INF721

2023/2

UFV

Aprendizado em Redes Neurais Profundas

A4: Gradiente Descendente

INF721

2023/2

UFV

Aprendizado em Redes Neurais Profundas

A4: Gradiente Descendente

Logística

Avisos

- Aula A3 - Regressão Logística publicada no site [slides, vídeo]
- Na próxima aula teremos o nosso primeiro Teste!
  - T1: Regressão Logística e Aprendizado de Máquina

Última aula

- Funções de perda;
- Regressão Logística.

Plano de Aula

- Cálculo para Otimização de RNAs
  - Derivadas
  - Derivadas parciais e vetor gradiente
  - Regra da cadeia
- Gradiente descendente
  - Regra de atualização de pesos
  - Taxa de atualização
  - Aplicação em regressão logística

Resumo de Regressão Logística

Entrada

Um exemplo $x \in \mathbb{R}^d$

Saída

A probabilidade de x ser da classe $y = 1$

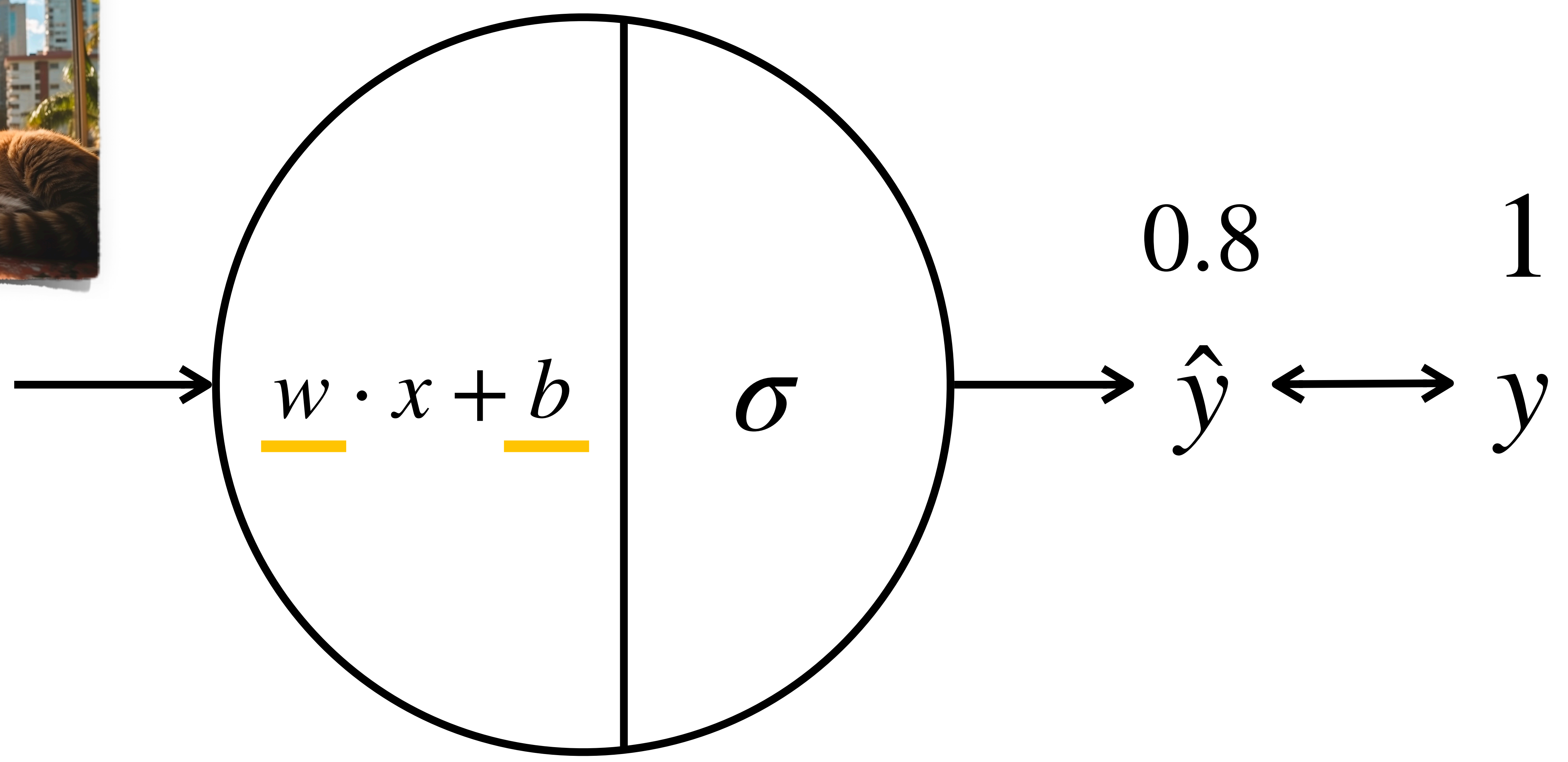
$\hat{y} = P(y = 1 \,|\, x),\ 0 \leq \hat{y} \leq 1$

