Comparando trayectorias mediante meridianos y paralelos

Lucas Pérez Romero

Diciembre 2024

1 Planteamiento de las ecuaciones

En una esfera dada, podemos definir los meridianos como aquellas secciones de una esfera tal que dividen la esfera en dos mitades y tienen el mismo perímetro de circunferencia. Por otra parte, los paralelos son el conjunto de cortes perpendiculares al eje de rotación de la esfera.

En base a las coordenadas esféricas, los puntos cartesianos de una esfera son definidos como:

$$x = r\cos\theta\sin\phi \tag{1}$$
$$y = r\sin\theta\sin\phi \tag{2}$$
$$z = r\cos\phi \tag{3}$$

Donde r será el radio completo de nuestra esfera a estudiar, el ángulo $\phi \in [0, \pi]$ recorriendo el eje z y el ángulo $\theta \in [0, 2\pi]$ recorre los ejes x e y. En base a estas coordenadas podemos describir un paralelo fijando el ángulo ϕ ya que todos los puntos se mantienen a la misma altura:

$$x = r\sin\phi'\cos\theta \tag{4}$$
$$y = r\sin\phi'\sin\theta \tag{5}$$
$$z = r\cos\phi' \tag{6}$$

donde ϕ' es el ángulo que hemos fijado y es constante. Del mismo modo un meridiano se describe fijando el ángulo θ :

$$x = r\sin\phi\cos\theta' \tag{7}$$
$$y = r\sin\phi\sin\theta' \tag{8}$$
$$z = r\cos\phi \tag{9}$$

Finalmente vamos a definir los radios de ambas circunferencias. Como un paralelo está inscrito en el plano XY el radio $R_P = \sqrt{x^2 + y^2}$ que al desarrollar la raíz resulta en:

$$R_P = \sqrt{r^2 sin^2\phi'(cos^2\theta + sin^2\theta)} = r\sin\phi' \tag{10}$$

En el caso del meridiano, dado que su perímetro recorre la circunferencia máxima que puede abarcar la esfera y está inscrito en los tres ejes cartesianos su radio será el de la esfera, $R_M = r$.

2 Resolución del Problema

Una vez planteadas todas las ecuaciones y variables del problema, vamos a comparar el perímetro de arco de un paralelo con el del meridiano. Para ello, supondremos dos puntos $A : (x_A, y_A, z_A)$ y $B : (x_B, y_B, z_B)$ y definiremos dos sistemas de coordenadas diferentes. Uno en el que los puntos pasen por un paralelo y otro en el que pasen por un meridiano.

En el sistema de paralelos, ambos puntos tendrán el mismo ángulo ϕ , $\phi_A = \phi_B \equiv \phi'$ y el arco barrerá de θ_A a θ_B. La longitud del arco en el paralelo se puede obtener mediante la siguiente integral de línea:

$$L_P = \int_{\theta_A}^{\theta_B} r \sin \phi' d\theta = r \sin \phi' (\theta_B - \theta_A) \tag{11}$$

Podemos entonces definir el ángulo del arco como $\theta_{AB} \equiv \theta_B - \theta_A$

$$L_P = r \sin \phi' \theta_{AB} \tag{12}$$

Podemos ver que cumple la propiedad geométrica de los paralelos de que la longitud de su circunferencia disminuye conforme se acercan a los polos. Mientras tanto, en el arco del meridiano que abarca los puntos A y B tendrá el mismo ángulo $\theta_A = \theta_B \equiv \theta'$ y variará de ϕ_A a ϕ_B. La longitud del arco corresponderá a la siguiente integral de línea:

$$L_M = \int_{\phi_A}^{\phi_B} r d\phi = r(\phi_B - \phi_A) \tag{13}$$

De manera similar definimos el ángulo del arco del meridiano como $\phi_{AB} \equiv \phi_B - \phi_A$.

$$L_M = r\phi_{AB} \tag{14}$$

Ahora para comparar ambas longitudes podemos calcular la derivada de ambas longitudes y restarlas, al ver el signo de la operación y comparar las derivadas entre ellas obtendremos qué trayectoria es más corta.

$$\frac{dL_P}{d\theta_{AB}} = r \sin \phi' \tag{15}$$

$$\frac{dL_M}{d\phi_{AB}} = r \tag{16}$$

Si realizamos la siguiente resta:

$$\frac{dL_M}{d\phi_{AB}} - \frac{dL_P}{d\theta_{AB}} = r\,(1 - \sin \phi') \tag{17}$$

Como la función seno abarca desde -1 a 1 la resta siempre será positiva ya que:

$$\frac{dL_M}{d\phi_{AB}} - \frac{dL_P}{d\theta_{AB}} = r\left(1 - \sin\phi'\right) \in [2r, 0] \tag{18}$$

La resta será mayor o igual a cero y finalmente:

$$\frac{dL_M}{d\phi_{AB}} - \frac{dL_P}{d\theta_{AB}} \geq 0 \tag{19}$$

$$\frac{dL_M}{d\phi_{AB}} \geq \frac{dL_P}{d\theta_{AB}} \tag{20}$$

Podemos concluir que la trayectoria mediante meridianos será siempre la más corta y además, obtenemos el resultado de que para un ángulo $\phi' = \frac{\pi}{2}$, el ecuador de la esfera, el paralelo es lo mismo que un meridiano.