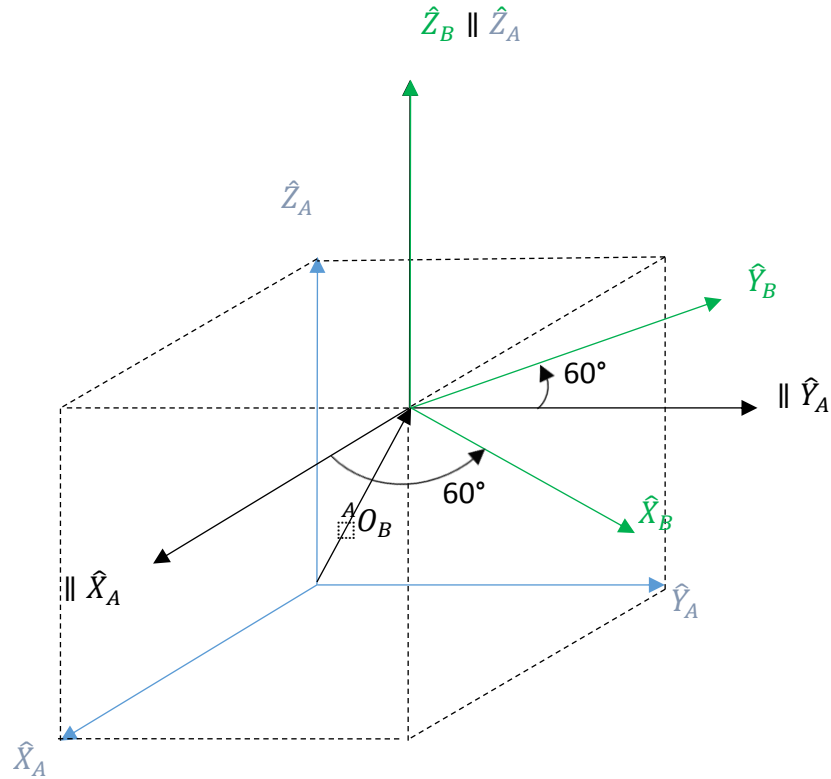


Figura 2.5: Exemplo de transformação homogênea

$${}^A_B R = \begin{bmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A transformação homogênea neste caso é:

$${}^A_B T = \begin{bmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 & 0 & 1 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1ª interpretação:

${}^A_B T$ pode ser vista como uma representação do sistema $\{B\}$ com referência a $\{A\}$.

2ª interpretação:

Consideremos o ponto P :

$${}^B P = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$${}^A T_B \cdot {}^B P = \begin{bmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 & 0 & 1 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/2 \\ \sqrt{3}/2 + 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = {}^A P$$

Portanto a transformação homogênea realiza a mudança de coordenadas do ponto P do sistema $\{B\}$ para $\{A\}$.

3ª interpretação:

Consideremos o vetor ${}^A P_1$:

$${}^A P_1 = [1 \quad 0 \quad 1 \quad 1]^T$$

Conforme cálculo acima,

$${}^A T_B \cdot {}^A P_1 = [3/2 \quad \sqrt{3}/2 + 1 \quad 2 \quad 1]^T$$

e, portanto, a transformação homogênea, operando sobre ${}^A P_1$, gira este vetor posição de 60° em torno do eixo \hat{Z}_A e o translada de $[1 \quad 1 \quad 1]^T$.

2.3.3 TRANSFORMAÇÃO INVERSA

Suponhamos conhecido um sistema $\{B\}$ com relação a $\{A\}$, isto é, ${}^A T_B$. O problema que se coloca é como obter a descrição de $\{A\}$ em relação a $\{B\}$.

Uma primeira maneira é calcular ${}^A T_B^{-1}$, uma vez que

$${}^A P = {}^A T_B \cdot {}^B P = {}^A T_B ({}^B T_A \cdot {}^A P) = ({}^A T_B {}^B T_A) {}^A P$$

para ${}^A P$ arbitrário.

No entanto ${}^B T_A$ pode ser obtida de maneira simples se levarmos em conta a estrutura da transformação.

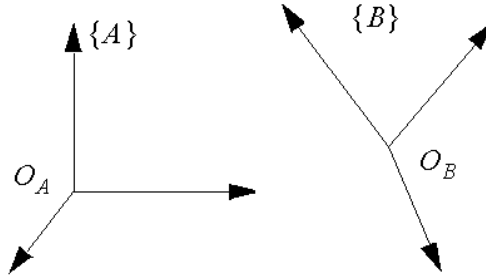


Figura 2.6: Transformação inversa

Notemos, de início, que por hipótese, supõem-se conhecidos ${}^A O_B$ e ${}^A R_B$. O problema se resume então em obter ${}^B O_A$ e ${}^B R_A$.

${}^B R_A$ pode ser escrita de imediato já que, conforme vimos,

$${}^B R_A = {}^A R_B^T$$

Quanto a ${}^B O_A$, utilizamos a equação que exprime ${}^B O_B$ a partir de sua descrição em $\{A\}$ (aplicando a este caso a expressão geral já vista: ${}^B P = {}^B R_A \cdot {}^A P + {}^B O_A$):

$${}^B O_B = {}^B R_A \cdot {}^A O_B + {}^B O_A$$

Mas, obviamente,

$${}^B O_B = O$$

e, portanto,

$${}^B O_A = -{}^B R \cdot {}^A O_B = -{}^A R^T \cdot {}^A O_B$$

Dessa forma, está resolvido nosso problema e podemos escrever:

$${}^B T_A = \begin{bmatrix} {}^A R^T & -{}^A R^T \cdot {}^A O_B \\ O & 1 \end{bmatrix}$$

2.4 OUTRAS DESCRIÇÕES DE ORIENTAÇÃO

Nós representamos orientações, até aqui, por meio de matrizes de rotação 3x3:

$${}^A R_B = [{}^A \hat{X}_B : {}^A \hat{Y}_B : {}^A \hat{Z}_B]$$

para as quais:

$$\begin{aligned} |{}^A \hat{X}_B| &= 1 & {}^A \hat{X}_B \cdot {}^A \hat{Y}_B &= 0 \\ |{}^A \hat{Y}_B| &= 1 & {}^A \hat{X}_B \cdot {}^A \hat{Z}_B &= 0 \\ |{}^A \hat{Z}_B| &= 1 & {}^A \hat{Y}_B \cdot {}^A \hat{Z}_B &= 0 \end{aligned}$$

Dessa maneira, ${}^A R_B$ tem, em verdade, apenas 3 elementos independentes, o que significa que 3 números bastam para definir uma orientação no espaço.

Outra maneira de enxergar este fato é utilizando a forma de *Cayley* para matrizes ortonormais. Esta diz que, qualquer que seja ${}^A R_B$ ortogonal, existe uma matriz S antissimétrica tal que:

$${}^A R_B = (I - S)^{-1}(I + S)$$

Como S é antissimétrica e 3x3, bastam apenas três parâmetros para defini-la.

Existem diversas convenções para descrever a orientação utilizando três parâmetros como, por exemplo,

- ângulos de “roll”, “pitch” e “yaw”;
- ângulos de *Euler* Z-Y-X;
- ângulos de *Euler* Z-Y-Z;
- ângulo - eixo equivalente;
- *quatérnions*;
- etc.

2.5 TRANSFORMAÇÃO DE VETORES LIVRES

Até aqui nós consideramos exclusivamente vetores posição. No entanto, mais adiante vamos tratar também de velocidades e acelerações.

Um vetor livre é aquele que pode estar localizado em qualquer local do espaço sem perda de seu significado. Assim, por exemplo, um vetor velocidade é sempre um vetor livre. Se tivermos um dado vetor velocidade expresso num sistema $\{B\}$ (isto é, ${}^B V$) e quisermos expressá-lo num outro sistema $\{A\}$, basta considerarmos apenas a diferença de orientação entre ambos os sistemas, isto é, basta fazermos:

$${}^A V = {}^A R_B \cdot {}^B V$$

Da mesma forma, os vetores aceleração são livres e, portanto, a transformação de sua expressão de um sistema $\{B\}$ para um outro sistema $\{A\}$ é realizada apenas por meio da matriz de rotação ${}^A R_B$.

3 CINEMÁTICA DIRETA DO MANIPULADOR

3.1 INTRODUÇÃO

A cinemática trata do estudo dos movimentos sem considerar as causas que lhes dão origem.

Neste capítulo vamos estudar a *Cinemática direta de manipuladores*, cujo objetivo é determinar a posição e a orientação do efetuador com base nas variáveis das juntas do robô (ângulos, no caso de juntas rotacionais, ou deslocamentos lineares, no caso de juntas prismáticas).

3.2 DESCRIÇÃO DOS LIGAMENTOS

Os ligamentos serão numerados a partir da base fixa do braço, que receberá, por convenção o número 0. O primeiro ligamento arbitrariamente terá o número 1, e assim por diante, até o último (de número n).

Neste curso, um ligamento será encarado como um corpo rígido que define a posição relativa entre dois eixos consecutivos de juntas do manipulador.

Para fixar ideias, esqueçamos por uns momentos as juntas prismáticas e consideremos apenas juntas rotacionais. O eixo da junta i é definido por uma reta no espaço (ou um vetor), em torno da qual o ligamento i gira com relação ao ligamento $i-1$. Para definir a posição relativa entre duas retas, sabe-se que são necessários dois números e, portanto, um ligamento pode ser especificado através de dois números que definem a posição relativa de dois eixos no espaço.

A distância entre duas retas no espaço é medida segundo a perpendicular comum (que é única, exceto quando as duas retas são paralelas), sendo um dos tais números.

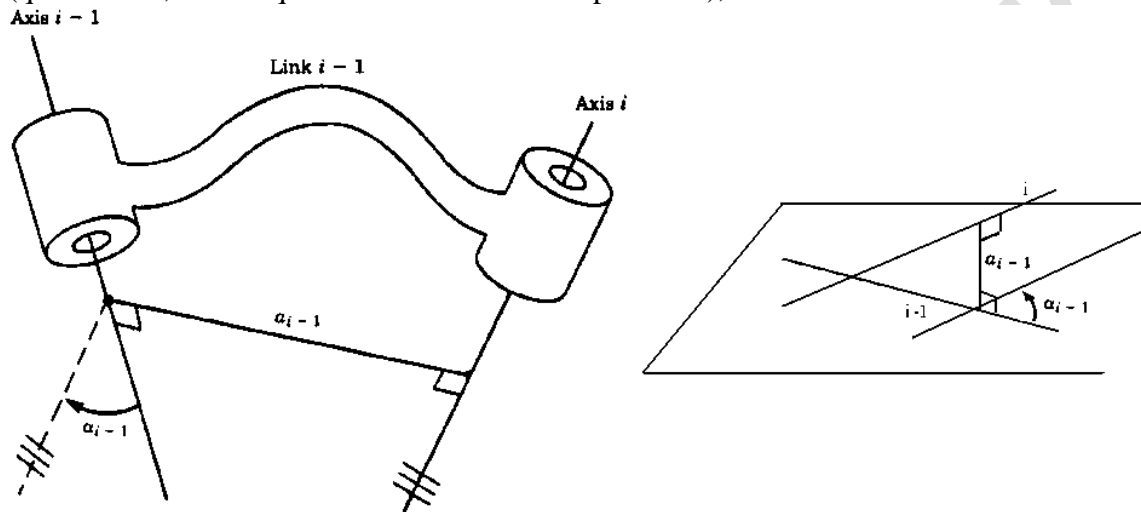


Figura 3.1: Ligamento $i-1$

a_{i-1} é o comprimento do ligamento.

O segundo parâmetro utilizado para definir o ligamento é o ângulo de torção (“*twist angle*”) α_{i-1} . Para definir este ângulo, nós consideramos um plano cuja normal é a

perpendicular comum (note que os dois eixos são paralelos a este plano em geral⁶) e projetamos os dois sobre este plano. O ângulo α_{i-1} é medido entre as projeções dos eixos $i-1$ e i , no sentido da mão direita em torno de a_{i-1} (isto é, com o polegar sobre a_{i-1} , apontando do eixo $i-1$ para o i).

Obs: No caso de os dois eixos se intersectarem, o torção é medido no plano que contém os dois eixos, mas o sentido de α_{i-1} fica indefinido, caso em que se atribui um sinal arbitrário a α_{i-1} .

3.3 DESCRIÇÃO DA CONEXÃO ENTRE LIGAMENTOS

3.3.1 LIGAMENTOS INTERMEDIÁRIOS

Dois ligamentos vizinhos têm um eixo comum. A partir deste fato, vamos definir dois parâmetros: o “offset” do ligamento e o ângulo da junta.

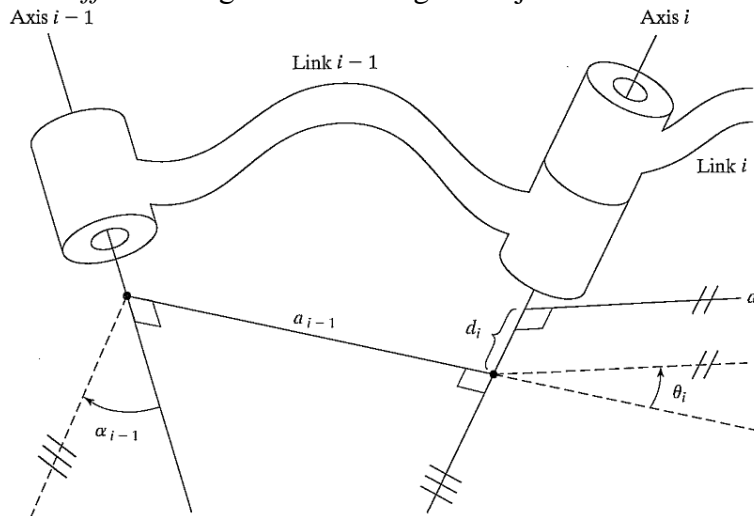


Figura 3.2: Ligamentos $i-1$ e i

A figura acima ilustra a conexão entre os ligamentos $i-1$ e i .

a_{i-1} e a_i são as perpendiculares comuns dos eixos dos ligamentos $i-1$ e i , respectivamente, e o problema, novamente, é definir a posição relativa destas duas retas no espaço.

O “offset” do ligamento (d_i) é definido como a distância entre os pontos de intersecção entre o eixo da junta i e as perpendiculares comuns a_{i-1} e a_i .

Quando a junta é rotacional, o “offset” d_i é fixo; para juntas prismáticas, d_i é variável.

O ângulo da junta (θ_i) é aquele definido entre as direções de a_{i-1} e a_i . Este parâmetro é variável para juntas rotacionais.

3.3.2 LIGAMENTOS INICIAL E FINAL

Para o ligamento 0 (base), o eixo 1 está completamente definido (é o eixo de conexão entre o ligamento 0 e o primeiro ligamento móvel, que é o ligamento 1); no

⁶ A menos que o plano contenha um dos eixos!

entanto, o eixo 0 fica indefinido. Por isso, também resultam indefinidos os dois parâmetros que definem o ligamento para fins cinemáticos (a_0 e α_0). Vamos adotar a convenção de que $a_0 = 0$ e $\alpha_0 = 0 \rightarrow \text{eixo } 0 \equiv \text{eixo } 1$!

De maneira análoga, para o último ligamento de cadeia (n), o eixo n está definido, mas o $n+1$, não. Assim, adotaremos a convenção de que $a_n = 0$ e $\alpha_n = 0 \rightarrow \text{eixo } n+1 \equiv \text{eixo } n$!

Os parâmetros associados às conexões entre os ligamentos estão bem definidos para as juntas 2, 3, ..., $n-1$.

No caso em que a junta 1 for de revolução, θ_1 será adotado com origem arbitrária e $d_1 = 0$.

Se a junta 1 for prismática, a origem de d_1 será arbitrária e $\theta_1 = 0$.

Idem para a junta n .

Estas convenções (com zeros escolhidos para as variáveis indefinidas) simplificam os cálculos posteriores.

3.3.3 PARÂMETROS DOS LIGAMENTOS

Conforme vimos, para descrever um manipulador sob o ponto de vista cinemático são necessárias quatro variáveis para cada ligamento: duas descrevem o próprio ligamento (comprimento e ângulo de torção) e duas descrevem a conexão dele com o seguinte ("offset" e ângulo da junta). No caso comum em que a junta i é de rotação, θ_i é chamada variável da junta e as outras três (fixas), parâmetros do ligamento. Quando se trata de juntas prismáticas, d_i é a variável da junta e as três variáveis restantes são fixas e chamadas de parâmetros do ligamento.

Essa definição de manipuladores é chamada de notação de *Denavit-Hartenberg*.

3.4 CONVENÇÃO PARA FIXAR SISTEMAS DE REFERÊNCIA A LIGAMENTOS

Vamos denotar por $\{i\}$ o sistema de coordenadas fixado rigidamente ao ligamento i .

3.4.1 LIGAMENTOS INTERMEDIÁRIOS

A origem do sistema $\{i\}$ será localizada no ponto em que a perpendicular comum a_i intersecta o eixo da junta i .

O eixo \hat{Z}_i será adotado com direção coincidente à do eixo da junta i e sentido arbitrário.

O eixo \hat{X}_i será adotado com a mesma direção da perpendicular comum e orientado no sentido do eixo i para o $i+1$.

O eixo \hat{Y}_i será adotado de maneira a completar o sistema com orientação positiva.

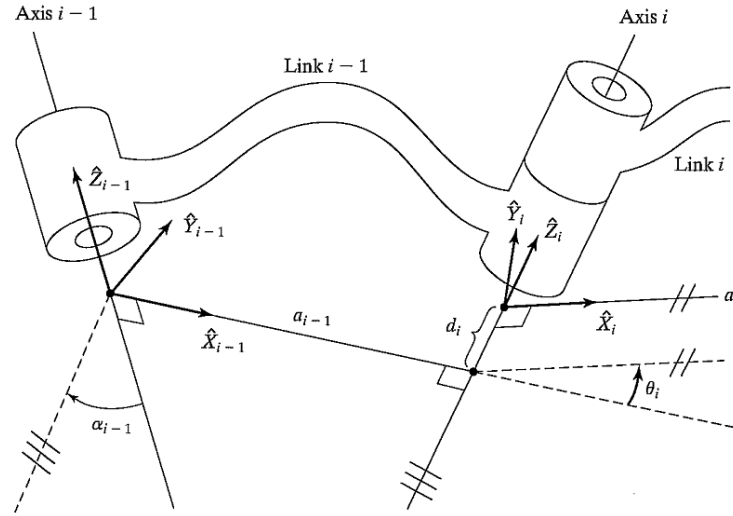


Figura 3.3: Sistemas de referência para ligamentos

3.4.2 LIGAMENTOS INICIAL E FINAL

No ligamento da base do robô (ligamento 0), nós fixamos o sistema $\{0\}$. Como a base é fixa, o mesmo ocorre com o sistema $\{0\}$ e, para o problema da *cinemática direta do manipulador*, o sistema $\{0\}$ será utilizado como referência para descrever a posição de todos os outros sistemas.

O sistema $\{0\}$ pode ser escolhido de forma arbitrária. No entanto, por simplicidade, vamos adotar \hat{Z}_0 ao longo do eixo I e localizar o sistema $\{0\}$ de tal forma a coincidir com o $\{I\}$ quando a variável da junta I for zero.

Quanto ao sistema $\{n\}$, temos:

- a) se a junta n é de revolução, a direção de \hat{X}_n é escolhida coincidente com \hat{X}_{n-1} quando $\theta_n = 0$ e a origem de $\{n\}$, tal que $d_n = 0$;
- b) se a junta n é prismática, a direção de \hat{X}_n é escolhida de forma que $\theta_n = 0$ e a origem de $\{n\}$, na intersecção de \hat{X}_{n-1} com o eixo da junta n quando $d_n = 0$.

3.4.3 RESUMO

Tomando por base a Figura 3.3, observamos que:

- a_{i-1} é a distância de \hat{Z}_{i-1} até \hat{Z}_i , medida segundo \hat{X}_{i-1} ;
- α_{i-1} é o ângulo entre \hat{Z}_{i-1} e \hat{Z}_i , medido em torno de \hat{X}_{i-1} ;
- d_i é a distância de \hat{X}_{i-1} e \hat{X}_i , medida segundo \hat{Z}_i ;
- θ_i é o ângulo entre \hat{X}_{i-1} e \hat{X}_i , medido em torno de \hat{Z}_i .

O procedimento de fixação dos sistemas de referência aos ligamentos pode ser resumido da seguinte forma:

1. Identifique os eixos das juntas e desenhe retas ao longo deles.

Para os passos 2 a 5 abaixo, considere duas dessas retas vizinhas (eixos i e $i+1$).

2. Identifique a perpendicular comum (ou o ponto de intersecção). No ponto em que a perpendicular encontra o eixo i (ou no ponto de intersecção) coloque a origem do sistema $\{i\}$.
3. Tome o eixo \hat{Z}_i na direção do eixo da junta i (o sentido é arbitrário).

4. Escolha o eixo \hat{X}_i na direção da perpendicular comum (ou, se os eixos i e $i+1$ se intersectam, tome \hat{X}_i normal ao plano definido pelos dois eixos e sentido arbitrário).
5. Considere o eixo \hat{Y}_i de forma a completar um sistema orientado positivamente.
6. Tome o sistema $\{0\}$ coincidente com $\{1\}$ quando a variável da junta 1 é zero. Para o sistema $\{n\}$, a origem e \hat{X}_n são escolhidos arbitrariamente, mas é conveniente tomá-los de forma a zerar o maior número possível de parâmetros.

3.4.4 EXEMPLOS

3.4.4.1 EXEMPLO RRR PLANAR

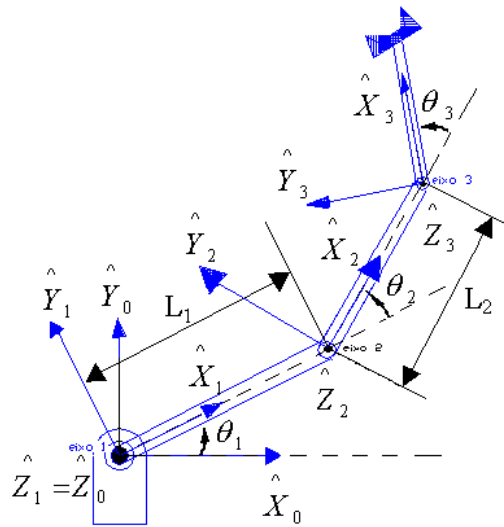
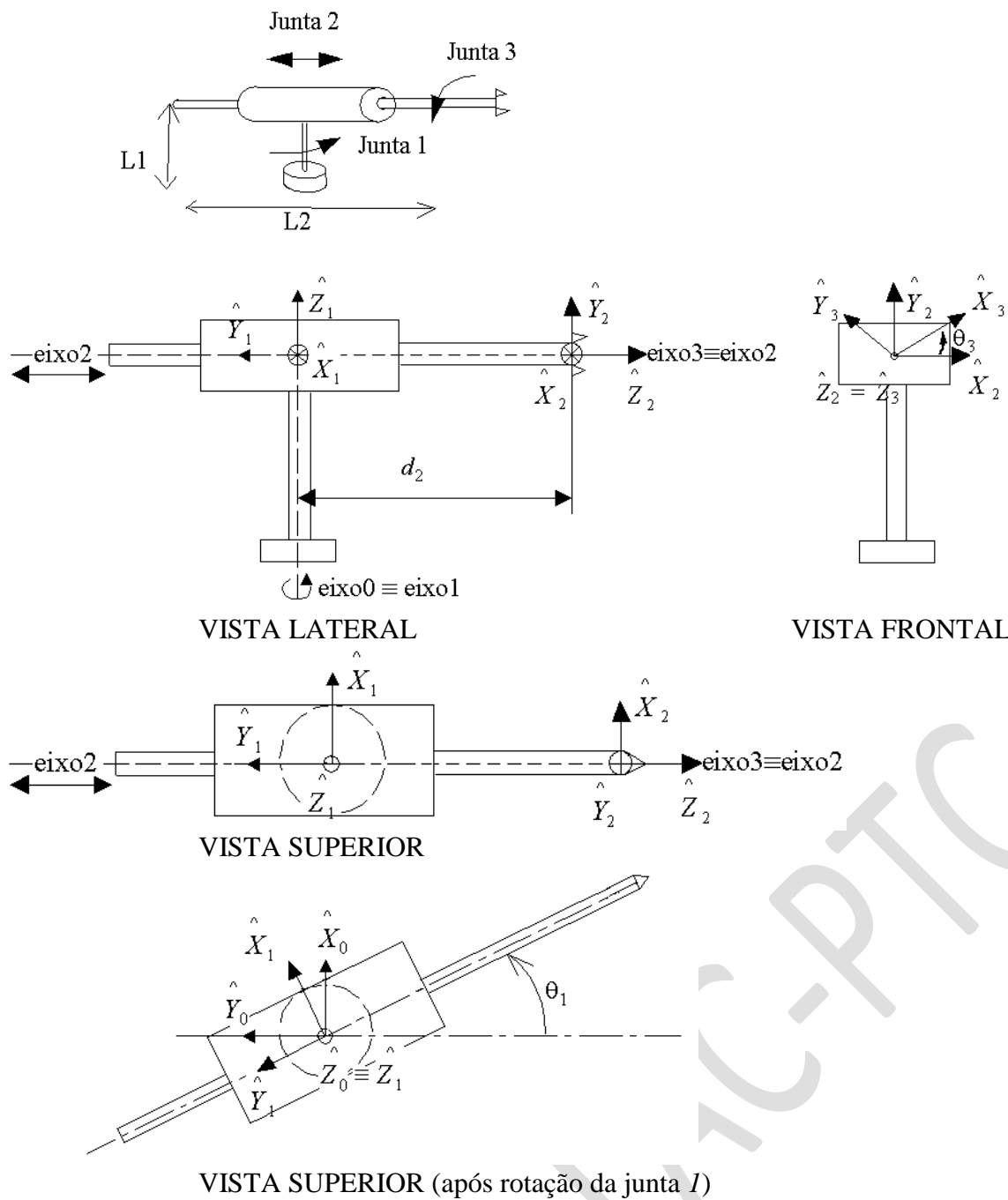


Figura 3.4: Exemplo RRR planar

i	α_{i-1}	a_{i-1}	d_i	θ_i
1	0	0	0	θ_1
2	0	L_1	0	θ_2
3	0	L_2	0	θ_3

3.4.4.2 EXEMPLO RPR



i	a_{i-1}	α_{i-1}	d_i	θ_i
1	0	0	0	θ_1
2	90°	0	d_2	0
3	0	0	0	θ_3

Obs: L_1 e L_2 não interessam!

3.5 CINEMÁTICA DO MANIPULADOR

Uma vez que nós já temos um procedimento estabelecido para fixar sistemas de referência a ligamentos, vamos obter nesta seção a forma geral da transformação que relaciona sistemas de ligamentos vizinhos. Com isso, encadeando as transformações, poderemos expressar a posição e a orientação do efetuador.

3.5.1 TRANSFORMAÇÕES ENTRE LIGAMENTOS

O objetivo aqui é obter ${}^{i-1}_iT$. Em geral esta transformação deverá ser função dos quatro parâmetros do ligamento. Para um dado robô, a transformação deverá variar no tempo apenas em função de um parâmetro, já que os outros três serão fixos.

Vamos ver que ${}^{i-1}_iT$ pode ser expressa através de quatro transformações, cada uma delas sendo função de um único parâmetro do ligamento e podendo ser escrita de forma imediata.

De início, definimos três sistemas intermediários para cada ligamento: $\{P\}$, $\{Q\}$ e $\{R\}$.

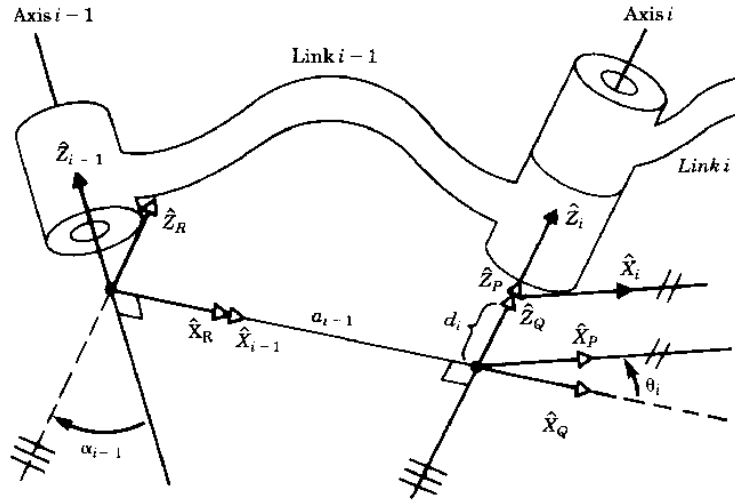


Figura 3.5: Sistemas dos ligamentos

O sistema $\{R\}$ difere do sistema $\{i-1\}$ apenas por uma rotação de α_{i-1} em torno de \hat{x}_{i-1} .

O sistema $\{Q\}$ difere do sistema $\{R\}$ por uma translação de a_{i-1} ao longo de \hat{x}_{i-1} .

O sistema $\{P\}$ difere do sistema $\{Q\}$ por uma rotação de θ_i em torno de \hat{z}_Q .

Por fim, o sistema $\{i\}$ difere do sistema $\{P\}$ por uma translação d_i ao longo de \hat{z}_P .

Considerando, então, esses sistemas intermediários, podemos escrever a transformação ${}^{i-1}_iT$ como:

$${}^{i-1}_iT = {}^{i-1}_RT \cdot {}^RT_Q \cdot {}^QTP \cdot {}^PT_i$$

onde

$${}^{i-1}_RT = R_X(\alpha_{i-1}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c\alpha_{i-1} & -s\alpha_{i-1} & 0 \\ 0 & s\alpha_{i-1} & c\alpha_{i-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
{}^R_Q T = D_X(a_{i-1}) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_{i-1} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
{}^Q_P T = R_Z(\theta_i) &= \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i & 0 & 0 \\ s\theta_i & c\theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
{}_i^P T = D_Z(d_i) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

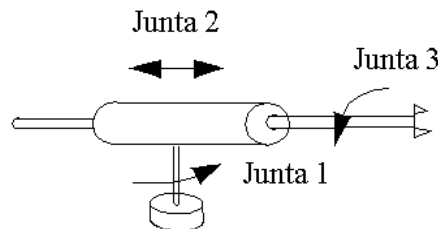
Ou seja:

$${}^{i-1}_i T = \underset{\text{Screw}_X(\alpha_{i-1}, a_{i-1})}{R_X(\alpha_{i-1})} \cdot \underset{\text{Screw}_Z(\theta_i, d_i)}{D_X(a_{i-1})} \cdot R_Z(\theta_i) \cdot D_Z(d_i)$$

Efetuada os produtos, resulta:

$${}^{i-1}_i T = \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i & 0 & a_{i-1} \\ s\theta_i c\alpha_{i-1} & c\theta_i c\alpha_{i-1} & -s\alpha_{i-1} & -s\alpha_{i-1}d_i \\ s\theta_i s\alpha_{i-1} & c\theta_i s\alpha_{i-1} & c\alpha_{i-1} & c\alpha_{i-1}d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Exemplo:



i	α_{i-1}	a_{i-1}	d_i	θ_i
1	0	0	0	θ_1
2	90°	0	d_2	0
3	0	0	0	θ_3

Usando a expressão genérica de ${}^{i-1}_i T$ acima:

$${}_1^0 T = \begin{bmatrix} c\theta_1 & -s\theta_1 & 0 & 0 \\ s\theta_1 & c\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^1_2T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -d_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^2_3T = \begin{bmatrix} c\theta_3 & -s\theta_3 & 0 & 0 \\ s\theta_3 & c\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Verificação: notar que os três primeiros elementos das quartas colunas das matrizes acima contêm as coordenadas da origem dos sistemas $\{i+1\}$ em relação a $\{i\}$.

3.5.2 ENCADEAMENTO DE TRANSFORMAÇÕES

Tendo obtido as expressões das transformações ${}^{i-1}_iT$, a transformação do sistema $\{n\}$ para o $\{0\}$ pode ser escrita como:

$${}^0_nT = {}^0_1T \cdot {}^1_2T \cdots {}^{n-1}_nT$$

Deve-se notar que 0_nT é função das n variáveis de junta, já que cada uma das transformações ${}^{i-1}_iT$ é função da variável de junta correspondente.

Resumindo, o processo de obtenção de 0_nT pode ser descrito da seguinte forma:

- fixe um sistema de coordenadas a cada ligamento (inclusive à base);
- determine os parâmetros de *Denavit-Hartenberg* associados a cada ligamento;
- escreva as transformações entre ligamentos vizinhos ${}^{i-1}_iT$;
- obtenha ${}^0_nT = {}^0_1T \cdot {}^1_2T \cdots {}^{n-1}_nT$.