Hipótese

$\hat{y} = h(x) = \sigma(w \cdot x + b)$

Função de Perda

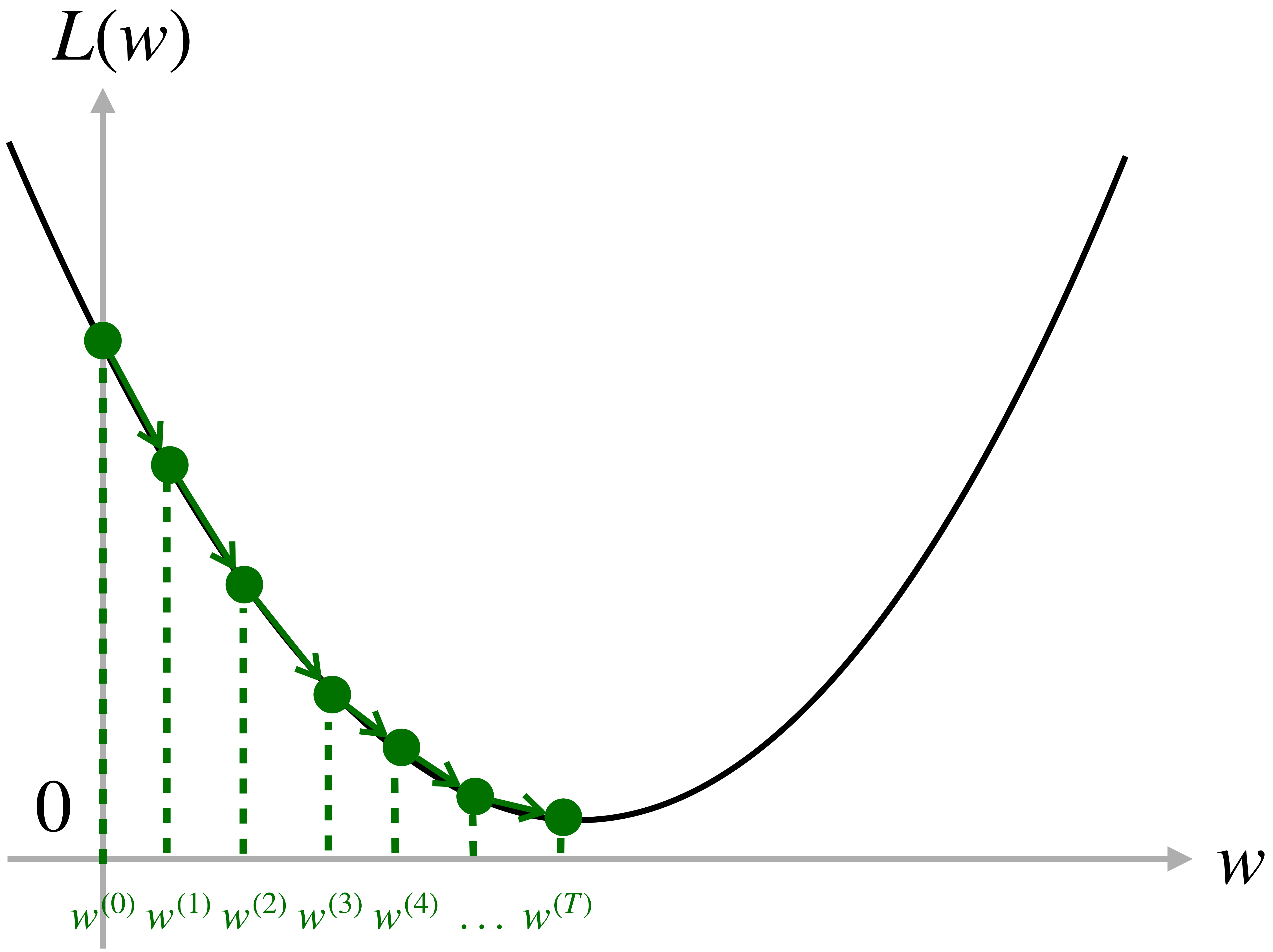
$$L(h) = -\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (y_i \, log \ \hat{y}_i + (1 - y_i) \ log \ (1 - \hat{y}_i))$$



Treinamento

Encontrar valores de w e b que minimizam L !

