Ejercicio 3 - Estadísticas Cuánticas

Lucas Pérez Romero

Diciembre 2024

1 Enunciado

Se considera un sistema de N osciladores cuánticos localizados, que no interaccionan entre sí y que están en equilibrio a una temperatura T. Los niveles de energía de un oscilador son no degenerados y vienen dados por la expresión:

$$\epsilon_m = (m + \frac{1}{2})\frac{\gamma}{V} \tag{1}$$

Donde $m = 0, 1, 2, ...$, γ es una constante y V es el volumen.

a) Demostrar que la energía interna media viene dada por la expresión

$$\overline{E} = \frac{N\gamma}{2V} cotgh\Big(\frac{\gamma}{2VKT}\Big)$$

1. b) Demostrar que para este sistema se verifica:

$$\overline{p}V = \overline{E}$$

2 Energía Interna Media

Como en cualquier sistema a temperatura T constante, lo primero que debemos hacer es obtener la función de partición:

$$Z = \sum_R g(\epsilon_R) e^{-\beta\epsilon_R}$$

Donde la función g parametriza la degeneración para los estados energéticos ϵ_R, que para nuestro sistema será ϵ_m donde $m \in [0, \infty]$, dado que en el enunciado dice explícitamente que no hay estados degenerados $g = 1$. Si sustituimos la energía de los osciladores armónicos en Z llegamos a:

$$Z = \sum_{m=0}^{\infty} e^{-\beta\left(m+\frac{1}{2}\right)\frac{\gamma}{V}} = e^{-\frac{\beta\gamma}{2V}} \sum_{m=0}^{\infty} e^{-\beta m \frac{\gamma}{V}}$$

Si hacemos un cambio de variable $x = e^{-\frac{\beta\gamma}{V}}$ en el sumatorio nos queda una serie geométrica que converge:

$$Z = e^{-\frac{\beta\gamma}{2V}} \sum_{m=0}^{\infty} x^m = e^{-\frac{\beta\gamma}{2V}} \frac{1}{1 - e^{-\frac{\beta\gamma}{V}}}$$

Si operamos las exponenciales nos queda la siguiente función de partición:

$$Z = \frac{1}{e^{\frac{\beta\gamma}{2V}} - e^{-\frac{\beta\gamma}{2V}}}$$

Esta expresión corresponde a un solo oscilador armónico, como estamos tratando con N osciladores: $Z_{total} = Z^N$. A continuación, para obtener la energía $\overline{E}$ hay que calcular el logaritmo natural de Z_{total} y derivarlo con respecto a β :

$$lnZ^N = -Nln\Big(e^{\frac{\beta\gamma}{2V}} - e^{-\frac{\beta\gamma}{2V}}\Big)$$

$$\overline{E} = \frac{N\gamma}{2V} \frac{e^{\frac{\gamma}{2KTV}} + e^{-\frac{\gamma}{2KTV}}}{e^{\frac{\gamma}{2KTV}} - e^{-\frac{\gamma}{2KTV}}}$$

Finalmente, la función $cotgh(x)$ se define como: $\frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$ y como se quería demostrar obtenemos la ecuación del enunciado:

$$\overline{E} = \frac{N\gamma}{2V} cotgh\Big(\frac{\gamma}{2KTV}\Big)$$

3 Ecuación de Estado del sistema

Para obtener la ecuación propuesta debemos calcular la presión media : $\overline{p} = \frac{1}{\beta}\left(\frac{\partial lnZ}{\partial V}\right)_E$

$$\overline{p} = -NKT \frac{-\gamma}{2KTV^2} \left(\frac{e^{\frac{\gamma}{2KTV}} + e^{-\frac{\gamma}{2KTV}}}{e^{\frac{\gamma}{2KTV}} - e^{-\frac{\gamma}{2KTV}}}\right) = \frac{N\gamma}{2V^2} cotgh\Big(\frac{\gamma}{2KTV}\Big)$$

Observamos que el resultado de derivar es la expresión anterior de $\overline{E}$ dividido por el volumen y despejando la energía media llegamos a la ecuación de estado:

$$\overline{p}V = \frac{N\gamma}{2V} cotgh\Big(\frac{\gamma}{2KTV}\Big) = \overline{E}$$

$$\overline{p}V = \overline{E}$$