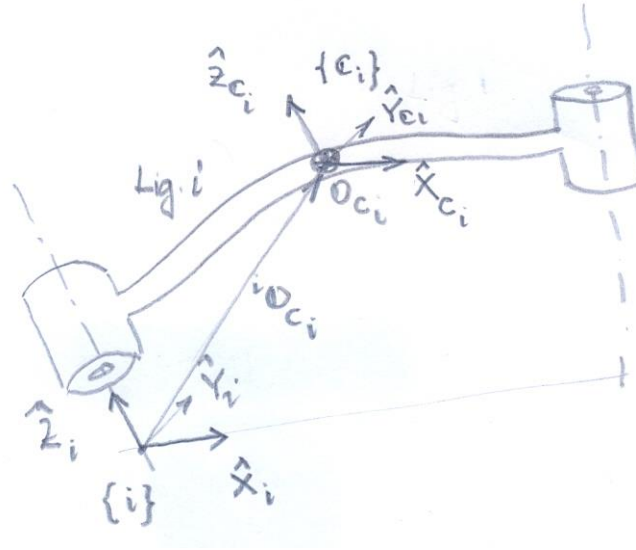
Exemplo:

Para o manipulador do exemplo anterior,

$${}^0_3T = {}^0_1T \cdot {}^1_2T \cdot {}^2_3T = \begin{bmatrix} c\theta_1 c\theta_3 & -c\theta_1 s\theta_3 & s\theta_1 & d_2 s\theta_1 \\ s\theta_1 c\theta_3 & -s\theta_1 s\theta_3 & -c\theta_1 & -d_2 c\theta_1 \\ s\theta_3 & c\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

3.5.3 CÁLCULO DAS POSIÇÕES DOS CENTROS DE MASSA DOS LIGAMENTOS

Quando estudarmos a formulação Lagrangeana da dinâmica do manipulador, para calcularmos a sua energia potencial vamos precisar da expressão da posição do centro de massa de cada ligamento dada no sistema da base. Para isso, consideremos então a figura abaixo, em que $\{C_i\}$ é um sistema fixo ao ligamento i com origem no centro de massa deste.



Dada a posição do centro de massa do ligamento i no sistema $\{i\}$, isto é, ${}^iO_{C_i}$, é imediato expressá-la no sistema $\{O\}$:

$${}^0O_{C_i} = {}^0T_i {}^iO_{C_i}.$$

3.6 EXERCÍCIOS

Na seção 37 de [1] há dois exemplos de estudo da cinemática direta relativos a manipuladores industriais. Vamos discutir aqui apenas o primeiro deles, isto é o *PUMA 560*. Além disso, vamos estudar também o manipulador *SCARA*.

3.6.1 SCARA[2]

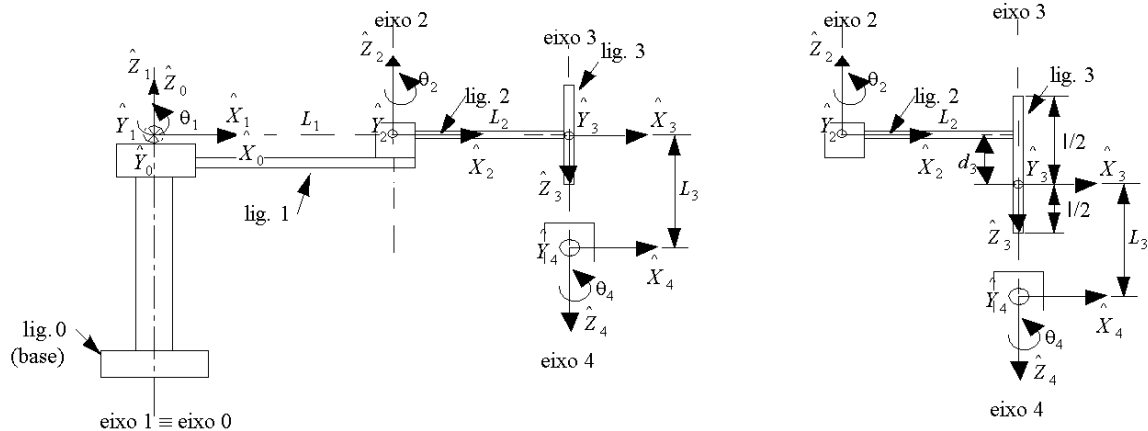


Figura 3.6: SCARA

i	α_{i-1}	a_{i-1}	d_i	θ_i
1	0	0	0	θ_1

$$\begin{array}{c|ccc} 2 & 0 & L_1 & 0 & \theta_2 \\ 3 & 180^\circ & L_2 & d_3 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & L_3 & \theta_4 \end{array}$$

Portanto:

$${}^0_1T = \begin{bmatrix} c\theta_1 & -s\theta_1 & 0 & 0 \\ s\theta_1 & c\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^1_2T = \begin{bmatrix} c\theta_2 & -s\theta_2 & 0 & L_1 \\ s\theta_2 & c\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^2_3T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & L_2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^3_4T = \begin{bmatrix} c\theta_4 & -s\theta_4 & 0 & 0 \\ s\theta_4 & c\theta_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & L_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Temos

$${}^0_4T = {}^0_1T \cdot {}^1_2T \cdot {}^2_3T \cdot {}^3_4T$$

Vamos calcular em primeiro lugar 0_2T :

$${}^0_2T = {}^0_1T \cdot {}^1_2T$$

Portanto:

$${}^0_2T = \begin{bmatrix} c\theta_1c\theta_2 - s\theta_1s\theta_2 & -c\theta_1s\theta_2 - s\theta_1c\theta_2 & 0 & L_1c\theta_1 \\ s\theta_1c\theta_2 + c\theta_1s\theta_2 & c\theta_1c\theta_2 - s\theta_1s\theta_2 & 0 & L_1s\theta_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Definindo:

$$c\theta_{12} = \cos(\theta_1 + \theta_2) = c\theta_1c\theta_2 - s\theta_1s\theta_2$$

$$s\theta_{12} = \sin(\theta_1 + \theta_2) = s\theta_1c\theta_2 + s\theta_2c\theta_1$$

Temos

$${}^0_2T = \begin{bmatrix} c\theta_{12} & -s\theta_{12} & 0 & L_1c\theta_1 \\ s\theta_{12} & c\theta_{12} & 0 & L_1s\theta_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Note que esta transformação tem uma expressão simples. Isto é decorrência do fato de os eixos 1 e 2 serem paralelos.

Prosseguindo,

$${}^0_3T = {}^0_2T \cdot {}^2_3T$$

isto é,

$${}^0_3T = \begin{bmatrix} c\theta_{12} & s\theta_{12} & 0 & L_2c\theta_{12} + L_1c\theta_1 \\ s\theta_{12} & -c\theta_{12} & 0 & L_2s\theta_{12} + L_1s\theta_1 \\ 0 & 0 & -1 & -d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Por fim,

$${}^0_4T = {}^0_3T \cdot {}^3_4T$$

ou seja,

$${}^0_4T = \begin{bmatrix} c\theta_{12}c\theta_4 + s\theta_{12}s\theta_4 & -c\theta_{12}s\theta_4 + s\theta_{12}c\theta_4 & 0 & L_2c\theta_{12} + L_1c\theta_1 \\ s\theta_{12}c\theta_4 - c\theta_{12}s\theta_4 & -s\theta_{12}s\theta_4 - c\theta_{12}c\theta_4 & 0 & L_2s\theta_{12} + L_1s\theta_1 \\ 0 & 0 & -1 & -L_3 - d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

que é o mesmo que⁷

$${}^0_4T = \begin{bmatrix} c(\theta_{12} - \theta_4) & s(\theta_{12} - \theta_4) & 0 & L_2c\theta_{12} + L_1c\theta_1 \\ s(\theta_{12} - \theta_4) & -c(\theta_{12} - \theta_4) & 0 & L_2s\theta_{12} + L_1s\theta_1 \\ 0 & 0 & -1 & -L_3 - d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Esta transformação representa a cinemática direta do manipulador *SCARA* com um efetuador de um grau de liberdade.

Verificações:

- A submatriz 3x3 é ortogonal.
- As coordenadas da origem do sistema {4} são, de fato, expressas no sistema {0} pelos três primeiros elementos da 4ª coluna de 0_4T .

3.6.2 PUMA 560

O robô *PUMA 560* é um manipulador com 6 graus de liberdade rotacionais. A primeira figura mostra os sistemas de coordenadas {1}, {2}, {3} e {4} nas posições correspondentes aos ângulos de junta nulos. A segunda figura mostra o antebraço em detalhes.

O sistema {0} coincide com {1} para $\theta_1 = 0$. Para este sistema, assim como é o caso de muitos manipuladores industriais, os eixos 4, 5 e 6 se intersectam num único ponto, o qual é adotado como a origem dos sistemas {4}, {5} e {6}. Essa característica dos eixos faz com que a posição e a orientação do efetuador resultem desacopladas.

Os parâmetros dos ligamentos são:

i	α_{i-1}	a_{i-1}	d_i	θ_i
-----	----------------	-----------	-------	------------

⁷ Já que o eixo 4 é paralelo aos eixos 1 e 2.

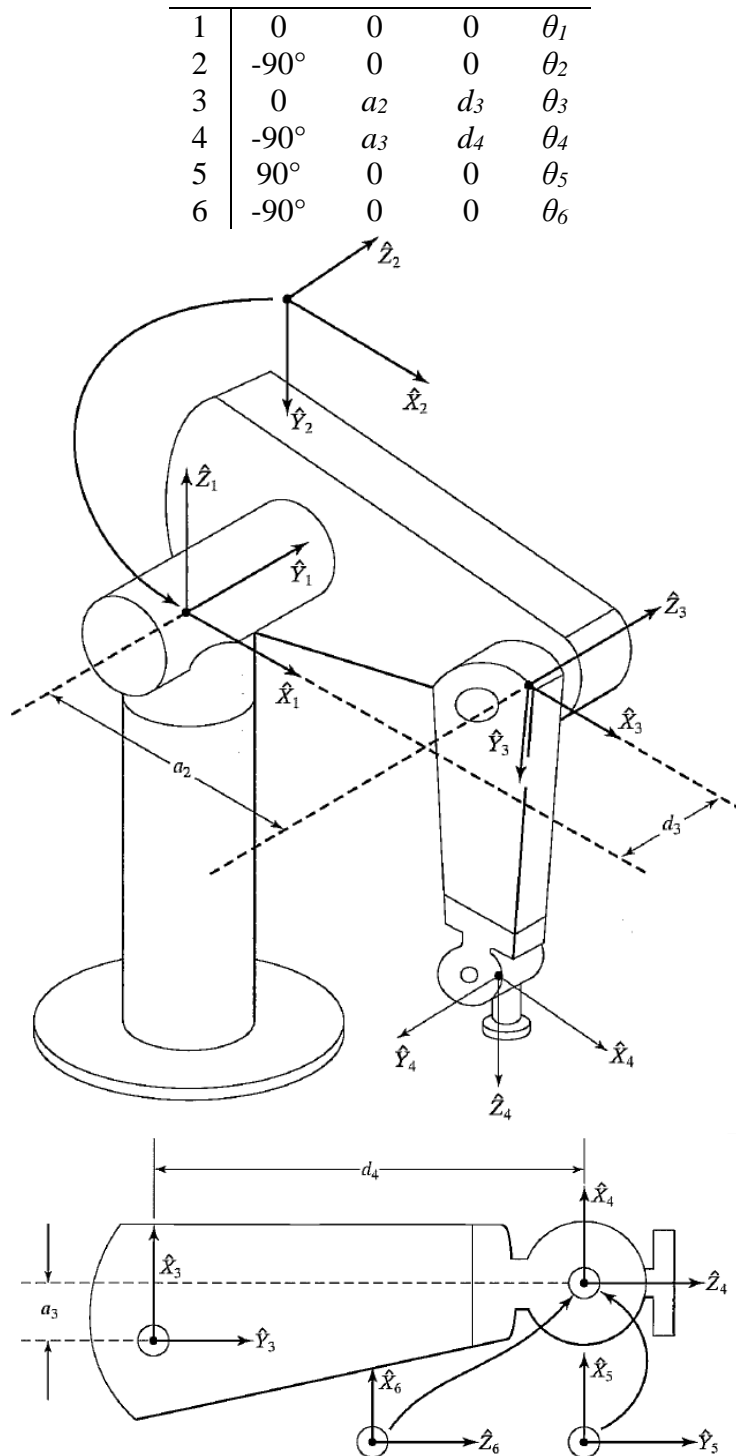


Figura 3.7: PUMA 560

Com isso podemos calcular 0_1T , 1_2T , ..., 5_6T e obter ${}^0_6T = {}^0_1T \cdot {}^1_2T \cdot {}^2_3T \cdot {}^3_4T \cdot {}^4_5T \cdot {}^5_6T$ (ver [1], pg 92).

Note que os eixos 2 e 3 são sempre paralelos e por isso, ${}^1_3T = {}^1_2T \cdot {}^2_3T$ pode ser escrita usando as fórmulas de seno e cosseno da soma de dois ângulos.

3.7 ESPAÇOS DAS JUNTAS E ESPAÇO CARTESIANO

As variáveis das juntas podem ser colocadas como elementos de um vetor ao qual se atribui o nome de vetor das juntas (q). O conjunto de todos os possíveis valores dos vetores das juntas é denominado espaço das juntas.

O termo espaço cartesiano (ou espaço operacional ou espaço orientado à tarefa) é utilizado para designar o espaço onde a posição é descrita em relação a um sistema de eixos ortogonais e a orientação, através de uma das formas mencionadas.

Neste capítulo nós estivemos envolvidos com o problema de como obter uma descrição no espaço cartesiano a partir de uma descrição no espaço das juntas.

3.8 SISTEMAS DE REFERÊNCIA PADRÕES

A figura abaixo contém os cinco sistemas de coordenadas mais usuais em programação de robôs e controle.

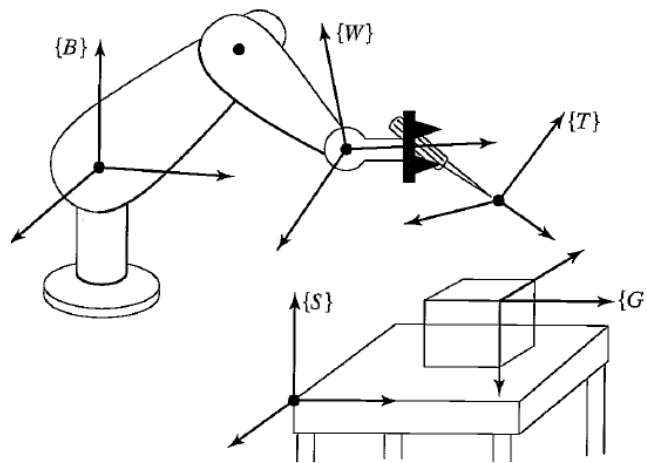


Figura 3.8: Sistemas usuais

3.8.1 SISTEMA DA BASE $\{B\}$

Este é o sistema convencionado até aqui como $\{0\}$.

3.8.2 SISTEMA DA ESTAÇÃO $\{S\}$

O sistema $\{S\}$ é escolhido numa localização conveniente para a tarefa, sendo todas as ações do robô especificadas com relação a ele. Também é chamado sistema da tarefa, sistema global ou sistema universal. Este é o “sistema do usuário”.

Este sistema é sempre descrito com referência ao sistema da base, isto é, dado por meio de ${}^B_S T$.

3.8.3 SISTEMA DO PUNHO OU DO EFETUADOR $\{W\}$

O sistema $\{W\}$ é fixado ao último ligamento do manipulador. Este é o sistema convencionado até aqui como sendo $\{n\}$.

Também este sistema deve ser descrito com relação ao sistema da base, isto é, por meio de ${}^B_W T = {}^0_n T$. Esta transformação representa a própria cinemática direta.

3.8.4 SISTEMA DA FERRAMENTA $\{T\}$

Este sistema é fixado ao extremo da ferramenta carregada pelo robô, isto é, é fixo em relação a W (${}^W_T T$). Quando a mão do robô está vazia, sua origem se localiza em geral entre as extremidades da garra.

3.8.5 SISTEMA DO OBJETIVO $\{G\}$

O sistema $\{G\}$ é tal que o sistema da ferramenta deve coincidir com ele no final do movimento.

$\{G\}$ é sempre especificado com relação ao sistema $\{S\}$, sendo descrito por meio de ${}^S_G T$.

3.9 ONDE ESTÁ A FERRAMENTA?

Uma das questões fundamentais para a utilização do robô é descrever a posição e a orientação da ferramenta em relação ao sistema da estação, isto é, ${}^S_T T$:

$${}^S_T T = {}^S_B T {}^B_W T {}^W_T T = ({}^B_S T)^{-1} {}^0_n T {}^n_W T.$$

Em alguns robôs, esta equação é implementada através de uma função denominada “*WHERE*”.

Essa equação pode ser vista como uma generalização da cinemática, já que, além da cinemática direta (${}^B_W T$), ela inclui a ferramenta e o sistema da estação.

4 CINEMÁTICA INVERSA DO MANIPULADOR

4.1 INTRODUÇÃO

No capítulo anterior, nós tratamos do problema relativamente simples da cinemática direta. Neste capítulo nós vamos estudar o problema inverso, isto é, dadas a posição e a orientação da ferramenta com relação ao sistema da estação, determinar os valores das variáveis das juntas.

A solução desse problema é subdividida em duas etapas:

- determinação de ${}^B_W T = {}^0_n T$;
- utilização da cinemática inversa para obter os valores das coordenadas das juntas (deslocamentos angulares ou lineares).

4.2 SOLUBILIDADE

O problema da cinemática inversa pode ser posto da seguinte forma: dada ${}^0_n T$, determinar as coordenadas das juntas (q_1, q_2, \dots, q_n).

No caso geral, a submatriz 3×4 contida em ${}^0_n T$ contém senos e cossenos dos θ_i 's e, portanto, o problema se reduz a resolver um conjunto de equações não lineares (transcendentes) e, muitas vezes, de difícil solução. Note-se que, por exemplo, no caso de um manipulador com 6 graus de liberdade, teríamos 12 equações e 6 incógnitas (lembrar que há redundância entre os elementos da matriz de rotação).

O sistema de equações não lineares a ser resolvido pode ter nenhuma (quando, por exemplo, o efetuador está fora do espaço de trabalho do manipulador), apenas uma ou diversas soluções.

4.2.1 EXISTÊNCIA DE SOLUÇÕES

A questão da existência ou não de soluções está diretamente ligada ao conceito de espaço de trabalho, que é o conjunto de pontos possível de ser alcançado pelo efetuador. Às vezes é útil falar em espaço de trabalho destro e espaço de trabalho alcançável.

Define-se espaço de trabalho destro como o conjunto de pontos do espaço que pode ser atingido pelo efetuador com orientação arbitrária.

Entende-se por espaço de trabalho alcançável o conjunto de pontos do espaço que pode ser atingido com pelo menos uma orientação.

Obviamente, o espaço de trabalho destro é um subconjunto do espaço de trabalho alcançável.

Consideremos o espaço de trabalho do manipulador com dois graus de liberdade abaixo:

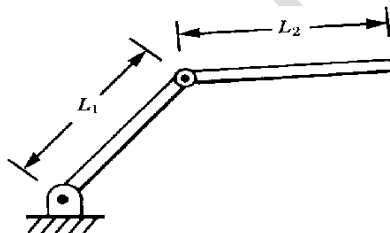


Figura 4.1: Manipulador com 2 g.d.l.

- a) Se $L_1 = L_2$, então:
- O espaço de trabalho alcançável é um círculo de raio $L_1 + L_2 = 2L_1$;
 - O espaço de trabalho destro se reduz a um ponto (origem do primeiro ligamento).
- b) Se $L_1 \neq L_2$, então:
- O espaço de trabalho destro é vazio;
 - O espaço de trabalho alcançável é um disco com raio externo $L_1 + L_2$ e raio interno $|L_1 - L_2|$.

No interior do espaço de trabalho alcançável há duas orientações possíveis do efetuador (veja figura abaixo), enquanto que na fronteira do espaço de trabalho, há apenas uma.

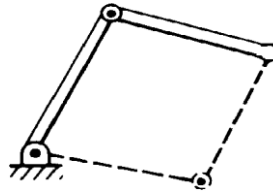


Figura 4.2: Manipulador com 2 g.d.l.

Deve-se notar que, nas considerações acima, estamos admitindo que cada junta tem uma excursão de 360° em torno de seu eixo, o que não é verdadeiro, em geral.

Manipuladores com menos de 6 g.d.l não podem atingir posições e orientações arbitrárias no espaço tridimensional. Assim, o manipulador acima, por exemplo, não pode alcançar pontos localizados fora do plano de movimento.

O espaço de trabalho depende também do sistema de referência da ferramenta $\{T\}$, já que, em geral, é a extremidade da ferramenta que se considera quando se fala de pontos alcançáveis. Normalmente a transformação do sistema da ferramenta é calculada independentemente da cinemática e da cinemática inversa do manipulador. Assim, frequentemente se considera o espaço de trabalho do punho $\{W\}$. Para um dado efetuador, define-se o sistema $\{T\}$; dado o sistema do objetivo $\{G\}$, calcula-se o $\{W\}$ correspondente e então se coloca a questão se a posição e a orientação de $\{W\}$ pertencem ao espaço de trabalho.⁸

4.2.2 MULTIPLICIDADE DE SOLUÇÕES

Um manipulador planar com três juntas rotacionais tem um “grande” espaço de trabalho destro (desde que tenha “bons” comprimentos de ligamento e excursão ampla das juntas). A figura abaixo mostra duas das possíveis soluções correspondentes a uma dada posição e orientação do efetuador.

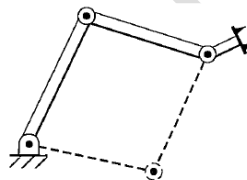


Figura 4.3: Posições de um efetuador

⁸ O Craig ([1]) confunde um pouco a noção de espaço de trabalho: aqui ela engloba orientação, o que não ocorria anteriormente.

O fato de que haja múltiplas soluções pode trazer problemas, pois o sistema deve ser capaz de selecionar uma delas. O critério pode variar, sendo que uma escolha bastante comum é aquela correspondente à solução mais próxima da atual.

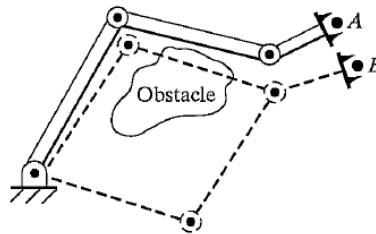


Figura 4.4: Soluções de posicionamento de um efetuador

Por exemplo, se o manipulador está no ponto A e é necessário movimentá-lo para B, a configuração superior é a mais indicada segundo esse critério, uma vez que ela corresponde ao menor deslocamento das juntas. Cabe, contudo, observar que essa noção de proximidade pode ser expressa de formas diversas. Assim, por exemplo, são comuns os robôs com três ligamentos grandes seguidos por três menores próximos ao efetuador. Neste caso, podemos atribuir pesos maiores aos deslocamentos dos ligamentos grandes, de maneira que a solução tenda a favorecer o movimento dos pequenos ligamentos.

Por outro lado, a existência de obstáculos pode fazer com que a solução do problema seja uma “mais distante”, mas que evita a ocorrência de colisão.

Obviamente, o número de soluções depende não só do número de juntas do manipulador, como também dos seus parâmetros. Em geral, quanto maior o número de parâmetros não nulos, maior o número de soluções para o problema da cinemática inversa.

4.2.3 MÉTODO DE SOLUÇÃO

As estratégias de solução do problema da cinemática inversa podem ser agrupadas em duas classes amplas: soluções na forma fechada (analíticas) e soluções numéricas. De maneira geral, a resolução numérica é muito mais lenta do que aquela em forma fechada. Além disso, considera-se resolvido o problema da cinemática inversa quando todas as soluções foram encontradas, o que exclui diversos métodos iterativos que não as produzem todas.

Neste curso nós vamos tratar apenas das soluções em forma fechada, para as quais vamos estudar dois métodos de obtê-las: algébrico e geométrico.

Todos os manipuladores com 6 g.d.l. numa cadeia seriada podem ser resolvidos⁹. Entretanto, apenas parte deles apresenta solução em forma fechada.

Como as soluções analíticas são preferíveis às numéricas, pois o cálculo daquelas é mais rápido, atualmente praticamente todos os manipuladores industriais são projetados de maneira a apresentarem solução na forma fechada.

Uma condição suficiente para isto, em manipuladores de 6 juntas rotacionais, é que 3 eixos consecutivos se intersectem num mesmo ponto.

Assim, por exemplo, o manipulador *PUMA 560* (item 3.6.2) tem os eixos 4, 5 e 6 satisfazendo a esta condição.

⁹ Numericamente!

4.3 SUBESPAÇO DO MANIPULADOR

Da mesma forma que o espaço de trabalho de manipuladores de 6 g.d.l. é um subconjunto do espaço de dimensão 6, o espaço de trabalho de manipuladores com $n < 6$ g.d.l. pode ser encarado como um subconjunto de um subespaço com dimensão n .

Assim, por exemplo, o subespaço do manipulador de 2 g.d.l. da Figura 4.1 é um plano, ao passo que o espaço de trabalho é um disco de raio externo $L_1 + L_2$ e raio interno $|L_1 - L_2|$.

Uma forma de especificar o subespaço de um manipulador de n g.d.l. é escrever uma expressão geral para o sistema do punho (ou da ferramenta) em função das n coordenadas das juntas e então considerar todos os valores possíveis para elas (sem quaisquer restrições sobre faixas de valores).

4.3.1 EXEMPLO

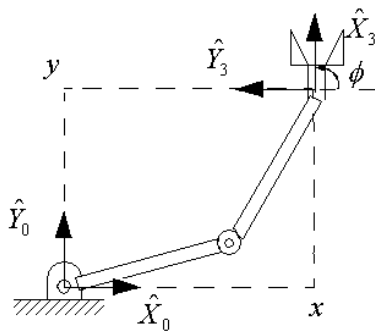


Figura 4.5: Manipulador planar RRR

$${}^B_w T = \begin{bmatrix} c\phi & -s\phi & 0 & x \\ s\phi & c\phi & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

O subespaço deste manipulador é gerado considerando que x , y e ϕ assumem valores arbitrários.

Qualquer ${}^B_w T'$ que não tenha a estrutura de ${}^B_w T$ não pertence ao subespaço (e, é claro, ao espaço de trabalho) deste manipulador.

Os comprimentos dos ligamentos e os limites sobre os ângulos das juntas restringem o espaço de trabalho como um subconjunto deste subespaço.

A definição do objetivo para um manipulador de n g.d.l. requer normalmente o uso de n parâmetros. Por outro lado, dada uma especificação arbitrária com 6 g.d.l., será impossível satisfazê-la com um manipulador de $n < 6$ g.d.l.. Neste caso, estaremos interessados em atingir um objetivo que pertença ao subespaço do manipulador e esteja tão “próximo” quanto possível do objetivo original.

Assim, a estratégia de solução quando se especificam objetivos genéricos para um manipulador com menos de 6 g.d.l. é:

1. Dado ${}^S_G T$, obtenha ${}^S_G T$ no subespaço do manipulador que seja o mais próximo possível (num sentido particular específico) de ${}^S_G T$;

2. Resolva o problema da cinemática inversa e obtenha os valores das coordenadas das juntas (note que este problema não terá solução se o ponto não estiver no espaço de trabalho do manipulador).

4.4 SOLUÇÃO ALGÉBRICA X GEOMÉTRICA

Vamos considerar o manipulador planar da figura abaixo:

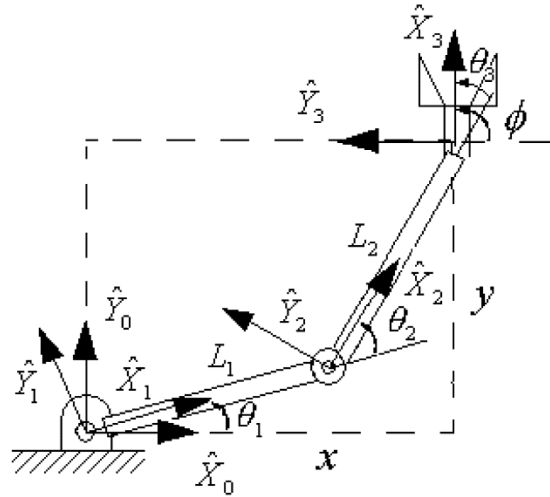


Figura 4.6: Manipulador planar RRR

4.4.1 SOLUÇÃO ALGÉBRICA

Suponhamos que o usuário tenha especificado a posição e a orientação da ferramenta em relação ao sistema da estação S_T e que, após levarmos em conta W_T e B_S , possamos considerar o problema em termos de B_W .

$${}^B_W T = \begin{bmatrix} c_{123} & -s_{123} & 0 & L_1 c_1 + L_2 c_{12} \\ s_{123} & c_{123} & 0 & L_1 s_1 + L_2 s_{12} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Onde

$$s_{123} = \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)$$

$$c_{123} = \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)$$

O objetivo, como estamos tratando com um manipulador de 3 g.d.l, pode ser expresso através de 3 parâmetros que definem a posição e a orientação do punho (x, y, ϕ) :

$$\begin{bmatrix} c\phi & -s\phi & 0 & x \\ s\phi & c\phi & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Igualando esta matriz a ${}^B_W T$ obtemos:

$$c_{123} = c\phi \quad (4.1)$$

$$s_{123} = s\phi \quad (4.2)$$

$$L_1 c_1 + L_2 c_{12} = x \quad (4.3)$$

$$L_1 s_1 + L_2 s_{12} = y \quad (4.4)$$

e o problema da cinemática inversa consiste em determinar θ_1 , θ_2 e θ_3 a partir destas equações. Note que a 2ª equação permite que se elimine uma indeterminação de quadrante do ângulo $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3$.

De (4.3) e (4.4):

$$L_1^2 + L_2^2 + 2L_1 L_2 c_2 = x^2 + y^2$$

de onde resulta

$$c_2 = \frac{x^2 + y^2 - L_1^2 - L_2^2}{2L_1 L_2} \quad 10$$

e, portanto,

$$s_2 = \pm \sqrt{1 - c_2^2}$$

Destas duas últimas equações obtemos θ_2 :

$$\theta_2 = \text{atan2}(s_2, c_2)$$

Tendo θ_2 , as equações (4.3) e (4.4) fornecem θ_1 . Para isto, definimos

$$k_1 = L_1 + L_2 \cdot c_2$$

$$k_2 = L_2 \cdot s_2$$

e as equações (4.3) e (4.4) podem ser reescritas como:

$$k_1 c_1 - k_2 s_1 = x \quad (4.5)$$

$$k_1 s_1 + k_2 c_1 = y \quad (4.6)$$

Definindo agora r e γ ¹¹:

$$r = \sqrt{k_1^2 + k_2^2}$$

$$\gamma = \text{atan2}(k_2, k_1)$$

temos:

$$k_1 = r \cdot \cos \gamma$$

$$k_2 = r \cdot \sin \gamma,$$

o que permite reescrever (4.5) e (4.6):

$$\cos \gamma \cdot \cos \theta_1 - \sin \gamma \cdot \sin \theta_1 = \frac{x}{r} \quad (4.7)$$

$$\cos \gamma \cdot \sin \theta_1 + \sin \gamma \cdot \cos \theta_1 = \frac{y}{r} \quad (4.8)$$

Ou seja:

$$\cos(\theta_1 + \gamma) = \frac{x}{r}$$

¹⁰ Para que exista solução $\left| \frac{x^2 + y^2 - L_1^2 - L_2^2}{2L_1 L_2} \right| < 1 \Leftrightarrow \text{ponto dado} \in \text{espaço de trabalho}.$

¹¹ Macete comum em problemas de cinemática inversa!

$$\text{sen}(\theta_1 + \gamma) = \frac{y}{r}$$

de onde vem:

$$\theta_1 = \text{atan2}(y, x) - \gamma$$

Tendo θ_1 e θ_2 , as equações (4.1) e (4.2) fornecem θ_3 :

$$\theta_3 = \text{atan2}(s\phi, c\phi) - \theta_1 - \theta_2,$$

ou seja,

$$\theta_3 = \phi - \theta_1 - \theta_2$$

Resumindo, o método algébrico consiste basicamente em manipular as equações dadas de forma conveniente (utilizando identidades trigonométricas). O Apêndice C do Craig ([1]) tem algumas dicas de equações comuns neste assunto.

4.4.2 SOLUÇÃO GEOMÉTRICA

Neste caso, o procedimento de solução baseia-se na decomposição da geometria espacial do braço em diversos problemas de geometria plana. Para muitos manipuladores (em particular aqueles tais que $\alpha_i = 0$ ou $\alpha_i = \pm 90^\circ$) este procedimento pode ser utilizado com relativa facilidade.

Passemos, então, ao manipulador planar da Figura 4.6.

Aplicando a lei dos cossenos ao triângulo abaixo:

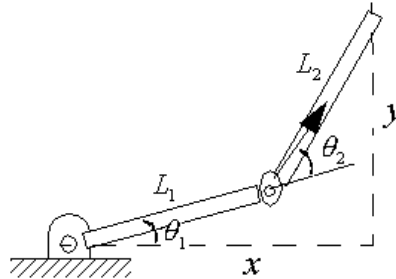


Figura 4.7: Solução geométrica

temos:

$$L_1^2 + L_2^2 - 2L_1L_2 \cos(180^\circ - \theta_2) = x^2 + y^2,$$

de onde resulta que:

$$\cos \theta_2 = \frac{x^2 + y^2 - L_1^2 - L_2^2}{2L_1L_2} \rightarrow 2 \text{ valores de } \theta_2$$

Também aqui, para que esta equação tenha solução é necessário que a figura acima seja de fato um triângulo, isto é,

$$|L_1 - L_2| < \sqrt{x^2 + y^2} < L_1 + L_2$$

o que significa que o punho deve pertencer ao espaço de trabalho.

