Problemas 19 y 20. Física Nuclear y de Partículas

Carles Gozalbes , Lucas Pérez

November 2024

Problema 19

Considerando que no hay estado excitados intermedios, calculad Q,K_α,K_{Ra} y K_{Pb} (donde K es la energía cinética no-relativista), para las siguientes desintegraciones:

- $^{208}Po \longrightarrow ^{204} Pb + \alpha$
- $^{230}Th \longrightarrow ^{226} Ra + \alpha$

Usad la expresión aproximada deducida en clase $K_\alpha \approx Q\frac{1}{1+\frac{4}{A}}$. Calculad las masas de los núcleos en MeV/c^2 como la suma de sus componentes constitutivos (protones y neutrones), ignorando las energías de enlace.

Resolución del Problema

El calor de reacción se define como la diferencia de la energía en reposo del núcleo inicial con la de los productos de desintegración:

$$Q = E_i - E_f = (M_X - M_Y - m_\alpha)c^2$$

Para calcular las masas de los núcleos emplearemos los números atómicos Z y A junto con las masas de los nucleones en MeV/c^2:

$$m_p = 938.27 MeV/c^2$$
$$m_n = 939.57 MeV/c^2$$

Con estos datos podemos obtener las masas de todos los núcleos y de las partículas alfa:

$$M_{Po} = Z_{Po}m_p + (A_{Po} - Z_{Po})m_n = 84938.27 + (208 - 84)939.57$$

$$M_{Po} = 195321.36 MeV/c^2$$

$$M_{Pb} = Z_{Pb}m_p + (A_{Pb} - Z_{Pb})m_n = 82938.27 + (204 - 82)939.57$$

$$M_{Pb} = 191565.68 MeV/c^2$$
$$M_{Th} = Z_{Th}m_p + (A_{Th} - Z_{Th})m_n = 90938.27 + (230 - 90)939.57$$
$$M_{Th} = 215984.1 MeV/c^2$$
$$M_{Ra} = Z_{Ra}m_p + (A_{Ra} - Z_{Ra})m_n = 88938.27 + (226 - 88)939.57$$
$$M_{Ra} = 212228.42 MeV/c^2$$
$$M_\alpha = 2m_p + 4m_n = 2938.27 + 2939.57$$
$$M_\alpha = 3755.68 MeV/c^2$$

Habiendo obtenido todas las masas de los núcleos ya podemos calcular los calores de reacción:

$$Q_1 = (M_{Po} - M_{Pb} - M_\alpha)c^2 = (195321.36 - 191565.68 - 3755.68)c^2$$
$$Q_1 = 0 MeV/c^2$$
$$Q_2 = (M_{Th} - M_{Ra} - M_\alpha)c^2 = (215984.1 - 212228.42 - 3755.68)c^2$$
$$Q_2 = 0 MeV/c^2$$

Al calcular los calores de ambas reacciones se puede ver que los dos son nulos, esto implica que las reacciones serán espontáneas pero que ninguna de las partículas resultantes tendrá una energía cinética. Por tanto $K_\alpha = K_{Pb} = K_{Ra} = 0 MeV$

Problema 20

Considerad el siguiente esquema de desintegración β^- del ^{24}Na.Sabiendo que, debido a que la energía cinética resultante se distribuye entre el electrón y el neutrino, por lo tanto, el electrón no tiene una energía única, ¿a qué se refiere el valor de 1.39 MeV del electrón? Calculad el factor Q de la reacción ($Q = (M_{Na} - M_{Mg*} - m_e)c^2$, con $M_{Mg*} = M_{Mg} + \frac{2.76+1.38}{c^2} MeV/c^2$). Ya que $Q = K_e + K_\nu$ donde K_e y K_ν son las energías cinéticas del electrón y el neutrino dadas por:

$$K_e = (\gamma - 1)m_e c^2, K_\nu \approx p_\nu c$$

calculad la velocidad máxima a la que puede viajar el electrón imponiendo $K_\nu = Q - (\gamma - 1)m_e c^2 > 0$.

