

DCC192

2025/1



Desenvolvimento de Jogos Digitais

A5: Vetores

Prof. Lucas N. Ferreira

Plano de aula

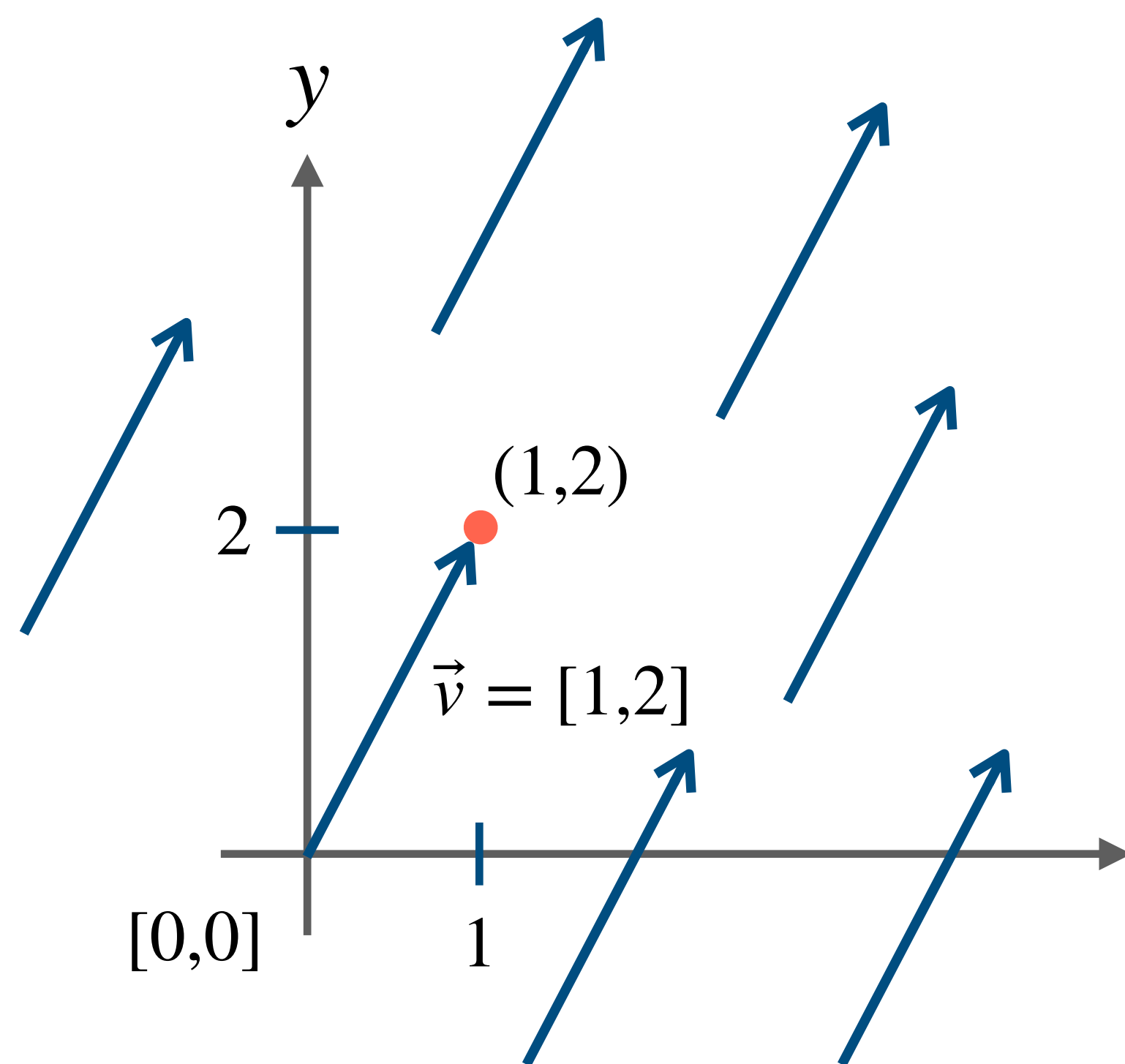


- ▶ Vetores
 - ▶ Definição
 - ▶ Operações
 - ▶ Adição/Subtração
 - ▶ Multiplicação
 - ▶ Produto Escalar e Vetorial
 - ▶ Magnitude (Comprimento)
 - ▶ Normalização
 - ▶ Aplicações

Vetores



Um **vetor** representa uma magnitude, uma direção e um sentido em um espaço-dimensional.



- ▶ Por exemplo, um vetor $2D$ é definido como:

$$\vec{v} = [v_x, v_y] \in R^2$$

- ▶ **Vetores são independentes de posição:** dois vetores de mesma direção, sentido e comprimento são iguais!
- ▶ No entanto, é conveniente desenhar vetores com a **cauda** (ponto de partida) na origem $(0,0)$ de tal forma que a **cabeça** (ponto de destino) aponte para uma posição específica no espaço.

Vetores



```
class Vector2 {  
    float x,  
    float y  
}
```

```
class Vector3 {  
    float x,  
    float y,  
    float z  
}
```

- ▶ Em jogos digitais, geralmente usamos vetores 2D e 3D, dependendo dos gráficos de jogo.
- ▶ Vetores 4D também são usados em jogos 3D para combinar transformações (e.g., rotação e translação)
- ▶ Em código, vetores geralmente são representados por uma classe com um atributo float por dimensão.

Operações Vetoriais



Diversas operações podem ser realizadas com vetores:

- ▶ Adição
- ▶ Subtração
- ▶ Multiplicação por Escalar
- ▶ Módulo (norma)
- ▶ Normalização
- ▶ Produto Escalar
- ▶ Produto Vetorial

