IMA203 - TP3 - Méthodes Variationnelles
Lucas Oliveira Machado de Sousa

1) Débruitage par régularisation quadratique

Question 1 : Comment utiliser l'outil resoud_quad_fourier pour trouver le minimiser de cette énergie (voir le programme minimisation_ quadratique) ?

On veut minimiser :

$$E_2(u) = ||u-v||^2 + \lambda||\nabla u||^2 =$$
$$= ||\delta * u - v||^2 + \lambda||(1,-1) * u - 0||^2 + \lambda||(1,-1)^T * u - 0||^2$$
$$= \sum_{i=1}^{3} ||K_i * u - V_i||^2 = \sum_{i=1}^{3} ||\hat{K}_i \hat{u} - \hat{V}_i||^2 = \sum_{i=1}^{3} ||\hat{K}_i(\omega)\hat{u}(\omega) - \hat{V}_i(\omega)||^2$$

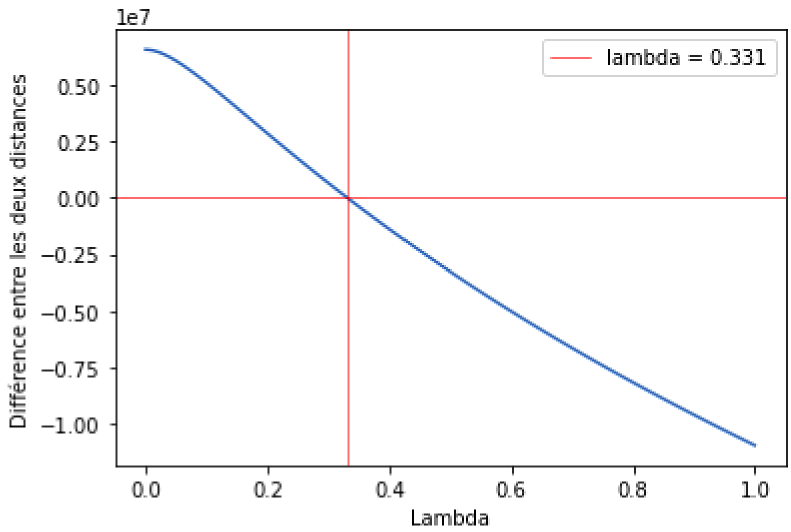
On décompose le gradient en ses directions x et y et on passe au domaine de Fourier. De cette façon, la convolution devient une multiplication où les termes sont indépendants, donc c'est possible de les minimiser.

Question 2 : Décrire le résultat de ce débruitage lorsque λ est très grand ou très petit.

Si λ est très petit, l'image ne change pas. S'il est très grand, l'image se rend très floue.

Question 3 : Après avoir ajouté un bruit d'écart type σ = 5 à l'image de lena, trouver (par dichotomie) le paramètre λ pour lequel ||ũ - v||² ~ ||u - v||². C'est-à-dire le paramètre pour lequel l'image reconstruite ũ est à la même distance de l'image parfaite u que ne l'est l'image dégradée.

```
u = im.copy()
v = degrade_image(u, 5)
distImgU = np.linalg.norm(u-v)**2

def diffFunction(v, lamb, distImgU):
  # Calcule la différence entre ||u-v||² et ||ũ-v||²
  utilde = minimisation_quadratique(v, lamb)
  distImgUtilde = np.linalg.norm(utilde-v)**2
  return distImgU - distImgUtilde

err = 1e-6
a = 0 # valeur pour lequel la différence > 0
b = 8 # valeur pour lequel la différence < 0

diffVec = []
lambVec = []

while (b-a) >= err:
  lamb = (a+b)/2
  lambVec.append(lamb)
  diffVec.append(diffFunction(v, lamb, distImgU))
  if(np.sign(diffFunction(v, a, distImgU)) != np.sign(diffFunction(v, lamb, distImgU))):
    b = lamb
  else:
    a = lamb
```