Projetando no eixo \hat{X}_0 :

$$L_1 \cos \theta_1 + L_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) = x$$

ou seja,

$$L_1 \cos \theta_1 + L_2 \cos \theta_1 \cdot \cos \theta_2 - L_2 \text{sen} \theta_1 \cdot \text{sen} \theta_2 = x$$

e portanto:

$$(L_1 + L_2 \cos \theta_2) \cdot \cos \theta_1 - (L_2 \sin \theta_2) \cdot \sin \theta_1 = x \quad (4.9)$$

Quanto à projeção no eixo \hat{Y}_0 temos:

$$L_1 \sin \theta_1 + L_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) = y,$$

ou seja,

$$L_1 \sin \theta_1 + L_2 \sin \theta_1 \cdot \cos \theta_2 + L_2 \cos \theta_1 \cdot \sin \theta_2 = y$$

e portanto:

$$(L_1 + L_2 \cos \theta_2) \cdot \sin \theta_1 + (L_2 \sin \theta_2) \cdot \cos \theta_1 = y \quad (4.10)$$

Definindo:

$$k_1 = L_1 + L_2 \cdot \cos \theta_2$$

$$k_2 = L_2 \cdot \sin \theta_2$$

podemos reescrever (4.9) e (4.10):

$$k_1 \cos \theta_1 - k_2 \sin \theta_1 = x \quad (4.11)$$

$$k_1 \sin \theta_1 + k_2 \cos \theta_1 = y \quad (4.12)$$

que é exatamente o mesmo sistema do problema anterior (equações 4.5 e 4.6). Portanto:

$$\theta_1 = \text{atan2}(x, y) - \gamma \rightarrow 2 \text{ valores de } \theta_1$$

onde

$$\gamma = \text{atan2}(k_2, k_1)$$

Por fim,

$$\theta_3 = \phi - \theta_1 - \theta_2 \rightarrow 2 \text{ valores de } \theta_3$$

4.5 SOLUÇÃO ALGÉBRICA VIA REDUÇÃO POLINOMIAL

A cinemática inversa é um problema um pouco trabalhoso de resolver porque as equações envolvem, em geral, senos e cossenos dos ângulos das juntas (incógnitas).

As expressões a seguir:

$$\tan \theta/2 = u$$

$$\cos \theta = \frac{1 - u^2}{1 + u^2}$$

$$\sin \theta = \frac{2u}{1 + u^2}$$

permitem transformar as equações transcendentais em equações polinomiais.

Considerando que polinômios de até grau 4 possuem solução analítica, manipuladores suficientemente simples podem ser resolvidos desta forma.

4.6 SOLUÇÃO DE PIEPER QUANDO TRÊS EIXOS SE INTERSECTAM

Conforme dito anteriormente, embora um robô genérico de 6 g.d.l. não tenha solução fechada, existe uma classe especial de problemas que pode ser resolvida. *Pieper* estudou os manipuladores de 6 g.d.l. com três eixos consecutivos que se intersectam num ponto (estão incluídos aqui eixos paralelos, que se consideram cruzando no infinito) e mostrou que, neste caso, o problema da cinemática inversa tem solução analítica.

Em particular, quando são os três últimos eixos que se intersectam num ponto, então os eixos 1, 2 e 3 são utilizados para posicionar o efetuador e os eixos 4, 5 e 6, para orientá-lo no espaço.

A grande maioria de manipuladores comerciais existente hoje em dia é construída de forma que a condição descoberta por *Pieper* é satisfeita.

4.7 EXEMPLOS DE CINEMÁTICA INVERSA

O livro do Craig ([1]) contém, nesta seção, o estudo da cinemática inversa de dois manipuladores: o *PUMA 560* e *Yasukawa Motoman L-3*. É interessante acompanhar o desenvolvimento das soluções no livro: no primeiro caso, ela é puramente algébrica, ao passo que no segundo, ela é parcialmente algébrica e parcialmente geométrica.

4.8 OS SISTEMAS PADRÕES

A capacidade de obter as coordenadas das juntas necessárias para realizar uma dada tarefa é o ponto central de muitos sistemas de controle de manipuladores.

A forma como esses sistemas são utilizados é a seguinte:

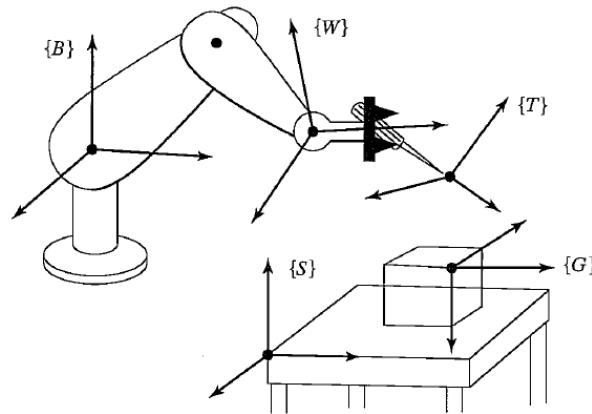


Figura 4.8: Sistemas padrões

1. O usuário informa ao sistema onde ele quer localizar o sistema de referência da estação $\{S\}$ (por exemplo, no canto de uma superfície de trabalho, como na figura, ou fixado a uma esteira transportadora). O sistema $\{S\}$ deve ser descrito com referência ao sistema da base $\{B\}$;
2. O usuário especifica a ferramenta em uso formando o sistema $\{T\}$ com relação a $\{W\}$ (${}^W_T T$). Note que a uma mesma ferramenta pega de formas diferentes correspondem diferentes transformações ${}^W_T T$;
3. O usuário especifica o objetivo a ser atingido através do sistema do objetivo $\{G\}$, descrito em relação a $\{S\}$ (${}^S_G T$);
4. O sistema calcula uma série de coordenadas de juntas de forma que o sistema da ferramenta se mova a partir de sua posição inicial e de maneira suave até que $\{T\} = \{G\}$ no final do movimento.

4.9 A SOLUÇÃO DE UM MANIPULADOR

Para um dado manipulador, o problema da cinemática inversa pode ser colocado como determinar os valores das coordenadas das juntas a partir de ${}^B_W T$. Note que esta transformação depende apenas do manipulador através de sua configuração e parâmetros.

Ao usuário interessa trabalhar com ${}^S_T T$ e, portanto, é necessário considerar as transformações ${}^B_S T$ e ${}^W_T T$ para obter ${}^B_W T$.

$${}^B_W T = {}^B_S T \cdot {}^S_T T \cdot {}^W_T T^{-1}$$

Esta função é normalmente implementada nos manipuladores com o nome “*SOLVE*”.

Em seguida, a cinemática inversa toma ${}^B_W T$ como entrada e calcula as variáveis de junta.

Em certo sentido, esta função tem o papel inverso da “*WHERE*” que, dado ${}^B_W T$, calcula ${}^S_T T$.

4.10 REPETIBILIDADE E PRECISÃO

Muitos manipuladores industriais atualmente se movem em direção a objetivos que lhes foram previamente ensinados. Um ponto ensinado é aquele para o qual o manipulador foi levado fisicamente e, então, os sensores de posição das juntas são lidos e seus valores, armazenados. Quando o robô é comandado a retornar àquele ponto no espaço, cada junta é movimentada até atingir aquele valor armazenado.

Em manipuladores simples do tipo “*teach and playback*” como esse, o problema da cinemática inversa não existe, pois os objetivos não são especificados em coordenadas cartesianas. Quando um fabricante especifica o quão precisamente um manipulador é capaz de retornar a um ponto ensinado, ele está especificando a repetibilidade do manipulador.

Sempre que a posição e a orientação são fornecidas na forma cartesiana, a cinemática inversa deve ser resolvida para se obter as coordenadas das juntas. Os sistemas para os quais os objetivos são descritos na forma cartesiana podem se movimentar para pontos que não tenham sido ensinados. Esses pontos serão chamados de pontos calculados.

A precisão com que um ponto calculado pode ser atingido é chamada de precisão do manipulador.

Obviamente, a precisão do manipulador depende da precisão dos parâmetros que aparecem nas equações cinemáticas do manipulador. Erros afetando os parâmetros de *Denavit-Hartenberg* fazem com que os cálculos das coordenadas das juntas através da cinemática inversa também resultem afetados por erros.

Assim, enquanto a repetibilidade da maioria dos manipuladores industriais é muito boa, a precisão é, em geral, muito pior, variando razoavelmente de manipulador para manipulador.

5 CINEMÁTICA DE VELOCIDADE E JACOBIANO

5.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo passamos a considerar outros problemas além daqueles referentes à cinemática de posição. Nós vamos examinar as noções de velocidades linear e angular de um corpo rígido e utilizar estes conceitos para analisar o movimento do manipulador.

5.2 NOTAÇÃO PARA POSIÇÃO E ORIENTAÇÃO VARIANTES NO TEMPO

Antes de tratar da questão do movimento de corpos rígidos, consideremos algumas questões básicas.

5.2.1 DIFERENCIAÇÃO DE VETORES DE POSIÇÃO

Usaremos a seguinte notação para indicar a derivada de um vetor:

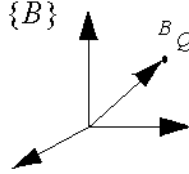


Figura 5.1: Vetor Q

$${}^B V_Q = \frac{d^B Q}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{{}^B Q(t + \Delta t) - {}^B Q(t)}{\Delta t}$$

Desta expressão podemos notar que se trata do cálculo da velocidade de Q relativa a $\{B\}$.

Da mesma forma que com qualquer outro vetor, um vetor velocidade pode ser descrito com relação a qualquer sistema de referência. Assim, o vetor velocidade acima expresso num sistema $\{A\}$ seria escrito como:

$${}^A ({}^B V_Q) = \frac{{}^A d^B Q}{dt}$$

Assim, vemos que, no caso geral, um vetor velocidade está associado a um ponto no espaço, mas os valores numéricos que descrevem a velocidade do ponto dependem de dois sistemas de referência: um com relação ao qual a diferenciação é realizada e o outro no qual o vetor velocidade é expresso.

Dessa maneira, na definição de ${}^B V_Q$, deveríamos ter usado a notação ${}^B ({}^B V_Q)$ mas, por simplicidade, utilizamos apenas ${}^B V_Q$.

Por fim, sempre é possível remover o pré-índice superior mais externo incluindo explicitamente a matriz de rotação que realiza a transformação entre os sistemas de coordenadas:

$${}^A ({}^B V_Q) = {}^A R \cdot {}^B V_Q$$

Nós vamos utilizar expressões como a do lado direito da igualdade, de modo que os símbolos que representam velocidades sempre corresponderão às velocidades nos

sistemas em que elas foram derivadas, o que dispensará o uso do pré-índice superior mais externo.

Em vez de considerar a velocidade de um ponto genérico relativa a um sistema arbitrário, frequentemente nós vamos considerar a velocidade da origem de um sistema relativa a algum sistema fixo. Para esta situação particular nós definimos uma notação simplificada:

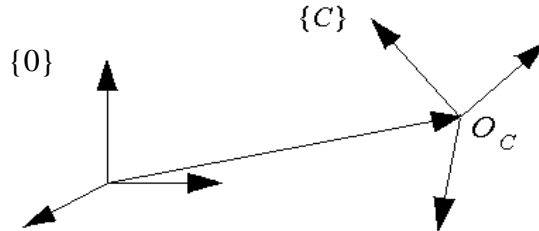


Figura 5.2: Sistemas de coordenadas $\{0\}$ e $\{C\}$

$$v_C = {}^0V_{O_C}$$

onde o ponto em questão é a origem do sistema $\{C\}$ e o sistema de referência fixo é $\{0\}$. Por exemplo, nós usamos a notação v_C para nos referirmos à velocidade da origem de $\{C\}$ e ${}^A v_C$, para a mesma velocidade expressa no sistema $\{A\}$ (embora a diferenciação seja realizada com respeito a $\{0\}$).

5.2.1.1 EXEMPLO 5.1

O objetivo deste exemplo é apenas fixar notações.

A figura a seguir mostra um sistema fixo $\{0\}$, um sistema $\{T\}$ fixo a um trem que se desloca a 100 km/h e outro sistema $\{C\}$ fixo a um carro que se move a 30 km/h. Ambos os veículos se movimentam na direção e sentido do versor \hat{X}_0 . As matrizes de rotação 0R_T e 0R_C são conhecidas e constantes, assim como ${}^0({}^T V_{O_T}) = {}^0V_{O_T} = v_T = 100\hat{X}_0$ e ${}^0({}^C V_{O_C}) = {}^0V_{O_C} = v_C = 30\hat{X}_0$:

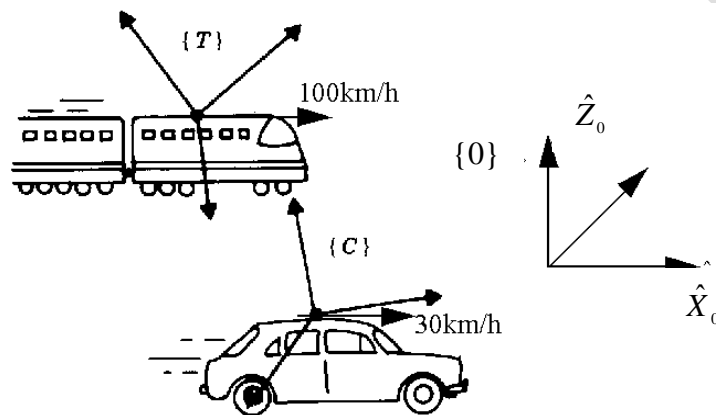


Figura 5.3: Exemplo 5.1

Calcular $\frac{{}^0 d {}^0 O_C}{dt}$, ${}^C({}^0 V_{O_T})$ e ${}^C({}^T V_{O_C})$.

$$\begin{aligned}
&\triangleright \frac{{}^0 d^0 O_C}{dt} = {}^0 V_{O_C} = v_C = 30 \hat{X}_0 \\
&\triangleright {}^C ({}^0 V_{O_C}) = {}^C v_T = {}^C R \cdot v_T = ({}^0 R)^{-1} \cdot (100 \hat{X}_0) \\
&\triangleright {}^C ({}^T V_{O_C}) = {}^C R \cdot {}^T V_{O_C} \\
&\text{Mas } {}^C R = {}^C R \cdot {}^0 R \\
&\quad {}^T V_{O_C} = {}^T ({}^T V_{O_C}) = {}^T R \cdot {}^0 ({}^T V_{O_C}) = {}^T R \cdot (-70 \hat{X}_0) \\
&\text{Portanto:} \\
&\quad {}^C ({}^T V_{O_C}) = {}^C R \cdot {}^0 R \cdot {}^T R \cdot (-70 \hat{X}_0) = {}^C R \cdot (-70 \hat{X}_0)
\end{aligned}$$

5.2.2 O VETOR VELOCIDADE ANGULAR

Introduzimos agora o vetor velocidade angular, denotado aqui pelo símbolo Ω . Enquanto a velocidade linear é um atributo de um ponto, a velocidade angular é um atributo de um corpo. Como nós sempre fixamos um sistema de coordenadas a cada corpo considerado, nós podemos pensar na velocidade angular como também descrevendo o movimento de rotação de um sistema.

Na figura abaixo, ${}^A \Omega_B$ descreve a rotação do sistema $\{B\}$ com relação a $\{A\}$, expresso em $\{A\}$.

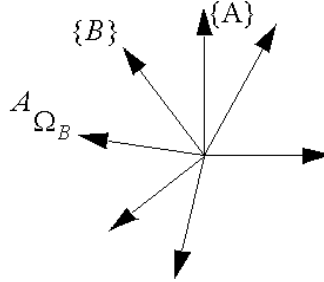


Figura 5.4: Sistemas de coordenadas $\{A\}$ e $\{B\}$

Em todo instante, a direção de ${}^A \Omega_B$ indica o eixo instantâneo de rotação de $\{B\}$ em relação a $\{A\}$, enquanto que o módulo de ${}^A \Omega_B$ indica a magnitude da velocidade de rotação e o sentido é dado pela Regra da Mão Direita.

Como qualquer vetor, um vetor velocidade angular pode ser expresso em qualquer sistema de coordenadas e, portanto, um pré-índice superior pode ser incluído no símbolo. Por exemplo, ${}^C ({}^A \Omega_B)$ é a velocidade angular do sistema $\{B\}$ com relação a $\{A\}$, expressa no sistema $\{C\}$. Se a velocidade for calculada com relação a um sistema fixo $\{0\}$, simplificamos a notação para¹²:

$$\omega_C = {}^0 \Omega_C$$

Assim, por exemplo, ${}^A \omega_C$ é a velocidade angular de $\{C\}$ em relação a $\{0\}$, expressa em $\{A\}$.

¹² “ ω ” minúsculo indica velocidade angular em relação ao sistema $\{0\}$.

5.3 VELOCIDADES LINEAR E ROTACIONAL DE CORPOS RÍGIDOS

Nesta seção trataremos da descrição do movimento de um corpo rígido no que diz respeito à velocidade (no próximo capítulo vamos considerar a aceleração).

5.3.1 VELOCIDADE LINEAR

Neste item vamos considerar unicamente movimentos de translação.

Consideremos um sistema $\{B\}$ fixo a um corpo rígido. Queremos descrever o movimento de ${}^B Q$ com relação a $\{A\}$, que podemos supor fixo.

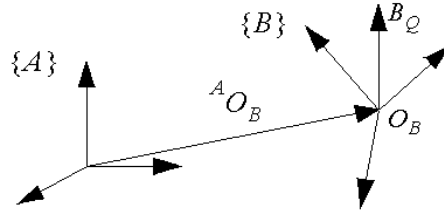


Figura 5.5: Descrição de ${}^B Q$

Admitimos que o sistema $\{B\}$ seja dado em relação a $\{A\}$ através de ${}^A R$ e ${}^A O_B$ e que a orientação não se altere com o tempo.

Assim, o movimento do ponto Q com relação a $\{A\}$ deve-se à translação do sistema $\{B\}$ (através da mudança de ${}^A O_B$) e/ou da alteração de ${}^B Q$ (movimento relativo de Q com respeito a $\{B\}$).

Para obter ${}^A V_Q$ basta lembrar da propriedade vista em *Física (Cinemática)* que afirma que basta somar a velocidade de arrastamento com a velocidade relativa¹³:

$${}^A V_Q = {}^A V_{O_B} + {}^A ({}^B V_Q)$$

ou seja,

$${}^A V_Q = {}^A V_{O_B} + {}^A R \cdot {}^B V_Q \quad ({}^A R \text{ fixo no tempo})$$

É oportuno lembrar que esta equação só vale no caso em que a orientação de $\{B\}$ é invariante com relação a $\{A\}$.

5.3.2 VELOCIDADE DE ROTAÇÃO – UMA ABORDAGEM GEOMÉTRICA

Consideremos agora dois sistemas com origens coincidentes ao longo do tempo e velocidade nula (linha que passa pela origem e tem a direção de ${}^A \Omega_B$ é o eixo instantâneo de rotação).

¹³ Ou, alternativamente,

$${}^A Q = {}^A O_B + {}^A R \cdot {}^B Q \Rightarrow \frac{d^A Q}{dt} = \frac{d^A O_B}{dt} + {}^A R \cdot \left(\frac{d^B Q}{dt} \right) + \left(\frac{d^A R}{dt} \right) \cdot {}^B Q = \frac{d^A O_B}{dt} + {}^A R \cdot \left(\frac{d^B Q}{dt} \right)$$

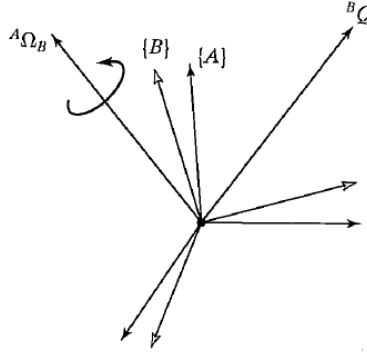


Figura 5.6: Velocidade de rotação ${}^A\Omega_B$

A orientação de $\{B\}$ com relação a $\{A\}$ é variante no tempo, sendo este movimento descrito pela velocidade angular ${}^A\Omega_B$.

O ponto Q é fixo em relação a $\{B\}$ e, portanto, BQ é constante.

A questão que se coloca é: como muda em relação a $\{A\}$ um vetor fixo em relação a $\{B\}$?

Como Q é fixo em relação a $\{B\}$,

$${}^BV_Q = 0$$

Mas, como $\{B\}$ se move em relação a $\{A\}$, o mesmo ocorre com Q .

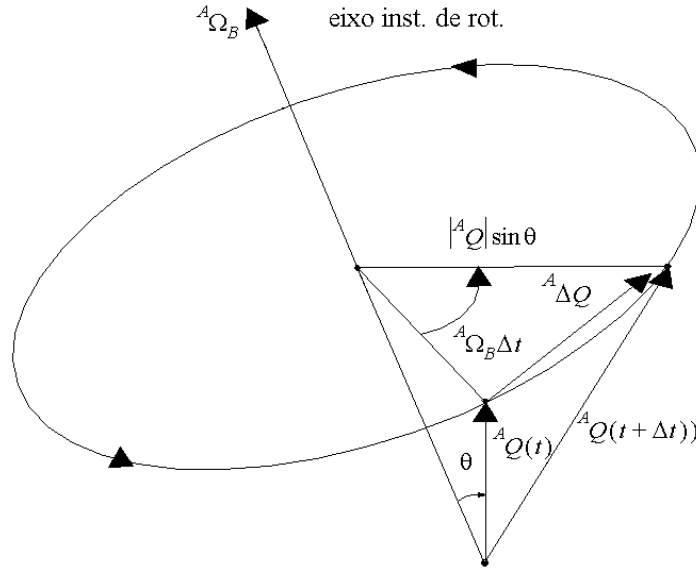


Figura 5.7: Efeito da rotação ${}^A\Omega_B$ sobre o ponto Q

A figura acima mostra o efeito sobre o ponto Q da rotação ${}^A\Omega_B$ em dois instantes, t e $t + \Delta t$, conforme visto do sistema $\{A\}$.

Em primeiro lugar, a magnitude da variação é

$$|{}^A\Delta Q| = (|{}^AQ| \sin \theta) ({}^A\Omega_B |\Delta t|)$$

Em segundo lugar, deve-se notar que a variação em AQ deve ser ortogonal tanto a ${}^A\Omega_B$ como a AQ .

Essas condições referentes a módulo e direção sugerem imediatamente a operação produto vetorial. De fato, nossas conclusões podem ser expressas na forma

$${}^A V_Q = {}^A \Omega_B \times {}^A Q \quad (Q \text{ fixo em relação a } \{B\}; O_B \equiv O_A)$$

No caso geral em que o ponto Q está em movimento em relação a $\{B\}$ temos:

$${}^A V_Q = {}^A \Omega_B \times {}^A Q + {}^A ({}^B V_Q), \quad 14$$

onde a primeira parcela corresponde à velocidade de arrastamento e a segunda, à velocidade relativa. Como $O_A \equiv O_B$,

$${}^B Q = {}^A R \cdot {}^A Q$$

e, portanto,

$${}^A V_Q = {}^A R \cdot {}^B V_Q + {}^A \Omega_B \times {}^A R \cdot {}^B Q$$

É oportuno lembrar que esta equação vale para Q móvel em relação a $\{B\}$ no caso em que $\{A\}$ e $\{B\}$ têm a mesma origem.

5.3.3 MOVIMENTOS DE ROTAÇÃO E TRANSLAÇÃO

Quando as origens não são coincidentes ao longo do tempo, devemos adicionar à parcela de arrastamento a velocidade da origem ${}^A V_{O_B}$:

$${}^A V_Q = {}^A V_{O_B} + {}^A R \cdot {}^B V_Q + {}^A \Omega_B \times {}^A R \cdot {}^B Q \quad (\text{caso geral})$$

Esta equação é a expressão geral para a velocidade de um ponto que se move num sistema, o qual, por sua vez, se move com relação a outro.

5.4 MOVIMENTOS DE ROTAÇÃO E TRANSLAÇÃO – UMA ABORDAGEM FORMAL

Nesta seção, nós vamos tomar um caminho mais formal para deduzir a equação de ${}^A V_Q$ acima (caso geral).

5.4.1 UMA PROPRIEDADE DA DERIVADA DE UMA MATRIZ DE ROTAÇÃO

Para qualquer matriz ortonormal R :

$$R \cdot R^T = I$$

Derivando em relação ao tempo,

$$\dot{R} \cdot R^T + R \cdot \dot{R}^T = 0$$

Definindo

$$S = \dot{R} \cdot R^T$$

temos

$$S + S^T = 0$$

e, portanto, S é uma matriz antissimétrica.

Portanto, uma propriedade relacionando a derivada de uma matriz ortogonal com uma matriz antissimétrica é a seguinte:

¹⁴ ${}^A ({}^B V_Q) = {}^A R \cdot {}^B V_Q$

$$S = \mathbb{R} R^{-1}$$

5.4.2 PROPRIEDADE: MATRIZES ANTISSIMÉTRICAS E PRODUTO VETORIAL

Consideremos um vetor Ω ,

$$\Omega = [\Omega_x \quad \Omega_y \quad \Omega_z]^T$$

e com ele montemos a matriz antissimétrica S da seguinte maneira:

$$S = \begin{bmatrix} 0 & -\Omega_z & \Omega_y \\ \Omega_z & 0 & -\Omega_x \\ -\Omega_y & \Omega_x & 0 \end{bmatrix}$$

É imediato verificar que, para qualquer vetor $P \in \mathbb{R}^3$, vale:

$$S P = \Omega \times P$$

5.4.3 ABORDAGEM FORMAL – O CASO GERAL

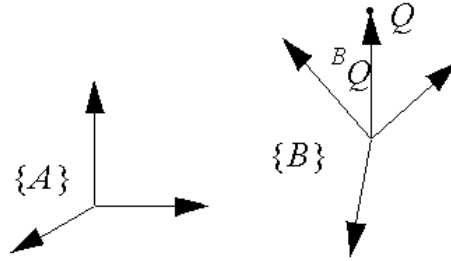


Figura 5.8: Descrição de ${}^B Q$

Partimos de

$${}^A Q = {}^A O_B + {}^A R {}^B Q \quad (5.1)$$

Derivando termo a termo em relação ao tempo:

$${}^A V_Q = {}^A V_{O_B} + {}^A R {}^B V_Q + {}^A \mathbb{R} {}^B Q \quad (5.2)$$

Mas, de (5.1) vem:

$${}^A Q - {}^A O_B = {}^A R {}^B Q \quad (5.3)$$

e, portanto,

$$\left({}^A R \right)^T \cdot \left({}^A Q - {}^A O_B \right) = {}^B Q \quad (5.4)$$

Substituindo (5.4) em (5.2) resulta:

$${}^A V_Q = {}^A V_{O_B} + {}^A R {}^B V_Q + {}^A \mathbb{R} \left({}^A R \right)^T \cdot \left({}^A Q - {}^A O_B \right), \quad 15$$

que pode ser reescrita como:

$${}^A V_Q = {}^A V_{O_B} + {}^A R {}^B V_Q + {}^A \Omega_B \times \left({}^A Q - {}^A O_B \right)$$

Por fim, usando (5.3), temos:

¹⁵ ${}^A S = {}^A \mathbb{R} \left({}^A R \right)^T$ – aqui está, na verdade, a definição de ${}^A \Omega_B$.

$${}^A V_Q = {}^A V_{O_B} + {}^A R \cdot {}^B V_Q + {}^A \Omega_B \times {}^A R \cdot {}^B Q \quad (\text{caso geral})$$

5.5 MOVIMENTO DE ROTAÇÃO

Considere-se um sistema $\{C\}$ que gira em relação a $\{B\}$ com velocidade de rotação ${}^B \Omega_C$. Admita-se que o sistema $\{B\}$ gire em relação a $\{A\}$ com velocidade angular ${}^A \Omega_B$. Pode-se mostrar (veja Apêndice IV) que neste caso vale a seguinte igualdade:

$${}^A \Omega_C = {}^A R \cdot {}^B \Omega_C + {}^A \Omega_B.$$

5.6 MOVIMENTO DOS LIGAMENTOS DE UM ROBÔ

Para obter o modelo dinâmico de um robô por meio da formulação Lagrangeana é necessário calcular a energia cinética de cada ligamento. Essa é pois uma das razões da importância do cálculo das velocidades dos ligamentos de um robô.

Ao considerar o movimento dos ligamentos de um robô, com frequência vamos tomar o sistema $\{0\}$ como referência ($\{U\} = \{0\}$). Portanto, v_i é a velocidade linear da origem do sistema $\{i\}$ e ω_i é a velocidade angular do sistema $\{i\}$, ambos em relação a $\{0\}$.

Consideremos agora o problema de calcular as velocidades linear¹⁶ e angular dos ligamentos de um robô. Como o manipulador é uma cadeia de ligamentos, em que cada um deles se movimenta em relação a seus vizinhos, nós podemos calcular as velocidades dos ligamentos ordenadamente a partir da base.

Como indicado na figura, vamos pensar em cada ligamento como sendo um corpo rígido com vetores velocidade e velocidade angular descrevendo seu movimento (enquanto este último está associado com o corpo, o primeiro consideramos associado à origem do sistema fixo ao ligamento). Nós vamos considerar essas velocidades como sendo expressas no sistema do próprio ligamento.

¹⁶ Velocidade linear do ligamento significa, para nós, velocidade linear da origem do sistema fixo ao ligamento.

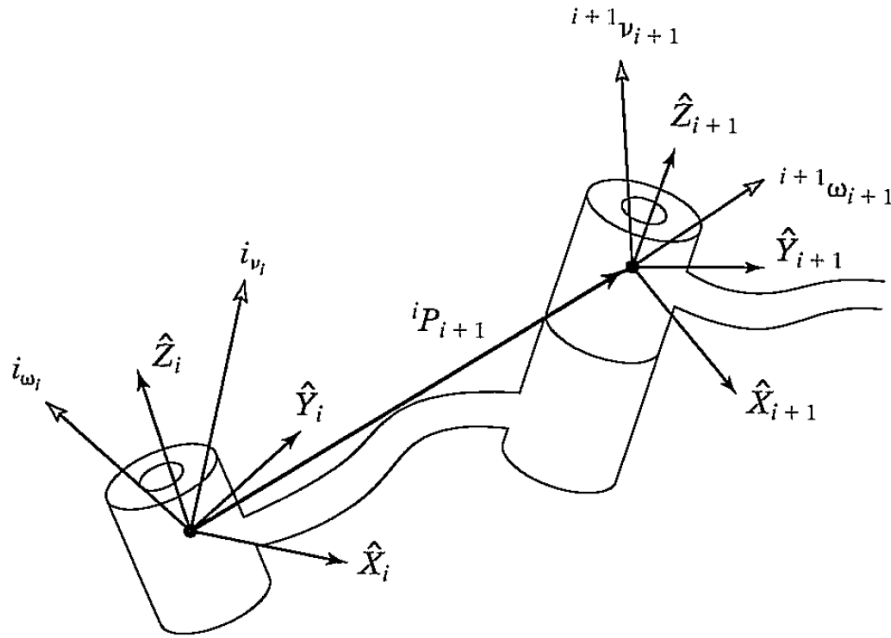


Figura 5.9: Velocidades dos ligamentos

• JUNTA $i+1$ ROTACIONAL

Quando a junta $i+1$ é rotacional, a velocidade angular do ligamento $i+1$ relativa ao ligamento i e expressa no sistema $\{i+1\}$ é

$${}^{i+1}({}^i\Omega_{i+1}) = \mathcal{E}_{i+1} \cdot {}^{i+1}\hat{Z}_{i+1} = \mathcal{E}_{i+1} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Lembrando que as velocidades angulares podem ser adicionadas quando expressas no mesmo sistema de coordenadas, podemos escrever:

$${}^i\omega_{i+1} = {}^i\omega_i + {}^{i+1}R \cdot \mathcal{E}_{i+1} \cdot {}^{i+1}\hat{Z}_{i+1}$$

Pré-multiplicando ambos os membros por ${}^{i+1}R$ vem:

$${}^{i+1}R \cdot {}^i\omega_{i+1} = {}^{i+1}R \cdot {}^i\omega_i + {}^{i+1}R \cdot {}^{i+1}R \cdot \mathcal{E}_{i+1} \cdot {}^{i+1}\hat{Z}_{i+1}$$

Ou seja:

$${}^{i+1}\omega_{i+1} = {}^{i+1}R \cdot {}^i\omega_i + \mathcal{E}_{i+1} \cdot {}^{i+1}\hat{Z}_{i+1} \quad (\text{junta } i+1 \text{ rotacional})$$

Note que ${}^{i+1}\hat{Z}_{i+1} = [0 \ 0 \ 1]^T$.

Quanto à velocidade linear da origem de $\{i+1\}$, utilizamos a expressão geral

$${}^AV_Q = {}^AV_{O_B} + {}^AR \cdot {}^BV_Q + {}^A\Omega_B \times {}^AR \cdot Q$$

e fazemos as seguintes correspondências:

$$\{A\} \leftrightarrow \{U\} = \{0\}$$

$$\{B\} \leftrightarrow \{i\}$$

$$O_B \leftrightarrow O_i$$

$$Q \leftrightarrow O_{i+1}$$

Assim:

$$v_{i+1} = v_i + {}^0R_i V_{O_{i+1}} + \omega_i \times {}^0R_i O_{i+1}$$

Note que: ${}^0R_i V_{O_{i+1}} = 0$

Pré-multiplicando ambos os membros por 0R_i vem:

$${}^0R_i v_{i+1} = {}^0R_i v_i + {}^0R_i (\omega_i \times {}^0R_i O_{i+1})$$

Ou seja,

$$\begin{aligned} {}^i v_{i+1} &= {}^i v_i + ({}^i R_i \omega_i \times {}^i R_i O_{i+1}) \\ {}^i v_{i+1} &= {}^i v_i + {}^i \omega_i \times {}^i O_{i+1} \end{aligned}$$

Pré-multiplicando ambos os membros por ${}^{i+1}R_i$, obtém-se por fim:

$${}^{i+1} v_{i+1} = {}^{i+1} R_i ({}^i v_i + {}^i \omega_i \times {}^i O_{i+1}) \quad (\text{junta } i+1 \text{ rotacional})$$

• JUNTA $i+1$ PRISMÁTICA

Analisemos agora o caso em que a junta $i+1$ é prismática.