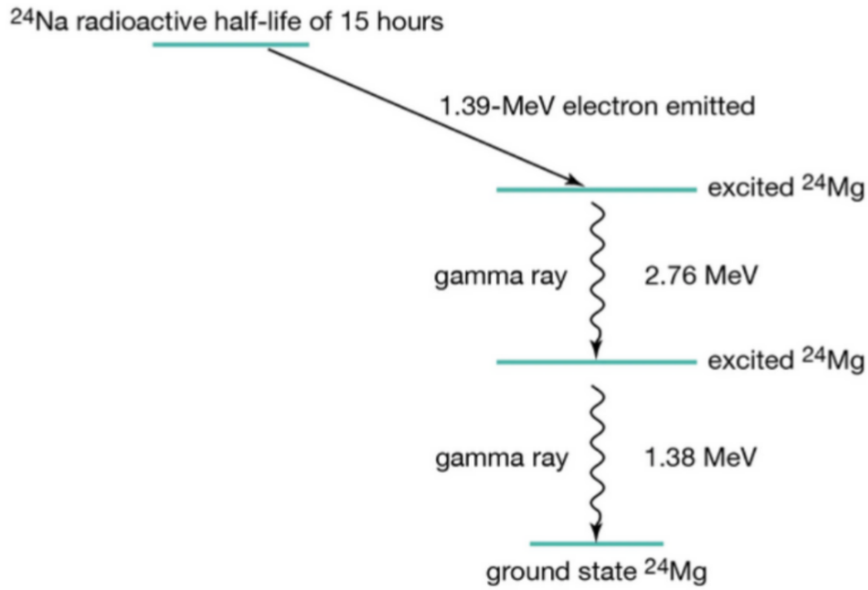

Figure 1: Esquema de desintegración del Sodio-24 en Magnesio

Resolución del Problema

Podemos descomponer el esquema de desintegración en:

- $^{24}Na \longrightarrow ^{24} Mg^* + e^- + \nu$
- $^{24}Mg^* \longrightarrow ^{24} Mg^* + \gamma_1$
- $^{24}Mg^* \longrightarrow ^{24} Mg + \gamma_2$

Para calcular el calor de reacción Q usaremos la ecuación propuesta por el enunciado:

$$Q = (M_{Na} - M_{Mg*} - m_e)c^2$$

Primero calcularemos las masas de los núcleos sin excitar:

$$M_{Na} = Z_{Na}m_p + (A_{Na} - Z_{Na})m_n = 11938.27 + 13939.57 = 22535.38MeV/c^2$$

$$M_{Mg} = Z_{Mg}m_p + (A_{Mg} + Z_{Mg})m_n = 12938.27 + 12939.57 = 22534.08MeV/c^2$$

Además la masa del Magnesio excitado es:

$$M_{Mg*} = M_{Mg} + \frac{E_{\gamma_1} + E_{\gamma_2}}{c^2} = M_{Mg} + \frac{2.76 + 1.38}{c^2}MeV/c^2$$

Por último, masa del electrón en MeV/c^2 es: $m_e = 0.51MeV/c^2$. Con todos estos datos el calor de reacción tiene el siguiente valor:

$$Q = (22535.38 - 22534.08 - 0.51)c^2 - E_{\gamma_1} - E_{\gamma_2} = 7.110^{16}MeV$$

Podemos ver que la reacción no solo será espontánea sino que el electrón y el neutrino tendrán una energía cinética entre los dos igual a Q. Con esto claro lo más seguro es que el valor de $1.39MeV$ sea la energía cinética del electrón sin tener en cuenta la del neutrino, pues como vemos esta energía es de un orden muy inferior a la Q y dado que el electrón tiene una mayor masa que el neutrino, que es aproximadamente nula, su energía cinética y su movimiento será inferior.

Finalmente para calcular la velocidad máxima del electrón debemos resolver la inecuación teniendo en cuenta que:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{{v_e}^2}{c^2}}}$$

Desarrollando la inecuación obtenemos:

$$Q > (\gamma - 1)m_e c^2$$

$$\frac{Q}{m_e c^2} + 1 > \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{{v_e}^2}{c^2}}}$$

$$1 - \frac{1}{(\frac{Q}{m_e c^2} + 1)^2} > \frac{{v_e}^2}{c^2}$$

Finalmente la velocidad del electrón será máxima si cumple la siguiente relación:

$$v_e < \sqrt{1 - \frac{1}{(\frac{Q}{m_e c^2} + 1)^2}}c$$

Si sustituimos los datos del problema obtendremos la siguiente condición:

$$v_e < 0.99c$$

Se puede ver claramente que bajo esta condición el electrón tiene restringida la velocidad de la luz y por tanto nunca podrá alcanzarla, evitando que puedan surgir resultados sin sentido físico.