Adição



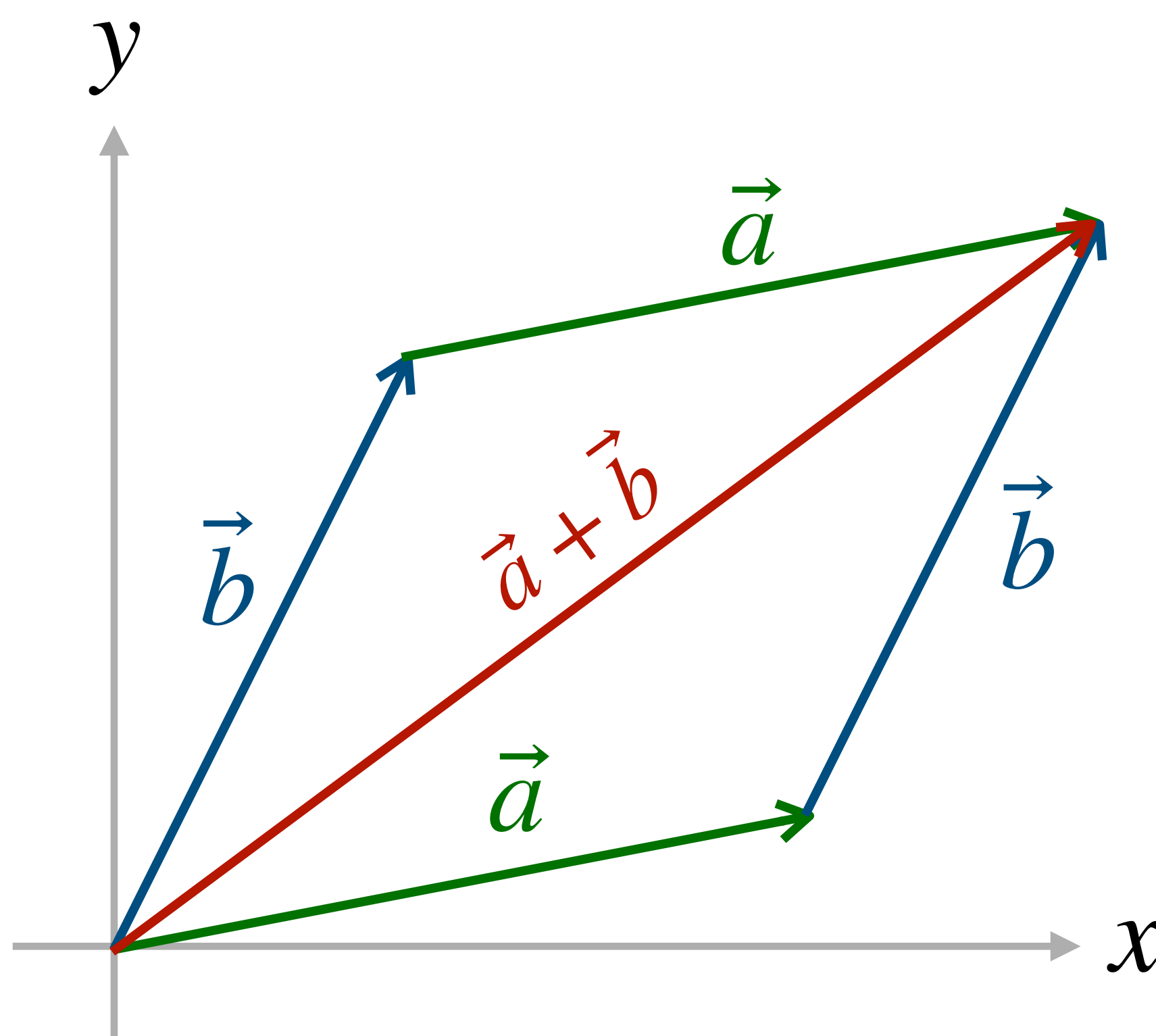
A **adição** de dois vetores \vec{a} e \vec{b} é definida pela soma dos componentes de \vec{a} com seus componentes correspondentes em \vec{b} :

$$\vec{a} + \vec{b} = [a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z]$$

Geometricamente

- ▶ A adição pode ser realizada posicionando a cauda de \vec{b} na cabeça de \vec{a} , e desenhando um vetor da cauda de \vec{a} até a cabeça de \vec{b} .
- ▶ Note que se fizermos a soma na ordem inversa $\vec{b} + \vec{a}$, o vetor resultante é o mesmo.

Regra do paralelogramo: $\vec{b} + \vec{a} = \vec{a} + \vec{b}$



Subtração

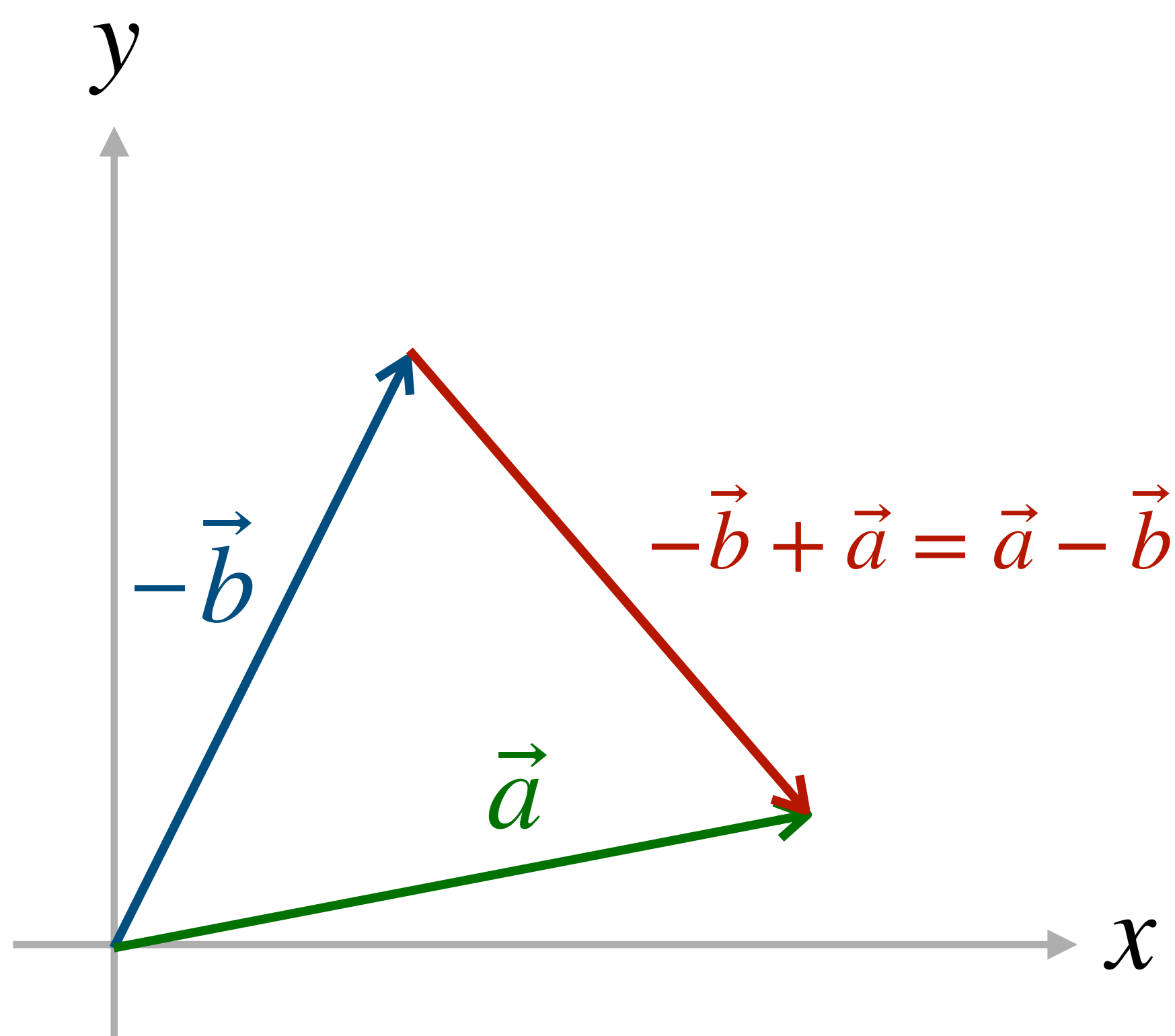


A **subtração** de dois vetores \vec{b} e \vec{a} é definida pela subtração dos componentes de \vec{b} pelo seus componentes correspondentes em \vec{a} :

$$\vec{a} - \vec{b} = [a_x - b_x, a_y - b_y, a_z - b_z]$$

Geometricamente

- ▶ A subtração pode ser realizada da mesma forma como a adição, mas primeiro temos que inverter a direção de \vec{b}
- ▶ Note que se fizermos a subtração na ordem inversa $\vec{b} - \vec{a}$, o vetor resultante será diferente. Por isso, a subtração não é comutativa.