Gradiente Descendente

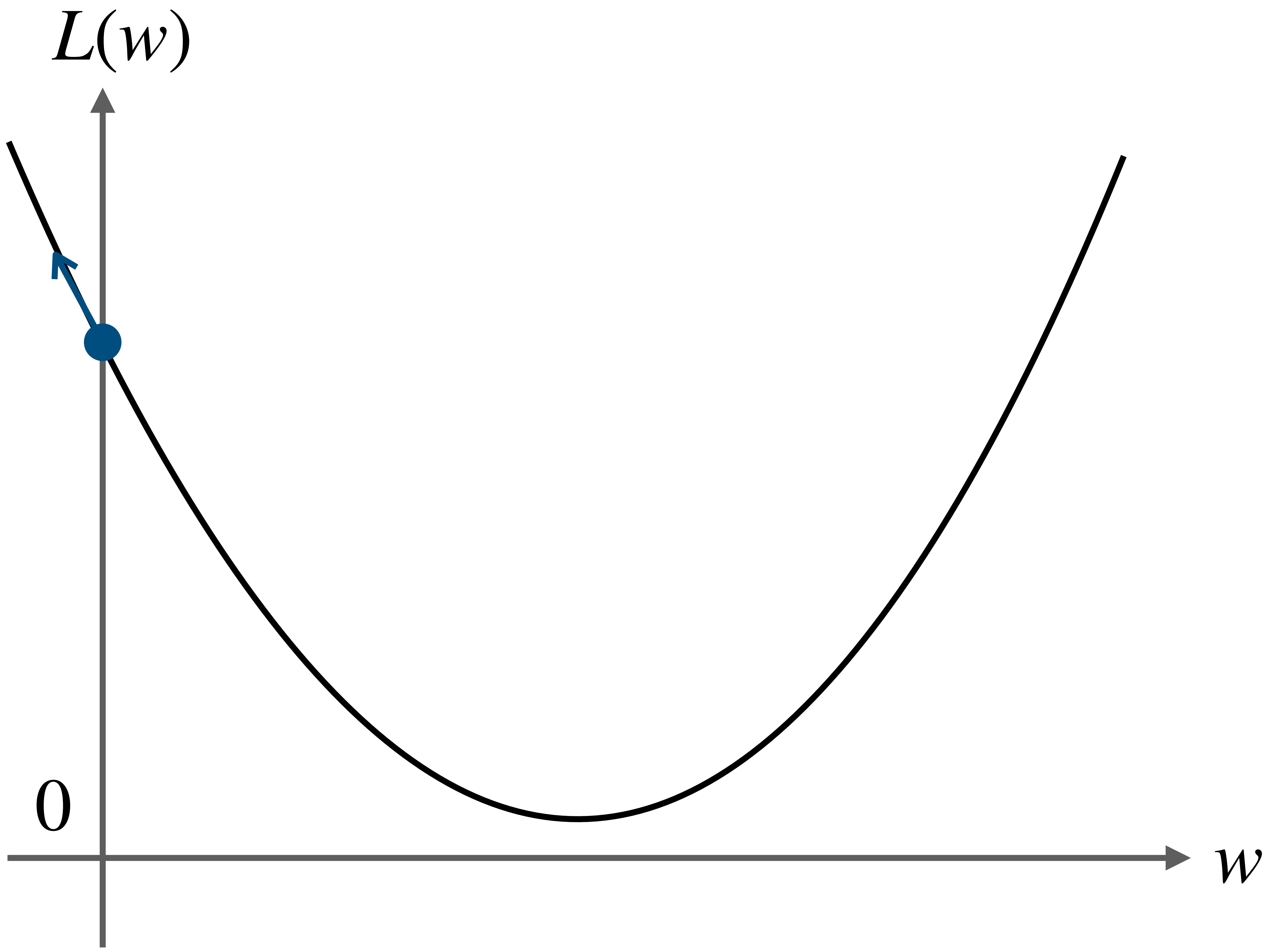


Dado um valor inicial w, atualizamos iterativamente o valor de w na direção de descida mais íngrime de L a partir do ponto $(w, L(w))$.

Como calcular a direção do movimento?
Vetor gradiente $\nabla L(w)$**!**

UFV

Vetor Gradiente



O **gradiente** de uma função multivariável $L(w_1, w_2, \ldots, w_d)$ é um vetor contendo suas derivadas parciais:

$$\nabla L = \begin{bmatrix} \frac{\partial L}{\partial w_1} \\ \frac{\partial L}{\partial w_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial L}{\partial w_d} \end{bmatrix}$$

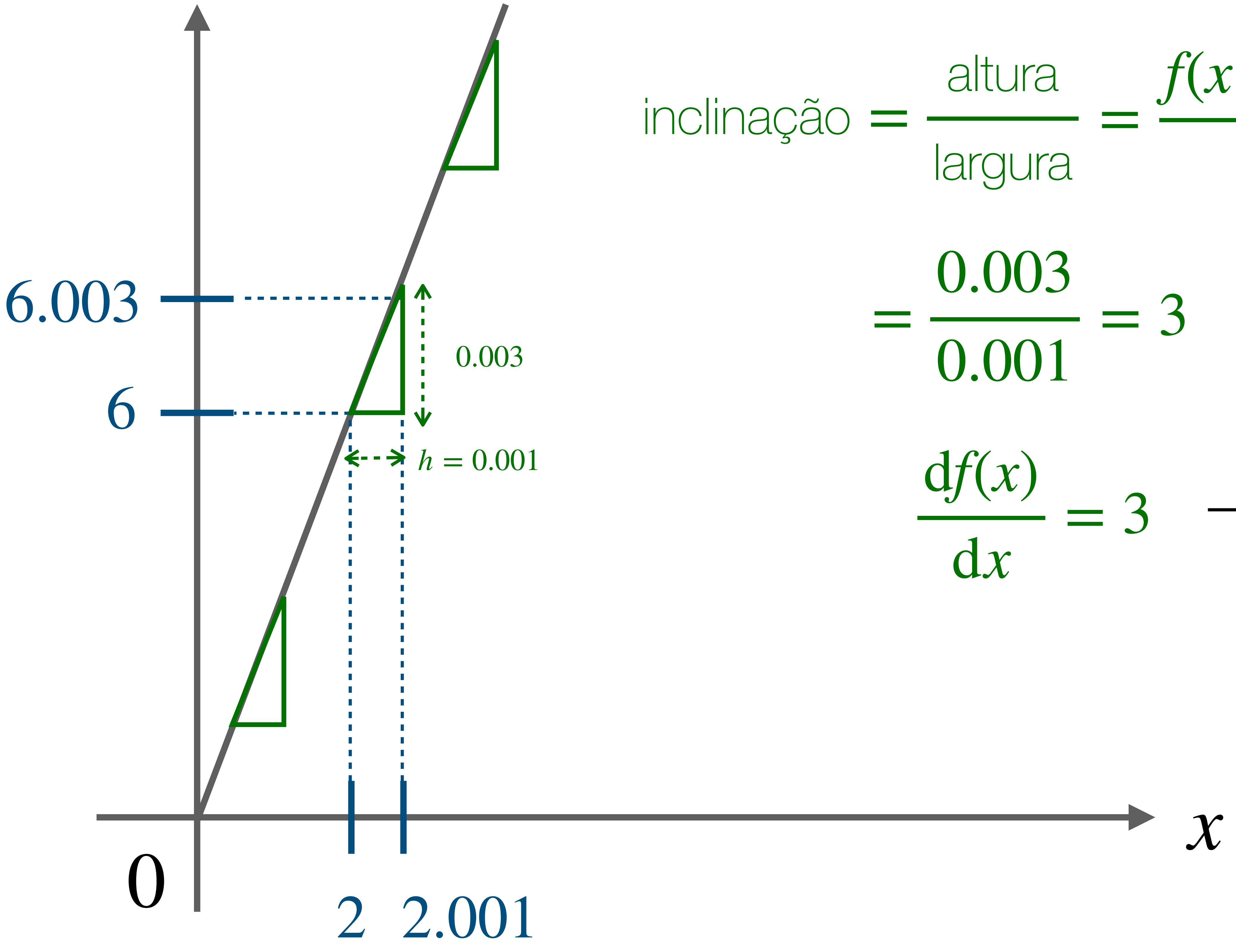
O vetor $\nabla L(w)$ nos diz a direção de subida mais íngrime de L a partir do ponto $(w, L(w))$.

