Oscilador Armónico Ejercicio 2 - Física Cuántica I

Lucas Pérez

Diciembre 2024

1. Enunciado

Considerad de nuevo el oscilador armónico. Sabiendo que $\hat{a}\left|0\right\rangle = 0$ (no hay estado más bajo que el fundamental) se pide:

■ Calculad la desviación estándar de la posición Δx y del momento Δp para el estado fundamental $\left|0\right\rangle$ del oscilador armónico usando:

$$(\Delta x)^2 = \left\langle 0\right| \hat{x}^2 \left|0\right\rangle - (\left\langle 0\right| \hat{x} \left|0\right\rangle)^2, (\Delta p)^2 = \left\langle 0\right| \hat{p}^2 \left|0\right\rangle - (\left\langle 0\right| \hat{p} \left|0\right\rangle)^2 \tag{1}$$

y re-expresando los operadores $\hat{x}$ y $\hat{p}$ en función de los operadores escalera $\hat{a}$ y $\hat{a}^\dagger$. *Nótese que con el formalismo de Dirac no es necesario integrar sobre las funciones de onda para obtener las magnitudes estadísticas anteriores.*

■ ¿Se cumple el principio de incertidumbre?

■ Repetid el ejercicio para el primer y segundo estado excitado, es decir, para $\left|1\right\rangle$ y $\left|2\right\rangle$.

2. Desviación estándar

Para obtener la desviación estándar de los operadores $\hat{x}$ y $\hat{p}$ debemos expresarlos primero en función de los operadores escalera. Estos operadores se definen como:

$$\hat{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\hat{x} + i\frac{\hat{p}}{m\omega}\right)$$
$$\hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\hat{x} - i\frac{\hat{p}}{m\omega}\right) \tag{2}$$

Si sumamos y restamos ambas expresiones y despejamos los operadores que queremos estudiar, llegamos a las siguientes ecuaciones:

$$\hat{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \left(\hat{a} + \hat{a}^\dagger\right) \tag{3}$$

$$\hat{p} = \sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}} i \left(\hat{a}^\dagger - \hat{a}\right)$$

A continuación, calcularemos el cuadrado de ambos operadores para poder usarlos en las expresiones dadas:

$$\hat{x}^2 = \frac{\hbar}{2m\omega} \left(\hat{a}\hat{a} + \hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{a} + \hat{a}\hat{a}^\dagger\right)$$

$$\hat{p}^2 = \frac{\hbar m\omega}{2} \left(\hat{a}\hat{a} + \hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a} - \hat{a}\hat{a}^\dagger\right) \tag{4}$$

Aprovechándonos del conmutador de los operadores escalera($[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = \hat{a}\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a} = I$) podemos reescribir ambas expresiones:

$$\hat{x}^2 = \frac{\hbar}{2m\omega} \left(\hat{a}\hat{a} + \hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger + 2\hat{a}^\dagger\hat{a} + 1\right)$$

$$\hat{p}^2 = \frac{\hbar m\omega}{2} \left(2\hat{a}^\dagger\hat{a} + 1 - \hat{a}\hat{a} - \hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger\right)$$

Finalmente, podemos calcular las desviaciones:

$$(\Delta x)^2 = \frac{\hbar}{2m\omega} \left(\langle 0|\,\hat{a}\hat{a}\,|0\rangle + \langle 0|\,\hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger\,|0\rangle + 2\,\langle 0|\,\hat{a}^\dagger\hat{a}\,|0\rangle + \langle 0|0\rangle + \left(\langle 0|\,\hat{a}\,|0\rangle + \langle 0|\,\hat{a}^\dagger\,|0\rangle\right)^2\right)$$

$$(\Delta p)^2 = \frac{\hbar m\omega}{2} \left(2\,\langle 0|\,\hat{a}^\dagger\hat{a}\,|0\rangle + \langle 0|0\rangle - \langle 0|\,\hat{a}\hat{a}\,|0\rangle - \langle 0|\,\hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger\,|0\rangle - \left(\langle 0|\,\hat{a}\,|0\rangle - \langle 0|\,\hat{a}^\dagger\,|0\rangle\right)^2\right)$$

Observamos que solo van a sobrevivir los brakets que no están siendo afectados por ningún operador ya que si aplicamos la condición de ortonormalidad de los espacios de Hilbert, los vectores afectados por el operador $\hat{a}^\dagger$ cambiarán su estado energético y serán ortogonales al vector $\langle 0|$. A su vez los brakets acompañados por los operadores $\hat{a}$ y $\hat{a}^\dagger\hat{a}$ también se anularán, pues sus autovalores son 0.