Multiplicação por Escalar

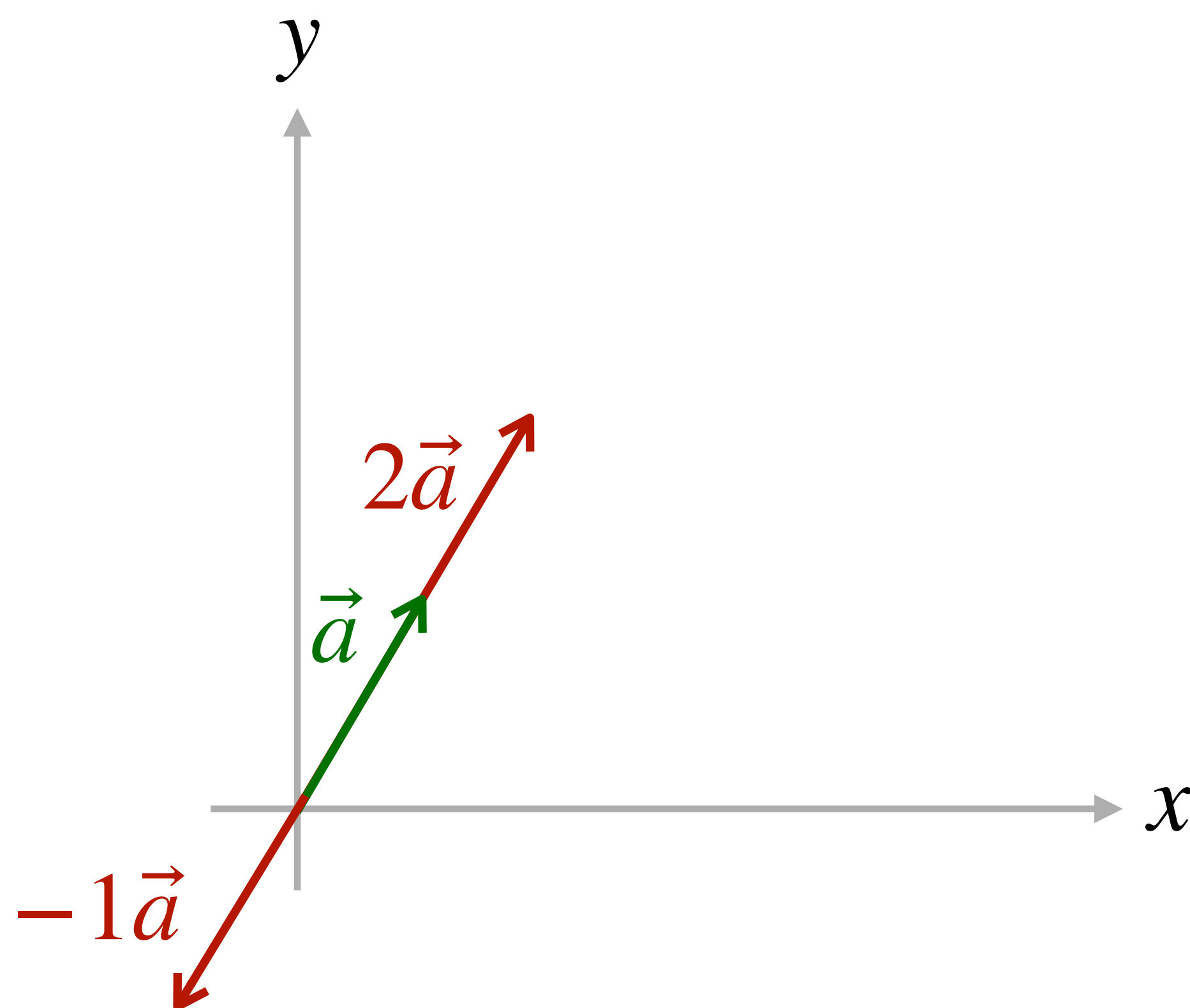


A **multiplicação** de um vetor \vec{a} por um escalar s é definida pela multiplicação de todos os compoenetes de \vec{a} por s :

$$s \cdot \vec{a} = [s \cdot a_x, s \cdot a_y, s \cdot a_z]$$

Geometricamente

- ▶ A multiplicação por escalar altera apenas o comprimento de \vec{a} .
- ▶ Se s for negativo, a multiplicação irá inverter a direção de \vec{a} .



Magnitude (norma)

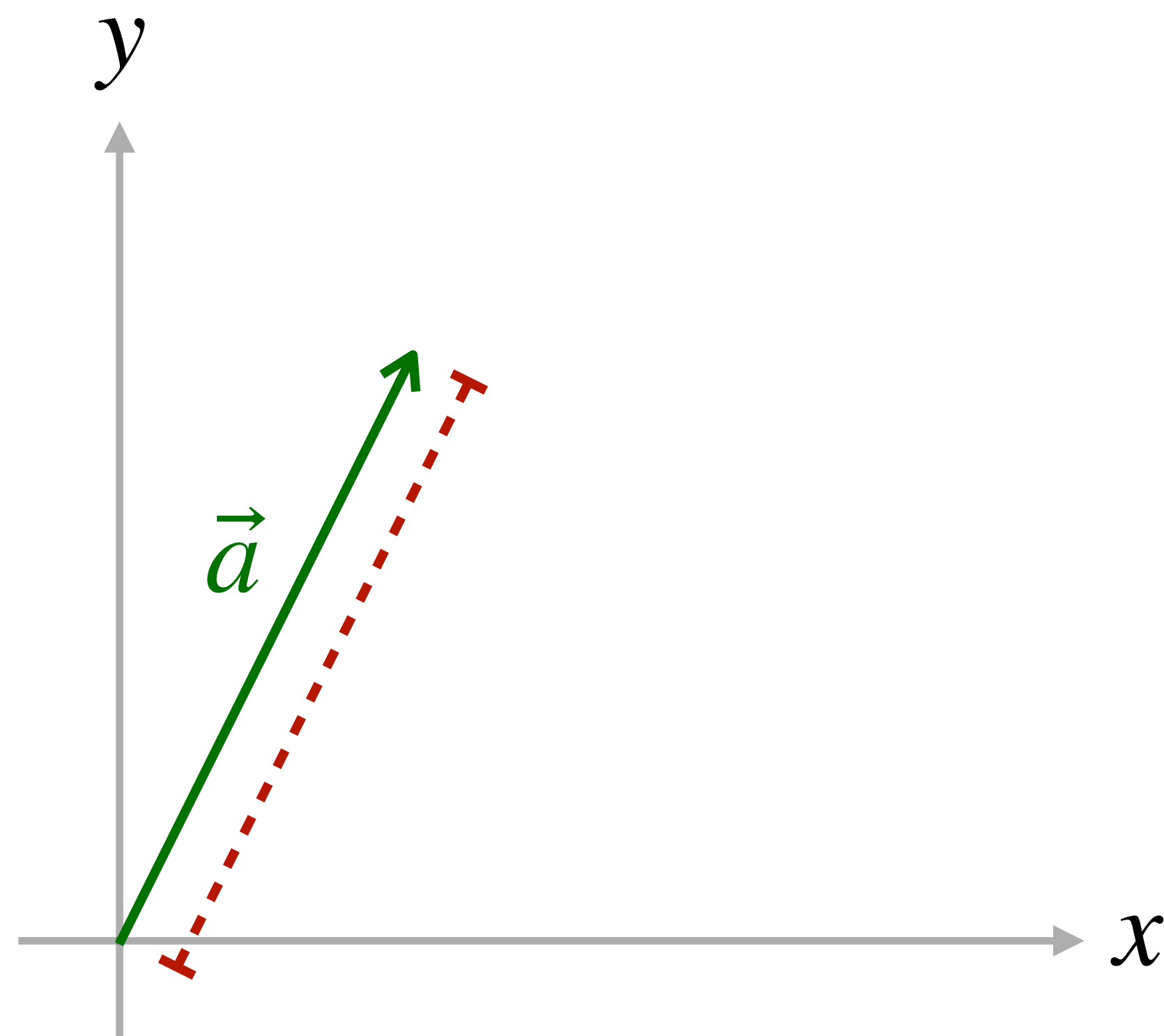


A **magnitude** $||\vec{a}||$ de um vetor \vec{a} é dada pela distância euclidiana entre a origem e o ponto ao qual \vec{a} aponta:

$$||\vec{a}|| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

Geometricamente

- ▶ A magnitude representa o comprimento do vetor
- ▶ Em jogos, quando vamos comparar a magnitude de dois vetores (e.g., qual inimigo está mais próximo do jogador), utilizamos o quadrado do comprimento, para evitar o cálculo das raízes quadradas.
- ▶ Se s for negativo, a multiplicação irá inverter a direção de \vec{a} .