Neste caso, a velocidade angular do ligamento $i+1$ é a mesma do ligamento i :

$${}^i \omega_{i+1} = {}^i \omega_i$$

e, portanto, pré-multiplicando por ${}^{i+1}R_i$:

$${}^{i+1} \omega_{i+1} = {}^{i+1} R_i {}^i \omega_i \quad (\text{junta } i+1 \text{ prismática})$$

Para obter a expressão da velocidade linear da origem do sistema $\{i+1\}$, utilizamos a expressão geral e as mesmas correspondências anteriores para obter:

$$v_{i+1} = v_i + {}^0R_i V_{O_{i+1}} + \omega_i \times {}^0R_i O_{i+1}$$

Pré-multiplicando ambos os membros por 0R_i , vem:

$${}^i v_{i+1} = {}^i v_i + {}^i V_{O_{i+1}} + ({}^i R_i \omega_i \times {}^i R_i O_{i+1})$$

Ou seja:

$${}^i v_{i+1} = {}^i v_i + {}^i V_{O_{i+1}} + {}^i \omega_i \times {}^i O_{i+1} \quad (5.5)$$

Como a junta $i+1$ é prismática:

$${}^{i+1} V_{O_{i+1}} = \mathcal{E}_{i+1} \cdot {}^{i+1} \hat{Z}_{i+1}$$

Portanto, pré-multiplicando ambos os membros por ${}^{i+1}R_i$, tem-se:

$${}^i V_{O_{i+1}} = {}^{i+1} R_i \mathcal{E}_{i+1} \cdot {}^{i+1} \hat{Z}_{i+1}$$

que, substituída em (5.5), fornece:

$${}^i v_{i+1} = {}^i v_i + {}^{i+1} R_i \mathcal{E}_{i+1} \cdot {}^{i+1} \hat{Z}_{i+1} + {}^i \omega_i \times {}^i O_{i+1}$$

Pré-multiplicando ambos os membros por ${}^{i+1}R_i$, resulta por fim:

$${}^{i+1} v_{i+1} = {}^{i+1} R_i ({}^i v_i + {}^i \omega_i \times {}^i O_{i+1}) + \mathcal{E}_{i+1} \cdot {}^{i+1} \hat{Z}_{i+1} \quad (\text{junta } i+1 \text{ prismática})$$

As quatro equações obtidas podem ser aplicadas sucessivamente desde a base (ligamento $i = 0$) até o efetuador (ligamento $i = n$), fornecendo ${}^n \omega_n$ e ${}^n v_n$. O fato de estas velocidades resultarem expressas no sistema $\{n\}$ pode ser útil em certos casos, como

veremos adiante. Contudo, se for necessário expressá-las no sistema da base (sistema $\{0\}$), bastará pré-multiplicá-las pela matriz de rotação ${}^0_n R$.

5.6.1 CÁLCULO DA VELOCIDADE DO CENTRO DE MASSA DO LIGAMENTO

A expressão que vamos deduzir a seguir será útil no Capítulo 6, quando estudarmos a formulação *Lagrangeana* da dinâmica do manipulador.

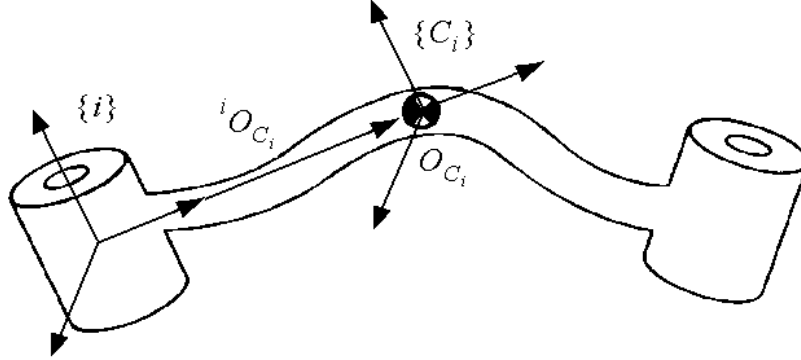


Figura 5.10: Esquema dos sistemas $\{i\}$ e $\{C_i\}$ do ligamento i .

O_{C_i} é o centro de massa do ligamento i e $\{C_i\}$ é o sistema de referência com origem O_{C_i} e eixos paralelos aos do sistema $\{i\}$.

Fazendo as seguintes correspondências:

$$\{A\} \leftrightarrow \{0\}$$

$$\{B\} \leftrightarrow \{i\}$$

$$Q \leftrightarrow O_{C_i}$$

e considerando que O_{C_i} está fixo com relação a $\{i\}$, a expressão geral

$${}^A V_Q = {}^A V_{O_B} + {}^A R \cdot {}^B V_Q + {}^A \Omega_B \times {}^A R \cdot {}^B Q$$

fornece

$${}^0 V_{O_{C_i}} = {}^0 V_{O_i} + {}^0 R \cdot {}^i V_{O_{C_i}} + {}^0 \Omega_i \times {}^0 R \cdot {}^i O_{C_i} = {}^0 V_{O_i} + {}^0 \Omega_i \times {}^0 R \cdot {}^i O_{C_i}$$

sendo que a última igualdade decorre do fato de que ${}^i V_{O_{C_i}} = 0$.

Ou seja, usando a notação adotada,

$$v_{C_i} = v_i + \omega_i \times {}^0 R \cdot {}^i O_{C_i}.$$

Pré-multiplicando ambos os membros por ${}^i_0 R$ resulta:

$${}^i v_{C_i} = {}^i v_i + {}^i \omega_i \times {}^i O_{C_i}$$

Obviamente,

$${}^{C_i} v_{C_i} = {}^i v_i + {}^i \omega_i \times {}^i O_{C_i}$$

porque ${}^{C_i}_i R = I$, uma vez que $\{C_i\} // \{i\}$.

5.6.1.1 EXEMPLO 5.3

Considere o manipulador da figura a seguir.

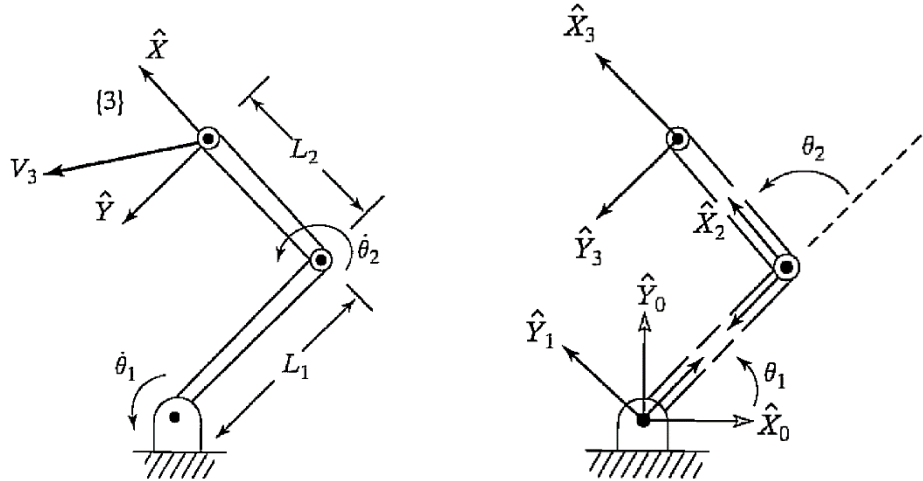


Figura 5.11: Exemplo 5.3

Calcule a velocidade da extremidade do braço em função das velocidades angulares das juntas. Dê a resposta tanto em termos do sistema {3}, como do sistema {0}.¹⁷

Queremos determinar a velocidade da origem do sistema {3} expressa no próprio sistema {3} e, em seguida, no {0}.

Vamos utilizar as equações vistas para expressar ${}^{i+1}\omega_{i+1}$ e ${}^{i+1}v_{i+1}$ conhecidos ${}^i\omega_i$ e iv_i , partindo do sistema {0}, que se encontra em repouso.

As transformações entre os sistemas fixados aos ligamentos são:

$${}^0_1T = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^1_2T = \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & L_1 \\ s_2 & c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^2_3T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & L_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Usando as equações

$${}^{i+1}\omega_{i+1} = {}^{i+1}R^i \omega_i + \dot{\theta}_{i+1} \hat{Z}_{i+1}$$

$${}^{i+1}v_{i+1} = {}^{i+1}R^i ({}^iv_i + {}^i\omega_i \times {}^iO_{i+1})$$

temos:

¹⁷ Deve-se notar que não existe um ligamento 3, tendo o sistema {3} sido fixado à extremidade do ligamento apenas para permitir o uso direto das equações de recorrência para o cálculo de velocidades.

$$\begin{aligned}
{}^1\omega_1 &= {}^1R \cdot {}^0\omega_0 + \mathcal{E}_1 [0 \ 0 \ 1]^T \Rightarrow {}^1\omega_1 = [0 \ 0 \ \mathcal{E}_1]^T \\
{}^1v_1 &= {}^1R \cdot ({}^0v_0 + {}^0\omega_0 \times {}^0Q) \Rightarrow {}^1v_1 = [0 \ 0 \ 0]^T \\
{}^2\omega_2 &= {}^2R \cdot {}^1\omega_1 + \mathcal{E}_2 \cdot \hat{Z}_2 = \begin{bmatrix} c_2 & s_2 & 0 \\ -s_2 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathcal{E}_1 \end{bmatrix} + \mathcal{E}_2 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathcal{E}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathcal{E}_2 \end{bmatrix} \Rightarrow {}^2\omega_2 = [0 \ 0 \ \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2]^T \\
{}^2v_2 &= {}^2R \cdot ({}^1v_1 + {}^1\omega_1 \times {}^1O_2) = {}^2R \cdot \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathcal{E}_1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} L_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} c_2 & s_2 & 0 \\ -s_2 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ L_1 \mathcal{E}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow {}^2v_2 = [s_2 L_1 \mathcal{E}_1 \ c_2 L_1 \mathcal{E}_1 \ 0]^T \\
{}^3\omega_3 &= {}^3R \cdot {}^2\omega_2 + \mathcal{E}_3 \cdot \hat{Z}_3 \Rightarrow {}^3\omega_3 = {}^2\omega_2 \\
{}^3v_3 &= {}^3R \cdot ({}^2v_2 + {}^2\omega_2 \times {}^2O_3) = {}^3R \cdot \left({}^2v_2 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} L_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = I \cdot \left(\begin{bmatrix} s_2 L_1 \mathcal{E}_1 \\ c_2 L_1 \mathcal{E}_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ L_2 (\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2) \\ 0 \end{bmatrix} \right) \Rightarrow \\
{}^3v_3 &= [s_2 L_1 \mathcal{E}_1 \ c_2 L_1 \mathcal{E}_1 + L_2 (\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2) \ 0]^T
\end{aligned}$$

Para expressar ${}^3\omega_3$ e 3v_3 no sistema da base, basta multiplicá-los por 0_3R :

$${}^0_3R = {}^0_1R \cdot {}^1_2R \cdot {}^2_3R = \begin{bmatrix} c_{12} & -s_{12} & 0 \\ s_{12} & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

isto é,

$$\begin{aligned}
{}^0\omega_3 &= {}^0_3R \cdot {}^3\omega_3 \\
{}^0v_3 &= {}^0_3R \cdot {}^3v_3
\end{aligned}$$

As equações de propagação das velocidades lineares e angulares de ligamento para ligamento podem ser utilizadas de duas formas: analítica (conforme exemplo acima) e numericamente.

5.7 JACOBIANOS

Consideremos um ponto P dado num sistema $\{A\}$ pelo seu vetor posição AP

$${}^AP = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

e admitamos que

$$\begin{aligned}
x &= x(q(t)) \\
y &= y(q(t)) \\
z &= z(q(t))
\end{aligned}$$

em que $q(t) \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de variáveis das juntas. A velocidade de AP em relação a $\{A\}$ é dada por

$${}^A V_P = \begin{bmatrix} dx/dt \\ dy/dt \\ dz/dt \end{bmatrix}.$$

Mas:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \left. \frac{\partial x}{\partial q_1} \right|_{q(t)} \dot{q}_1(t) + \left. \frac{\partial x}{\partial q_2} \right|_{q(t)} \dot{q}_2(t) + \dots + \left. \frac{\partial x}{\partial q_n} \right|_{q(t)} \dot{q}_n(t) \\ \frac{dy}{dt} &= \left. \frac{\partial y}{\partial q_1} \right|_{q(t)} \dot{q}_1(t) + \left. \frac{\partial y}{\partial q_2} \right|_{q(t)} \dot{q}_2(t) + \dots + \left. \frac{\partial y}{\partial q_n} \right|_{q(t)} \dot{q}_n(t) \\ \frac{dz}{dt} &= \left. \frac{\partial z}{\partial q_1} \right|_{q(t)} \dot{q}_1(t) + \left. \frac{\partial z}{\partial q_2} \right|_{q(t)} \dot{q}_2(t) + \dots + \left. \frac{\partial z}{\partial q_n} \right|_{q(t)} \dot{q}_n(t) \end{aligned}$$

Portanto, podemos escrever na forma matricial:

$${}^A V_P = \begin{bmatrix} \left. \frac{\partial x}{\partial q_1} \right|_{q(t)} & \left. \frac{\partial x}{\partial q_2} \right|_{q(t)} & \Lambda & \left. \frac{\partial x}{\partial q_n} \right|_{q(t)} \\ \left. \frac{\partial y}{\partial q_1} \right|_{q(t)} & \left. \frac{\partial y}{\partial q_2} \right|_{q(t)} & \Lambda & \left. \frac{\partial y}{\partial q_n} \right|_{q(t)} \\ \left. \frac{\partial z}{\partial q_1} \right|_{q(t)} & \left. \frac{\partial z}{\partial q_2} \right|_{q(t)} & \Lambda & \left. \frac{\partial z}{\partial q_n} \right|_{q(t)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{q}_1(t) \\ \dot{q}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{q}_n(t) \end{bmatrix}.$$

Designando por ${}^A J(q(t))$ o Jacobiano

$$J(q(t)) = \begin{bmatrix} \left. \frac{\partial x}{\partial q_1} \right|_{q(t)} & \left. \frac{\partial x}{\partial q_2} \right|_{q(t)} & \Lambda & \left. \frac{\partial x}{\partial q_n} \right|_{q(t)} \\ \left. \frac{\partial y}{\partial q_1} \right|_{q(t)} & \left. \frac{\partial y}{\partial q_2} \right|_{q(t)} & \Lambda & \left. \frac{\partial y}{\partial q_n} \right|_{q(t)} \\ \left. \frac{\partial z}{\partial q_1} \right|_{q(t)} & \left. \frac{\partial z}{\partial q_2} \right|_{q(t)} & \Lambda & \left. \frac{\partial z}{\partial q_n} \right|_{q(t)} \end{bmatrix},$$

a velocidade ${}^A V_P$ pode ser reescrita como

$${}^A V_P = {}^A J(q(t)) \dot{q}(t)$$

Assim, o Jacobiano ${}^A J(q(t))$ mapeia $\dot{q}(t)$ em ${}^A V_P$. Essa transformação linear é variável no tempo através de $q(t)$.

Na área de robótica, nós geralmente consideramos os *Jacobianos* que relacionam as velocidades das juntas às velocidades cartesianas do efetuador. Por exemplo:

$${}^0 v = {}^0 J(q) \cdot \dot{q},$$

onde q é o vetor das variáveis das juntas do manipulador e v (letra grega nu) é um vetor de velocidades cartesianas. O pré-índice que acompanha o *Jacobiano* é introduzido para indicar o sistema em que as velocidades resultantes são expressas. Às vezes este índice é omitido quando é óbvio o sistema considerado ou quando isto é irrelevante no contexto.

Note que, em cada instante, a relação entre as velocidades das juntas e a velocidade de efetuador é linear, embora o *Jacobiano* seja função de q (que, por sua vez, varia com o tempo).

No caso de robôs de 6 g.d.l., $q \in \mathbb{R}^6$. Se, por exemplo, ${}^0v \in \mathbb{R}^6$ é escolhido como:

$${}^0v = \begin{bmatrix} {}^0v_6 \\ {}^0\omega_6 \end{bmatrix},$$

então ${}^0J(q) \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$.

Podem ser definidos *Jacobianos não quadrados*. Nestes casos, o número de linhas é igual ao número de g.d.l. do espaço Cartesiano considerado e o número de colunas é igual ao número de juntas do manipulador.

EXEMPLO

Para o manipulador planar de 2 g.d.l. visto no EXEMPLO 5.3 obtivemos:

$${}^3v_3 = \begin{bmatrix} L_1 s_2 \dot{\theta}_1 \\ L_1 c_2 \dot{\theta}_1 + L_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$${}^0v_3 = \begin{bmatrix} -L_1 s_1 \dot{\theta}_1 - L_2 s_{12} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \\ L_1 c_1 \dot{\theta}_1 + L_2 c_{12} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \\ 0 \end{bmatrix}$$

Como $v = J(\theta)\dot{\theta}$, é imediato que

$${}^3J(\theta) = \begin{bmatrix} L_1 s_2 & 0 \\ L_1 c_2 + L_2 & L_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e

$${}^0J(\theta) = \begin{bmatrix} -L_1 s_1 - L_2 s_{12} & -L_2 s_{12} \\ L_1 c_1 + L_2 c_{12} & L_2 c_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Note que, nos dois casos, escolhemos escrever uma matriz 3x2 relacionando as velocidades das juntas e a velocidade do efetuador. Podemos também considerar o *Jacobiano* 6x2, incluindo a velocidade angular:

$${}^3\omega_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}, \quad {}^0\omega_3 = {}^0R_3 {}^3\omega_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}$$

e, portanto,

$${}^3J(\theta) = \begin{bmatrix} L_1 s_2 & 0 \\ L_1 c_2 + L_2 & L_2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}; {}^0J(\theta) = \begin{bmatrix} -L_1 s_1 - L_2 s_{12} & -L_2 s_{12} \\ L_1 c_1 + L_2 c_{12} & L_2 c_{12} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

O que nós fizemos acima foi, portanto, apresentar um método de obter o *Jacobiano* através da aplicação sucessiva das equações de recorrência para o cálculo de ${}^{i+1}\omega_{i+1}$ e ${}^{i+1}v_{i+1}$.

Considerando as equações que definem o *Jacobiano*, fica claro, ainda, que ele pode ser obtido derivando-se as equações cinemáticas do mecanismo. Assim, por exemplo, a extremidade do braço do manipulador de 2 g.d.l. é dada por:

$${}^0O_3 = \begin{bmatrix} c_{12}L_2 + c_1L_1 \\ s_{12}L_2 + s_1L_1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

de onde se pode obter ${}^0J(\theta)$ para as velocidades lineares:

$${}^0J(\theta) = \begin{bmatrix} -s_{12}L_2 - s_1L_1 & -s_{12}L_2 \\ c_{12}L_2 + c_1L_1 & c_{12}L_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Entretanto, não existe vetor orientação 3x1 cuja derivada seja o ω .

5.7.1 MUDANÇA DE SISTEMA DE REFERÊNCIA DO JACOBIANO

Dado o *Jacobiano* escrito num sistema $\{B\}$, isto é,

$$\begin{bmatrix} {}^Bv \\ {}^B\omega \end{bmatrix} = {}^Bv = {}^BJ(q)\dot{q},$$

nós podemos estar interessados em expressar o *Jacobiano* em outro sistema $\{A\}$.

Para isso, note que

$$\begin{bmatrix} {}^Av \\ {}^A\omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^A_R & 0 \\ 0 & {}^A_R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^Bv \\ {}^B\omega \end{bmatrix}$$

e, portanto,

$$\begin{bmatrix} {}^Av \\ {}^A\omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^A_R & 0 \\ 0 & {}^A_R \end{bmatrix} {}^BJ(q)\dot{q}$$

É claro, assim, que a mudança de sistema de referência do *Jacobiano* é dada por

$${}^AJ(q) = \begin{bmatrix} {}^A_R & 0 \\ 0 & {}^A_R \end{bmatrix} {}^BJ(q)$$

5.8 SINGULARIDADES

Dadas as velocidades das juntas, utilizando o *Jacobiano*, nós somos capazes de determinar a velocidade cartesiana do efetuador. Uma questão natural neste ponto é: será que, conhecida esta última, é possível determinar as velocidades das juntas? Ou, em outras palavras, será que o *Jacobiano* é uma matriz inversível?

Se a resposta for sim, então

$$\dot{q} = J^{-1}(q) \cdot v$$

No caso em que a inversa existe, podemos especificar a velocidade cartesiana do efetuador e obter os movimentos das juntas requeridos para isso.

A questão realmente importante é: o *Jacobiano* é inversível para todos os vetores q ? Se não, para quais valores o é?

Os pontos onde o *Jacobiano* é singular são chamados de singularidades. Neste curso classificaremos de forma não rigorosa as singularidades em duas classes:

1. Singularidades na fronteira do espaço de trabalho - são as que ocorrem quando o manipulador está totalmente “esticado” ou “encolhido” sobre si próprio, de maneira que o efetuador esteja na fronteira do espaço de trabalho. Todos os manipuladores apresentam singularidades na fronteira.
2. Singularidades no interior do espaço de trabalho - são aquelas que ocorrem fora da fronteira, sendo provocadas geralmente pelo alinhamento de dois ou mais ligamentos.

Quando um manipulador se encontra numa posição singular, ele perde um ou mais g.d.l. no espaço Cartesiano. Isto significa que existe alguma direção (ou subespaço) do espaço cartesiano ao longo da qual é impossível movimentar a mão do robô, quaisquer que sejam as velocidades das juntas que se escolham. É obvio que, na fronteira do espaço de trabalho, isto ocorre.

5.8.1 EXEMPLO 5.4

Quais são as singularidades do manipulador de 2 g.d.l. do exemplo anterior? Qual é a explicação física das singularidades? Elas ocorrem na fronteira ou em pontos do interior do espaço de trabalho?

O *Jacobiano* desse manipulador é

$${}^3J(\theta) = \begin{bmatrix} L_1 s_2 & 0 \\ L_1 c_2 + L_2 & L_2 \end{bmatrix}$$

cujo determinante é

$$\det[{}^3J(\theta)] = L_1 L_2 s_2$$

Portanto, a condição de singularidade é $\theta_2 = 0$ ou $\theta_2 = 180^\circ$.

Fisicamente, quando $\theta_2 = 0$, o braço se encontra totalmente esticado e, nesta configuração, é impossível movimentar o efetuador na direção dos próprios ligamentos (o movimento é possível apenas perpendicularmente a esta direção). Portanto, o mecanismo perdeu 1 g.d.l..

Por outro lado, quando $\theta_2 = 180^\circ$, o braço está completamente dobrado sobre si próprio e o movimento da mão é possível apenas na direção perpendicular.

Essas singularidades ocorrem, como é obvio, na fronteira do espaço de trabalho.

Note que essas conclusões são independentes do sistema de coordenadas utilizado para expressar o *Jacobiano*, pois matrizes ortogonais têm determinante igual a ± 1 .

5.8.2 EXEMPLO 5.5

Consideremos o manipulador de 2 g.d.l. da figura com o efetuador se movendo na direção do eixo \hat{X} a 1 m/s.

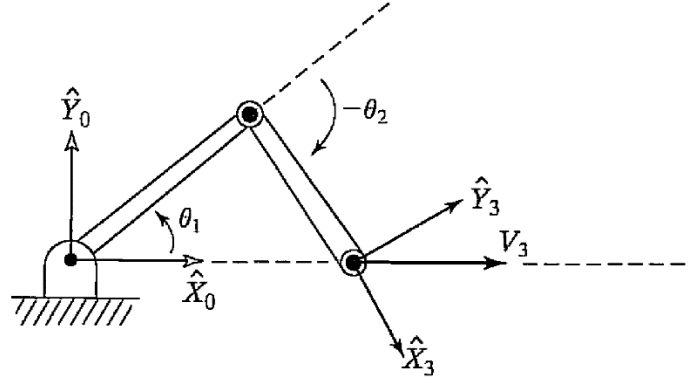


Figura 5.12: Exemplo 5.5

Conforme vimos (e considerando que o movimento ocorre no plano):

$${}^0J(\theta) = \begin{bmatrix} -L_1s_1 - L_2s_{12} & -L_2s_{12} \\ L_1c_1 + L_2c_{12} & L_2c_{12} \end{bmatrix}$$

e, portanto,

$${}^0J^{-1}(\theta) = \frac{1}{L_1L_2s_2} \begin{bmatrix} L_2c_{12} & L_2s_{12} \\ -L_1c_1 - L_2c_{12} & -L_1s_1 - L_2s_{12} \end{bmatrix}$$

Como

$$\dot{\theta} = {}^0J^{-1}(\theta) v_3$$

e

$$v_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}^T$$

vem

$$\dot{\theta}_1 = \frac{c_{12}}{L_1s_2}$$

$$\dot{\theta}_2 = -\frac{c_1}{L_2s_2} - \frac{c_{12}}{L_1s_2}$$

Fica, pois, claro que para $\theta_2 \rightarrow 0$, $\dot{\theta}_1 \rightarrow \infty$ e $\dot{\theta}_2 \rightarrow \infty$, o que significa que, à medida que a singularidade se aproxima, as velocidades tendem a infinito.

5.9 FORÇAS E MOMENTOS ESTÁTICOS EM MANIPULADORES

A estrutura em forma de cadeia dos manipuladores conduz naturalmente a se considerar a questão de como as forças e momentos se propagam de um ligamento para outro. Tipicamente, ou o robô está realizando um esforço sobre o ambiente externo a ele ou, talvez, carregando uma carga na sua mão. Queremos obter os torques/forças nas juntas necessários para manter o sistema em equilíbrio estático.

Ao considerar forças estáticas num manipulador, nós inicialmente imaginamos as suas juntas bloqueadas, de forma que o manipulador se torna uma estrutura rígida. Em seguida, para cada ligamento da estrutura, nós escrevemos equações de equilíbrio de força e momento expressas nos sistemas dos ligamentos. Por fim, determinamos o torque/força estático que deve agir em cada junta para que o manipulador esteja em equilíbrio estático.

Vamos utilizar a seguinte notação:

- f_i = força exercida sobre o ligamento i pelo ligamento $i-1$ aplicada no ponto O_i ;
- n_i = torque exercido sobre o ligamento i pelo ligamento $i-1$.

A figura abaixo mostra os ligamentos i e $i+1$, bem como as forças e momentos atuantes sobre o ligamento i pela ação, respectivamente, dos ligamentos $i-1$ e i .

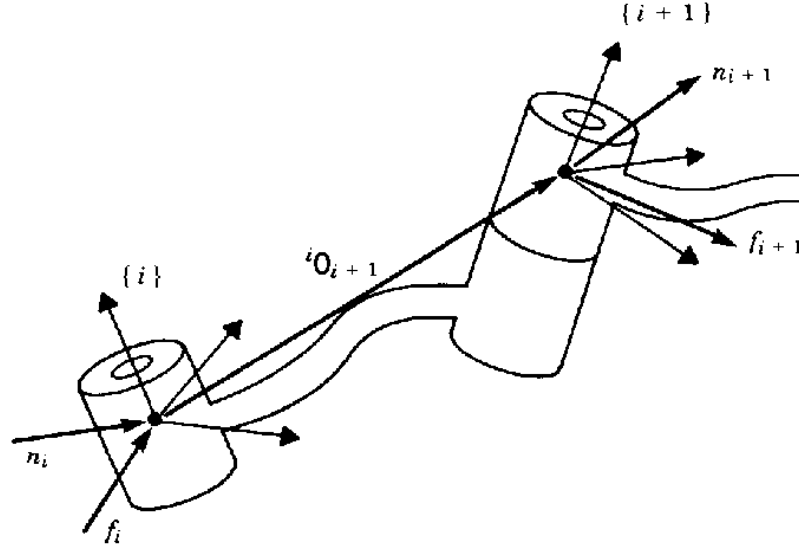


Figura 5.13: Forças e momentos atuantes nos ligamentos

Note que não estamos considerando o efeito da gravidade sobre o manipulador. Estamos considerando só o efeito do esforço do efetuador sobre o ambiente ou da carga transportada.

A condição de equilíbrio de forças expressa no sistema $\{i\}$ escreve-se como:

$${}^i f_i - {}^i f_{i+1} = 0,$$

enquanto que a condição de equilíbrio de momentos (em relação a O_i) é:

$${}^i n_i - {}^i n_{i+1} + {}^i O_{i+1} \times (-{}^i f_{i+1}) = 0.$$

Se partirmos de uma descrição da força e do momento aplicados pela mão, podemos calcular as forças e momentos em cada ligamento, percorrendo o manipulador desde a mão até a base. Para isto, reescrevemos as equações acima na forma:

$${}^i f_i = {}^i f_{i+1}$$

$${}^i n_i = {}^i n_{i+1} + {}^i O_{i+1} \times {}^i f_{i+1}$$

Para exprimir essas equações em termos dos sistemas próprios dos ligamentos, utilizamos a matriz de rotação ${}_{i+1}^i R$:

$${}^i f_i = {}_{i+1}^i R \cdot {}^{i+1} f_{i+1}$$

$${}^i n_i = {}_{i+1}^i R \cdot {}^{i+1} n_{i+1} + {}^i O_{i+1} \times {}^i f_i$$

Nota: Lembrar que estas equações foram escritas desprezando o efeito da gravidade. Contudo, é simples considerá-lo, se desejado.

Por fim, resta determinar os torques ou forças nas juntas necessários para equilibrar as forças de reação e os momentos atuantes nos ligamentos. Todas as componentes de força e momento são suportadas pela própria estrutura do mecanismo, exceto o torque (no caso de junta rotacional) ou força (no caso de junta prismática) segundo o eixo da junta.

Assim, supondo tratar-se de junta rotacional, o torque necessário pode ser obtido projetando-se ${}^i n_i$ na direção do eixo da junta ${}^i \hat{Z}_i = [0 \ 0 \ 1]^T$:

$$\tau_i = {}^i n_i^T \cdot {}^i \hat{Z}_i$$

Ou seja, τ_i é a 3ª componente de ${}^i n_i$.

Quando se trata de junta prismática, a força requerida do atuador é

$$\varphi_i = {}^i f_i^T \cdot {}^i \hat{Z}_i,$$

o que significa que φ_i é a 3ª componente de ${}^i f_i$.

5.9.1 EXEMPLO 5.7

O manipulador da figura aplica uma força ${}^3 F$ no ambiente através de seu efetuador. Esta força é aplicada na origem de $\{3\}$. Determinar os torques nas juntas em função da configuração e da força ${}^3 F$. Despreze o peso próprio dos ligamentos.

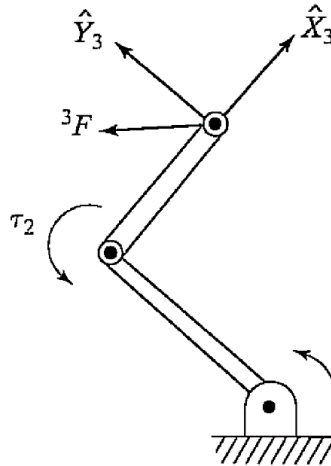


Figura 5.14: Exemplo 5.7

Vamos aplicar as equações

$$\begin{aligned} {}^i f_i &= {}^i R_{i+1} \cdot {}^{i+1} f_{i+1} \\ {}^i n_i &= {}^i R_{i+1} \cdot {}^{i+1} n_{i+1} + {}^i O_{i+1} \times {}^i f_i, \end{aligned}$$

partindo do último ligamento e caminhando em direção à base.

Como havíamos visto, para este manipulador:

$${}^0_1T = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; {}^1_2T = \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & L_1 \\ s_2 & c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; {}^2_3T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & L_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Podemos imaginar que o ambiente desempenha o papel do ligamento 3, de maneira que:

$${}^3f_3 = {}^3F = \begin{bmatrix} f_x & f_y & 0 \end{bmatrix}^T$$

$${}^3n_3 = 0$$

Daí:

$$i = 2: {}^2f_2 = {}^2_3R \cdot {}^3f_3 = I \cdot {}^3f_3 \Rightarrow {}^2f_2 = \begin{bmatrix} f_x & f_y & 0 \end{bmatrix}^T$$

$${}^2n_2 = {}^2_3R \cdot {}^3n_3 + {}^2O_3 \times {}^2f_2 = \begin{bmatrix} L_2 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \times \begin{bmatrix} f_x & f_y & 0 \end{bmatrix}^T$$

$${}^2n_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & L_2 f_y \end{bmatrix}^T$$

$$i = 1: {}^1f_1 = {}^1_2R \cdot {}^2f_2 = \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 \\ s_2 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_2 f_x - s_2 f_y \\ s_2 f_x + c_2 f_y \\ 0 \end{bmatrix}$$

$${}^1n_1 = {}^1_2R \cdot {}^2n_2 + {}^1O_2 \times {}^1f_1 = \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 \\ s_2 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ L_2 f_y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} c_2 f_x - s_2 f_y \\ s_2 f_x + c_2 f_y \\ 0 \end{bmatrix}$$

$${}^1n_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & L_1 (s_2 f_x + c_2 f_y) + L_2 f_y \end{bmatrix}^T$$

Portanto:

$$\tau_1 = L_1 (s_2 f_x + c_2 f_y) + L_2 f_y$$

$$\tau_2 = L_2 f_y$$

ou, em forma matricial,

$$\tau = \begin{bmatrix} L_1 s_2 & L_1 c_2 + L_2 \\ 0 & L_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \end{bmatrix}$$

Designando por ${}^3F = \begin{bmatrix} {}^3f_x & {}^3f_y \end{bmatrix}^T$, note que

$$\tau = {}^3J^T {}^3F,$$

o que não é uma simples coincidência, como vamos ver a seguir.

5.10 JACOBIANOS NO DOMÍNIO DA FORÇA

Nós obtivemos os torques nas juntas que equilibram as forças atuantes na mão (sem levar em conta o peso próprio do manipulador) no caso estático.