$$(\Delta x)^2 = \frac{\hbar}{2m\omega} \langle 0|0\rangle = \frac{\hbar}{2m\omega}$$

$$(\Delta p)^2 = \frac{\hbar m\omega}{2} \langle 0|0\rangle = \frac{\hbar m\omega}{2}$$

3. Principio de Incertidumbre

El principio de incertidumbre de Heisenberg establece:

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$$

Al calcular los observables $\hat{x}$ y $\hat{p}$ a la vez siempre habrá una incertidumbre de al menos $\frac{\hbar}{2}$. Podemos demostrar que se cumple para el sistema propuesto si multiplicamos las incertidumbres, que son la raíz cuadrada de las desviaciones calculadas anteriormente:

$$\Delta x \Delta p = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}} = \frac{\hbar}{2}$$

Este valor coincide con la incertidumbre mínima que se puede medir en un sistema y por tanto, se cumple el principio.

4. Estados $|1\rangle$ y $|2\rangle$

4.1. Desviaciones Estándar

Ahora calcularemos las desviaciones estándar para los estados excitados $|1\rangle$ y $|2\rangle$:

$$(\Delta x_1)^2 = \frac{\hbar}{2m\omega}\left(\langle 1|\hat{a}\hat{a}|1\rangle + \langle 1|\hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger|1\rangle + 2\langle 1|\hat{a}^\dagger\hat{a}|1\rangle + \langle 1|1\rangle + \left(\langle 1|\hat{a}|1\rangle + \langle 1|\hat{a}^\dagger|1\rangle\right)^2\right)$$

$$(\Delta p_1)^2 = \frac{\hbar m\omega}{2}\left(2\langle 1|\hat{a}^\dagger\hat{a}|1\rangle + \langle 1|1\rangle - \langle 1|\hat{a}\hat{a}|1\rangle - \langle 1|\hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger|1\rangle - \left(\langle 1|\hat{a}|1\rangle - \langle 1|\hat{a}^\dagger|1\rangle\right)^2\right)$$

$$(\Delta x_2)^2 = \frac{\hbar}{2m\omega}\left(\langle 2|\hat{a}\hat{a}|2\rangle + \langle 2|\hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger|2\rangle + 2\langle 2|\hat{a}^\dagger\hat{a}|2\rangle + \langle 2|2\rangle + \left(\langle 2|\hat{a}|2\rangle + \langle 2|\hat{a}^\dagger|2\rangle\right)^2\right)$$

$$(\Delta p_2)^2 = \frac{\hbar m\omega}{2}\left(2\langle 2|\hat{a}^\dagger\hat{a}|2\rangle + \langle 2|2\rangle - \langle 2|\hat{a}\hat{a}|2\rangle - \langle 2|\hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger|2\rangle - \left(\langle 2|\hat{a}|2\rangle - \langle 2|\hat{a}^\dagger|2\rangle\right)^2\right)$$

De manera similar que en el estado $|0\rangle$, solo sobrevivirán los brakets afectados por el operador número $\hat{a}^\dagger\hat{a}$,cuyo autovalor será el estado n en el que estén, y en los que no haya operador, por la condición de ortonormalidad.

$$(\Delta x_1)^2 = \frac{3\hbar}{2m\omega}; (\Delta p_1)^2 = \frac{3\hbar m\omega}{2}$$

$$(\Delta x_2)^2 = \frac{5\hbar}{2m\omega}; (\Delta p_2)^2 = \frac{5\hbar m\omega}{2}$$

4.2. Principio de Incertidumbre

Es fácilmente demostrable que en ambos estados excitados se sigue cumpliendo el Principio de Incertidumbre:

$$\Delta x_1 \Delta p_1 = \sqrt{\frac{3\hbar}{2m\omega}}\sqrt{\frac{3\hbar m\omega}{2}} = \frac{3\hbar}{2}$$

$$\Delta x_2 \Delta p_2 = \sqrt{\frac{5\hbar}{2m\omega}}\sqrt{\frac{5\hbar m\omega}{2}} = \frac{5\hbar}{2}$$

Pues los valores obtenidos para las incertidumbres entran en el rango permitido para el Principio $\geq \frac{\hbar}{2}$