Normalização

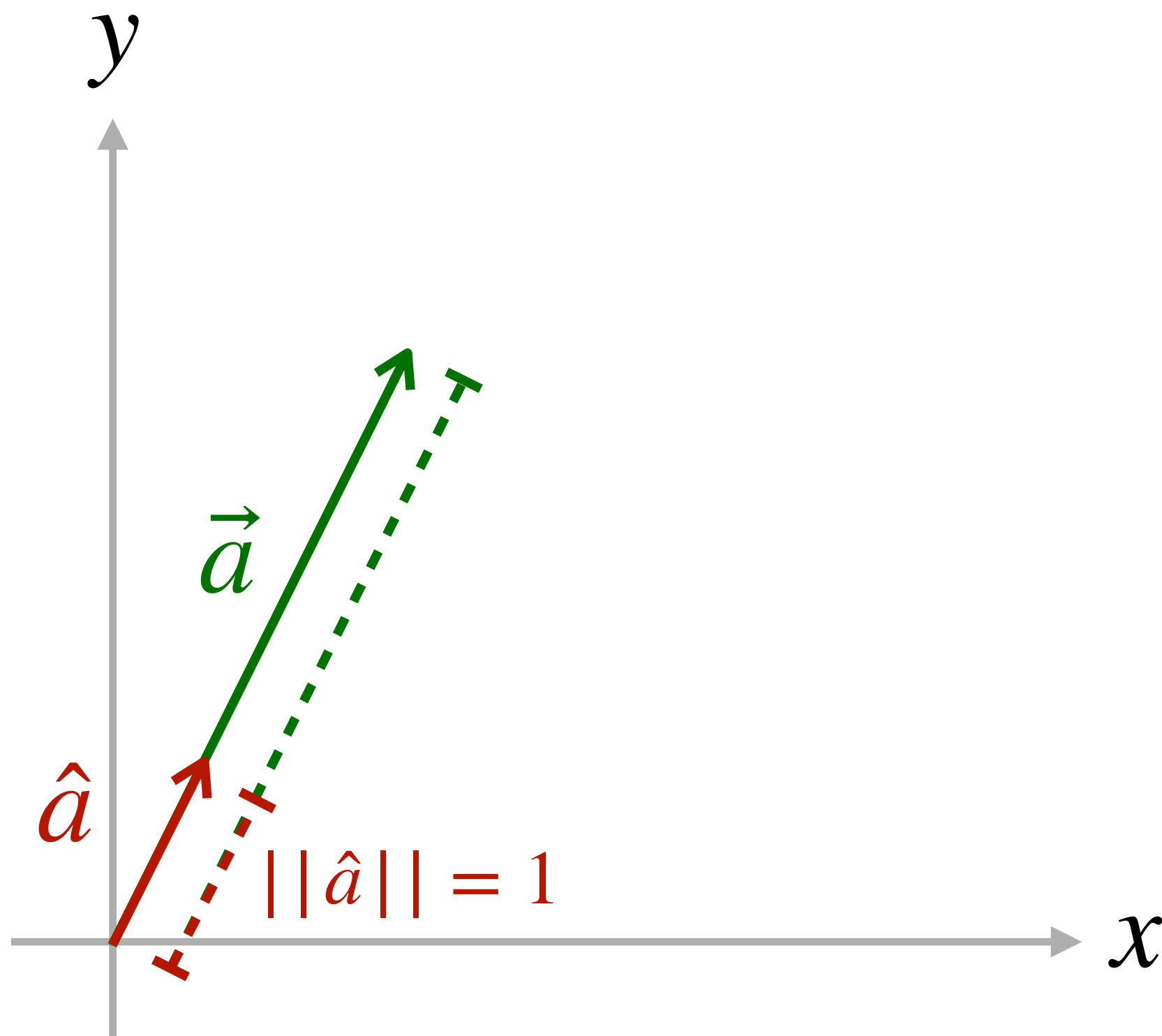


A **normalização** é definida pela divisão de todos os componentes do vetor \vec{a} pelo seu comprimento $||\vec{a}||$:

$$\hat{a} = \left[\frac{a_x}{||\vec{a}||}, \frac{a_y}{||\vec{a}||}, \frac{a_z}{||\vec{a}||} \right]$$

Geometricamente

- A normalização converte um vetor não-unitário \vec{a} em um vetor unitário \hat{a} , sendo que um vetor unitário \hat{a} é um vetor de magnitude $||\hat{a}|| = 1$.



Produto Escalar



O **produto escalar** entre dois vetores \vec{a} e \vec{b} é definido pela soma das multiplicações dos componentes de \vec{a} com seus componentes correspondentes em \vec{b} :

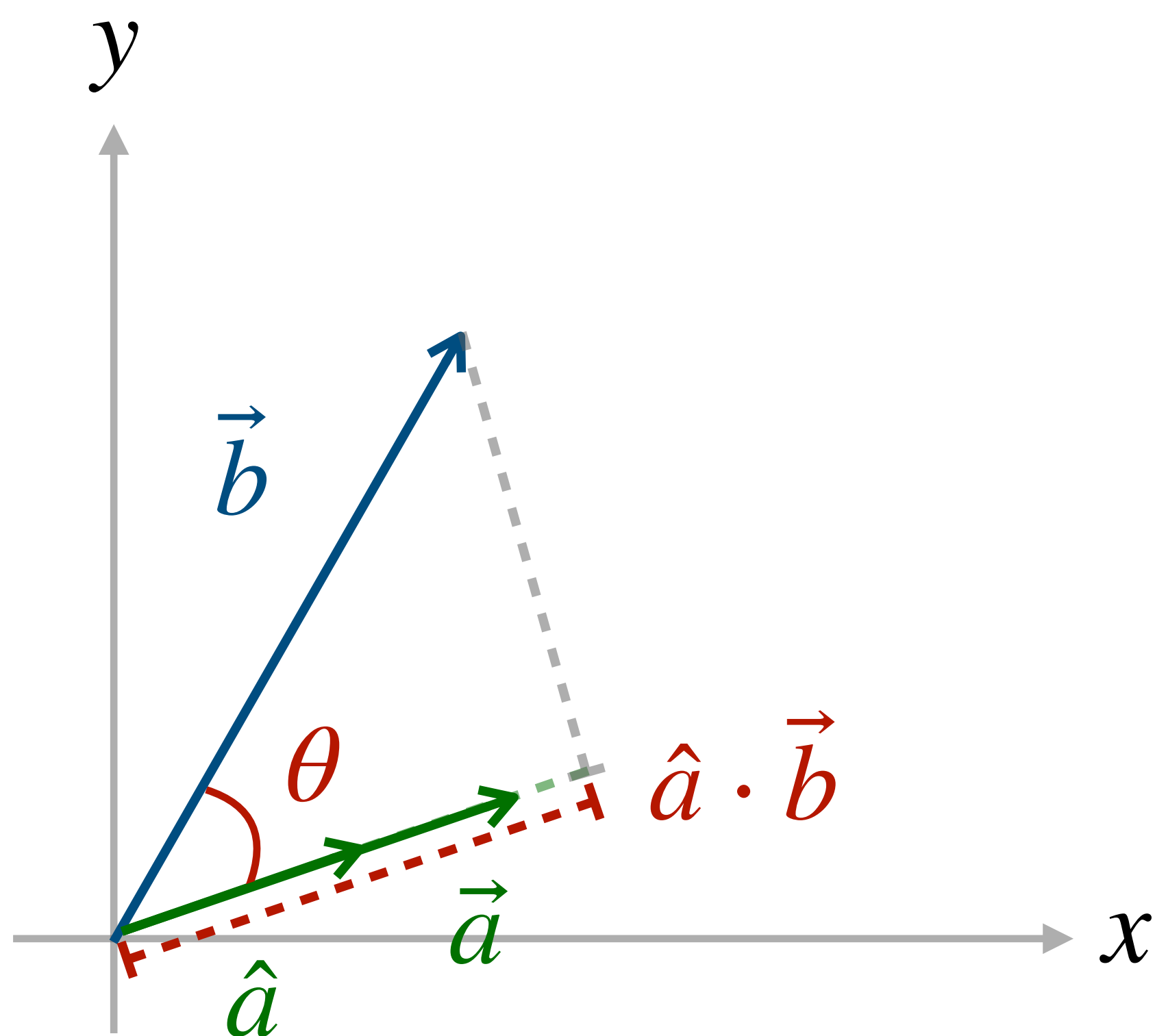
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z$$