Quando há forças/torques em ação em um mecanismo que se desloca, é realizado trabalho. O Princípio do Trabalho Virtual permite tirar algumas conclusões acerca do caso estático considerando o deslocamento como infinitesimal. É oportuno lembrar que, supondo a inexistência de dissipação de energia, este princípio afirma que a condição de

equilíbrio de um conjunto de corpos interligados é que o trabalho realizado seja nulo para deslocamentos infinitesimais dos corpos compatíveis com as restrições impostas pelas interligações.

Como o trabalho tem a dimensão de energia, ele deve ser o mesmo quando medido em qualquer conjunto de coordenadas generalizadas. Ou seja, podemos igualar o trabalho realizado em correspondência a um deslocamento cartesiano com o associado a um deslocamento no espaço de juntas:

$$\mathcal{F}^T \delta \chi = \tau^T \delta q$$

onde $\mathcal{F} \in \mathbb{R}^6$ é o vetor de força e momento agindo no efetuador, $\delta \chi \in \mathbb{R}^6$ é o deslocamento Cartesiano infinitesimal do efetuador, $\tau \in \mathbb{R}^6$ é o vetor de torques/forças nas juntas e $\delta q \in \mathbb{R}^6$ é o vetor de deslocamento infinitesimal das juntas.

O *Jacobiano* referente aos deslocamentos linear e angular é definido por

$$\delta \chi = J \delta q$$

e, portanto,

$$\mathcal{F}^T J \delta q = \tau^T \delta q.$$

Como esta igualdade deve valer para δq arbitrário, então

$$\tau = J^T \mathcal{F}.$$

Esta equação é a forma geral da vista no caso particular do exemplo anterior.

A força e o *Jacobiano* devem ser expressos no mesmo sistema de coordenadas. Assim, quando o *Jacobiano* é escrito no sistema da base, então a força expressa no mesmo sistema é transformada no correspondente vetor de torques nas juntas, isto é,

$$\tau = {}^0 J^T {}^0 \mathcal{F}$$

Nota: De maneira geral, se J e \mathcal{F} são conhecidos em dois sistemas $\{A\}$ e $\{B\}$, isto é,

$$\begin{matrix} A J, & A \mathcal{F}, \\ B J, & B \mathcal{F}, \end{matrix}$$

temos que

$$\begin{matrix} A J = {}^A R \cdot {}^B J \\ A \mathcal{F} = {}^A R \cdot {}^B \mathcal{F}. \end{matrix}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \tau &= A J^T \cdot A \mathcal{F} = ({}^A R \cdot {}^B J)^T \cdot {}^A R \cdot {}^B \mathcal{F} \\ \tau &= ({}^B J)^T \cdot ({}^A R)^T \cdot {}^A R \cdot {}^B \mathcal{F} \\ \tau &= ({}^B J)^T \cdot {}^B \mathcal{F} \end{aligned}$$

Ou seja, o vetor de esforços nas juntas não depende do sistema de coordenadas onde são expressos J e \mathcal{F} (como era de se esperar!).

Quando o *Jacobiano*, para alguma configuração tem posto incompleto, há certas direções em que o efetuador não é capaz de exercer forças estaticamente. Na equação

$$\tau = {}^0 J^T {}^0 \mathcal{F},$$

se ${}^0 J$ é singular (supondo ${}^0 J$ quadrada), ${}^0 \mathcal{F}$ pode ser aumentado ou reduzido em certas direções (aquelas que definem o espaço nulo de ${}^0 J$) sem que isso afete o valor calculado de τ :

$$\begin{aligned} {}^0 \Delta \mathcal{F} \in N({}^0 J) &\Rightarrow {}^0 J^T {}^0 \Delta \mathcal{F} = 0 \\ \forall {}^0 \mathcal{F}, \tau: \tau &= {}^0 J^T {}^0 \mathcal{F} \Rightarrow \tau = {}^0 J^T ({}^0 \mathcal{F} + {}^0 \Delta \mathcal{F}) \end{aligned}$$

Por outro lado, quando o *Jacobiano* está próximo da singularidade, forças grandes no efetuador podem ser obtidas às custas de pequenos torques nas juntas. Por exemplo, consideremos um manipulador planar de dois ligamentos quase totalmente “esticado”, com

o efetuator em contato com uma superfície de reação. Nesta configuração, grandes forças podem ser exercidas com pequenos torques nas juntas.

Portanto, as singularidades se manifestam tanto no domínio da força, como no da posição.

LAC-PTC-EPI

6 DINÂMICA DO MANIPULADOR

6.1 INTRODUÇÃO

Até aqui nós consideramos questões relativas à cinemática e ao equilíbrio estático dos manipuladores. Neste capítulo, vamos tratar do problema dinâmico, a saber, de que forma o movimento do manipulador resulta dos torques/forças aplicados pelos atuadores e das forças externas.

Nós vamos tratar de dois problemas básicos. No primeiro, consideramos dado um ponto da trajetória (q, \dot{q}, \ddot{q}) e queremos determinar o vetor τ de torques/forças necessários nas juntas. Esta formulação da dinâmica é útil para o problema de controle. No segundo problema o objetivo é calcular de que forma o mecanismo se move sob a ação de um conjunto de torques/forças nas juntas. Este caso é útil para simulação.

6.2 ACELERAÇÃO DE UM CORPO RÍGIDO

As acelerações linear e angular são definidas, respectivamente, por

$${}^B\mathcal{V}_Q = \frac{d}{dt} {}^B V_Q = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{{}^B V_Q(t + \Delta t) - {}^B V_Q(t)}{\Delta t}$$

$${}^A\mathcal{E}_B = \frac{d}{dt} {}^A \Omega_B = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{{}^A \Omega_B(t + \Delta t) - {}^A \Omega_B(t)}{\Delta t}$$

É evidente que, da mesma forma que as velocidades, a aceleração linear está associada a um ponto, enquanto que a angular, a um sistema de referência. Além disso, quando o sistema em que é realizada a diferenciação é o da base, usamos as notações

$$\mathcal{V}_A = {}^0\mathcal{V}_{O_A} \quad {}^B\mathcal{V}_A = {}^B({}^0\mathcal{V}_{O_A})$$

$$\mathcal{E}_A = {}^0\mathcal{E}_A \quad {}^B\mathcal{E}_A = {}^B({}^0\mathcal{E}_A)$$

6.2.1 ACELERAÇÃO LINEAR

No Capítulo 5 vimos que a velocidade de um ponto ${}^B Q$ relativa a um sistema $\{A\}$ pode ser escrita como:

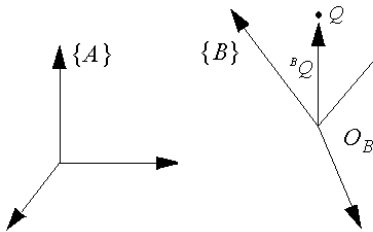


Figura 6.1: Sistemas de coordenadas $\{A\}$ e $\{B\}$.

$${}^A V_Q = {}^A R \cdot {}^B V_Q + {}^A \Omega_B \times {}^A R \cdot {}^B Q + {}^A V_{O_B} \quad (6.1)$$

Derivando ambos os membros em relação ao tempo,

$${}^A\mathcal{V}_Q = \frac{d}{dt}({}^A R \cdot {}^B V_Q) + {}^A \mathcal{E}_B \times {}^A R \cdot {}^B Q + {}^A \Omega_B \times \frac{d}{dt}({}^A R \cdot {}^B Q) + {}^A \mathcal{V}_{O_B} \quad (6.2)$$

Podemos manipular o primeiro e o penúltimo termos do 2º. membro da equação (6.2) das seguintes formas:

$$\bullet \quad \frac{d}{dt}({}^A R \cdot {}^B V_Q) = {}^A R \cdot {}^B \mathcal{V}_Q + {}^A \mathcal{R}^B V_Q$$

Ou seja,

$$\frac{d}{dt}({}^A R \cdot {}^B V_Q) = {}^A R \cdot {}^B \mathcal{V}_Q + {}^A \mathcal{R} \left({}^A R \right)^T \cdot {}^A R \cdot {}^B V_Q$$

Mas, como

$${}^A \mathcal{R} \left({}^A R \right)^T = {}^A S$$

então

$$\frac{d}{dt}({}^A R \cdot {}^B V_Q) = {}^A R \cdot {}^B \mathcal{V}_Q + {}^A S \cdot {}^A R \cdot {}^B V_Q,$$

e, portanto,

$$\frac{d}{dt}({}^A R \cdot {}^B V_Q) = {}^A R \cdot {}^B \mathcal{V}_Q + {}^A \Omega_B \times {}^A R \cdot {}^B V_Q. \quad (6.3)$$

$$\bullet \quad \frac{d}{dt}({}^A R \cdot {}^B Q) = {}^A R \cdot {}^B \mathcal{V}_Q + {}^A \mathcal{R}^B Q$$

Ou seja,

$$\frac{d}{dt}({}^A R \cdot {}^B Q) = {}^A R \cdot {}^B \mathcal{V}_Q + {}^A \mathcal{R} \left({}^A R \right)^T \cdot {}^A R \cdot {}^B Q,$$

e, usando novamente a identidade

$${}^A \mathcal{R} \left({}^A R \right)^T = {}^A S,$$

resulta

$$\frac{d}{dt}({}^A R \cdot {}^B Q) = {}^A R \cdot {}^B \mathcal{V}_Q + {}^A S \cdot {}^A R \cdot {}^B Q$$

Portanto,

$$\frac{d}{dt}({}^A R \cdot {}^B Q) = {}^A R \cdot {}^B \mathcal{V}_Q + {}^A \Omega_B \times {}^A R \cdot {}^B Q \quad (6.4)$$

Substituindo (6.3) e (6.4) em (6.2), vem

$${}^A \mathcal{V}_Q = {}^A R \cdot {}^B \mathcal{V}_Q + {}^A \Omega_B \times {}^A R \cdot {}^B V_Q + {}^A \mathcal{E}_B \times {}^A R \cdot {}^B Q + {}^A \Omega_B \times ({}^A R \cdot {}^B V_Q + {}^A \Omega_B \times {}^A R \cdot {}^B Q) + {}^A \mathcal{V}_{O_B},$$

isto é,

$${}^A \mathcal{V}_Q = {}^A R \cdot {}^B \mathcal{V}_Q + 2 {}^A \Omega_B \times {}^A R \cdot {}^B V_Q + {}^A \mathcal{E}_B \times {}^A R \cdot {}^B Q + {}^A \Omega_B \times ({}^A \Omega_B \times {}^A R \cdot {}^B Q) + {}^A \mathcal{V}_{O_B}$$

e, por fim,

$${}^A \mathcal{V}_Q = {}^A \mathcal{V}_{O_B} + {}^A R \cdot {}^B \mathcal{V}_Q + 2 {}^A \Omega_B \times {}^A R \cdot {}^B V_Q + {}^A \mathcal{E}_B \times {}^A R \cdot {}^B Q + {}^A \Omega_B \times ({}^A \Omega_B \times {}^A R \cdot {}^B Q)$$

Um caso particular importante é aquele em que ${}^B Q$ é constante.¹⁸

$${}^B V_Q = 0$$

¹⁸ Por exemplo, quando ${}^B Q$ = centro de massa do ligamento.

$${}^B\mathbf{v}_Q = 0$$

Neste caso, a expressão acima pode ser simplificada para

$${}^A\mathbf{v}_Q = {}^A\mathbf{v}_{O_B} + {}^A\mathbf{\dot{z}}_B \times {}^A\mathbf{R} \cdot {}^B\mathbf{Q} + {}^A\mathbf{\Omega}_B \times ({}^A\mathbf{\Omega}_B \times {}^A\mathbf{R} \cdot {}^B\mathbf{Q}) \quad ({}^B\mathbf{Q} = \text{cte})$$

6.2.2 ACELERAÇÃO ANGULAR

Consideremos $\{B\}$ girando em relação a $\{A\}$ com velocidade angular ${}^A\mathbf{\Omega}_B$ e $\{C\}$ em relação a $\{B\}$ com ${}^B\mathbf{\Omega}_C$. Para obter ${}^A\mathbf{\Omega}_C$, somamos os vetores descritos em $\{A\}$:

$${}^A\mathbf{\Omega}_C = {}^A\mathbf{\Omega}_B + {}^A\mathbf{R} \cdot {}^B\mathbf{\Omega}_C$$

Derivando em relação ao tempo:

$${}^A\mathbf{\dot{\Omega}}_C = {}^A\mathbf{\dot{\Omega}}_B + \frac{d}{dt} ({}^A\mathbf{R} \cdot {}^B\mathbf{\Omega}_C)$$

Ou seja,

$${}^A\mathbf{\dot{\Omega}}_C = {}^A\mathbf{\dot{\Omega}}_B + {}^A\mathbf{R} \cdot {}^B\mathbf{\dot{\Omega}}_C + {}^A\mathbf{\dot{R}} \cdot {}^B\mathbf{\Omega}_C,$$

e, portanto,

$${}^A\mathbf{\dot{\Omega}}_C = {}^A\mathbf{\dot{\Omega}}_B + {}^A\mathbf{R} \cdot {}^B\mathbf{\dot{\Omega}}_C + {}^A\mathbf{\dot{R}} \cdot ({}^B\mathbf{\Omega}_C)^T \cdot {}^A\mathbf{R} \cdot {}^B\mathbf{\Omega}_C,$$

que é o mesmo que

$${}^A\mathbf{\dot{\Omega}}_C = {}^A\mathbf{\dot{\Omega}}_B + {}^A\mathbf{R} \cdot {}^B\mathbf{\dot{\Omega}}_C + {}^A\mathbf{S} \cdot {}^A\mathbf{R} \cdot {}^B\mathbf{\Omega}_C.$$

Por fim,

$${}^A\mathbf{\dot{\Omega}}_C = {}^A\mathbf{\dot{\Omega}}_B + {}^A\mathbf{R} \cdot {}^B\mathbf{\dot{\Omega}}_C + {}^A\mathbf{\Omega}_B \times {}^A\mathbf{R} \cdot {}^B\mathbf{\Omega}_C$$

6.3 DISTRIBUIÇÃO DE MASSA

Para sistemas com 1 g.d.l. nós falamos frequentemente em massa de um corpo rígido. No caso de movimento rotacional em torno de um único eixo, a noção de momento de inércia é familiar. Para um corpo rígido que é livre de se mover em três dimensões, há um número infinito de possíveis eixos de rotação. No caso de rotação em torno de um eixo arbitrário, é necessária uma forma completa de caracterizar a distribuição de massa de um corpo rígido. Introduzimos então o conceito de tensor de inércia, que, para os nossos objetivos, pode ser encarado como uma generalização do momento de inércia de um corpo.

A figura a seguir mostra um corpo rígido e um sistema de referência fixo a ele (embora os tensores de inércia possam ser definidos com relação a qualquer sistema, vamos sempre considerá-los referidos a um sistema fixo ao próprio corpo).

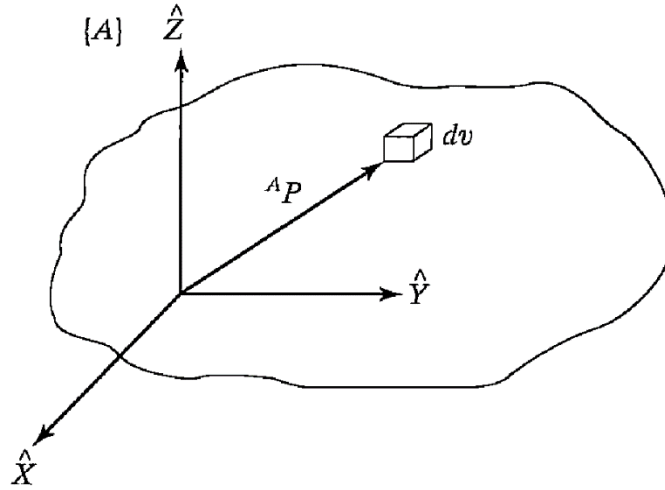


Figura 6.2: Tensor de inércia

O tensor de inércia relativo ao sistema $\{A\}$ é expresso na forma de uma matriz 3×3 :

$${}^A I = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix} = ({}^A I)^T$$

onde

$$I_{xx} = \iiint_V (y^2 + z^2) \rho \, dv$$

$$I_{xy} = \iiint_V xy \rho \, dv, \text{ etc...}$$

e ρ é a densidade do corpo.

I_{xx} , I_{yy} e I_{zz} são chamados momentos de inércia de massa. I_{xy} , I_{yz} e I_{xz} são chamados produtos de inércia de massa.

Suponhamos um sistema $\{C\}$ com a origem no centro de massa de um corpo e seja $\{A\}$ um sistema obtido após de uma translação de $\{C\}$. Designando por ${}^A O_C$

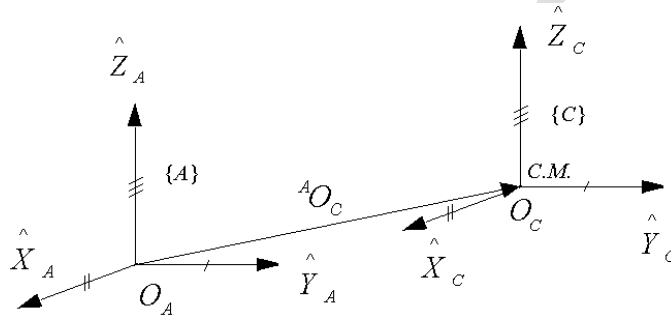


Figura 6.3: Sistemas de coordenadas $\{A\}$ e $\{C\}$

o vetor que define o centro de massa no sistema $\{A\}$, o *Teorema dos Eixos Paralelos* afirma que

$${}^A I = {}^C I + m \left[({}^A O_C)^T {}^A O_C I - {}^A O_C ({}^A O_C)^T \right]$$

onde m é a massa do corpo e I , a matriz identidade 3x3. Veja a demonstração no Apêndice I.

Outro caso importante referente à matriz de inércia consiste na mudança de sistemas de coordenadas associada a uma rotação. Consideremos um corpo ao qual estão fixados dois sistemas de coordenadas com origem comum, mas que diferem entre si por uma rotação:

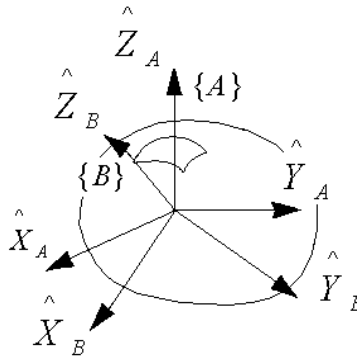


Figura 6.4: Rotação entre sistemas de coordenadas

Neste caso, vale:

$${}^B I = {}^B R \cdot {}^A I \cdot ({}^B R)^T$$

A prova desta propriedade encontra-se no Apêndice II.

É possível escolher o sistema $\{B\}$ de maneira a zerar os produtos de inércia. Neste caso, os eixos são chamados de eixos principais e os momentos de inércia, principais.

Por fim, cabe mencionar alguns fatos acerca dos tensores de inércia:

- Se dois sistemas definem um plano de simetria para o corpo, os produtos de inércia que têm como um dos índices a coordenada normal ao plano são nulos;
- Os momentos de inércias são sempre positivos; os produtos de inércia podem ter qualquer sinal;
- Os três momentos de inércia têm soma constante em sistemas que diferem apenas pela orientação (mesma origem!);
- Os autovalores do tensor de inércia são os momentos principais de inércia e os autovetores definem os eixos principais.

A maioria dos manipuladores tem ligamentos cuja geometria e materiais são relativamente complexos, de forma que o cálculo analítico do tensor de inércia é bastante trabalhoso, sendo úteis para isso programas de CAD.

6.4 EQUAÇÕES DE NEWTON E DE EULER

Vamos considerar os ligamentos dos manipuladores como sendo corpos rígidos, para os quais conhecemos a localização do centro de massa e o tensor de inércia.¹⁹

6.4.1 EQUAÇÃO DE NEWTON

Consideremos um corpo rígido cujo centro de massa se desloca com aceleração \ddot{x} sob a ação de uma força F nele aplicada.

¹⁹ Pressupõe sistema de coordenadas fixo ao corpo com a origem coincidente com o seu centro de massa.

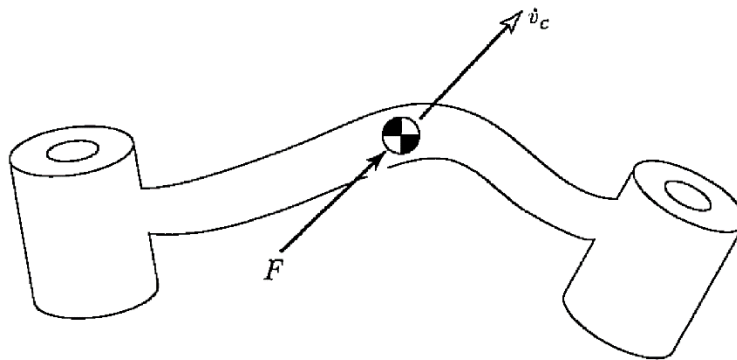


Figura 6.5: Força de *Newton* aplicada ao ligamento

Sendo m a massa do corpo, a lei de *Newton* se escreve como:

$$F = m \cdot \ddot{x}$$

6.4.2 EQUAÇÃO DE EULER

Consideremos agora um corpo rígido girando com velocidade angular ω e aceleração angular $\dot{\omega}$ sob ação do momento N em relação ao centro de massa.

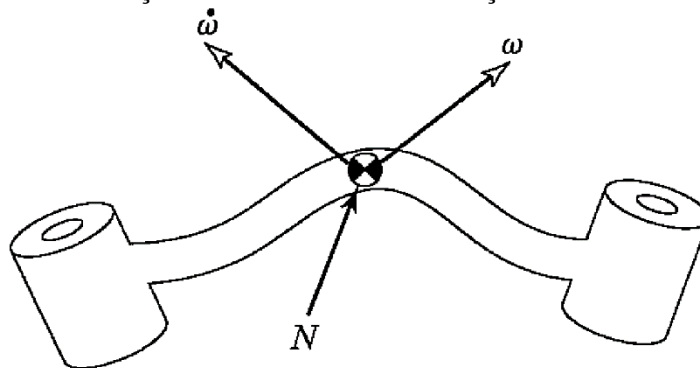


Figura 6.6: Ilustração para a equação de Euler.

Neste caso, vale a equação de *Euler*^{20, 21}:

$$N = {}^C I \cdot {}^C \dot{\omega} + {}^C \omega \times ({}^C I \cdot {}^C \omega)$$

onde $\{C\}$ está fixo ao corpo e é tal que sua origem se localiza no centro de massa e ${}^C \omega$ é a velocidade angular do corpo em relação a um sistema inercial, mas expressa em $\{C\}$. Veja a demonstração no Apêndice III.

O termo ${}^C \omega \times ({}^C I \cdot {}^C \omega)$ é chamado de giroscópico.

²⁰ Válida num sistema não inercial $\{C\}$, fixo ao corpo. **Num sistema inercial:** $N = M \frac{d}{dt} \omega$, onde M = **momento angular** (ver [2], pág. 155).

²¹ A vantagem de escrever esta equação no sistema fixo ao ligamento é que aí a matriz de inércia é constante. Num sistema inercial (o da base), esta matriz varia com o tempo. Outra vantagem é que alguns vetores posição são constantes nesse sistema (ver [2], pág. 155).

Uma das vantagens de escrever esta equação no sistema fixo ao ligamento é que assim a matriz de inércia resulta constante. Num sistema inercial (como, por exemplo, o da base) esta matriz varia com o tempo.

Outra vantagem é que alguns vetores posição são constantes nesse sistema.

6.5 FORMULAÇÃO DINÂMICA ITERATIVA DE NEWTON-EULER

Consideremos agora o problema do cálculo dos torques que correspondem a uma dada trajetória do manipulador. Admitimos conhecidas a posição (q), a velocidade (\dot{q}) e aceleração das juntas (\ddot{q}) e desejamos calcular os torques e forças nas juntas necessários para produzir esse movimento.

6.5.1 CÁLCULO DAS VELOCIDADES E ACELERAÇÕES DA BASE PARA O EFETUADOR

Para calcular as forças agem nos ligamentos é necessário obter a aceleração linear do centro de massa, além da velocidade e aceleração angulares do ligamento em cada instante.

Estes cálculos serão feitos partindo do ligamento 1 e caminhando em direção ao n .

Vamos, inicialmente, considerar o equacionamento da aceleração angular para juntas rotacionais e prismáticas e, em seguida, tratar da aceleração linear para os mesmos tipos de juntas.

Quanto à aceleração angular, havíamos visto que, quando $\{C\}$ gira em relação a $\{B\}$ com ${}^B\Omega_C$ e $\{B\}$, em relação a $\{A\}$ com ${}^A\Omega_B$, então:

$${}^A\dot{\Omega}_C = {}^A\dot{\Omega}_B + {}^A R_B \cdot {}^B\dot{\Omega}_C + {}^A\Omega_B \times {}^A R_B \cdot {}^B\Omega_C$$

Fazendo as seguintes correspondências:

$$\{A\} \leftrightarrow \{0\} = \{U\}$$

$$\{B\} \leftrightarrow \{i\}$$

$$\{C\} \leftrightarrow \{i+1\}$$

$$\{i+1\} = \{C\}$$

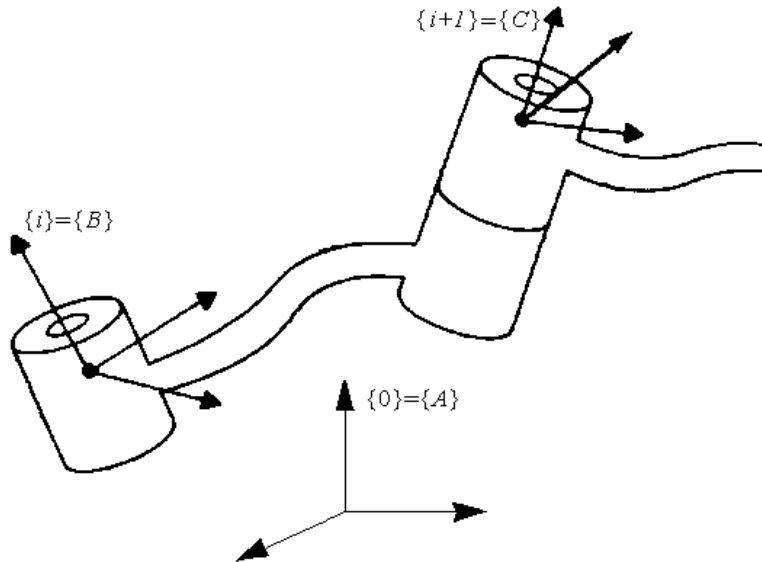


Figura 6.7: Sistemas de coordenadas.

esta igualdade fornece

$${}^0\dot{\Omega}_{i+1} = {}^0\dot{\Omega}_i + {}^0 R_i \cdot {}^i\dot{\Omega}_{i+1} + {}^0\Omega_i \times {}^0 R_i \cdot {}^i\Omega_{i+1}$$

Ou seja,

$$\omega_{i+1} = \omega_i + {}^0R_i \cdot \omega_{i+1} + \omega_i \times {}^0R_i \cdot \Omega_{i+1}$$

Quando a junta $i+1$ é rotacional,

$${}^i\Omega_{i+1} = {}^iR_{i+1} \cdot {}^{i+1}\hat{Z}_{i+1}$$

e, portanto,

$${}^i\omega_{i+1} = {}^iR_{i+1} \cdot ({}^{i+1}\hat{Z}_{i+1}) + {}^iR_{i+1} \cdot ({}^{i+1}\hat{Z}_{i+1}).$$

Logo,

$${}^i\omega_{i+1} = {}^iR_{i+1} \cdot {}^{i+1}\hat{Z}_{i+1} + {}^i\Omega_{i+1} \times {}^iR_{i+1} \cdot {}^{i+1}\hat{Z}_{i+1},$$

de onde resulta que

$${}^i\omega_{i+1} = {}^iR_{i+1} \cdot {}^{i+1}\hat{Z}_{i+1},$$

pois

$${}^iR_{i+1} \cdot {}^{i+1}\hat{Z}_{i+1} = {}^i\Omega_{i+1}.$$

Substituindo as expressões de ${}^i\omega_{i+1}$ e de ${}^i\Omega_{i+1}$ na equação anterior, tem-se

$$\omega_{i+1} = \omega_i + {}^0R_i \cdot {}^iR_{i+1} \cdot {}^{i+1}\hat{Z}_{i+1} + \omega_i \times {}^0R_i \cdot {}^iR_{i+1} \cdot {}^{i+1}\hat{Z}_{i+1}.$$

Pré-multiplicando ambos os membros por ${}^{i+1}_0R$, temos:

$${}^{i+1}\omega_{i+1} = {}^{i+1}_0R \cdot \omega_i + {}^{i+1}_0R \cdot {}^iR_{i+1} \cdot {}^{i+1}\hat{Z}_{i+1} + {}^{i+1}_0R \cdot (\omega_i \times {}^0R_i \cdot {}^iR_{i+1} \cdot {}^{i+1}\hat{Z}_{i+1})$$

Mas,

$$R(a \times b) = (Ra) \times (Rb)$$

isto é, girar o produto vetorial é o mesmo que girar os fatores antecipadamente. Portanto,

$${}^{i+1}\omega_{i+1} = {}^{i+1}_0R \cdot \omega_i + {}^{i+1}_0R \cdot {}^iR_{i+1} \cdot {}^{i+1}\hat{Z}_{i+1} + ({}^{i+1}_0R \cdot \omega_i) \times ({}^{i+1}_0R \cdot {}^iR_{i+1} \cdot {}^{i+1}\hat{Z}_{i+1})$$

isto é,

$${}^{i+1}\omega_{i+1} = {}^{i+1}_0R \cdot \omega_i + {}^{i+1}_0R \cdot {}^iR_{i+1} \cdot {}^{i+1}\hat{Z}_{i+1} + {}^{i+1}_0R \cdot \omega_i \times {}^{i+1}_0R \cdot {}^iR_{i+1} \cdot {}^{i+1}\hat{Z}_{i+1} \quad \text{(junta i+1 rotacional)}$$

Quando a junta $i+1$ é prismática, a aceleração angular do ligamento $i+1$ é a mesma do ligamento i :

$${}^{i+1}\omega_{i+1} = {}^{i+1}_0R \cdot \omega_i \quad \text{(junta i+1 prismática)}$$

Vejamos agora o equacionamento da aceleração linear da origem do sistema $\{i+1\}$.

Consideremos, em primeiro lugar, o caso em que a junta $i+1$ é rotacional. Aqui, a origem do sistema $\{i+1\}$ é fixa em relação ao sistema $\{i\}$ e podemos utilizar a expressão

$${}^A\mathcal{V}_Q = {}^A\mathcal{V}_{O_B} + {}^A\Omega_B \times ({}^A\Omega_B \times {}^A R_B Q) + {}^A\omega_B \times {}^A R_B Q$$

particularizada para a situação em que

$${}^B\mathcal{V}_Q = 0$$

$$\text{e } {}^B\mathcal{V}_Q = 0,$$

fazendo a seguinte analogia:

$$\{A\} \leftrightarrow \{0\}$$

$$\{B\} \leftrightarrow \{i\}$$

$$Q \leftrightarrow \text{origem de } \{i+1\}$$

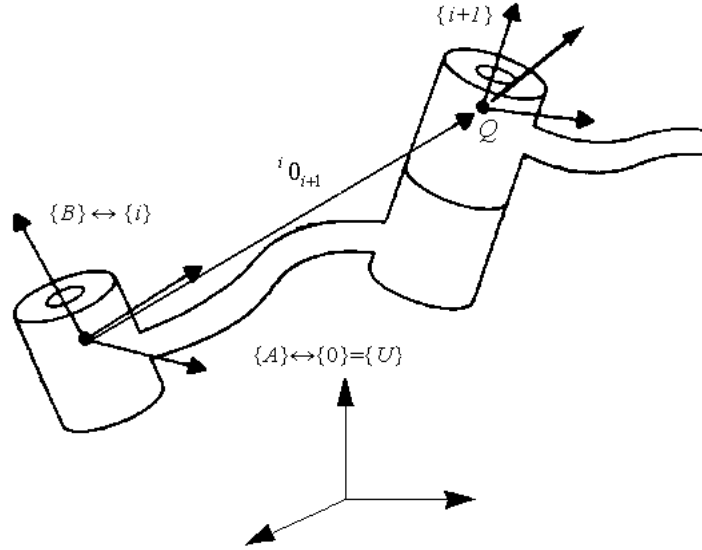


Figura 6.8: Sistemas de coordenadas.