UFV

Derivadas

A derivada de uma função $f(x)$ no ponto $x = a$ representa a **inclinação** da reta tangente a essa função no ponto $(a, f(a))$

$$f(x) = 3x$$



$$\text{inclinação} = \frac{\text{altura}}{\text{largura}} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \frac{0.003}{0.001} = 3$$

$$h = 0.001$$

$$x = 2 \qquad f(x) = 6$$

$$x + h = 2.001 \qquad f(x+h) = 6.003$$

$$x = 5 \qquad f(x) = 15$$

$$x + h = 5.001 \qquad f(x+h) = 15.003$$

$$\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} = 3 \longrightarrow$$

A derivada de $f(x)$ no ponto $x = 2$ é 3

Quando aplicamos uma variação minúscula h em x, o quanto ela afeta o valor de $f(x)$

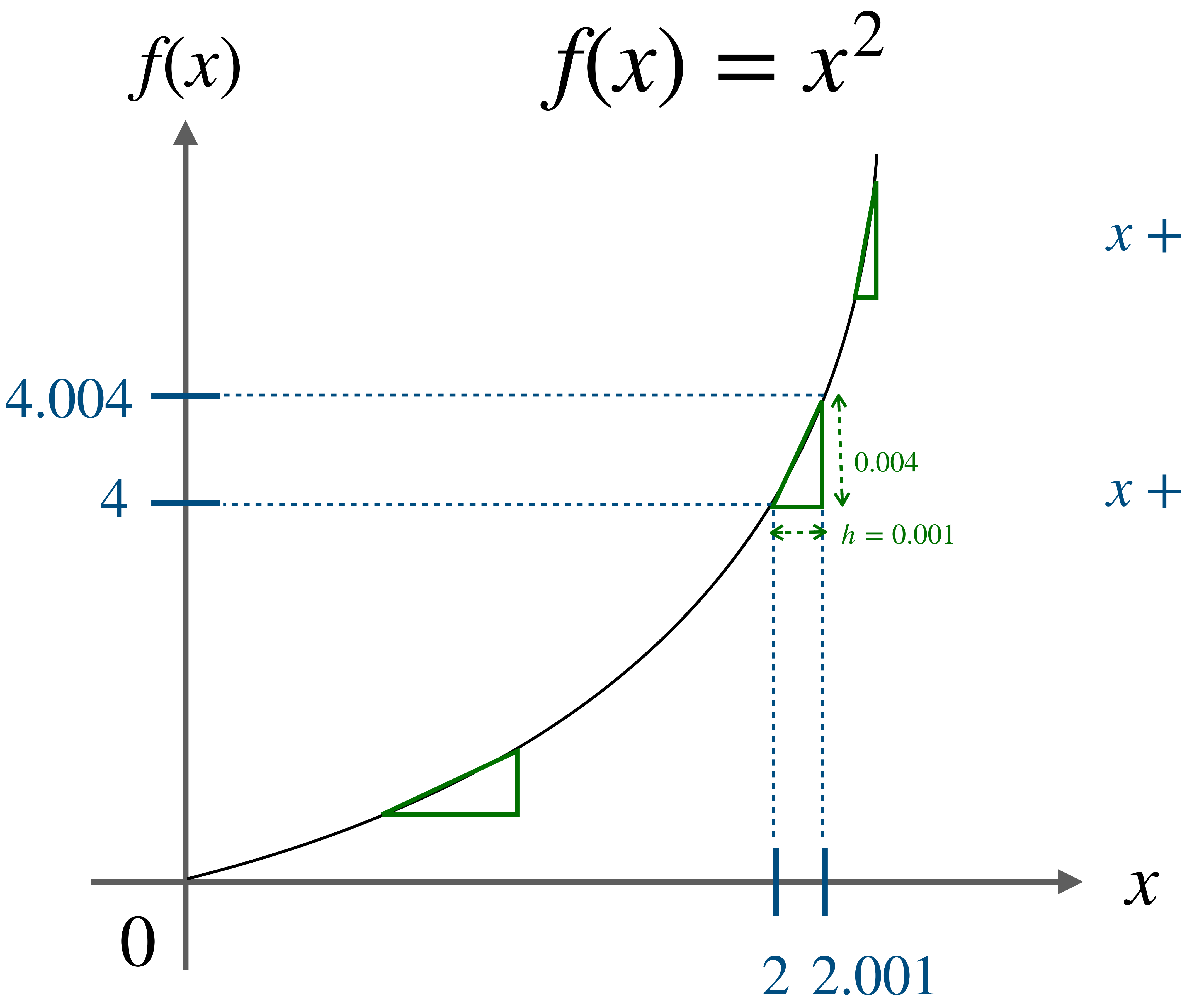
Em cálculo, essa variação h é infinitamente pequena:

$$\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

UFV

Derivadas

A derivada de uma função $f(x)$ no ponto $x = a$ representa a **inclinação** da reta tangente a essa função no ponto $(a, f(a))$