Geometricamente

- ▶ O produto escalar pode ser utilizado para calcular o ângulo θ entre dois vetores \vec{a} e \vec{b} :

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ||\vec{a}|| ||\vec{b}|| \cos \theta$$
$$\theta = \arccos\left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{||\vec{a}|| ||\vec{b}||}\right)$$

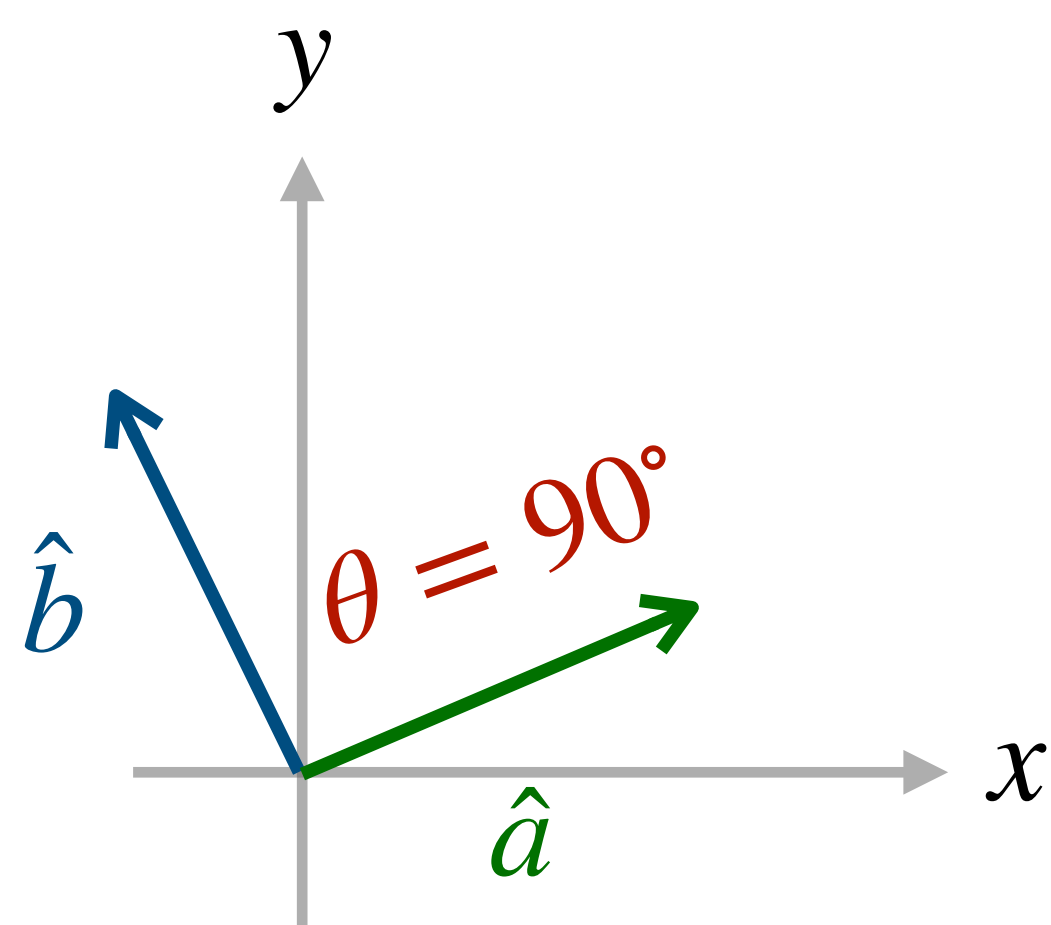
- ▶ Se \hat{a} for um vetor unitário, $\hat{a} \cdot \vec{b}$ é o comprimento da projeção de \vec{b} em \hat{a} .