Com isso,

$$\mathcal{V}_{i+1} = \mathcal{V}_i + \omega_i \times (\omega_i \times {}^0 R_i {}^i O_{i+1}) + \mathcal{D}_i \times {}^0 R_i {}^i O_{i+1}$$

Para expressar \mathcal{V}_{i+1} no sistema $\{i+1\}$, pré-multiplicamos ambos os membros da equação acima por ${}^{i+1}_0 R (= {}^{i+1}_i R {}^i_0 R)$:

$${}^{i+1} \mathcal{V}_{i+1} = {}^{i+1}_i R {}^i \mathcal{V}_i + {}^{i+1}_i R {}^i_0 R [\omega_i \times (\omega_i \times {}^0 R_i {}^i O_{i+1})] + {}^{i+1}_i R {}^i_0 R (\mathcal{D}_i \times {}^0 R_i {}^i O_{i+1})$$

ou seja,

$${}^{i+1} \mathcal{V}_{i+1} = {}^{i+1}_i R [{}^i \mathcal{V}_i + {}^i_0 R \omega_i \times ({}^i_0 R \omega_i \times {}^i_0 R {}^i O_{i+1}) + {}^i_0 R \mathcal{D}_i \times {}^i O_{i+1}]$$

e, portanto,

$${}^{i+1} \mathcal{V}_{i+1} = {}^{i+1}_i R [{}^i \mathcal{V}_i + {}^i \omega_i \times ({}^i \omega_i \times {}^i O_{i+1}) + {}^i \mathcal{D}_i \times {}^i O_{i+1}] \quad (\text{junta } i+1 \text{ rotacional})$$

Quando a junta $i+1$ é prismática, utilizamos a forma geral:

$${}^A \mathcal{V}_Q = {}^A \mathcal{V}_{O_B} + {}^A R_B {}^B \mathcal{V}_Q + 2 {}^A \Omega_B \times {}^A R_B {}^B V_Q + {}^A \mathcal{D}_B \times {}^A R_B {}^B Q + {}^A \Omega_B \times ({}^A \Omega_B \times {}^A R_B {}^B Q)$$

e fazemos a seguinte correspondência:

$$\begin{aligned} \{A\} &\leftrightarrow \{0\} = \{U\} \\ \{B\} &\leftrightarrow \{i\} \\ Q &\leftrightarrow \text{origem de } \{i+1\} \end{aligned}$$

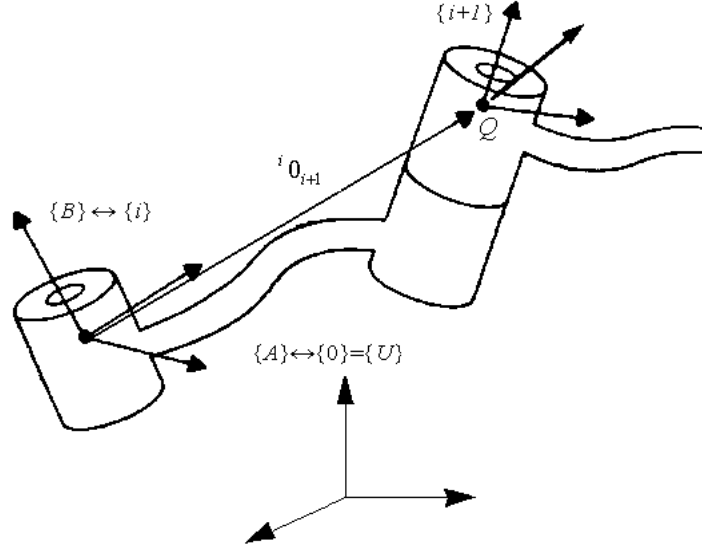


Figura 6.9: Sistemas de coordenadas.

Assim,

$$\mathcal{V}_{i+1} = \mathcal{V}_i + {}^iR \cdot {}^i\mathcal{V}_{i+1} + 2\omega_i \times {}^iR \cdot {}^iV_{i+1} + \mathcal{O}_i \times {}^iR \cdot {}^iO_{i+1} + \omega_i \times (\omega_i \times {}^iR \cdot {}^iO_{i+1}) \quad (6.5)$$

onde ${}^iV_{i+1}$ é a velocidade da origem do sistema $\{i+1\}$ relativo ao sistema $\{i\}$ e expressa no sistema $\{i\}$, isto é:

$${}^iV_{i+1} = {}^iR \cdot \mathcal{Z}_{i+1} \cdot \dot{\hat{Z}}_{i+1}$$

Derivando ambos os membros em relação ao tempo, tem-se

$${}^i\mathcal{V}_{i+1} = {}^iR \cdot (\mathcal{Z}_{i+1} \cdot \dot{\hat{Z}}_{i+1}) + {}^iR \cdot (\dot{\mathcal{Z}}_{i+1} \cdot \hat{Z}_{i+1})$$

e, portanto,

$${}^i\mathcal{V}_{i+1} = {}^iR \cdot \mathcal{Z}_{i+1} \cdot \dot{\hat{Z}}_{i+1} + {}^i\Omega_{i+1} \times {}^iR \cdot \mathcal{Z}_{i+1} \cdot \hat{Z}_{i+1}.$$

Pré-multiplicando ambos os membros da equação (6.5) por ${}^{i+1}R = {}^iR \cdot {}^iR$, vem:

$${}^{i+1}\mathcal{V}_{i+1} = {}^{i+1}R \cdot \mathcal{V}_i + {}^{i+1}R \cdot \mathcal{Z}_{i+1} \cdot \dot{\hat{Z}}_{i+1} + 2{}^{i+1}R \cdot (\omega_i \times {}^iR \cdot \mathcal{Z}_{i+1} \cdot \hat{Z}_{i+1}) + {}^{i+1}R \cdot (\mathcal{O}_i \times {}^iR \cdot {}^iO_{i+1}) + {}^{i+1}R \cdot [\omega_i \times (\omega_i \times {}^iR \cdot {}^iO_{i+1})]$$

Mas,

$$2{}^{i+1}R \cdot (\omega_i \times {}^iR \cdot \mathcal{Z}_{i+1} \cdot \hat{Z}_{i+1}) = 2({}^{i+1}\omega_i \times \mathcal{Z}_{i+1} \cdot \hat{Z}_{i+1}) = 2({}^{i+1}\omega_{i+1} \times \mathcal{Z}_{i+1} \cdot \hat{Z}_{i+1})$$

pois a junta $i+1$ é prismática.

Resumindo,

$${}^{i+1}\mathcal{V}_{i+1} = {}^{i+1}R \cdot [\mathcal{V}_i + \mathcal{O}_i \times {}^iR \cdot {}^iO_{i+1} + \omega_i \times (\omega_i \times {}^iR \cdot {}^iO_{i+1})] + \mathcal{Z}_{i+1} \cdot \dot{\hat{Z}}_{i+1} + 2({}^{i+1}\omega_{i+1} \times \mathcal{Z}_{i+1} \cdot \hat{Z}_{i+1})$$

(junta $i+1$ prismática).

6.5.2 FORÇA E TORQUES ATUANTES NUM LIGAMENTO

Tendo calculado a aceleração angular e a aceleração linear do centro de massa do ligamento, podemos aplicar as equações de *Newton-Euler* para calcular a força e o torque resultantes:

$$F_i = m_i \cdot \mathcal{V}_i \Rightarrow {}^iF_i = m_i \cdot {}^iR \cdot \mathcal{V}_i = m_i \cdot {}^i\mathcal{V}_i$$

$${}^i N_i = {}^C I_i \cdot {}^i \dot{\omega}_i + {}^i \omega_i \times {}^C I_i \cdot {}^i \omega_i$$

6.5.3 CÁLCULO DAS FORÇAS E TORQUES DO EFETUADOR PARA A BASE

Para obter a força resultante em cada ligamento, é necessário calcular a aceleração linear do seu centro de massa. Consideramos então um sistema $\{C_i\}$ fixado ao ligamento i , com origem no centro de massa deste e mesma orientação de $\{i\}$.

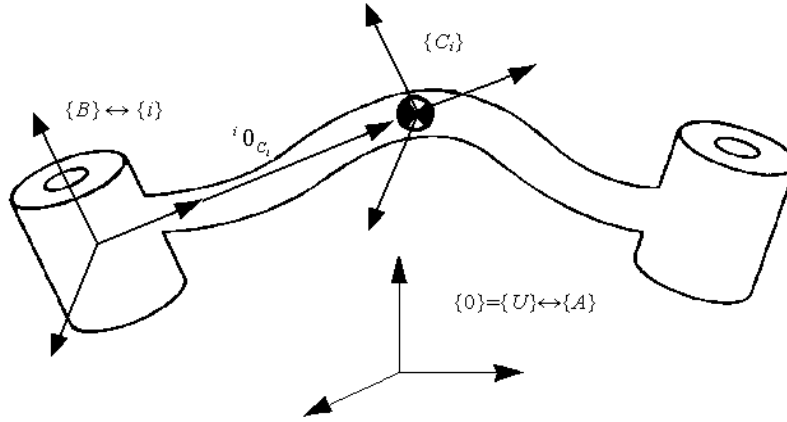


Figura 6.10: Sistemas de coordenadas para o ligamento i .

Aplicando novamente a equação

$${}^A \dot{V}_Q = {}^A \dot{V}_{O_B} + {}^A \Omega_B \times ({}^A \Omega_B \times {}^A R \cdot {}^B Q) + {}^A \dot{\omega}_B \times {}^A R \cdot {}^B Q$$

com as seguintes correspondências:

$$\{A\} \leftrightarrow \{0\} = \{U\}$$

$$\{B\} \leftrightarrow \{i\}$$

$$Q \leftrightarrow O_{C_i}$$

temos:

$$\dot{\omega}_{C_i} = \dot{\omega}_i + \omega_i \times (\omega_i \times {}^0 R \cdot {}^i O_{C_i}) + \dot{\omega}_i \times {}^0 R \cdot {}^i O_{C_i}$$

Pré-multiplicando ambos os membros por ${}^0 R$, vem:

$${}^i \dot{\omega}_{C_i} = {}^i \dot{\omega}_i + {}^i \omega_i \times ({}^i \omega_i \times {}^i O_{C_i}) + {}^i \dot{\omega}_i \times {}^i O_{C_i}$$

Tendo calculado as forças e torques atuantes em cada ligamento, resta calcular os torques nas juntas que produzem esses torques e forças líquidas em cada ligamento.

Isto pode ser feito escrevendo as equações de balanço de forças e momentos no ligamento.

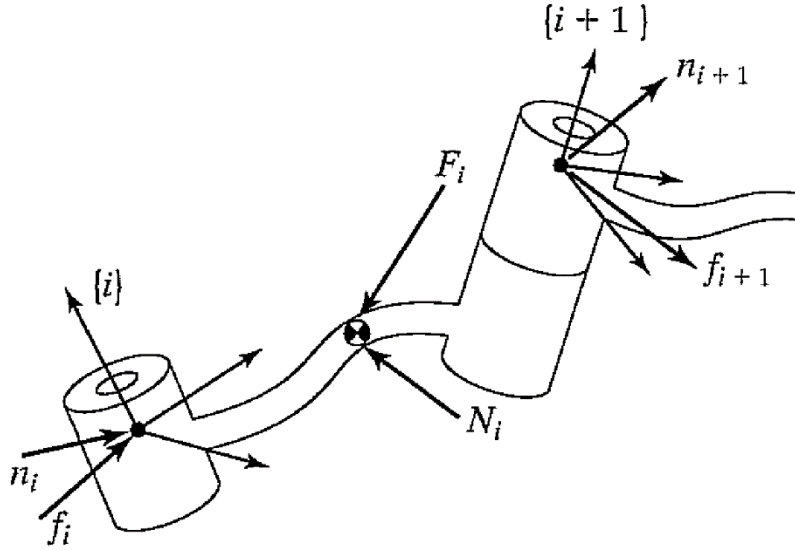


Figura 6.11: Forças e torques no ligamento i .

Considere-se, por enquanto, que o manipulador não esteja sujeito à ação da gravidade – no item 6.5.6 adiante esta questão será tratada. Cada ligamento está sujeito a forças e torques exercidos sobre ele por seus vizinhos, além da força e torque inerciais. Sejam, então,

f_i = força exercida sobre o ligamento i pelo $i-1$ no ponto O_i

n_i = torque exercido sobre o ligamento i pelo $i-1$

Temos que a força resultante iF_i sobre o ligamento é a soma das forças que agem sobre ele, isto é,

$${}^iF_i = f_i - {}^{i-1}R^{i+1}f_{i+1}.$$

Somando os momentos em relação ao centro de massa: ${}^iN_i = \sum$ momentos atuantes

$${}^iN_i = {}^in_i - {}^{i-1}n_{i+1} + ({}^iO_{C_i} \times {}^if_i) + ({}^{i-1}O_{i+1} - {}^iO_{C_i}) \times ({}^{i-1}f_{i+1})$$

ou seja,

$${}^iN_i = {}^in_i - {}^{i-1}n_{i+1} - {}^iO_{C_i} \times ({}^if_i - {}^{i-1}f_{i+1}) - ({}^{i-1}O_{i+1} - {}^iO_{C_i}) \times {}^if_{i+1}$$

Portanto:

$${}^iN_i = {}^in_i - {}^{i-1}R^{i+1}n_{i+1} - {}^iO_{C_i} \times {}^iF_i - ({}^{i-1}O_{i+1} - {}^iO_{C_i}) \times {}^{i-1}R^{i+1}f_{i+1}$$

Por fim, rearranjamos os termos para que as equações fiquem na forma de recorrências do ligamento $i+1$ para o i :

$${}^if_i = {}^{i-1}R^{i+1}f_{i+1} + {}^iF_i \quad (i = n-1, n-2, \dots, 1, 0)$$

$${}^in_i = {}^iN_i + {}^{i-1}R^{i+1}n_{i+1} + {}^iO_{C_i} \times {}^iF_i + ({}^{i-1}O_{i+1} - {}^iO_{C_i}) \times {}^{i-1}R^{i+1}f_{i+1} \quad (i = n-1, n-2, \dots, 1, 0)$$

Estas equações são análogas àsquelas obtidas no capítulo 5 para o problema estático, incluindo-se porém aqui os termos inerciais. Da mesma forma que fizemos lá, para o caso em que a junta i é rotacional, o torque τ_i na junta é dado por

$$\tau_i = {}^in_i^T \cdot {}^i\hat{Z}_i,$$

enquanto que, se a junta i é prismática, a força ϕ_i na junta é

$$\phi_i = {}^if_i^T \cdot {}^i\hat{Z}_i.$$

Note que, para um robô em movimento livre no espaço,

$${}^{n+1}f_{n+1} = 0$$

$${}^{n+1}n_{n+1} = 0$$

Se o efetuador estiver em contato com o ambiente, então deve-se levar em conta essa interação através de ${}^{n+1}f_{n+1}$ e/ou ${}^{n+1}n_{n+1}$ não nulos.

6.5.4 O ALGORITMO ITERATIVO DE NEWTON-EULER

O algoritmo para calcular o torque/força nas juntas a partir do movimento destas compõe-se de duas etapas:

- i. na primeira, as velocidades e acelerações dos ligamentos são calculadas do ligamento l até o n e as equações de *Newton-Euler*, aplicadas a cada ligamento;
- ii. as forças e torques de interação e os esforços nas juntas são calculados do ligamento n para o ligamento l .

6.5.5 RESUMO

1ª etapa: $i = 0 \rightarrow n-1$

$${}^{i+1}\omega_{i+1} = {}^{i+1}R.^i\omega_i + \mathcal{E}_{i+1}^{i+1} \hat{Z}_{i+1} \quad (\text{junta } i+1 \text{ rotacional})$$

ou

$${}^{i+1}\omega_{i+1} = {}^{i+1}R.^i\omega_i \quad (\text{junta } i+1 \text{ prismática})$$

$${}^{i+1}\mathcal{E}_{i+1} = {}^{i+1}R.^i\mathcal{E}_i + \mathcal{E}_{i+1}^{i+1} \hat{Z}_{i+1} + {}^{i+1}R.^i\omega_i \times \mathcal{E}_{i+1}^{i+1} \hat{Z}_{i+1} \quad (\text{junta } i+1 \text{ rotacional})$$

ou

$${}^{i+1}\mathcal{E}_{i+1} = {}^{i+1}R.^i\mathcal{E}_i \quad (\text{junta } i+1 \text{ prismática})$$

$${}^{i+1}\mathcal{E}_{i+1} = {}^{i+1}R.^i\left[\mathcal{E}_i \times {}^iO_{i+1} + {}^i\omega_i \times ({}^i\omega_i \times {}^iO_{i+1}) + {}^i\mathcal{E}_i\right] \quad (\text{junta } i+1 \text{ rotacional})$$

ou

$${}^{i+1}\mathcal{E}_{i+1} = {}^{i+1}R.^i\left[\mathcal{E}_i \times {}^iO_{i+1} + {}^i\omega_i \times ({}^i\omega_i \times {}^iO_{i+1}) + {}^i\mathcal{E}_i\right] + 2({}^{i+1}\omega_{i+1} \times \mathcal{E}_{i+1}^{i+1} \hat{Z}_{i+1}) + \mathcal{E}_{i+1}^{i+1} \hat{Z}_{i+1} \quad (\text{junta } i+1 \text{ prismática})$$

$${}^{i+1}\mathcal{E}_{i+1} = {}^{i+1}\mathcal{E}_{i+1} \times {}^{i+1}O_{C_{i+1}} + {}^{i+1}\omega_{i+1} \times ({}^{i+1}\omega_{i+1} \times {}^{i+1}O_{C_{i+1}}) + {}^{i+1}\mathcal{E}_{i+1}$$

$${}^{i+1}F_{i+1} = m_{i+1} \cdot {}^{i+1}\mathcal{E}_{i+1}$$

$${}^{i+1}N_{i+1} = {}^{C_{i+1}}I_{i+1} \cdot {}^{i+1}\mathcal{E}_{i+1} + {}^{i+1}\omega_{i+1} \times ({}^{C_{i+1}}I_{i+1} \cdot {}^{i+1}\omega_{i+1})$$

2ª etapa: $i = n \rightarrow 1$

$${}^i f_i = {}^iR.^{i+1}f_{i+1} + {}^iF_i$$

$${}^i n_i = {}^iN_i + {}^{i+1}R.^{i+1}n_{i+1} + {}^iO_{C_i} \times {}^iF_i + {}^iO_{i+1} \times {}^{i+1}R.^{i+1}f_{i+1}$$

$$\tau_i = {}^i n_i^T \cdot {}^i \hat{Z}_i \quad (\text{junta } i \text{ rotacional})$$

ou

$$\varphi_i = {}^i f_i^T \cdot {}^i \hat{Z}_i \quad (\text{junta } i \text{ prismática})$$

6.5.6 FORÇA DE GRAVIDADE

Para levar em conta o efeito da gravidade sobre o manipulador, basta fazer

$${}^0 \mathbf{x}_g = G,$$

onde o vetor G tem a magnitude do vetor aceleração da gravidade local, mas aponta para a direção oposta. Isto é equivalente a considerar que a base do robô apresenta uma aceleração de $1g$ para cima.

Esta aceleração produz sobre o sistema exatamente o mesmo efeito que a gravidade, sem que isso acrescente qualquer esforço computacional ou complexidade ao modelo.

6.6 FORMA ITERATIVA X FORMA FECHADA

As equações resumidas no item 6.5.5 podem ser usadas de duas formas: como um algoritmo para cálculo numérico dos esforços nas juntas ou como um procedimento que pode ser utilizado analiticamente para obter as equações de movimento do manipulador.

O uso numérico das equações é atraente porque elas se aplicam a qualquer robô.

Entretanto, com frequência nós temos interesse em melhorar nossa compreensão a respeito da estrutura das equações, da importância relativa dos diversos termos que nelas comparecem, etc. Por isso, muitas vezes, é importante obter as equações em forma fechada.

6.7 EXEMPLO

Nesta seção, [1] apresenta a obtenção das equações de movimento de um robô planar com dois g.d.l..

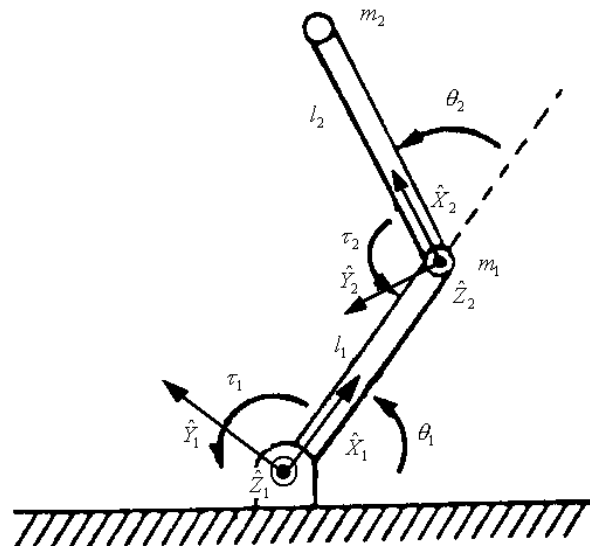


Figura 6.12: Robô com dois graus de liberdade (Fonte - Craig, 1989)

Por simplicidade, admite-se que as massas dos ligamentos se concentram nas extremidades destes. Com isso,

$${}^1O_{C_1} = l_1 \cdot {}^1\hat{X}_1$$

$${}^2O_{C_2} = l_2 \cdot {}^2\hat{X}_2$$

Como as massas são supostas pontuais,

$${}^{C_1}I_1 = 0$$

$${}^{C_2}I_2 = 0.$$

O efetuador se move livremente no espaço e, portanto,

$$f_3 = 0$$

$$n_3 = 0.$$

A base do manipulador está em repouso:

$$\omega_0 = 0$$

$$\alpha_0 = 0$$

mas, para considerar o efeito da gravidade, adota-se

$${}^0\hat{X}_0 = g \cdot {}^0\hat{Y}_0.$$

A matriz de rotação entre ligamentos consecutivos é dada por

$${}^{i+1}_i R = \begin{bmatrix} c_{i+1} & s_{i+1} & 0 \\ -s_{i+1} & c_{i+1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Utilizando o algoritmo do item 6.5.5 obtém-se:

$$\begin{aligned} \tau_1 &= m_2 \cdot l_2^2 \cdot (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) + m_2 \cdot l_1 \cdot l_2 \cdot c_2 \cdot (2\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) + (m_1 + m_2) \cdot l_1^2 \cdot \ddot{\theta}_1 - m_2 \cdot l_1 \cdot l_2 \cdot s_2 \cdot \ddot{\theta}_2 - 2m_2 \cdot l_1 \cdot l_2 \cdot s_2 \cdot \dot{\theta}_1 \cdot \dot{\theta}_2 + m_2 \cdot l_2 \cdot g \cdot c_{12} + (m_1 + m_2) \cdot l_1 \cdot g \cdot c_1 \\ \tau_2 &= m_2 \cdot l_1 \cdot l_2 \cdot c_2 \cdot \ddot{\theta}_1 + m_2 \cdot l_1 \cdot l_2 \cdot s_2 \cdot \ddot{\theta}_1 + m_2 \cdot l_2 \cdot g \cdot c_{12} + m_2 \cdot l_2^2 \cdot (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \end{aligned}$$

Note-se a complexidade das equações mesmo para o caso simples de 2g.d.l. com massas pontuais. As equações para 6 g.d.l. são tenebrosas!

6.8 ESTRUTURA DAS EQUAÇÕES DINÂMICAS

Quando as equações de *Newton-Euler* são usadas para se obter o modelo matemático de um manipulador analiticamente, resulta uma equação da forma²²

$$\tau = M(q)\ddot{q} + V(q, \dot{q}) + G(q)$$

onde $M(q) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $M(q) = M'(q) > 0$, é a matriz de massa do manipulador, $V(q, \dot{q}) \in \mathbb{R}^n$ é um vetor de torques centrífugos e de Coriolis e $G(q) \in \mathbb{R}^n$ é um vetor de torques de gravidade.

6.8.1 EXEMPLO 6.3

Para o manipulador visto acima, podemos identificar

$$M(\theta) = \begin{bmatrix} m_2 \cdot l_2^2 + 2m_2 \cdot l_1 \cdot l_2 \cdot c_2 + l_1^2 (m_1 + m_2) & m_2 \cdot l_2^2 + m_2 \cdot l_1 \cdot l_2 \cdot c_2 \\ m_2 \cdot l_2^2 + m_2 \cdot l_1 \cdot l_2 \cdot c_2 & m_2 \cdot l_2^2 \end{bmatrix}$$

²² Esta equação é denominada, impropriamente, *Equação no Espaço de Estados* (porque V depende da posição e velocidade).

coletando os termos que multiplicam $\dot{\theta}$ (e que são funções de θ apenas).

O termo $V(\theta, \dot{\theta})$ contém todos os termos que dependem das velocidades das juntas:

$$V(\theta, \dot{\theta}) = \begin{bmatrix} -m_2 \cdot l_1 \cdot l_2 \cdot s_2 \cdot \dot{\theta}_2^2 - 2m_2 \cdot l_1 \cdot l_2 \cdot s_2 \cdot \dot{\theta}_1 \cdot \dot{\theta}_2 \\ m_2 \cdot l_1 \cdot l_2 \cdot s_2 \cdot \dot{\theta}_1^2 \end{bmatrix}$$

Os termos que dependem do quadrado das velocidades são causados por forças centrífugas, enquanto que aqueles que contêm produtos de duas velocidades de juntas distintas, o são por forças de Coriolis.

A parcela de gravidade $G(\theta)$ contém os termos que dependem apenas da posição dos ligamentos (e da aceleração da gravidade). Assim,

$$G(\theta) = \begin{bmatrix} m_2 \cdot l_2 \cdot g \cdot c_{12} + (m_1 + m_2) \cdot l_1 \cdot g \cdot c_1 \\ m_2 \cdot l_2 \cdot g \cdot c_{12} \end{bmatrix}$$

Às vezes, a equação dinâmica do manipulador é escrita na forma

$$\tau = M(q)\ddot{q} + B(q)\dot{q}\dot{q} + C(q)\dot{q} + G(q)$$

onde $B(q) \in \mathbb{R}^{n \times \frac{n(n-1)}{2}}$ é uma matriz de coeficientes de Coriolis,

$$[B] = \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \dot{q}_2 & \dot{q}_1 \dot{q}_3 & \dots & \dot{q}_{n-1} \dot{q}_n \end{bmatrix}^T,$$

$C(q) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é uma matriz de coeficientes centrífugos e

$$[C] = \begin{bmatrix} \dot{q}_1^2 & \dot{q}_2^2 & \dots & \dot{q}_n^2 \end{bmatrix}^T.$$

Esta equação é chamada de equação no espaço de configuração porque as matrizes são funções apenas da posição do manipulador. Nós vamos utilizar esta equação quando tratarmos do problema de controle.

6.9 FORMULAÇÃO LAGRANGEANA

A abordagem de *Newton-Euler* baseia-se na análise das forças e momentos que agem sobre cada ligamento. Enquanto este enfoque pode ser visto como de equilíbrio de forças, a formulação *Lagrangeana* está baseada na energia.

Evidentemente, para um mesmo manipulador, as duas abordagens conduzem às mesmas equações.

Inicialmente, desenvolvemos uma expressão para a energia cinética do manipulador. Para o ligamento i , a energia cinética k_i é dada por²³

$$k_i = \frac{1}{2} m_i \cdot v_{C_i}^T \cdot v_{C_i} + \frac{1}{2} {}^i \omega_i^T \cdot {}^i I_i \cdot {}^i \omega_i^{24}$$

e, portanto, a energia cinética do manipulador é

$$k = \sum_{i=1}^n k_i$$

Para um manipulador dado, v_{C_i} e ${}^i \omega_i$ são funções de q e \dot{q} e, portanto, $k = k(q, \dot{q})$. Na verdade, pode-se mostrar que

²³ Note que $v_{C_i}^T \cdot v_{C_i} = |v_{C_i}|^2$, não importando o sistema de coordenadas para expressar v_{C_i} .

²⁴ Ver capítulo 5: ${}^i v_{C_i} = {}^i v_i + {}^i \omega_i \times {}^i O_{C_i}$.

$$k(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q}$$

Como

$$M(q) = M^T(q) > 0,$$

então

$$k(q, \dot{q}) > 0 \quad (\forall \dot{q} \neq 0)$$

Em relação ao plano horizontal que passa pela origem do sistema $\{0\}$, a energia potencial do i -ésimo ligamento, u_i , pode ser escrita como

$$u_i = -m_i \cdot {}^0g^T \cdot {}^0O_{C_i},$$

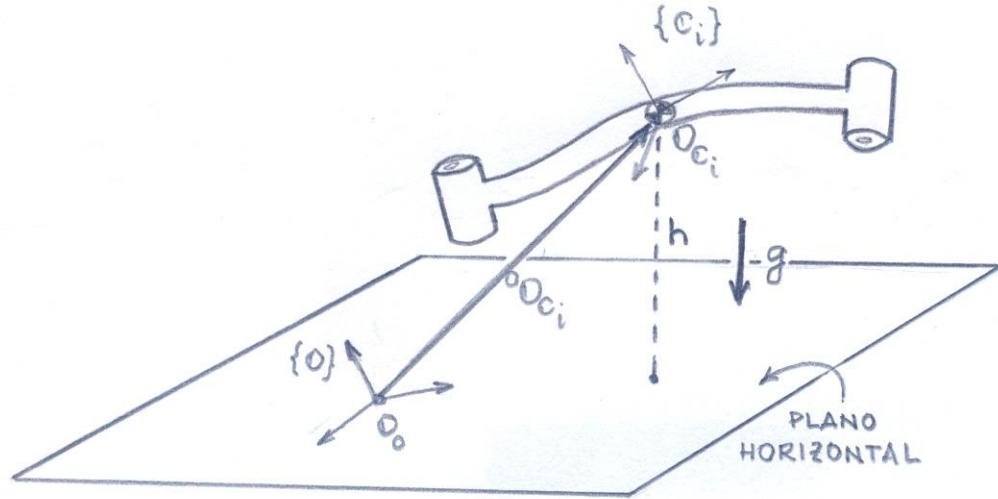


Figura 6.13: Ilustração para o cálculo da energia potencial.

onde 0g é o vetor aceleração da gravidade, ${}^0O_{C_i}$ é o vetor posição do centro de massa do ligamento, ambos expressos no sistema da base.

A energia potencial total do robô é

$$u = \sum_{i=1}^n u_i$$

Como ${}^0O_{C_i} = {}^0O_{C_i}(q)$ resulta que $u = u(q)$.

A formulação dinâmica *Lagrangeana* conduz às equações dinâmicas do manipulador a partir de uma função escalar chamada Lagrangeano e definida por

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}) = k(q, \dot{q}) - u(q).$$

As equações de movimento são obtidas da *Equação de Lagrange*:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = \tau,$$

ou, considerando a expressão acima do *Lagrangeano*,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial k}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial k}{\partial q} + \frac{\partial u}{\partial q} = \tau$$

EXEMPLO 6.5

O manipulador da figura tem por matrizes de inércia dos ligamentos:

$${}^{c_1}I_1 = \begin{bmatrix} I_{xx_1} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy_1} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz_1} \end{bmatrix} \quad {}^{c_2}I_2 = \begin{bmatrix} I_{xx_2} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy_2} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz_2} \end{bmatrix}$$

$$q = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ d_2 \end{bmatrix}$$

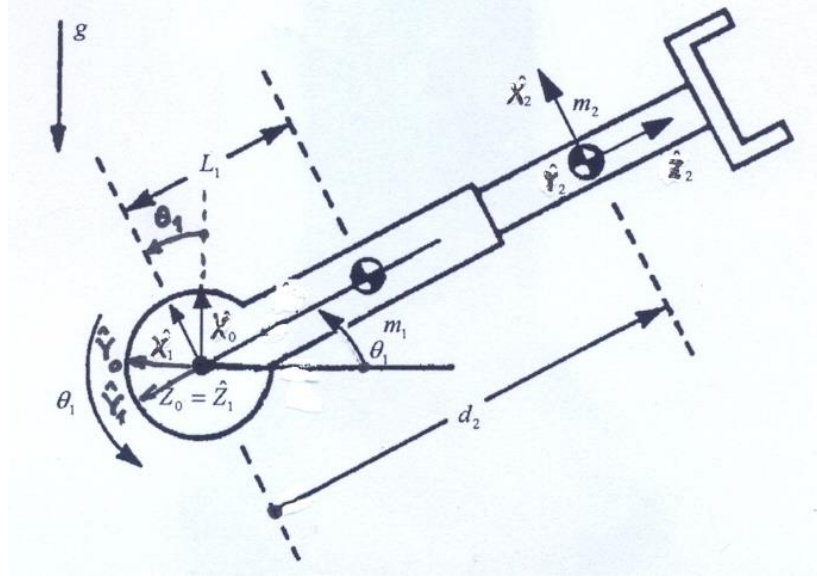


Figura 6.14: Exemplo 6.5

As massas dos ligamentos são m_1 e m_2 .

Como mostra a figura acima, o centro de massa do ligamento 1 localiza-se a uma distância L_1 do eixo da junta 1 e o centro de massa do ligamento 2 está a uma distância d_2 (variável da junta) do eixo da junta 1.

Usando a equação

$$k_i = \frac{1}{2} m_i \cdot v_{C_i}^T \cdot v_{C_i} + \frac{1}{2} {}^i\omega_i^T \cdot {}^{c_i}I_i \cdot {}^i\omega_i,$$

onde v_{C_i} e ${}^i\omega_i$ saem da cinemática de velocidade (Cap. 5), resultam

$$k_1 = \frac{1}{2} m_1 \cdot L_1^2 \cdot \ddot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} I_{zz_1} \cdot \ddot{\theta}_1^2$$

$$k_2 = \frac{1}{2} m_2 \cdot (d_2^2 \cdot \dot{\theta}_1^2 + \dot{d}_2^2) + \frac{1}{2} I_{yy_2} \cdot \dot{\theta}_1^2$$

Portanto,

$$k(q, \ddot{q}) = \frac{1}{2} (m_1 \cdot L_1^2 + I_{zz_1} + I_{yy_2} + m_2 \cdot d_2^2) \ddot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \cdot \dot{d}_2^2$$

Usando a equação

$$u_i = -m_i \cdot {}^0g^T \cdot {}^0O_{C_i}$$

vem

$$u_1 = m_1.L_1.g.\text{sen}(\theta_1)$$

$$u_2 = m_2.g.d_2.\text{sen}(\theta_1)$$

Portanto, a energia potencial total é

$$u(q) = g.(m_1.L_1 + m_2.d_2).\text{sen}(\theta_1)$$

Podemos então calcular as derivadas parciais

$$\frac{\partial k}{\partial \dot{\phi}} = \begin{bmatrix} (m_1.L_1^2 + I_{zz1} + I_{yy2} + m_2.d_2^2)\dot{\phi}_1 \\ m_2.d_2\dot{\phi}_2 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial k}{\partial q} = \begin{bmatrix} 0 \\ m_2.d_2.\dot{\phi}_1 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial u}{\partial q} = \begin{bmatrix} g.(m_1.L_1 + m_2.d_2).\cos(\theta_1) \\ m_2.g.\text{sen}(\theta_1) \end{bmatrix}$$

Substituindo na *Equação de Lagrange*,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial k}{\partial \dot{\phi}} - \frac{\partial k}{\partial q} + \frac{\partial u}{\partial q} = \tau,$$

vem:

$$\tau_1 = (m_1.L_1^2 + I_{zz1} + I_{yy2} + m_2.d_2^2)\ddot{\phi}_1 + 2m_2.d_2.\dot{\phi}_1\dot{\phi}_2 + (m_1.L_1 + m_2.d_2)g.\cos(\theta_1)$$

$$\tau_2 = m_2.\ddot{\phi}_2 - m_2.d_2.\ddot{\phi}_1 + m_2.g.\text{sen}(\theta_1)$$

Temos, assim,

$$M(q) = \begin{bmatrix} m_1.L_1^2 + I_{zz1} + I_{yy2} + m_2.d_2^2 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}$$

$$V(q, \dot{\phi}) = \begin{bmatrix} 2m_2.d_2.\dot{\phi}_1\dot{\phi}_2 \\ -m_2.d_2.\dot{\phi}_1^2 \end{bmatrix}$$

$$G(q) = \begin{bmatrix} (m_1.L_1 + m_2.d_2)g.\cos(\theta_1) \\ m_2.g.\text{sen}(\theta_1) \end{bmatrix}$$

EXERCÍCIO: Aplicar o método de *Newton-Euler* ao exemplo.