$$h = 0.001$$

$$x = 2 \qquad f(x) = 4 \qquad \frac{df(x)}{dx} = \frac{0.004}{0.001} = 4$$

$$x + h = 2.001 \qquad f(x+h) = 4.004$$

$$x = 5 \qquad f(x) = 25 \qquad \frac{df(x)}{dx} = \frac{0.0010}{0.001} = 10$$

$$x + h = 5.001 \qquad f(x+h) = 25.010$$

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{dx^2}{dx} = 2x$$

UFV

Derivadas em Python

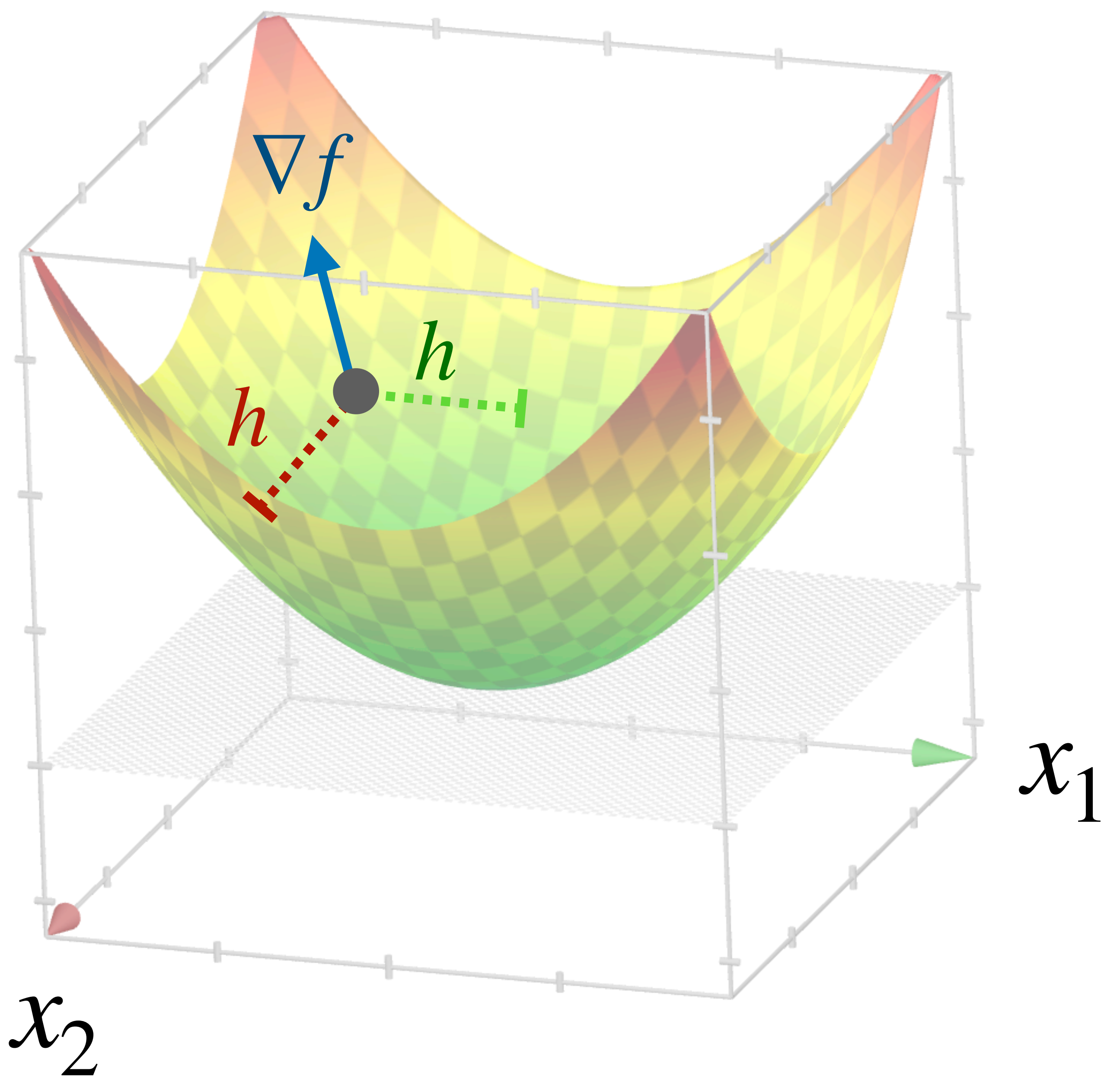
```python
def f(x):
  return x**2

def derivative(x):
  """Compute the exact derivative of `f` at the location `x`."""
  return 2*x

def approx_derivative(f, x, h=0.001):
  """Compute the approximate derivative of `f` at the location `x`."""
  return (f(x+h) - f(x))/h

x = 3
da_exact = derivative(x)
da_approx = approx_derivative(f,x)
print(da_exact, da_approx)
```

UFV

Derivadas Parciais

A **derivada parcial** de uma função multivariável $f(x_1, x_2, \ldots, x_d)$, representa como o valor de $f(x_1, x_2, \ldots, x_d)$ muda quando aplicamos uma minúscula variação h em apenas uma das variáveis x_i.

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$$



$$(x_1, x_2) = (2,\ 5)$$

$$\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} = \frac{\partial x_1^2}{\partial x_1} + \frac{\partial x_2^2}{\partial x_1} = 2x_1 + 0 \ = 2x_1 \ = 2 \times 2 \ = 4$$

$$\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} = \frac{\partial x_1^2}{\partial x_2} + \frac{\partial x_2^2}{\partial x_2} = 0 + 2x_2 \ = 2x_2 \ = 2 \times 5 \ = 10$$

O vetor gradiente é definido pelas derivas parciais de $\nabla f(x_1, x_2)$

$$\nabla f(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 10 \end{bmatrix}$$