Produto Escalar

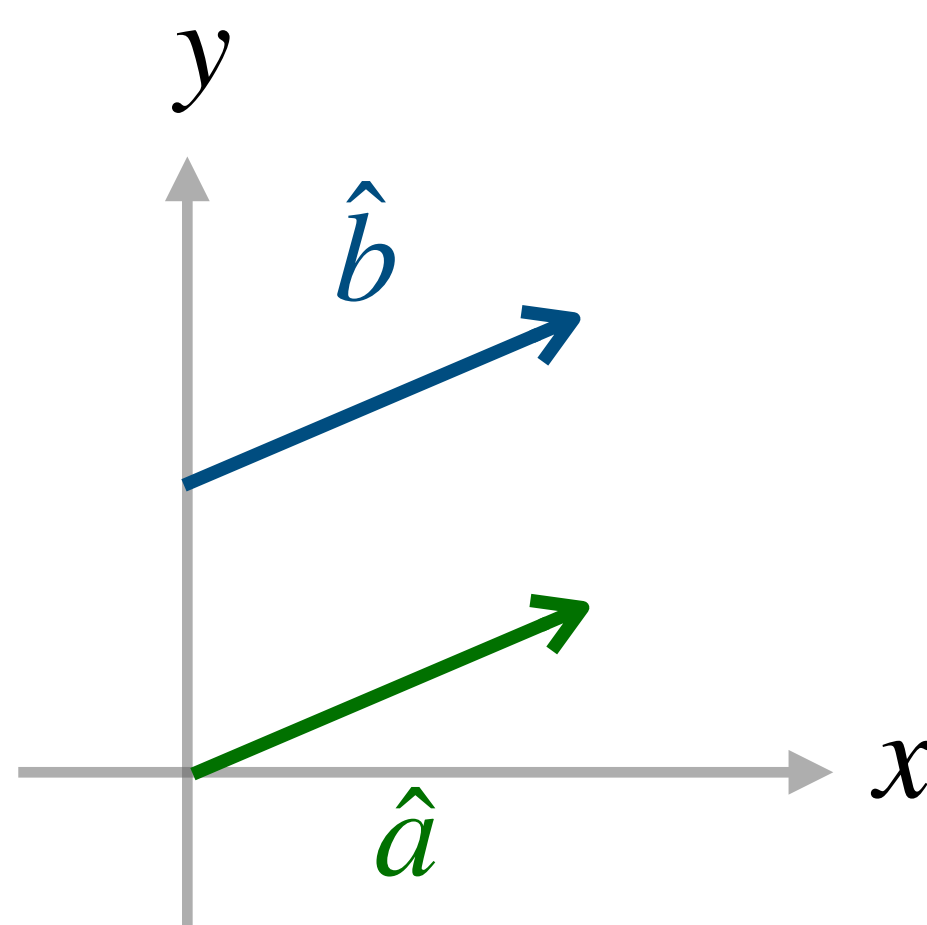


\hat{a} e \hat{b}
Perpendiculares



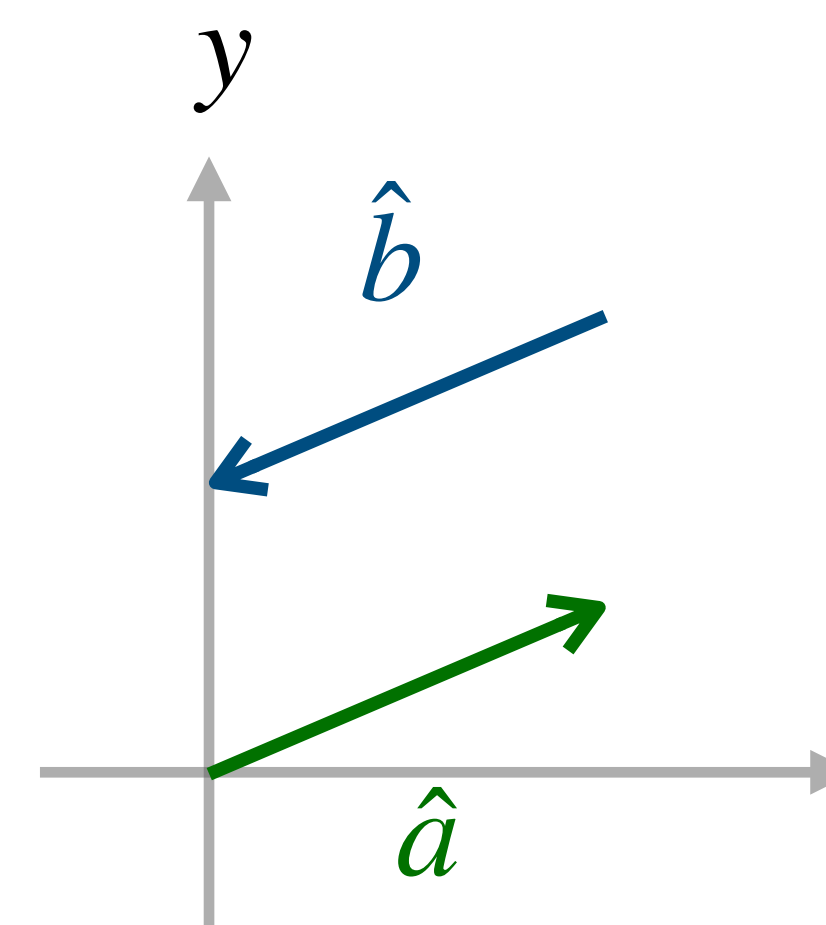
$$\hat{a} \cdot \hat{b} = \cos(90) = 0$$

\hat{a} e \hat{b}
Paralelos
Mesma direção



$$\hat{a} \cdot \hat{b} = \cos(0) = 1$$

\hat{a} e \hat{b}
Paralelos
Direções opostas

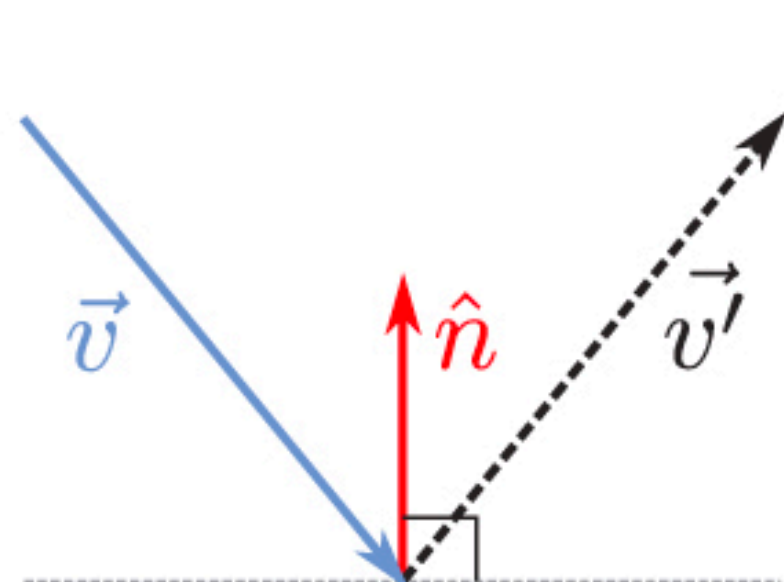


$$\hat{a} \cdot \hat{b} = \cos(180) = -1$$

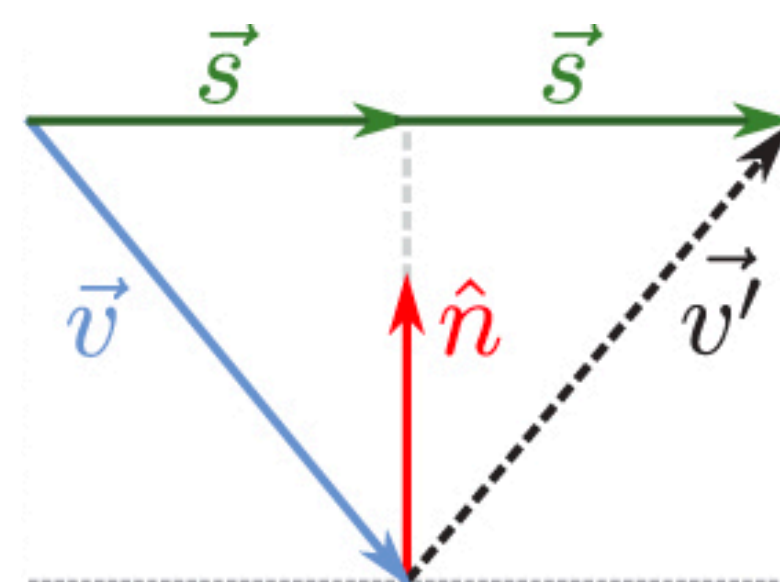
Exercício 1: Pong (Reflexão)



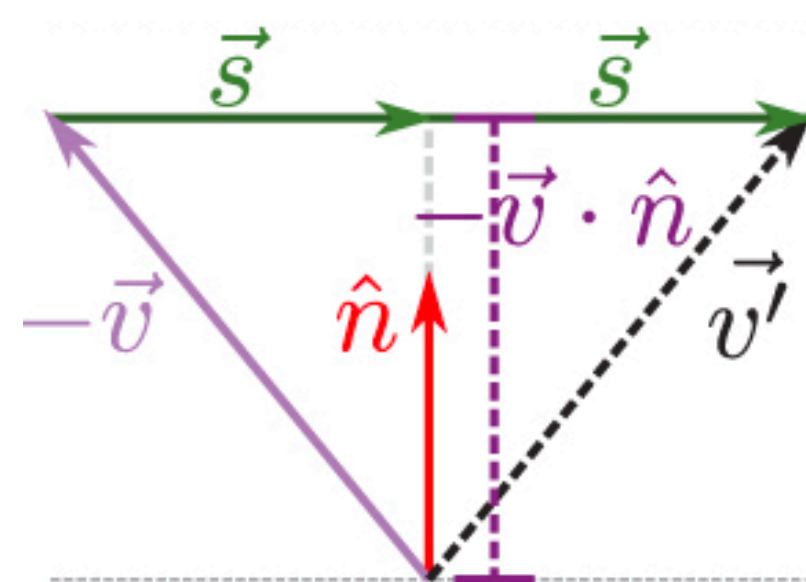
Calcular a reflexão \vec{v}' de um vetor \vec{v} que incide sobre uma superfície de normal \hat{n} :