6.10 INCLUSÃO DE OUTROS EFEITOS NO MODELO DINÂMICO

As equações que obtivemos não levam em conta todos os efeitos que agem sobre o manipulador. Elas consideram apenas a dinâmica do corpo rígido sob a ação da gravidade. Talvez as forças mais importantes não incluídas no modelo sejam aquelas que provêm do atrito.

Nos manipuladores atuais, em que há em geral reduções por engrenagens nos atuadores, os efeitos de atrito chegam a representar 25% do torque necessário para movimentar o manipulador em situações típicas.

Os efeitos de atrito viscoso e de *Coulomb* são modelados simplificadamente por

$$\tau_{\text{atrito}} = c.\text{sgn}(\dot{\phi}) + b.\dot{\phi}$$

para cada uma das juntas. Com isso, o modelo dinâmico do manipulador pode ser escrito da forma mais completa²⁵ como

$$\tau = M(q)\ddot{q} + V(q, \dot{q}) + G(q) + F(q, \dot{q})$$

Há, é claro, outros efeitos que foram desconsiderados na elaboração desse modelo. Um deles, que é relevante em aplicações na área espacial, se refere à flexibilidade dos ligamentos.

6.11 SIMULAÇÃO DINÂMICA

Até este ponto, nós estivemos envolvidos basicamente com o problema em que, a partir dos movimentos das juntas, determinam-se os torques/forças nas juntas. No entanto, é evidente que o modelo obtido nesse processo pode ser aplicado também para a simulação dinâmica do sistema. Neste caso, dados os torques/forças nas juntas, o objetivo é obter as coordenadas das juntas em função do tempo.

Para isso, reescrevemos a equação dinâmica na forma

$$\ddot{q} = M^{-1}(q)[\tau - V(q, \dot{q}) - G(q) - F(q, \dot{q})]$$

e utilizamos algum procedimento de integração numérica. Supondo dadas as condições iniciais

$$q(0) = q_0$$

$$\dot{q}(0) = \dot{q}_0$$

e considerando um passo de integração Δt , partimos de $t = 0$ e calculamos sucessivamente:

$$\dot{q}(t + \Delta t) = \dot{q}(t) + \ddot{q}(t) \cdot \Delta t$$

$$q(t + \Delta t) = q(t) + \dot{q}(t) \Delta t + \frac{1}{2} \ddot{q}(t) (\Delta t)^2 \quad (\text{Integração de Euler})$$

Métodos de integração mais sofisticados podem ser utilizados para melhorar a eficiência e/ou a precisão da simulação.

O passo de integração estabelece um compromisso entre precisão (Δt “pequeno”) e eficiência computacional (Δt “grande”).

²⁵ Quando o efeito do atrito depende da posição (por exemplo, com engrenagens não perfeitamente redondas).

7 GERAÇÃO DE TRAJETÓRIAS

7.1 INTRODUÇÃO

O termo trajetória, para nós, designa uma história temporal de posição, velocidade e aceleração para cada g.d.l..

A simplicidade com que o operador humano possa descrever uma trajetória ou caminho no espaço é um dos requisitos fundamentais do sistema. Por exemplo, o usuário poderia apenas especificar a posição e a orientação finais e deixar a carga do sistema decidir a forma do caminho para chegar ao objetivo, assim como a duração, o perfil de velocidade e outros detalhes.

Outro aspecto importante nesse contexto é a forma segundo a qual as trajetórias são representadas internamente ao computador após terem sido planejadas.

Por fim, há a questão da geração da trajetória, que diz respeito ao cálculo da trajetória a partir de sua representação interna.

Na maioria das vezes, nós vamos considerar os movimentos de um manipulador como movimentos do sistema da ferramenta $\{T\}$ em relação ao sistema da estação $\{S\}$.

Às vezes, é necessário especificar o movimento em mais detalhes do que apenas através da descrição da posição e orientação finais do efetuador. Uma forma de fazer isto é fornecendo pontos intermediários (*via points*) entre as situações inicial e final.

Além dessas restrições espaciais do movimento, o usuário pode querer também especificar atributos temporais do movimento. Por exemplo, o tempo de percurso entre pontos intermediários poderia ser dado como parte da descrição da trajetória.

Por fim, normalmente é desejável que o movimento do manipulador seja suave (funções contínuas com primeiras derivadas igualmente contínuas), o que reduz o desgaste de transmissões e não induz vibrações no manipulador.

7.2 ESQUEMAS NO ESPAÇO DE JUNTAS

Como o próprio nome da seção indica, aqui nós vamos tratar do problema de geração de trajetórias através de uma descrição em termos de funções do tempo representando as variáveis das juntas.

Neste caso, cada um dos pontos da trajetória (o inicial, o final e os intermediários), descrito através de $\{T\}$ em relação a $\{S\}$, é associado a um conjunto de coordenadas de junta através da cinemática inversa do manipulador.

7.2.1 POLINÔMIOS CÚBICOS

Consideremos uma dada junta do manipulador que deve partir de θ_0 e chegar a θ_f num intervalo $[0, t_f]$, t_f dado:

$$\theta(0) = \theta_0$$

$$\theta(t_f) = \theta_f$$

Suponhamos que, além disso,

$$\dot{\theta}(0) = 0$$

$$\dot{\theta}(t_f) = 0$$

Estas quatro restrições podem ser satisfeitas se consideramos a função $\theta(t)$ na forma de um polinômio de 3º grau:

$$\theta(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3$$

Impondo as restrições acima em $\theta(t)$ obtemos um sistema linear 4x4 que permite determinar a_i , $0 \leq i \leq 3$.

7.2.2 POLINÔMIOS DE GRAU SUPERIOR

Caso queiramos, por exemplo, especificar a posição, a velocidade e a aceleração no início e no final de um caminho, podemos utilizar um polinômio de 5º grau:

$$\theta(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3 + a_4t^4 + a_5t^5$$

Os coeficientes a_0, \dots, a_5 são as soluções de um sistema linear 6x6.

7.2.3 FUNÇÃO LINEAR COM EXTREMIDADES PARABÓLICAS

Uma idéia simples consiste em mover cada junta, desde sua posição atual até a posição desejada, de forma linear com t :

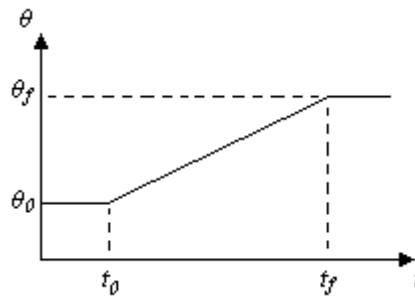


Figura 7.1: Deslocamento linear da junta

Porém, com isto, a velocidade resulta descontínua nos extremos do intervalo. Para gerar o percurso suave, com posição e velocidade contínuas, adicionamos arcos de parábola aos extremos da função linear (o que corresponde a trechos de aceleração constante):

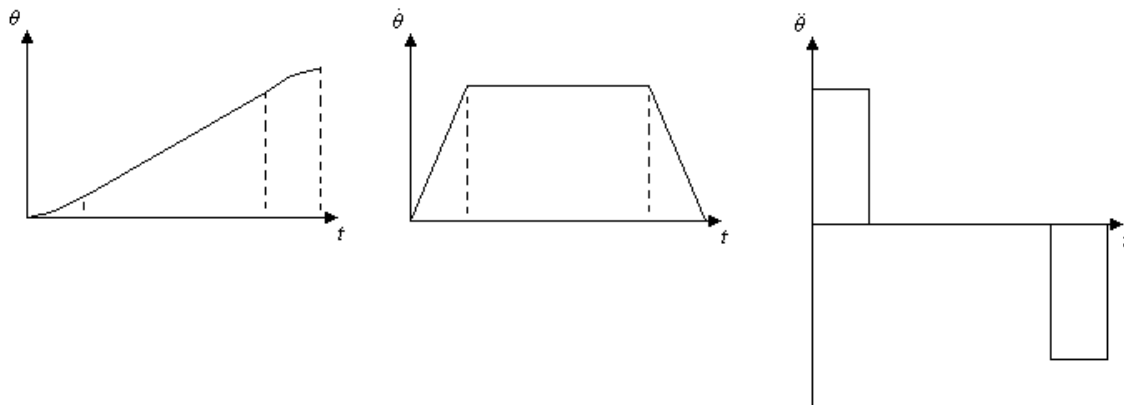


Figura 7.2: Suavização do deslocamento da junta

7.3 ESQUEMAS NO ESPAÇO CARTESIANO

Quando a trajetória é descrita no espaço das juntas, a forma da trajetória percorrida pelo efetuador no espaço tridimensional é, em geral, complicada e dependente da cinemática direta do manipulador.

Existem métodos de geração de trajetórias em que estas são descritas através de funções que definem a posição e a orientação do efetuador no espaço cartesiano ao longo do tempo.

Uma forma comum de movimento é aquela em que o efetuador descreve um segmento de reta.

As trajetórias são planejadas a partir dos pontos dados através de $\{T\}$ em relação a $\{S\}$, sem calcular a cinemática inversa. As funções interpoladas representam variáveis no espaço cartesiano. Por isso, os esquemas cartesianos são dispendiosos no que se refere ao custo computacional, já que a cinemática inversa tem que ser calculada em tempo real.

7.4 OUTRAS QUESTÕES

O planejamento de trajetórias baseado na escolha de funções de aceleração constantes constitui uma grande simplificação, pois os atuadores são caracterizados por uma curva torque \times velocidade e não por aceleração constante (ou mesmo torque constante, o que não corresponde à aceleração constante, pois esta depende da dinâmica do manipulador). Por esta razão, para que a capacidade do atuador não seja excedida, a máxima aceleração escolhida para o planejamento da trajetória é, em geral, conservadora, não sendo utilizada então a capacidade plena dos atuadores.

O problema em que é dada a trajetória a ser seguida no espaço cartesiano e se deseja determinar o "ritmo" em que ela deve ser percorrida para que o percurso total seja realizado em tempo mínimo já foi resolvido numericamente. A solução leva em conta a característica torque \times velocidade dos atuadores.

8 CONTROLE INDEPENDENTE POR JUNTA

8.1 INTRODUÇÃO

O problema de controle de posição de manipuladores se resume em determinar as histórias temporais de sinais de entrada das juntas necessários para fazer com que o efetuador realize um certo movimento desejado. As entradas nas juntas podem ser forças (juntas prismáticas) ou torques (juntas rotacionais), ou então sinais de comando para os atuadores (por exemplo, tensões de armadura dos motores).

Os aperfeiçoamentos mecânicos nos manipuladores têm, naturalmente, um impacto sobre o problema de controle e, na medida em que este se torna mais sofisticado, ampliam-se as aplicações. Consideremos, por exemplo, um robô cujos atuadores são motores CC de ímã permanente com redução por engrenagens e outro em que o acionamento é direto (sem redução) através de motor de alto torque. No primeiro caso, a dinâmica do motor é linear e o efeito da redução é, em grande parte, de reduzir o acoplamento não linear entre as juntas. Porém, a presença da redução introduz atrito, elasticidade e folga de maneira que, para conseguir bom desempenho, o projetista deve dedicar maior atenção a estes efeitos do que à inércia não linear, forças de *Coriolis*, etc.

No caso de acionamento direto, os problemas relacionados com folga, atrito e elasticidade da transmissão são eliminados. Entretanto, o acoplamento não linear entre os ligamentos é agora significativo e a dinâmica dos motores é também muito mais complexa.

No esquema independente por junta, cada eixo do manipulador é controlado como um sistema SISO. Os efeitos de acoplamento dos outros ligamentos são ou ignorados ou tratados como perturbações.

8.2 DINÂMICA DO ATUADOR

Consideremos um motor CC controlado pela armadura acionando um ligamento através de uma redução por engrenagens:

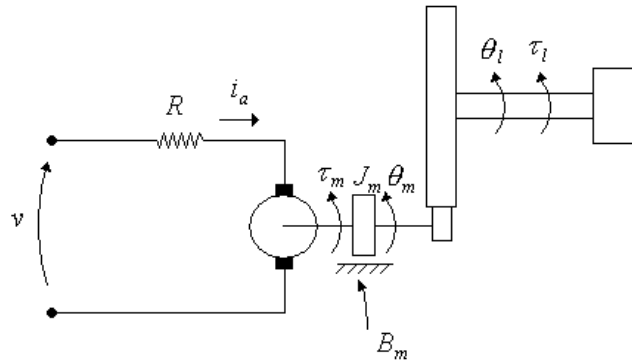


Figura 8.1: Motor CC acionando um ligamento

Designando por r a relação de redução, isto é,

$$\theta_l = r\theta_m,$$

para este sistema podemos escrever:

$$J_m \ddot{\theta}_m + B_m \dot{\theta}_m = K_m i_a - r \tau_l$$

$$v = R i_a + K_b \dot{\theta}_m$$

Eliminando i_a destas duas equações e tomando a transformada de *Laplace*:

$$s \left(J_m s + B_m + \frac{K_m K_b}{R} \right) \Theta_m(s) = \frac{K_m}{R} V(s) - r \tau_l(s)$$

Na forma de diagrama de blocos:

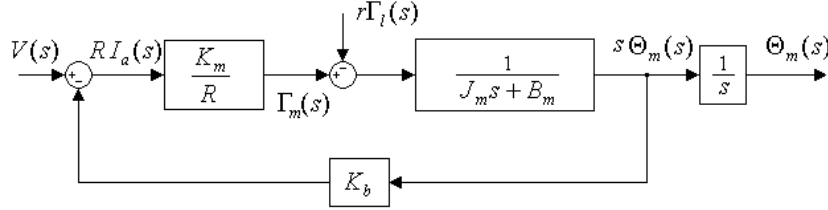


Figura 8.2: Diagrama de blocos do motor

Deve-se notar, neste esquema, que o torque τ_l representa a ação do ligamento sobre o atuador.

8.3 ACOMPANHAMENTO DE SET-POINT

Nesta seção vamos estudar o acompanhamento de *set-point* utilizando compensadores proporcionais com realimentação auxiliar de velocidade, PD e PID. Este tipo de solução é indicado para aplicações que não envolvam movimento muito rápido, o que é o caso de manipuladores com grandes reduções entre os atuadores e os ligamentos.

A equação de movimento do manipulador²⁶

$$M(\theta)\ddot{\theta} + V(\theta, \dot{\theta}) + G(\theta) = \tau$$

pode ser reescrita para a junta k como

$$\sum_{j=1}^n m_{jk}(\theta) \ddot{\theta}_j + v_k(\theta, \dot{\theta}) + g_k(\theta) = \tau_k,$$

enquanto que a dinâmica do atuador k é dada por

$$J_{mk} \ddot{\theta}_{mk} + \left(B_{mk} + \frac{K_{mk} K_{bk}}{R_k} \right) \dot{\theta}_{mk} = \frac{K_{mk}}{R_k} V_k - r_k \tau_k,$$

sendo $k = 1, 2, \dots, n$.

O procedimento mais simples de projeto consiste em considerar o termo não linear τ_k que comparece na equação do atuador como sendo uma perturbação e projetar um controlador independente para cada junta. A vantagem óbvia desta abordagem é que a dinâmica do atuador é linear.

Deve-se notar também que τ_k aparece multiplicado pelo fator de redução r_k e, portanto, o efeito da redução é atenuar os efeitos das não linearidades associadas à dinâmica do manipulador, o que representa um fator favorável à adoção do esquema independente por junta.

Porém, quando se trata de movimentos rápidos ou de manipuladores com acionamento direto, as não linearidades têm um efeito significativo e considerar os termos não lineares de acoplamento τ_k simplesmente como perturbações causa, em geral, grandes erros no acompanhamento do *set-point*.

²⁶ Para simplificar, usamos a notação correspondente às juntas de rotação. No entanto, o desenvolvimento é geral e pode se aplicar também às juntas prismáticas.

É comum incluir no modelo do atuador (e, portanto, excluir do modelo do manipulador!) o termo correspondente à inércia própria do ligamento a ele acoplado:

$$J_{mk} + r_k^2 m_{kk}(\theta),$$

que é, portanto, dependente da configuração. Na presente abordagem, aproximamos esta inércia por seu valor médio (ou efetivo) J_{eff} . Deve-se ressaltar que, mesmo com a presença da redução, a inércia pode variar, às vezes, até uma ordem de grandeza.

Definindo \bar{m}_{kk} como um valor “médio” de $m_{kk}(\theta)$,

$$J_{effk} = J_{mk} + r_k^2 \bar{m}_{kk},$$

$$B_{effk} = B_{mk} + \frac{K_{bk} K_{mk}}{R_k}$$

e

$$K_k = \frac{K_{mk}}{R_k},$$

o modelo do sistema fica

$$J_{effk} \ddot{\theta}_{mk}(t) + B_{effk} \dot{\theta}_{mk}(t) = K_k V_k(t) - r_k d_k(t),$$

onde $d_k(t)$ é tratado como uma perturbação, sendo definido por²⁷

$$d_k(t) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n m_{jk} \ddot{\theta}_j(t) + v_k(\theta(t), \dot{\theta}(t)) + g_k(\theta(t)).$$

Deste ponto em diante vamos simplificar a notação, eliminando o índice “ k ” de nossos símbolos. Assim, o sistema em malha aberta pode ser representado pelo seguinte diagrama de blocos:

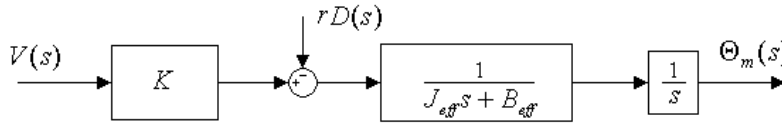


Figura 8.3: Diagrama de blocos de malha aberta.

O problema de acompanhamento de *set-point* resume-se então naquele de rastrear um comando constante (degrau) θ^d .

8.3.1 COMPENSADOR PROPORCIONAL COM REALIMENTAÇÃO AUXILIAR DE VELOCIDADE

O sistema em malha fechada com um compensador Proporcional com Realimentação Auxiliar de Velocidade tem a seguinte estrutura:

²⁷ Mais exatamente, $d_k(t) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n m_{jk} \ddot{\theta}_j(t) + v_k(\theta(t), \dot{\theta}(t)) + g_k(\theta(t)) + (m_{kk} - \bar{m}_{kk}) \ddot{\theta}_k(t)$, mas no

livro do Spong e Vidyasagar, a forma aproximada anterior é preferida por simplicidade.

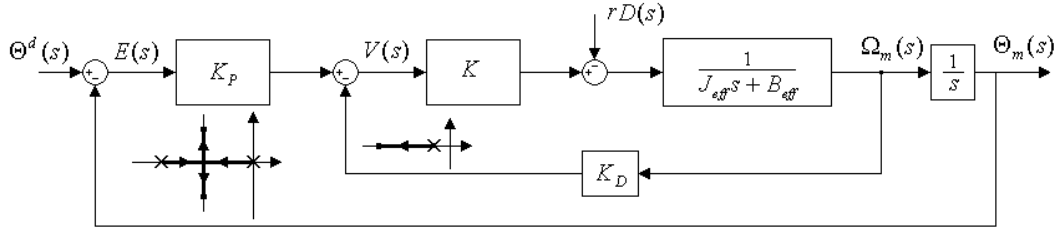


Figura 8.4: Compensador proporcional com realimentação auxiliar de velocidade.

Como se pode observar dos LR's acima, o sistema em malha fechada é assintoticamente estável para todos os valores de $K_P > 0$ e $K_D > 0$.

O erro

$$E(s) = \Theta^d(s) - \Theta_m(s)$$

é dado por

$$E(s) = \frac{J_{eff}s^2 + (B_{eff} + KK_D)s}{p(s)} \Theta^d(s) + \frac{r}{p(s)} D(s),$$

onde

$$p(s) = J_{eff}s^2 + (B_{eff} + KK_D)s + KK_P$$

é o polinômio característico de malha fechada.

Para uma entrada degrau

$$\Theta^d(s) = \frac{\Theta^d}{s}$$

e uma perturbação constante²⁸

$$D(s) = \frac{D}{s}$$

o Teorema do Valor Final fornece

$$e_{ss} = \frac{rD}{KK_P}.$$

Portanto, conclui-se que:

- o erro é tanto menor quanto maior for a redução (isto é, quanto menor for r);
- o erro pode ser reduzido aumentando-se o ganho K_P ;
- e_{ss} não depende de K_D pois quando $\theta_m = \text{cte}$, $\Omega_m = 0$.

Teoricamente, poderíamos obter uma resposta arbitrariamente rápida e um erro estacionário arbitrariamente pequeno simplesmente aumentando K_P e K_D ²⁹. Na prática, estes ganhos devem ser limitados por dois fatores:

- o primeiro é o máximo torque (corrente) disponível no atuador;
- o segundo é a flexibilidade do eixo do motor e/ou da transmissão.

Temos:

²⁸ Evidentemente, na realidade a perturbação $D(s)$ não é constante. Contudo, em regime estacionário, esta perturbação é exatamente o torque gravitacional em ação sobre a junta, que é constante.

²⁹ Ver *Lugares das Raízes* da Figura 8.4.

$$\frac{\Theta_m(s)}{\Theta_d(s)} = \frac{KK_p}{J_{eff}s^2 + (B_{eff} + KK_D)s + KK_p} = \frac{KK_p}{p(s)}$$

e, portanto, o polinômio característico de malha fechada $p(s)$ é tal que

$$\frac{B_{eff} + KK_D}{J_{eff}} = 2\zeta\omega_n$$

$$\frac{KK_p}{J_{eff}} = \omega_n^2$$

Em vista da limitação associada à flexibilidade da junta, é prática usual de projeto escolher ω_n de forma que

$$\omega_n \leq 0,5\omega_r,$$

onde ω_r é a frequência de ressonância da junta.

Além disso, também é comum adotar-se

$$\zeta = 1,$$

de maneira que os polos de malha fechada resultem criticamente amortecidos.

8.3.2 COMPENSADOR PD

Neste caso, o diagrama de blocos do sistema de controle é o seguinte:

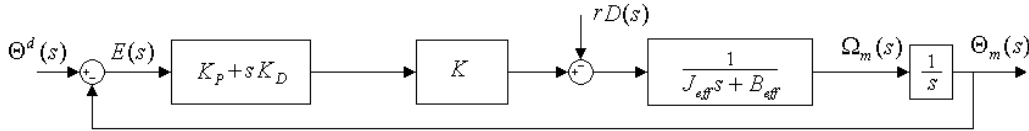


Figura 8.5: Compensador PD

Dependendo da localização do zero introduzido pelo compensador PD, há duas alternativas quanto ao *Lugar das Raízes*:

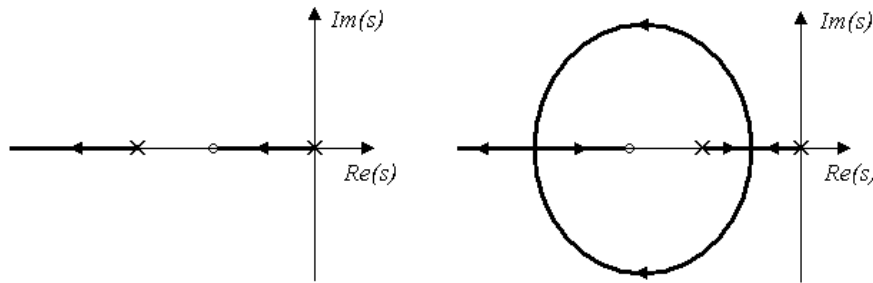


Figura 8.6: Lugares das Raízes com compensador PD

Portanto, dependendo da posição do zero e do valor do ganho, o sistema pode ter pólos reais ou complexos conjugados³⁰.

Vejamos a questão do erro estacionário:

$$E(s) = \Theta^d(s) - \Theta_m(s) \Rightarrow$$

$$E(s) = \Theta^d(s) - \frac{1}{J_{eff}s^2 + B_{eff}s} [-rD(s) + K(K_p + sK_D)E(s)] \Rightarrow$$

³⁰ Em geral, o segundo caso é o de maior interesse, pois no outro caso há um pólo em malha fechada mais lento que o do motor.

$$E(s) = \frac{J_{eff}s^2 + B_{eff}s}{J_{eff}s^2 + (B_{eff} + KK_D)s + KK_P} \Theta^d(s) + \frac{r}{J_{eff}s^2 + (B_{eff} + KK_D)s + KK_P} D(s)$$

Considerando um degrau unitário como sinal de referência e um degrau de amplitude D como perturbação, isto é,

$$\Theta^d(s) = \frac{1}{s} \quad D(s) = \frac{D}{s}$$

e usando o *Teorema do Valor Final*,

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) \Rightarrow e_{ss} = \frac{rD}{KK_P}$$

Valem aqui as mesmas observações que se aplicam ao *Controlador Proporcional com Realimentação Auxiliar de Velocidade*:

- o erro estacionário diminui com o aumento de K_P ou com a redução do valor de r ;
- o torque máximo disponível no motor e a flexibilidade da junta limitam os valores de K_P e K_D .

8.3.3 COMPENSADOR PID

Para rejeitar uma perturbação usando um compensador PD nós vimos que são necessários ganhos elevados. Usando um termo integral, podemos zerar o erro estacionário com ganhos razoáveis.

O diagrama de blocos do sistema com o compensador PID é representado abaixo.

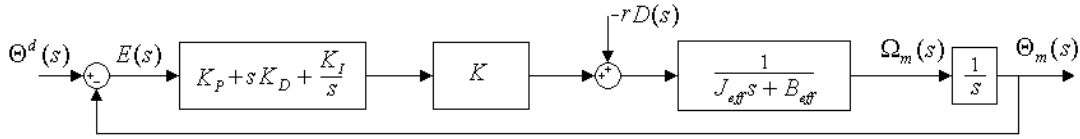


Figura 8.7: Compensador PID

Neste caso:

$$\Theta_m(s) = -\frac{rs}{p(s)} D(s) + \frac{K(K_D s^2 + K_P s + K_I)}{p(s)} \Theta^d(s)$$

$$E(s) = \frac{rs}{p(s)} D(s) + \frac{J_{eff}s^3 + B_{eff}s^2}{p(s)} \Theta^d(s)$$

onde

$$p(s) = J_{eff}s^3 + (B_{eff} + KK_D)s^2 + KK_P s + KK_I$$

é o polinômio característico de malha fechada.

Aplicando o *Critério de Routh* a este polinômio, concluímos que o sistema em malha fechada é estável se

$$\triangleright K_I < \frac{(B_{eff} + KK_D)K_P}{J_{eff}}$$

$$\triangleright K_P, K_I, K_D > 0$$

Considerando um degrau unitário como sinal de referência e um degrau de amplitude D como perturbação, isto é,

$$\Theta^d(s) = \frac{1}{s} \quad D(s) = \frac{D}{s}$$

e o Teorema do Valor Final fornece:

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = 0$$

8.4 PRÉ-COMPENSAÇÃO PELO MÉTODO DO TORQUE CALCULADO

Deixemos de lado inicialmente a perturbação $d(t)$ e consideremos o sistema de controle com um compensador PD e um termo de pré-compensação (*feedforward*) conforme representado na figura:

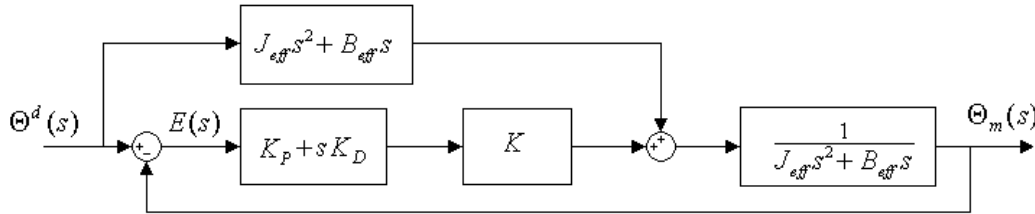


Figura 8.8: Pré-compensação.

Neste caso tem-se:

$$[J_{eff}s^2 + (B_{eff} + KK_D)s + KK_P]E(s) = 0$$

No domínio do tempo:

$$J_{eff}\ddot{e}(t) + (B_{eff} + KK_D)\dot{e}(t) + KK_P e(t) = 0$$

Podemos, portanto, calcular K_D e K_P para que $e(t) \rightarrow 0$ com velocidade pré-especificada para qualquer sinal de referência $\theta^d(t)$.

Deve-se notar que esse comportamento deve-se ao fato de se utilizar na pré-compensação um termo baseado no conhecimento exato da dinâmica do sistema.

Consideremos agora a ação da perturbação $D(s)$ que havíamos deixado de lado na análise acima:

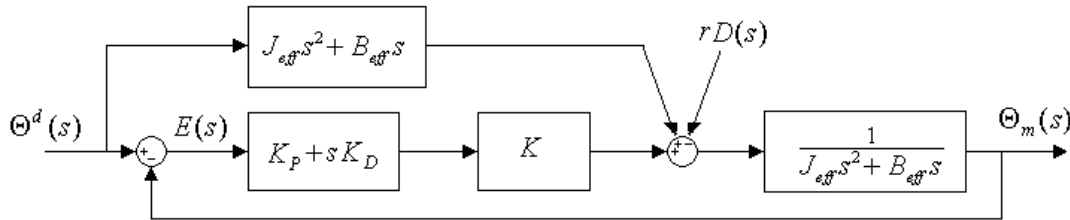


Figura 8.9: Pré-compensação com perturbação.

Neste caso tem-se:

$$[J_{eff}s^2 + (B_{eff} + KK_D)s + KK_P]E(s) = rD(s)$$

Considerando uma perturbação na forma de um degrau de amplitude D , e aplicando o Teorema do Valor Final, obtém-se:

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) \Rightarrow e_{ss} = \frac{rD}{KK_P}$$

Note-se que este é exatamente o mesmo valor do erro estacionário obtido no caso do controlador PD, o que é perfeitamente justificável, uma vez que o termo de pré-compensação faz com que a contribuição de $\theta^d(t)$ para $e(t)$ seja nula para $t \rightarrow \infty$.

A presença do erro estacionário acima sugere que se adicione à saída do bloco de pré-compensação um termo visando “cancelar” o efeito da perturbação. Com isso, o sistema fica:

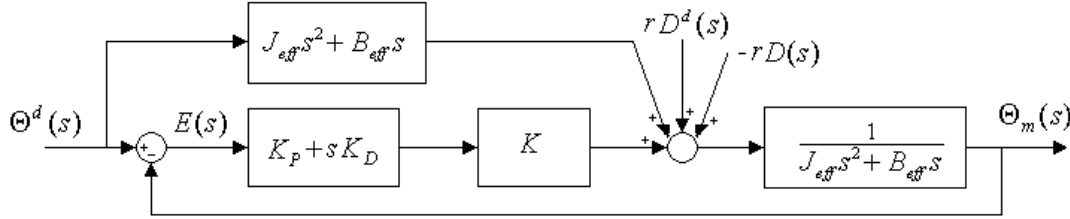


Figura 8.10: Pré-compensação com cancelamento do efeito da perturbação

O termo adicional de pré-compensação é um torque calculado com base no modelo do manipulador. Para a junta k , seu valor calcula-se por:

$$d^d(t) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n m_{jk} \ddot{\theta}_k(t) + v_k (\dot{\theta}^d(t), \dot{\theta}_k(t)) + g_k^d(\theta(t))$$

No caso ideal, em que esta equação representa perfeitamente a dinâmica do manipulador,

$$D^d(s) = D(s)$$

e, portanto, recaímos no primeiro caso discutido nesta seção.

No caso real, em que $D^d(s) \neq D(s)$, seja

$$\Delta D(s) = D(s) - D^d(s)$$

É imediato verificar que

$$[J_{eff}s^2 + (B_{eff} + KK_D)s + KK_P]E(s) = r\Delta D(s)$$

e, portanto, no domínio do tempo

$$J_{eff}\ddot{e}(t) + (B_{eff} + KK_D)\dot{e}(t) + KK_P e(t) = r\Delta d(t).$$

Considerando que $\Delta d(t)$ tenha a forma de um degrau de amplitude Δd , esta equação mostra que, em regime estacionário,

$$e_{ss} = \frac{r\Delta d}{KK_P}.$$

Ora, é de se esperar que $|\Delta d| < |D|$ (onde D é a amplitude do degrau $D(s)$) pois, de outra forma, não teria justificativa a inclusão da parcela $D^d(s)$ no esquema de controle. Sendo assim, o erro estacionário deve resultar reduzido em relação ao caso anterior.