UFV

Regra da Cadeia

$$f(x) = (x^2 + 1)^3$$

Função interna:

$$g(x) = x^2 + 1 \qquad \frac{dg}{dx} = 2x$$

Função externa:

$$f(g(x)) = g(x)^3 \qquad \frac{df}{dg} = 3(g(x))^2$$

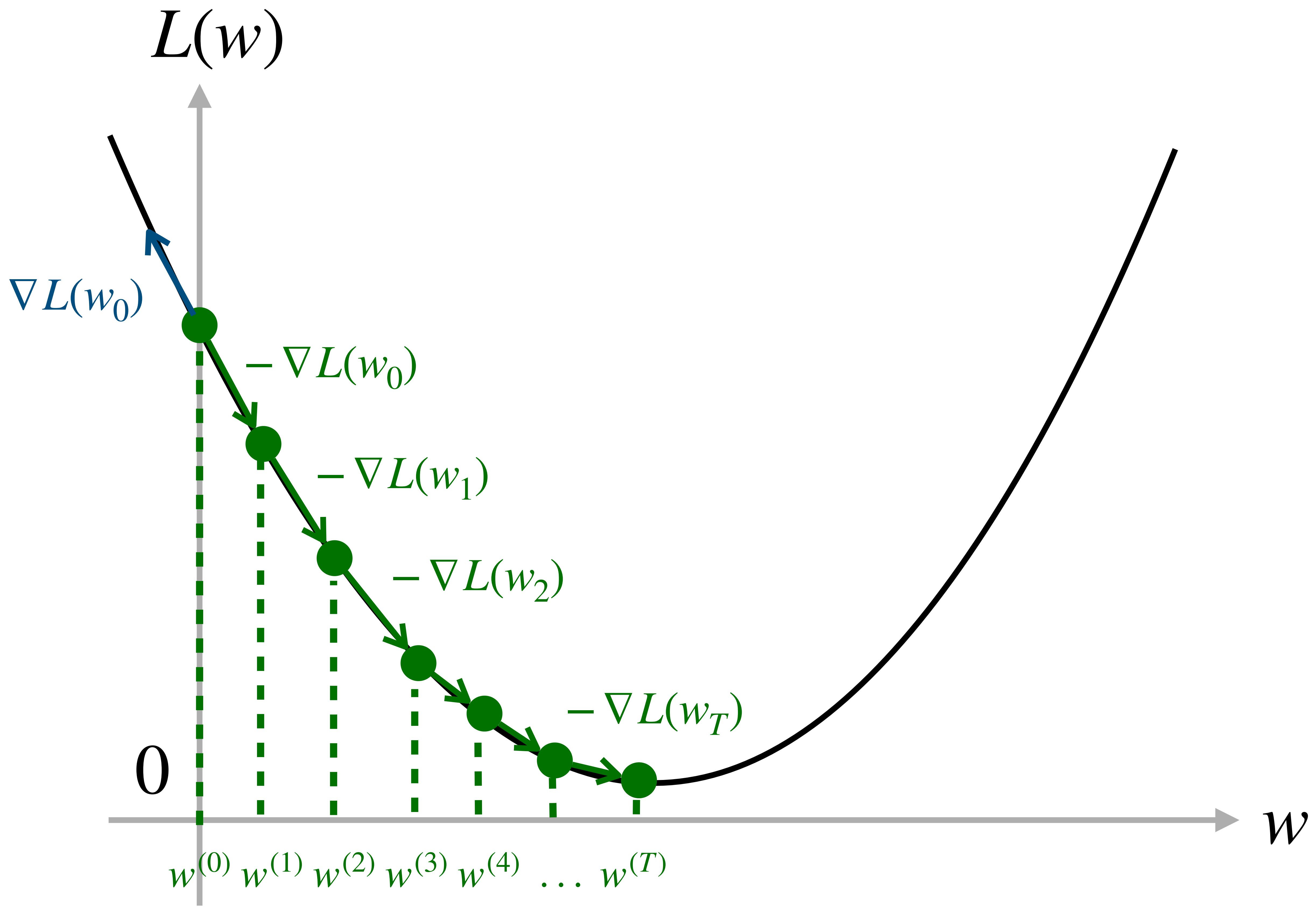
$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{dg} \cdot \frac{dg}{dx} = 3(x^2+1)^2 \cdot (2x) = 6x(x^2+1)^2$$

Para calcular a derivada de uma função composta $f(g(x))$, temos que usar a **regra da cadeia:**

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{dg} \cdot \frac{dg}{dx}$$

A derivada da função composta $f(g(x))$ é o produto das derivadas da função externa f em relação a