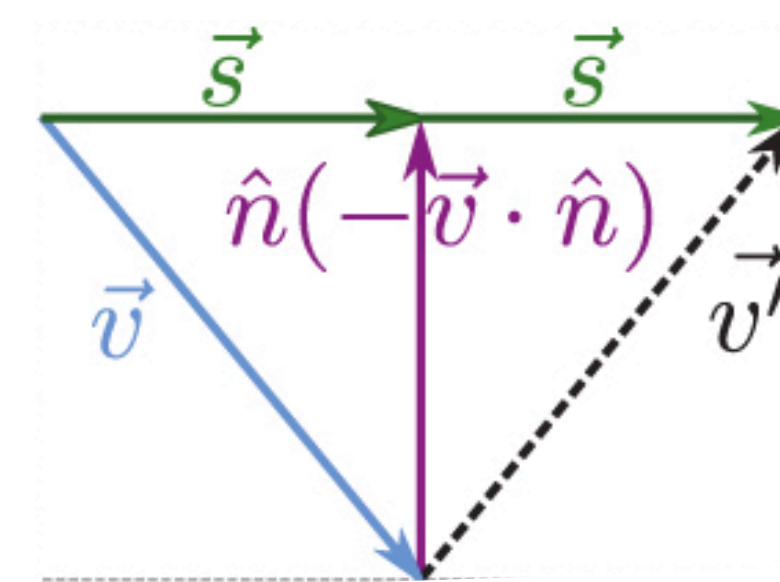
(a)



(b)



(c)



(d)

(b) Definir \vec{v}' em função de \vec{s} e \vec{v} :
$$\vec{v}' = 2\vec{s} - \vec{v}$$

(c) Definir \vec{s} em função de \vec{v} e \hat{n} :
$$\vec{s} = \vec{v} + \hat{n}(-\vec{v} \cdot \hat{n})$$

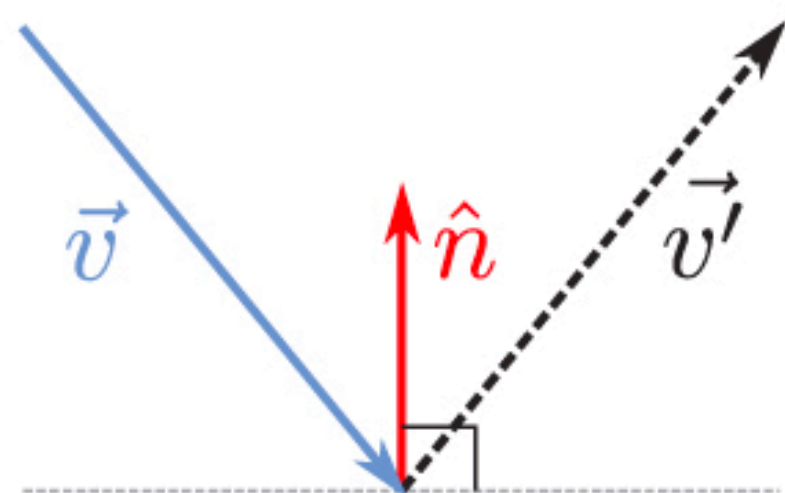
(d) Substituir (c) em (b):
$$\vec{v}' = 2(\vec{v} + \hat{n}(-\vec{v} \cdot \hat{n})) - \vec{v}$$
$$\vec{v}' = 2\vec{v} + 2\hat{n}(-\vec{v} \cdot \hat{n}) - \vec{v}$$
$$\vec{v}' = \vec{v} + 2\hat{n}(-\vec{v} \cdot \hat{n})$$

Exercício 1: Pong (Reflexão)



Essa fórmula vale para qualquer normal \hat{n} , mas no Pong só precisamos considerar dois casos:

- Parede inferior: $\hat{n}_b = (0, -1)$



$$\vec{v}' = \vec{v} + 2\hat{n}(-\vec{v} \cdot \hat{n})$$

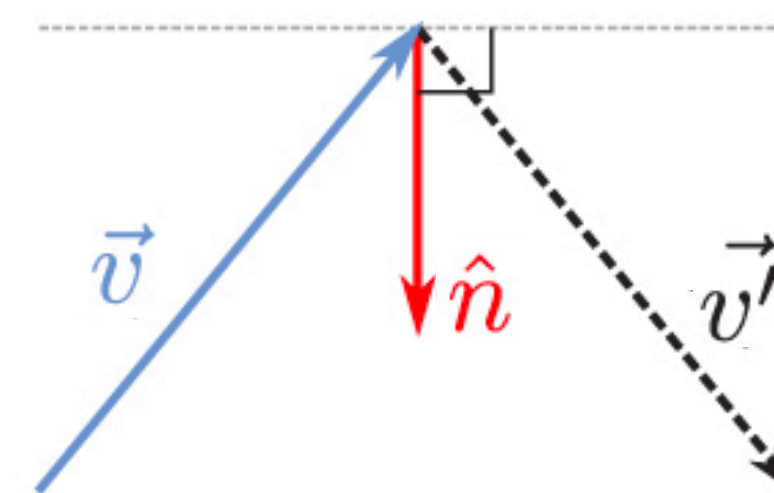
$$\vec{v}' = (v_x, v_y) + 2(0, -1)(-(v_x, v_y) \cdot (0, -1))$$