Convém observar também que a outra parcela da pré-compensação ($J_{eff}\ddot{\theta}_k + B_{eff}\dot{\theta}_k$) não representa dificuldade de realização, pois $\theta^d(t)$ é uma função dada do tempo (não medida!), em geral polinomial, podendo, portanto, ser diferenciada em relação ao tempo.

Deve-se notar também que a expressão de $d^d(t)$ em função de $\theta^d(t)$, $\dot{\theta}^d(t)$ e $\ddot{\theta}^d(t)$, é, em geral, extremamente trabalhosa de avaliar numericamente, o que motivou grande número de pesquisas com vistas à sua implementação em tempo real.

De fato, os valores de $d^d(t)$ podem ser calculados a priori, já que dependem apenas da trajetória desejada. Tem-se, assim, um compromisso entre requisitos de memória e tempo de computação.

9 CONTROLE MULTIVARIÁVEL

9.1 INTRODUÇÃO

No capítulo anterior nós discutimos algumas técnicas de controle de posição de manipuladores baseadas em um modelo SISO. Os efeitos de acoplamento entre as juntas foram considerados como perturbações.

Na realidade, as equações dinâmicas do manipulador formam um complexo sistema não linear multivariável.

No presente capítulo, trataremos o problema de controle neste contexto, o que permite realizar uma análise mais rigorosa do comportamento do sistema.

9.2 CONTROLADOR PROPORCIONAL COM REALIMENTAÇÃO AUXILIAR DE VELOCIDADE REVISTO

Inicialmente será apresentada uma discussão mais rigorosa da aplicação do controlador para o acompanhamento de *set-point*.

Para isso, consideraremos as equações dinâmicas do manipulador³¹:

$$\sum_{j=1}^n (m_{kj}(\theta) \ddot{\theta}_j) + v_k(\theta, \dot{\theta}) + g_k(\theta) = \tau_k$$

$$J_{mk} \ddot{\theta}_{mk} + \left(B_{mk} + \frac{K_{mk} \cdot K_{bk}}{R_k} \right) \dot{\theta}_{mk} = \frac{K_{mk}}{R_k} V_k - r_k \cdot \tau_k$$

Dividindo ambos os membros desta última equação por r_k e usando o fato que

$$\theta_{mk} = \frac{1}{r_k} \theta_k,$$

temos

$$\frac{1}{r_k^2} J_{mk} \ddot{\theta}_k + \frac{1}{r_k^2} B_k \dot{\theta}_k = \frac{K_{mk}}{R_k r_k} V_k - \tau_k,$$

onde

$$B_k = B_{mk} + \frac{K_{mk} K_{bk}}{R_k}.$$

Substituindo τ_k desta equação na equação dinâmica do manipulador leva a

$$\frac{1}{r_k^2} J_{mk} \ddot{\theta}_k + \sum_{j=1}^n m_{jk} \ddot{\theta}_j + v_k + \frac{1}{r_k^2} B_k \dot{\theta}_k + g_k = \frac{K_{mk}}{R_k r_k} V_k.$$

Definindo

$$u_k = \frac{K_{mk}}{R_k r_k} V_k, \quad u = [u_1, u_2, \dots, u_n]^T$$

$$J = \text{diag} \left(\frac{1}{r_k^2} J_{mk} \right), \quad B = \text{diag} \left(\frac{1}{r_k^2} B_k \right)$$

esta equação pode ser escrita em forma compacta como

³¹ Supomos, por simplicidade de notação, que as juntas são rotacionais.

$$[M(\theta) + J]\ddot{\theta} + V(\theta, \dot{\theta}) + B\dot{\theta} + G(\theta) = u. \quad (*)$$

O controle proporcional com realimentação auxiliar de velocidade no esquema independente por junta pode ser escrito como:

$$u = K_P e - K_D \dot{\theta}, \quad (**)$$

onde

$$e = \theta^d - \theta.$$

As matrizes K_P e K_D são diagonais com elementos positivos.

Seja a candidata a função de *Lyapunov*:

$$V = \frac{1}{2} \dot{\theta}' [M(\theta) + J] \dot{\theta} + \frac{1}{2} e' K_P e.$$

Pode-se mostrar que, se não há torques de gravidade agindo ($G(\theta) = 0$),

$$\dot{V} = -\dot{\theta}' (K_D + B) \dot{\theta} \leq 0.$$

Se $V \equiv 0$, então $\dot{\theta} \equiv 0 \Rightarrow \ddot{\theta} \equiv 0 \stackrel{(*)}{\Rightarrow} 0 \equiv K_P \cdot e \Rightarrow e \equiv 0$ e, portanto, o *Teorema de La*

Salle garante a estabilidade assintótica do sistema na ausência dos torques de gravidade $G(\theta)$.

Quando estes torques estão presentes, o controlador proporcional com realimentação auxiliar de velocidade não é capaz de garantir erro estacionário nulo. Se o sistema em malha fechada é estável, a configuração estacionária assumida pelo manipulador deverá ser tal que

$$K_P [\theta^d - \theta(\infty)] = G(\theta(\infty)).$$

A interpretação física desta condição é que a configuração $\theta(\infty)$ deverá ser tal que o motor gere um torque estacionário

$$u = K_P [\theta^d - \theta(\infty)] = G(\theta(\infty))$$

capaz de equilibrar o torque gravitacional $G(\theta(\infty))$. É claro também que o erro estacionário pode ser reduzido aumentando-se K_P .

Para superar este problema, acrescentamos um termo de compensação de gravidade à lei de controle:

$$u = K_P e - K_D \dot{\theta} + G(\theta).$$

Esta forma é conhecida como controlador proporcional com realimentação auxiliar de velocidade com compensação de gravidade.

O termo $G(\theta)$ deve ser calculado em tempo real e, portanto, impõe um requisito na velocidade de processamento do microprocessador utilizado.

É óbvio que o sucesso deste esquema depende da precisão com que $G(\theta)$ é conhecido.

9.3 CONTROLE BASEADO NA DINÂMICA INVERSA³²

Consideremos novamente o modelo de um manipulador escrito na forma matricial:

$$[M(\theta) + J]\ddot{\theta} + V(\theta, \dot{\theta}) + B\dot{\theta} + G(\theta) = u$$

O princípio deste esquema de controle é o mesmo do torque calculado: busca-se uma lei de controle do tipo

$$u = f(\theta, \dot{\theta})$$

³² Ou, como muitas vezes denominado na literatura, controle por torque calculado.

tal que, quando substituída no modelo do manipulador, forneça um sistema linear em malha fechada.

Observando a forma da equação dinâmica do manipulador fica claro que, escolhendo

$$u = [M(\theta) + J]v + V(\theta, \dot{\theta}) + B\dot{\theta} + G(\theta),$$

onde v é uma função a especificar, obtém-se

$$\ddot{\theta} = v,$$

pois $M(\theta) + J$ é inversível.

Tomando

$$v = \ddot{\theta} + K_D(\dot{\theta} - \dot{\theta}^d) + K_P(\theta^d - \theta)$$

e lembrando que

$$e = \theta^d - \theta,$$

vem

$$\ddot{\theta} + K_D\dot{e} + K_P e = 0.$$

Se adotarmos K_D e K_P diagonais, obtemos n sistemas desacoplados de 2ª ordem:

$$\ddot{e}_i + k_{Di}\dot{e}_i + k_{Pi}e_i = 0.$$

Uma escolha possível é

$$k_{Di} = 2\omega_i$$

e

$$k_{Pi} = \omega_i^2,$$

o que corresponde a um sistema de 2ª ordem criticamente amortecido com frequência natural ω_i .

Note que o controlador baseado na dinâmica inversa garante, no caso ideal, o acompanhamento do sinal de referência $\theta^d(t)$ assintoticamente para $t \rightarrow \infty$.

O esquema de controle utilizado é representado pelo seguinte diagrama de blocos:

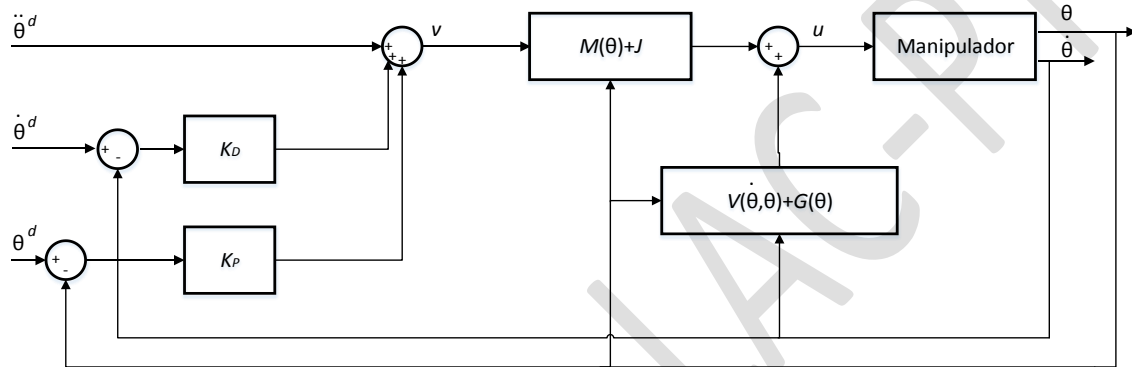


Figura 9.1: Esquema de controle baseado na dinâmica inversa

Deve-se observar que a implementação deste esquema de controle requer o cálculo de $[M(\theta) + J]$, $V(\theta, \dot{\theta})$, $B\dot{\theta}$ e $G(\theta)$ em cada instante (de amostragem, dado que a implementação deve ser digital). Assim, ao contrário do que ocorria no caso da pré-compensação por torque calculado (veja o Capítulo 8 CONTROLE INDEPENDENTE POR JUNTA), neste caso os cálculos não podem ser realizados previamente (*off-line*) e

armazenados. Este aspecto impõe requisitos de velocidade computacional severos³³, dada a complexidade do modelo dinâmico do manipulador.

Além disso, deve-se ter em vista que este esquema de controle, por ser fortemente baseado no modelo, abre questões a respeito da robustez do sistema. A implementação prática deste tipo de controle requer não apenas que os parâmetros do modelo sejam conhecidos com precisão, como também que sua estrutura o seja. Em particular, a existência de cargas desconhecidas no efetuador, a presença de atrito seco nos eixos, a ocorrência de folgas e de flexibilidades não modeladas nas transmissões representam incertezas comuns nos modelos. Em consequência, o “cancelamento” das não linearidades nunca se dá com exatidão.

A estrutura do sistema de controle deve ser do tipo malha interna / malha externa.

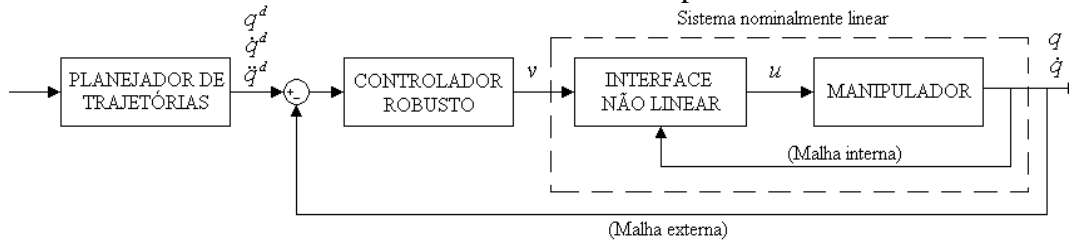


Figura 9.2: Sistema de controle malha interna / malha externa

³³ Frequências de 60 a 100 Hz são comuns para a amostragem.

APÊNDICE

I. TEOREMA DOS EIXOS PARALELOS

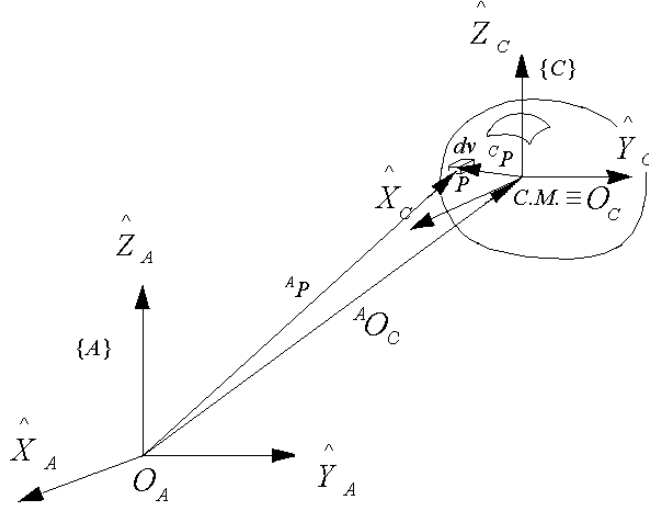


Figura I.1: Teorema dos Eixos Paralelos

Como $\{A\}$ e $\{C\}$ têm eixos paralelos, $\hat{X}_A = \hat{X}_C$, $\hat{Y}_A = \hat{Y}_C$ e $\hat{Z}_A = \hat{Z}_C$.

Seja P a posição de um elemento dv . Temos:

$${}^A P = {}^C R \cdot {}^C P + {}^A O_C$$

Como os eixos de $\{A\}$ e $\{C\}$ são paralelos, ${}^C R = I$ e, portanto,

$${}^A P = {}^C P + {}^A O_C \quad (I.1)$$

Por definição:

$${}^A I = \iiint_V \left\{ \left[({}^A P)^T \cdot {}^A P \right] \cdot I - {}^A P \cdot ({}^A P)^T \right\} \rho \cdot dv$$

onde V é o volume do corpo e ρ , a densidade no ponto. Mas, em vista da igualdade (I.1),

$${}^A I = \iiint_V \left\{ \left[({}^C P + {}^A O_C)^T \cdot ({}^C P + {}^A O_C) \right] \cdot I - ({}^C P + {}^A O_C) \cdot ({}^C P + {}^A O_C)^T \right\} \rho \cdot dv$$

Ou seja:

$$\begin{aligned} {}^A I &= \iiint_V \left\{ \left[({}^C P)^T \cdot {}^C P \right] \cdot I - {}^C P \cdot ({}^C P)^T \right\} \rho \cdot dv + \iiint_V \left[({}^C P)^T \cdot {}^A O_C \right] \cdot I \cdot \rho \cdot dv + \iiint_V \left[({}^A O_C)^T \cdot {}^C P \right] \cdot I \cdot \rho \cdot dv + \\ &+ \iiint_V \left[({}^A O_C)^T \cdot {}^A O_C \right] \cdot I \cdot \rho \cdot dv - \iiint_V {}^C P \cdot ({}^A O_C)^T \cdot \rho \cdot dv - \iiint_V {}^A O_C \cdot ({}^C P)^T \cdot \rho \cdot dv - \iiint_V {}^A O_C \cdot ({}^A O_C)^T \cdot \rho \cdot dv \\ {}^A I &= {}^C I + \left[({}^A O_C)^T \cdot {}^A O_C \right] \iiint_V I \cdot \rho \cdot dv - {}^A O_C \cdot ({}^A O_C)^T \iiint_V \rho \cdot dv \\ {}^A I &= {}^C I + m \cdot ({}^A O_C)^T \cdot {}^A O_C \cdot I - m \cdot {}^A O_C \cdot ({}^A O_C)^T \\ {}^A I &= {}^C I + m \left[({}^A O_C)^T \cdot {}^A O_C \cdot I - {}^A O_C \cdot ({}^A O_C)^T \right] \end{aligned}$$

II. MUDANÇA DA MATRIZ DE INÉRCIA DEVIDA A UMA ROTAÇÃO

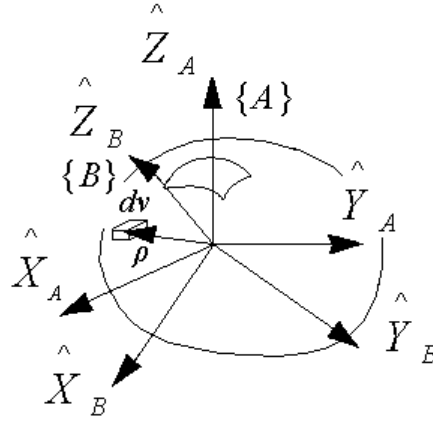


Figura II.2: Mudança da matriz de inércia

Sejam $\{A\}$ e $\{B\}$ dois sistemas com origem comum fixos a um corpo. P indica a posição de um elemento de volume dv , sendo AP e BP suas representações nos sistemas $\{A\}$ e $\{B\}$ respectivamente.

Por definição,

$${}^BI = \iiint_V \left[({}^BP)^T \cdot {}^BP \cdot I - {}^BP \cdot ({}^BP)^T \right] \rho \cdot dv$$

onde ρ é a densidade de massa.

AP e BP estão relacionados por:

$${}^BP = {}^B{}_AR \cdot {}^AP$$

Assim,

$$\begin{aligned} {}^BP &= \iiint_V \left[({}^AP)^T \cdot ({}^B{}_AR)^T \cdot {}^B{}_AR \cdot {}^AP \cdot I - {}^B{}_AR \cdot {}^AP \cdot ({}^AP)^T \cdot ({}^B{}_AR)^T \right] \rho \cdot dv \\ {}^BP &= \iiint_V \left[({}^AP)^T \cdot {}^AP \cdot I - {}^B{}_AR \cdot {}^AP \cdot ({}^AP)^T \cdot ({}^B{}_AR)^T \right] \rho \cdot dv \end{aligned}$$

Notando que $({}^AP)^T \cdot {}^AP$ é escalar e que a matriz identidade I pode ser escrita como

$$I = {}^B{}_AR \cdot ({}^B{}_AR)^T,$$

podemos reescrever:

$${}^BI = \iiint_V {}^B{}_AR \cdot \left[({}^AP)^T \cdot {}^AP \cdot I - {}^AP \cdot ({}^AP)^T \right] \cdot ({}^B{}_AR)^T \cdot \rho \cdot dv$$

Considerando que ${}^B{}_AR$ é fixa para a integração,

$${}^BI = {}^B{}_AR \cdot \left\{ \iiint_V \left[({}^AP)^T \cdot {}^AP \cdot I - {}^AP \cdot ({}^AP)^T \right] \rho \cdot dv \right\} \cdot ({}^B{}_AR)^T$$

Ou seja:

$${}^BI = {}^B{}_AR \cdot {}^AI \cdot ({}^B{}_AR)^T$$

Nota: Se ${}^B{}_AR$ é a matriz de autovetores de AI , BI resulta diagonal.

III. DEDUÇÃO DA EQUAÇÃO DE EULER

Consideremos um ligamento i qualquer, um sistema inercial $\{O\} = \{U\}$. Suponhamos que o centro de massa do ligamento esteja fixo no espaço.

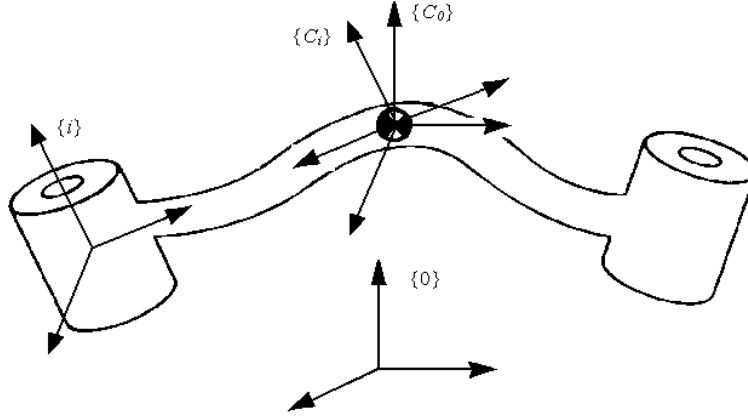


Figura III.3: Centro de massa do ligamento i

Seja o sistema $\{C_0\}$ com origem no C.M. do ligamento e com os eixos respectivamente paralelos aos de $\{O\}$. Seja ainda o sistema $\{C_i\}$, também com origem no C.M. e com os eixos paralelos aos do sistema $\{i\}$. Note que $\{C_0\}$ está fixo em relação ao sistema inercial e $\{C_i\}$ está fixo em relação ao ligamento.

Sejam ainda:

- ${}^{C_0}I_i$ a matriz de inércia do ligamento i em relação a $\{C_0\}$;
- ω_i a velocidade angular do sistema $\{i\}$ em relação a $\{O\}$ e expressa em $\{O\}$;
- 0N_i o momento resultante em relação ao C.M. que age sobre o ligamento, expresso no sistema $\{O\}$.

Nessas condições, vale:

$$\frac{d}{dt}({}^{C_0}I_i \cdot \omega_i) = {}^0N_i$$

Mas

$$\begin{aligned} {}^{C_0}I_i &= {}^0R \cdot {}^{C_i}I_i \cdot ({}^0R)^T = {}^0R \cdot {}^{C_i}I_i \cdot {}^0R^T \\ \omega_i &= {}^0R \cdot {}^i\omega_i \\ {}^0N_i &= {}^0R \cdot {}^iN_i, \end{aligned}$$

onde

- ${}^{C_i}I_i$ é a matriz de inércia do ligamento i em relação ao sistema $\{C_i\}$ e
- iN_i é a descrição do momento 0N_i no sistema $\{i\}$.

Substituindo as três últimas igualdades na anterior, vem:

$$\frac{d}{dt}({}^0R \cdot {}^{C_i}I_i \cdot {}^0R^T \cdot {}^i\omega_i) = {}^0R \cdot {}^iN_i$$

Ou seja,

$$\frac{d}{dt}[{}^0R({}^{C_i}I_i \cdot {}^i\omega_i)] = {}^0R \cdot {}^iN_i$$

Daí:

$${}^0R_i \frac{d}{dt} ({}^{c_i}I_i \cdot {}^i\omega_i) + \frac{d}{dt} ({}^0R_i) ({}^{c_i}I_i \cdot {}^i\omega_i) = {}^0R_i \cdot {}^iN_i$$

Considerando que

- $\frac{d}{dt} ({}^{c_i}I_i \cdot {}^i\omega_i) = {}^{c_i}I_i \cdot {}^i\dot{\omega}_i$, pois ${}^{c_i}I_i$ é constante;
- $\frac{d}{dt} ({}^0R_i) ({}^{c_i}I_i \cdot {}^i\omega_i) = {}^i\omega_i \times {}^0R_i ({}^{c_i}I_i \cdot {}^i\omega_i)$,

então temos:

$${}^0R_i \cdot {}^{c_i}I_i \cdot {}^i\dot{\omega}_i + {}^i\omega_i \times {}^0R_i ({}^{c_i}I_i \cdot {}^i\omega_i) = {}^0R_i \cdot {}^iN_i$$

Pré-multiplicando ambos os membros por iR_0 , resulta:

$${}^{c_i}I_i \cdot {}^i\dot{\omega}_i + {}^iR_0 [{}^i\omega_i \times {}^0R_i ({}^{c_i}I_i \cdot {}^i\omega_i)] = {}^iN_i$$

e, portanto,

$${}^{c_i}I_i \cdot {}^i\dot{\omega}_i + {}^i\omega_i \times ({}^{c_i}I_i \cdot {}^i\omega_i) = {}^iN_i$$

que é a *Equação de Euler* para o ligamento i .

IV. DEMONSTRAÇÃO - VELOCIDADES ANGULARES

Seja A_S a matriz antissimétrica

$${}^A_S = {}^A_R \otimes {}^B_R \quad (A4.1)$$

e sejam A_S e B_S definidas de maneira análoga. Considerando que

$${}^A_R = {}^A_R \cdot {}^B_R$$

e derivando ambos os membros em relação ao tempo, vem que

$${}^A_R \otimes {}^B_R = {}^A_R \cdot {}^B_R \otimes {}^A_R \cdot {}^B_R$$

Pós-multiplicando ambos os membros desta igualdade por C_R e utilizando (A4.1) tem-se

$${}^A_S = {}^A_R \cdot {}^B_R \otimes {}^C_R + {}^A_R \otimes {}^B_R \cdot {}^C_R$$

a qual, levando em conta a equação (A4.1), pode ser reescrita como

$${}^A_S = {}^A_R \cdot {}^B_R \otimes {}^C_R + {}^A_R \otimes {}^B_R \cdot {}^C_R$$

dado que ${}^B_R = {}^B_R \cdot {}^C_R$ e que ${}^C_R \cdot {}^B_R = I$. Mas, ${}^B_S = {}^B_R \otimes {}^C_R$ e ${}^B_S \otimes {}^C_R = {}^B_R$ e, portanto, resulta que

$${}^A_S = {}^A_R \cdot {}^B_S + {}^A_S \cdot {}^B_R \quad (A4.2)$$

Por outro lado, sabe-se que se S é uma matriz do tipo

$$S = \begin{bmatrix} 0 & -\Omega_z & \Omega_y \\ \Omega_z & 0 & -\Omega_x \\ -\Omega_y & \Omega_x & 0 \end{bmatrix}$$

e P é um vetor de 3 componentes, então

$$S \cdot P = \Omega \times P \quad (A4.3)$$

Considere-se então o produto ${}^B_S \cdot {}^B_R$:

$${}^B_S \cdot {}^B_R = {}^B_S \cdot \begin{bmatrix} \hat{X}_A & \hat{Y}_A & \hat{Z}_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^B_S \cdot \hat{X}_A & {}^B_S \cdot \hat{Y}_A & {}^B_S \cdot \hat{Z}_A \end{bmatrix}$$

e, tendo em vista a equação (A4.3)

$${}^B S \cdot {}^B R = \left[{}^B \Omega \times {}^B \hat{X}_A \mid {}^B \Omega \times {}^B \hat{Y}_A \mid {}^B \Omega \times {}^B \hat{Z}_A \right]$$

Portanto,

$${}^A R \cdot {}^B S \cdot {}^B R = {}^A R \cdot \left[{}^B \Omega \times {}^B \hat{X}_A \mid {}^B \Omega \times {}^B \hat{Y}_A \mid {}^B \Omega \times {}^B \hat{Z}_A \right].$$

Ou seja,

$${}^A R \cdot {}^B S \cdot {}^B R = \left[{}^A R \cdot ({}^B \Omega \times {}^B \hat{X}_A) \mid {}^A R \cdot ({}^B \Omega \times {}^B \hat{Y}_A) \mid {}^A R \cdot ({}^B \Omega \times {}^B \hat{Z}_A) \right],$$

que é o mesmo que

$${}^A R \cdot {}^B S \cdot {}^B R = \left[({}^A R \cdot {}^B \Omega_C) \times ({}^A R \cdot \hat{X}_A) \mid ({}^A R \cdot {}^B \Omega_C) \times ({}^A R \cdot \hat{Y}_A) \mid ({}^A R \cdot {}^B \Omega_C) \times ({}^A R \cdot \hat{Z}_A) \right].$$

Notando que

$${}^A R \cdot {}^B \hat{X}_A = {}^A \hat{X}_A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T,$$

$${}^A R \cdot {}^B \hat{Y}_A = {}^A \hat{Y}_A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T,$$

$${}^A R \cdot {}^B \hat{Z}_A = {}^A \hat{Z}_A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$$

e

$${}^A R \cdot {}^B \Omega_C = {}^A ({}^B \Omega_C),$$

resulta então

$${}^A R \cdot {}^B S \cdot {}^B R = \left[{}^A ({}^B \Omega_C) \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \mid {}^A ({}^B \Omega_C) \times \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T \mid {}^A ({}^B \Omega_C) \times \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \right].$$

Isto é,

$${}^A R \cdot {}^B S \cdot {}^B R = \begin{bmatrix} 0 & -{}^A ({}^B \Omega_C)_z & {}^A ({}^B \Omega_C)_y \\ {}^A ({}^B \Omega_C)_z & 0 & -{}^A ({}^B \Omega_C)_x \\ -{}^A ({}^B \Omega_C)_y & {}^A ({}^B \Omega_C)_x & 0 \end{bmatrix}.$$

Portanto, da equação (A4.2)

$$\begin{bmatrix} 0 & -({}^A\Omega_C)_z & ({}^A\Omega_C)_y \\ ({}^A\Omega_C)_z & 0 & -({}^A\Omega_C)_x \\ -({}^A\Omega_C)_y & ({}^A\Omega_C)_x & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -{}^A({}^B\Omega_C)_z & {}^A({}^B\Omega_C)_y \\ {}^A({}^B\Omega_C)_z & 0 & -{}^A({}^B\Omega_C)_x \\ -{}^A({}^B\Omega_C)_y & {}^A({}^B\Omega_C)_x & 0 \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -({}^A\Omega_B)_z & ({}^A\Omega_B)_y \\ ({}^A\Omega_B)_z & 0 & -({}^A\Omega_B)_x \\ -({}^A\Omega_B)_y & ({}^A\Omega_B)_x & 0 \end{bmatrix}$$

Ou seja,
 ${}^A\Omega_C = {}^A({}^B\Omega_C) + {}^A\Omega_B,$

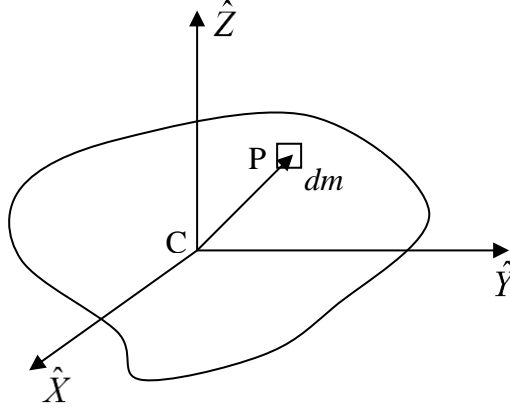
que é o mesmo que

$${}^A\Omega_C = {}^A R_B \cdot {}^B\Omega_C + {}^A\Omega_B.$$

V. CÁLCULO DA ENERGIA CINÉTICA

Considere-se um corpo de massa M e matriz de inércia ${}^C I$ expressa num sistema $\{\hat{X}, \hat{Y}, \hat{Z}\}$ de coordenadas fixo ao corpo e com origem coincidente com o centro de massa C deste. Supondo o corpo realizando um movimento geral, composto por uma translação em conjunto com uma rotação, o objetivo deste apêndice é calcular a sua energia cinética.

Seja então o elemento de massa dm localizado no ponto P do corpo, conforme mostra a figura, movendo-se com velocidade v .



A energia cinética K do corpo é dada por

$$K = \frac{1}{2} \int_M v^T v \, dm,$$

onde v denota a velocidade do ponto em relação a um sistema fixo, a qual pode ser escrita em função da velocidade do centro de massa v_C e da velocidade angular Ω do corpo, ambas em relação ao mesmo sistema fixo, como

$$v = v_C + \Omega \times r,$$

em que r foi utilizado para representar o vetor posição $(P-C)$, simplificando a notação.

Considerando que

$$\Omega \times r = S \cdot r,$$

em que S é a matriz

$$S = \begin{bmatrix} 0 & -\Omega_z & \Omega_y \\ \Omega_z & 0 & -\Omega_x \\ -\Omega_y & \Omega_x & 0 \end{bmatrix},$$

$${}^e\Omega = [\Omega_x \quad \Omega_y \quad \Omega_z]^T, \text{ tem-se}$$

$$v^T v = [v_C^T + r^T \cdot S^T] [v_C + S \cdot r],$$

Portanto,

$$K = \frac{1}{2} \int_M v_C^T v_C + 2v_C^T S r + r^T S^T S r \, dm,$$

ou seja,

$$K = \frac{1}{2} \left[|v_C|^2 \int_M dm + 2v_C^T S \int_M r \, dm + \int_M r^T S^T S r \, dm \right].$$

Considerando que

$$\int_M dm = M$$

e que

$$\int_M r \, dm = 0,$$

pois o sistema de coordenadas fixo ao corpo tem origem no centro de massa deste, resulta

$$K = \frac{1}{2} \left[M |v_C|^2 + \int_M r^T S^T S r \, dm \right].$$

Denotando por r_x , r_y e r_z , respectivamente, as componentes do vetor r , tem-se

$$S r = \begin{bmatrix} -\Omega_z r_y + \Omega_y r_z \\ \Omega_z r_x - \Omega_x r_z \\ -\Omega_y r_x + \Omega_x r_y \end{bmatrix},$$

que pode ser reescrita como

$$Sr = \begin{bmatrix} 0 & r_z & -r_y \\ -r_z & 0 & r_x \\ r_y & -r_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega_x \\ \Omega_y \\ \Omega_z \end{bmatrix}.$$

Com isso,

$$K = \frac{1}{2} \left[M |v_C|^2 + \Omega^T \int_M \begin{bmatrix} r_y^2 + r_z^2 & -r_x r_y & -r_x r_z \\ -r_x r_y & r_x^2 + r_z^2 & -r_y r_z \\ -r_x r_z & -r_y r_z & r_x^2 + r_y^2 \end{bmatrix} dm \Omega \right].$$

Como, por definição,

$$\int_M \begin{bmatrix} r_y^2 + r_z^2 & -r_x r_y & -r_x r_z \\ -r_x r_y & r_x^2 + r_z^2 & -r_y r_z \\ -r_x r_z & -r_y r_z & r_x^2 + r_y^2 \end{bmatrix} dm = {}^C I,$$

obtém-se, por fim,

$$K = \frac{1}{2} M |v_C|^2 + \frac{1}{2} \Omega^T {}^C I \Omega.$$

Esta expressão mostra que a energia cinética é constituída de duas parcelas: a primeira corresponde à energia cinética de um corpo de massa M em movimento de translação com velocidade v_C (ou, tudo se passa como se a massa M do corpo esteja concentrada em seu centro de massa, que se move com velocidade v_C); a segunda corresponde a uma rotação pura do corpo em torno de seu eixo instantâneo de rotação com velocidade angular Ω .

Para finalizar, note-se que a definição da matriz de inércia, ainda que de início pudesse parecer estranha e um tanto artificial, surgiu de maneira natural aqui.