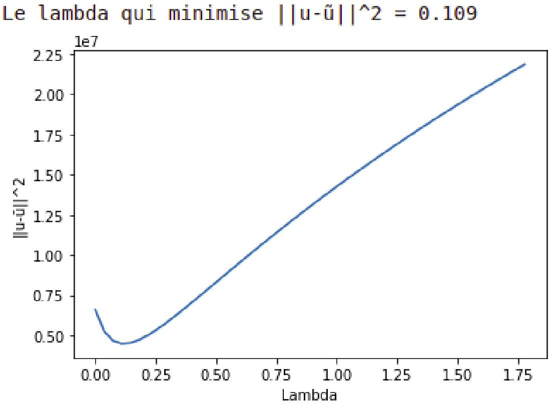



```
Lambda = 0.3318052291870117

Distance image parfaite = 6592333.270804074

Distance image reconstruite = 6592318.654794527

Diff = 14.61600954644382
```

J’ai trouvé une valeur de lambda = 0.332. C’est important de noter que le TP demande d’ajouter un bruit d’écart type σ = 5, tandis que le *notebook python* donné avait utilisé par défaut σ = 25. J’ai utilisé la valeur σ = 5, comme demande le TP.

Question 4 : Écrire un algorithme pour trouver le paramètre λ tel que ||ũ−u||² soit minimale. (dans le cadre de ce TP on connait l’image parfaite u). Commentaires ?

`Le lambda qui minimise ||u-ũ||^2 = 0.109`

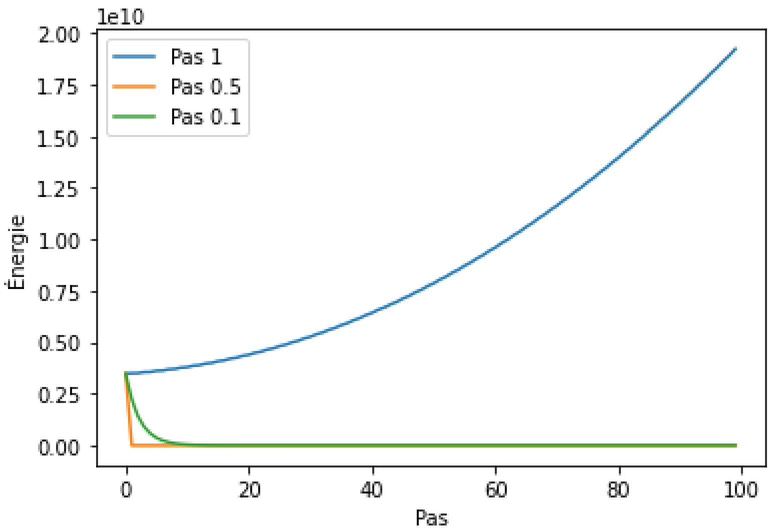


Le code donné dans le TP utilisait un intervalle de lambda avec une limite inférieure égal a 10^0 = 1 et σ = 25, mais on peut voir ci-dessus que la valeur de lambda qui minimise ||u-ũ||² = 0.109, pour σ = 5.