Gradiente Descendente

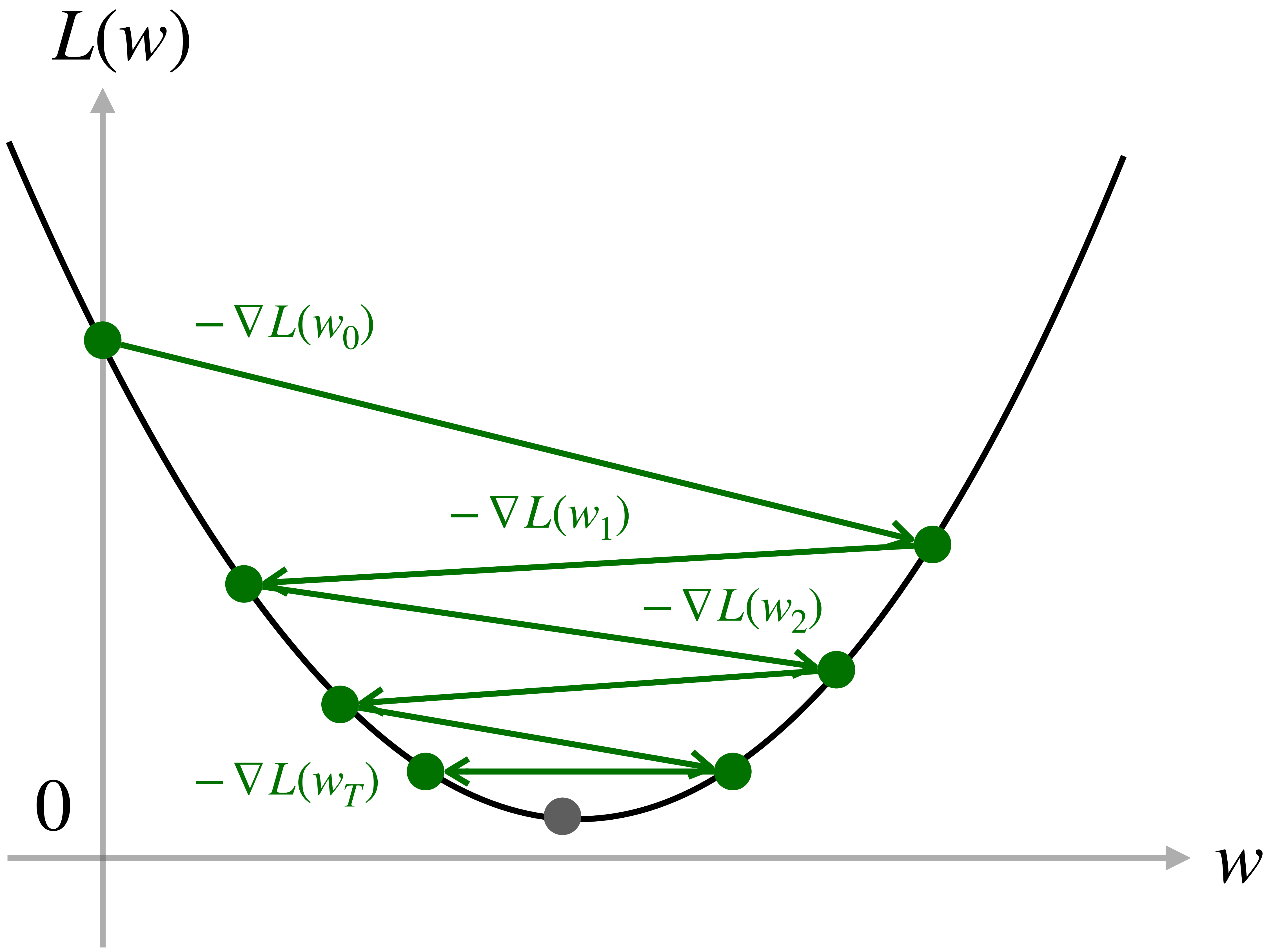


Dado um valor inicial w, atualizamos iterativamente o valor de w na direção de descida mais íngrime de L a partir do ponto $(w, L(w))$.

$$w_t \leftarrow w_{t-1} - \nabla L(w_{t-1})$$

UFV

Taxa de Aprendizado

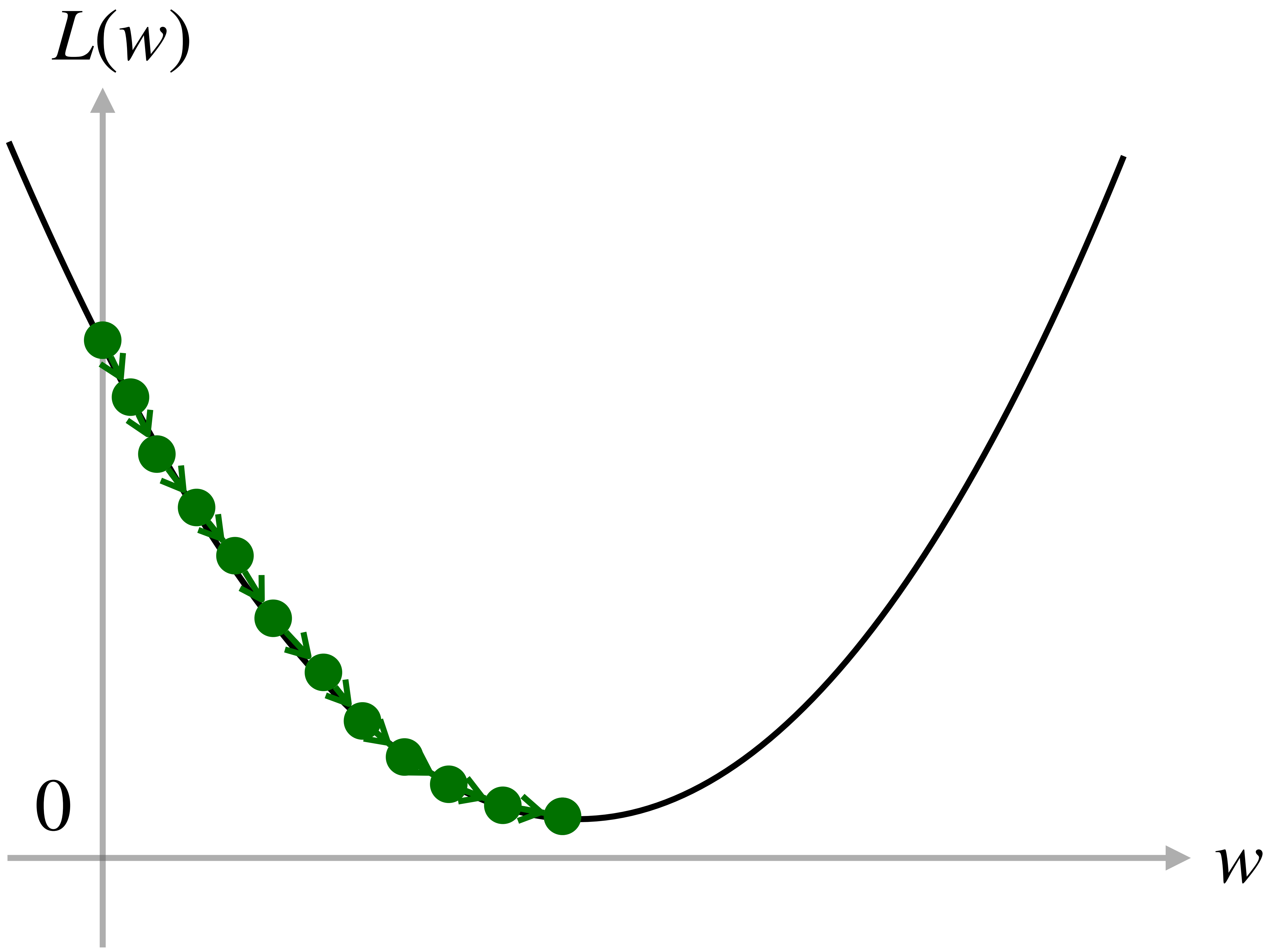


$$w_t \leftarrow w_{t-1} - \nabla L(w_{t-1})$$

Essa regra de atualização de w não tem controle sobre o comprimento do vetor gradiente $\nabla L(w_{t-1})$:

Gradiente muito grande
Convergência rápida, porém subótima!

