Algebra Linear Computacional - Lista de Exercicios 5

Lucas Resende Pellegrinelli Machado (2018126673)

April 30, 2019

Exercício 1.

a. Dada a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

devemos encontrar as matrizes resultantes da decomposição $PA = LU$ da forma.

L	multiplicador	A			operações	P
1		3	2	4		1
2	$m_{21} = \frac{1}{3}$	1	1	2		2
3	$m_{31} = \frac{4}{3}$	4	3	-2		3
4		0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{11}{2}$	$-\frac{3}{4}l_3 + l_1$	1
5	$m_{32} = 1$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{2}$	$-\frac{1}{4}l_3 + l_2$	2
6		0	0	8	$l_5 + l_4$	1

Pela coluna P, é possível concluir que a matriz de permutação será:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

E pelas outra colunas também temos:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 1 & 0 \\ \frac{3}{4} & -1 & 1 \end{bmatrix}, U = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -2 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

Assim a decomposição fica:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 1 & 0 \\ \frac{3}{4} & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 3 & -2 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

b. Definindo p como o número de permutações entre uma matriz identidade I e a matriz de permutação P, sabemos que

$$det(A) = (-1)^p det(U)$$

E como todas as linhas da matriz P são diferentes da matriz I sabemos que o número de trocas é igual a ordem da matriz, no execício, $p = 3$, logo:

$$det(A) = (-1)^3 det(U) = -det(U)$$

E visto que $det(U) = 8$, temos que:

$$det(A) = -8$$

Exercício 2.
Para calcularmos a solução, primeiros calcularemos a decomposição Cholesky da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 18 \\ 18 & 52 \end{bmatrix}$$

Utilizaremos das fórmulas (assuma L como a matriz resultante):

$$L_{j,j} = \sqrt{A_{j,j} - \sum_{k=1}^{j-1} L_{j,k}^2}$$

$$L_{i,j} = \frac{1}{L_{j,j}}(A_{i,j} - \sum_{k=1}^{j-1} L_{i,k}L_{j,k})$$

Logo temos que dada ($L_{1,2} = 0$ pois L tem que ser triangular inferior)

$$L = \begin{bmatrix} L_{1,1} & 0 \\ L_{2,1} & L_{2,2} \end{bmatrix}$$

Temos:

$$L_{1,1} = \sqrt{A_{1,1} - \sum_{k=1}^{0} L_{1,k}^2} = \sqrt{9 - 0} = 3$$

$$L_{2,1} = \frac{1}{L_{1,1}}(A_{2,1} - \sum_{k=1}^{0} L_{2,k}L_{1,k}) = \frac{1}{3}(18 - 0) = 6$$

$$L_{2,2} = \sqrt{A_{2,2} - \sum_{k=1}^{1} L_{2,k}^2} = \sqrt{A_{2,2} - L_{2,1}^2} = \sqrt{52 - 36} = 4$$

Assim

$$L = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$$

Dessa forma temos agora o sistema:

$$L \cdot L^T \cdot x = b$$

Substituindo $L^T \cdot x$ por y:

$$L \cdot y = b$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Assim, resolvendo o sistema:

$$\begin{cases} 3y_1 + 0y_2 = 3 \\ 6y_1 + 4y_2 = 4 \end{cases} \implies \begin{cases} y_1 = 1 \\ 6y_1 + 4y_2 = 4 \end{cases} \implies \begin{cases} y_1 = 3 \\ 6 + 4y_2 = 4 \end{cases} \implies \begin{cases} y_1 = 1 \\ 4y_2 = -2 \end{cases}$$

$$\implies y = \begin{bmatrix} 1 \\ -0.5 \end{bmatrix}$$

Retornando à substituição feita:

$$L^T \cdot x = y$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -0.5 \end{bmatrix}$$

Resolvendo:

$$\begin{cases} 3x_1 + 6x_2 = 1 \\ 0x_1 + 4x_2 = -0.5 \end{cases} \implies \begin{cases} 3x_1 + 6x_2 = 1 \\ x_2 = -0.125 \end{cases} \implies \begin{cases} 3x_1 - 0.75 = 1 \\ x_2 = -0.125 \end{cases} \implies \begin{cases} 3x_1 = 1.75 \\ x_2 = -0.125 \end{cases}$$

$$\implies x = \begin{bmatrix} \frac{7}{12} \\ -\frac{1}{8} \end{bmatrix}$$

Exercício 3.

a. Dado que $x^{(0)} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ -0.1 \end{bmatrix}$, temos que:

$$Ax^{(0)} = \begin{bmatrix} 9 & 18 \\ 18 & 52 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.5 \\ -0.1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.7 \\ 3.8 \end{bmatrix}$$

Calculando o erro residual $r^{(0)}$:

$$r^{(0)} = b - Ax^{(0)} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2.7 \\ 3.8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0.2 \end{bmatrix}$$

b. Para refinar $x(0)$ e obter a solução refinada x_r temos que:

$$x_r = x^{(0)} + c^{(0)}$$

Para achar $c^{(0)}$ precisamos de

$$Ly = r^{(0)} \text{ e } L^T c^{(0)} = y$$

Assim

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0.2 \end{bmatrix} \implies \begin{cases} 3y_1 + 0y_2 = 0.3 \\ 6y_1 + 4y_2 = 0.2 \end{cases} \implies y = \begin{bmatrix} 0.1 \\ -0.1 \end{bmatrix}$$

E então:

$$\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1^{(0)} \\ c_2^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1 \\ -0.1 \end{bmatrix} \implies \begin{cases} 3c_1^{(0)} + 6c_2^{(0)} = 0.1 \\ 0c_1^{(0)} + 4c_2^{(0)} = -0.1 \end{cases} \implies c^{(0)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{12} \\ -\frac{1}{40} \end{bmatrix}$$

Com o valor de $c^{(0)}$ temos agora:

$$x_r = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{10} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{12} \\ -\frac{1}{40} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{12} \\ -\frac{1}{8} \end{bmatrix}$$

Exercício 4.

a. Verdadeiro. Visto que AA^T é uma matriz simética definida positiva, ela pode ser decomposta pela decomposição Cholesky.

b. Falso. Como a matriz A tem posto n, é impossível reconstrui-la por meio de uma multiplicação de matrizes de posto menor que n. Como a matriz U não tem posto n visto que uma de suas linhas é nula e pode ser representada por qualquer outra linha multiplicada por 0, então a afirmativa é falsa;

c. Verdadeiro. Visto que Cholesky precisa resolver apenas uma matriz, ela precisa de metade do tempo que o LU já que a LU gera duas matrizes. Porém em questão de espaço, as duas precisam de gerar matrizes intermediarias para o processamento, ou seja, ocupam o mesmo espaço.