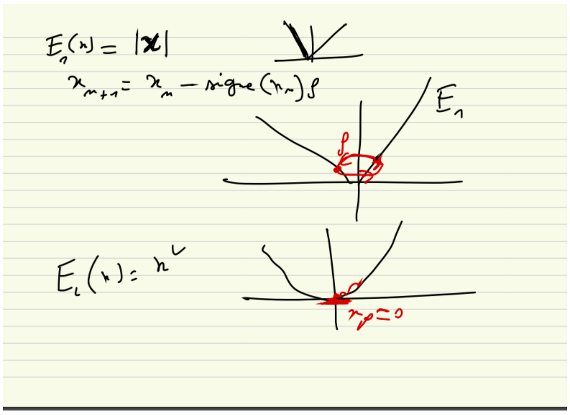
2) Débruitage par variation totale

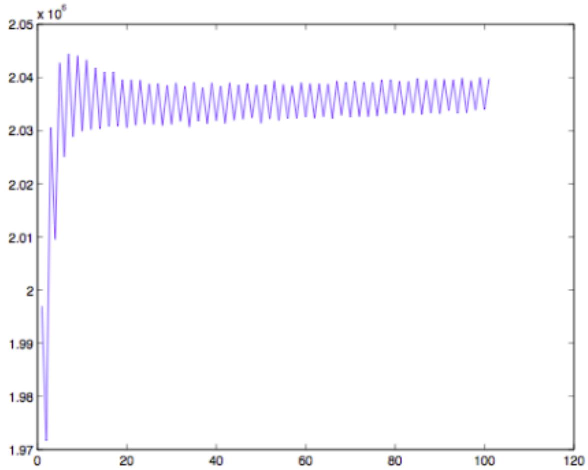
2.1) Descente de gradient : Atteignez-vous toujours le même minimum d'énergie ?

On peut voir ci-dessous que non, l'énergie obtenue dépend du pas utilisé.



Il y a un problème numérique avec la descente de gradient, comme on a vu en cours. Pour quelques valeurs du pas, la variation totale peut augmenter.





2.1) Projection Chambolle : Utilisez ce programme et que constatez-vous quant à la vitesse de cet algorithme et sa précision (minimisation effective de E2) par rapport à la descente de gradient.

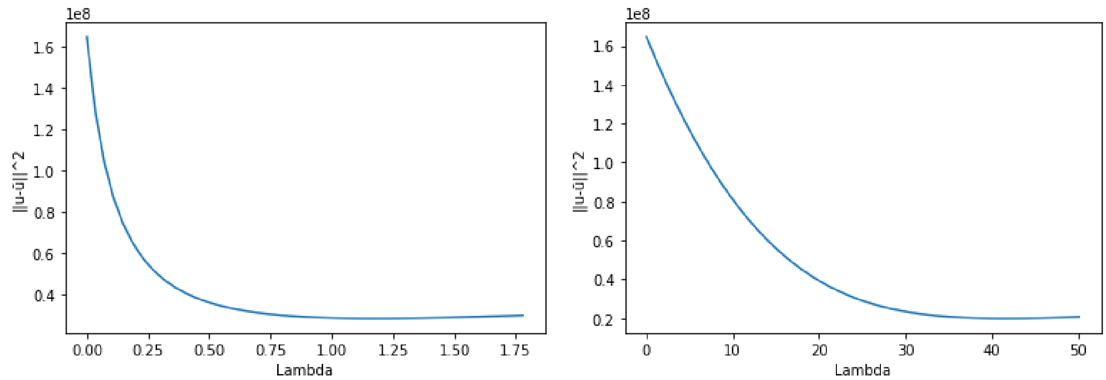
En utilisant l'algorithme de descente de gradient avec un nombre de pas = 100, taille du pas = 0.1 et lambda = 1, et l'algorithme de Chambolle avec un nombre maximum d'itérations = 100 et la même valeur de lambda, pour la même image j'ai obtenus les énergies et temps d'exécution suivants :

```
Temps d'éxecution Grad = 2.440521478652954 s
Énergie Grad = 11728081.051441252

Temps d'exécution Chambolle = 1.441880226135254 s
Énergie Chambolle = 11728069.335278658
```

L’énergie obtenue par la méthode de Chambolle est légèrement plus petit que l’énergie obtenue par la méthode de descente de gradient, et la méthode de Chambolle est plus rapide que la descente de gradient.

3) Comparaison

```
Le lambda qui minimise ||u-ũ||^2
pour la méthode de minimisation quadratique = 1.161
pour la méthode de Chambolle = 41.936
```



Différence en fonction de lambda, minimisation quadratique à gauche, Chambolle à droite

Résultat de la restitution par minimisation quadratique à gauche, par Chambolle à droite

Qualitativement, l’image restituée par la méthode de Chambolle semble beaucoup moins bruitée que l’image restituée par minimisation quadratique, et un peu moins floutée aussi. On peut voir qu’il y a des petites régions plus homogènes sur la deuxième image.