Taxa de Aprendizado



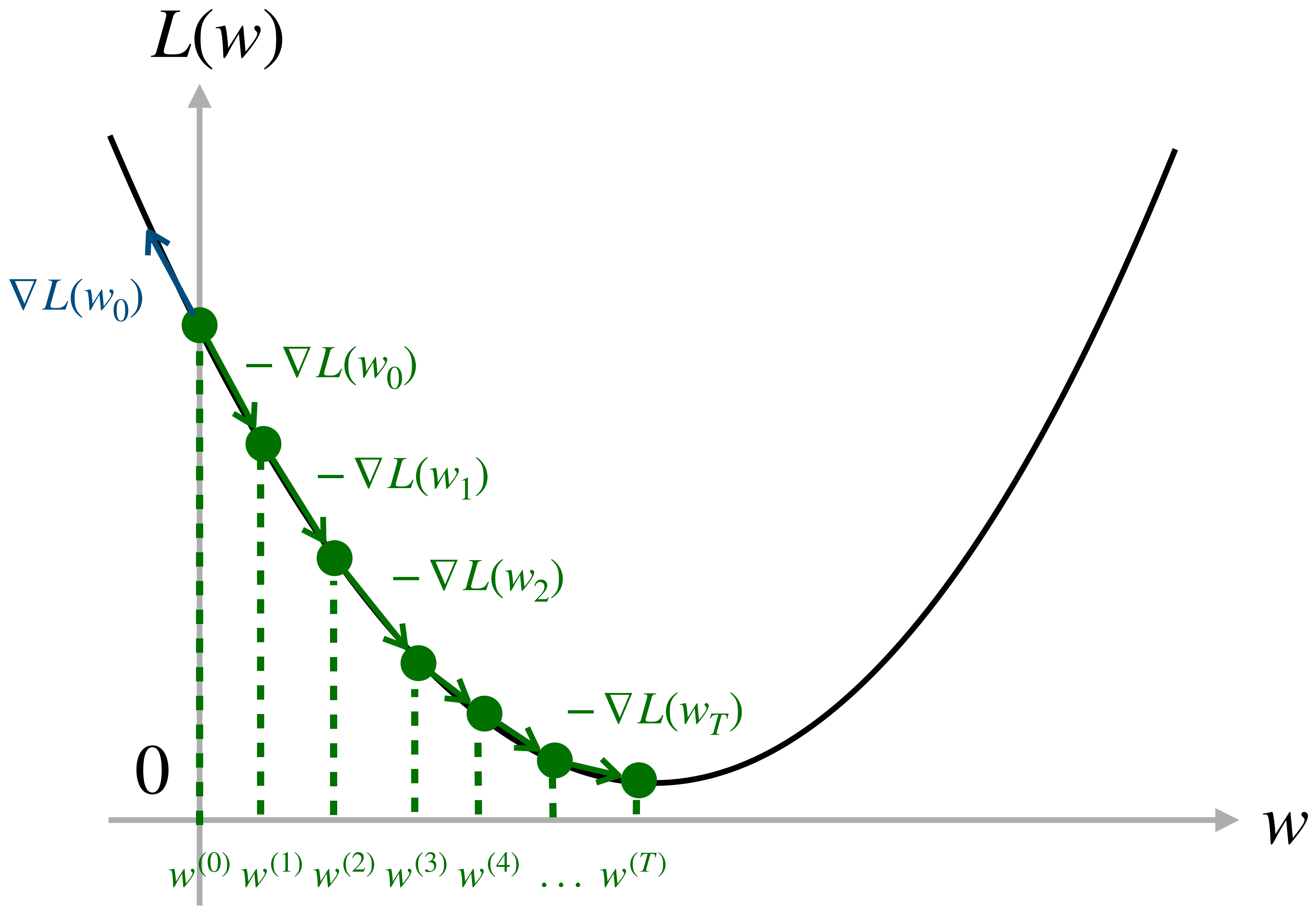
$$w_t \leftarrow w_{t-1} - \nabla L(w_{t-1})$$

Essa regra de atualização de w não tem controle sobre o comprimento do vetor gradiente $\nabla L(w_{t-1})$:

Gradiente muito pequeno
Convergência lenta e pode ficar presa em mínimos locais!

UFV

Gradiente Descendente



Dado um valor inicial w, atualizamos iterativamente o valor de w na direção de descida mais íngrime de L a partir do ponto $(w, L(w))$.

$$w_t \leftarrow w_{t-1} - \alpha \nabla L(w_{t-1})$$

onde α é um híper-parâmetro chamado de **taxa de aprendizado** (*learning rate*), responsável por controlar o comprimento do vetor gradiente.

Gradiente Descendente em Regressão Logística

Hipótese

$$z = w \cdot x + b$$

$$\hat{y} = h(x) = \frac{1}{1 + e^{-z}}$$

Função de Perda

$$L(h) = -\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i \, log \; \hat{y}_i + (1 - y_i) \; log \; (1 - \hat{y}_i))$$

Gradiente

$$\nabla L(w_j) = (\hat{y} - y)x_j$$

Próxima aula

A5: Regressão Logística em Numpy

Aula prática sobre implementação de regressão logística com Numpy.