$$\vec{v}' = (v_x, v_y) + (0, -2)(-v_x \cdot 0 + (-v_y)(-1))$$

$$\vec{v}' = (v_x, v_y) + (0, -2)v_y$$

$$\vec{v}' = (v_x, v_y) + (0, -2v_y) = \boxed{(v_x, -v_y)}$$

- Parede superior: $\hat{n}_t = (0, 1)$



$$\vec{v}' = \vec{v} + 2\hat{n}(-\vec{v} \cdot \hat{n})$$

$$\vec{v}' = (v_x, v_y) + 2(0, 1)(-(v_x, v_y) \cdot (0, 1))$$

$$\vec{v}' = (v_x, v_y) + (0, 2)(-v_x \cdot 0 + (-v_y)1)$$

$$\vec{v}' = (v_x, v_y) + (0, 2)(-v_y)$$

$$\vec{v}' = (v_x, v_y) + (0, -2v_y) = \boxed{(v_x, -v_y)}$$

Produto Vetorial



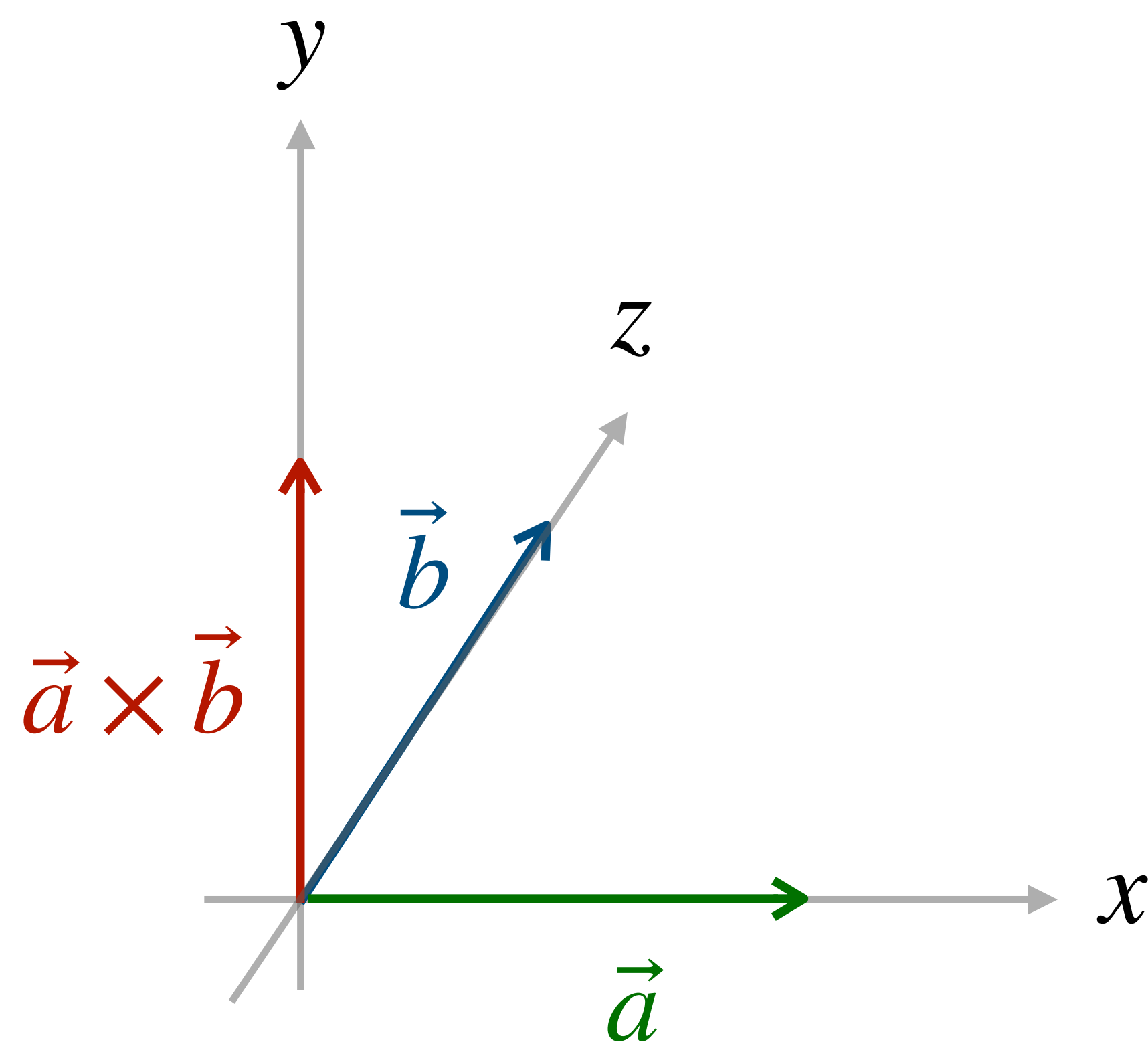
O produto vetorial entre dois vetores 3D \vec{a} e \vec{b} é definido pelo determinante da matriz:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{bmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{bmatrix}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = [a_y b_z - a_z b_y, a_z b_x - a_x b_z, a_x b_y - a_y b_x]$$

Geometricamente

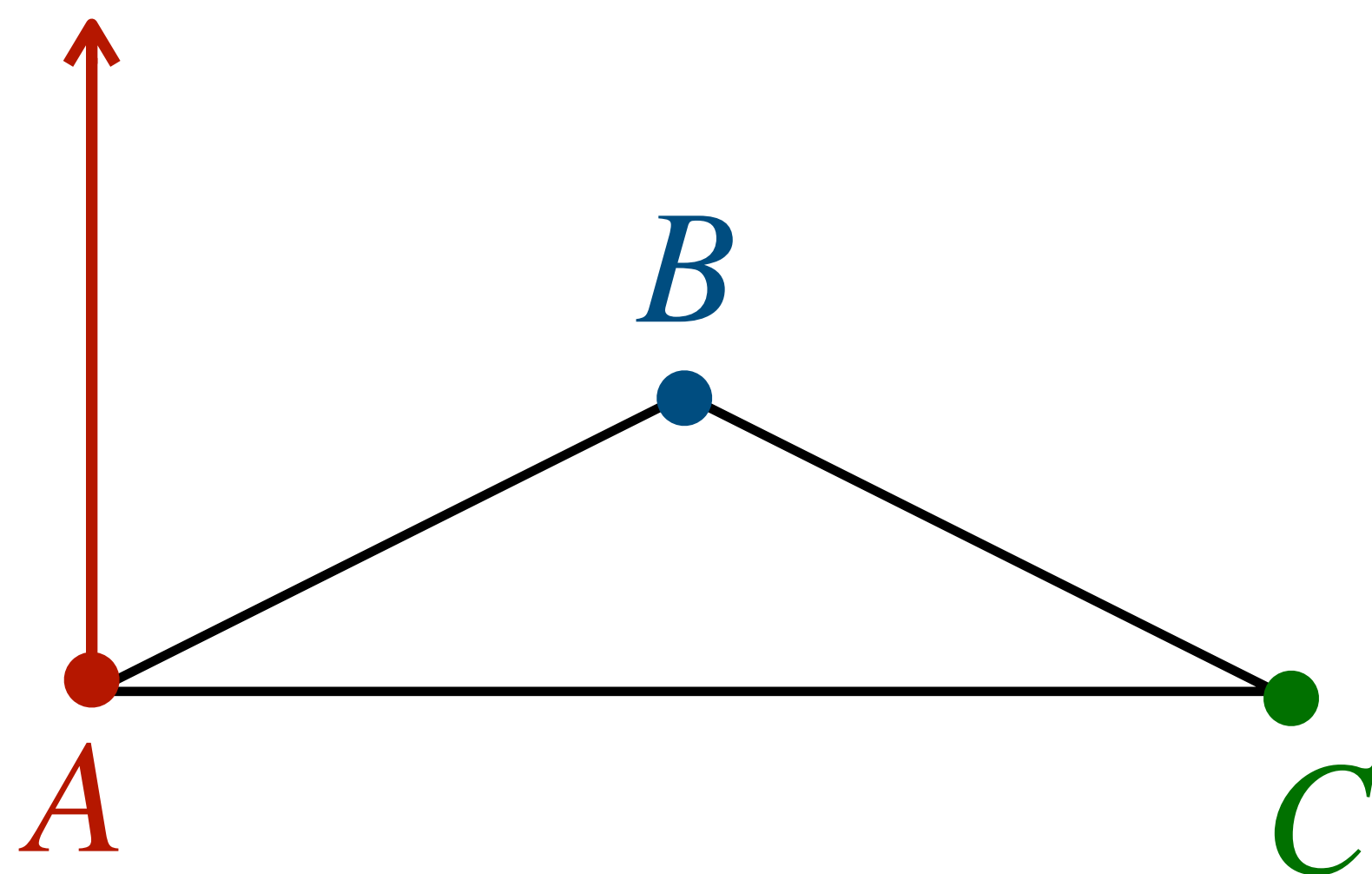
- ▶ $\vec{a} \times \vec{b}$ é o vetor normal ao plano desses dois vetores.
- ▶ **O produto vetorial não é definido em 2D!**



Exercício 2: Encontrar Normal de Superfície



Calcular a reflexão \vec{v}' de um vetor \vec{v} que incide sobre uma superfície de normal \hat{n} :



$$\vec{u} = B - A$$

$$\vec{v} = C - A$$

$$\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$$

$$\hat{n} = \text{norm}(\vec{n})$$

A6: Forças e Objetos Rígidos

- ▶ Forças como vetores
- ▶ Propriedades de objetos rígidos
- ▶ Métodos numéricos para mecânica linear
- ▶ Aceleração da gravidade
- ▶ Resistência de ar e fluídos