Ejercicio 4 Física Cuántica I

Carles Gozalbes, Carlos Romero, Lucas Pérez

Octubre 2024

1. Enunciado

Supongamos ahora que una partícula incide desde la derecha , calculad el coeficiente de reflexión en $x = L$ (en función de la energía y el potencial), donde V es una constante . Una de las condiciones de contorno es $\phi(0) = 0$ ya que la zona $x < 0$ es inaccesible.

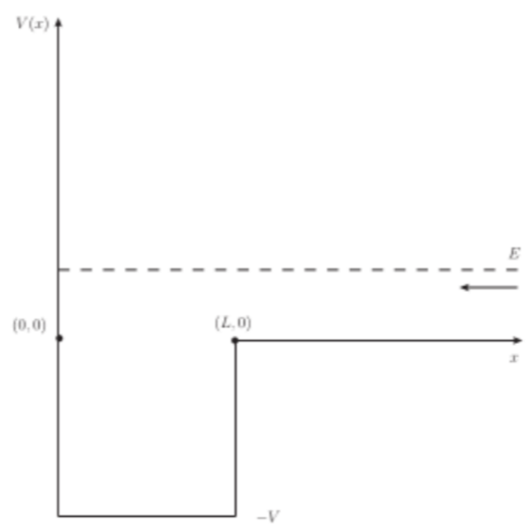

Figura 1: Representación del sistema

2. Planteamiento del sistema

Se puede dividir el sistema en dos zonas, la zona I: $x > L$ y la zona II : $x < L$. En la I tendremos la partícula incidiendo sobre el potencial en $x = L$ y otra reflejandose, mientras que en la zona II la partícula se habrá transmitido de I a II y se reflejará con el potencial infinito en $x = 0$. Para la resolución del problema ignoraremos la parte reflejada en la zona II que además tendrá un momento p'. Todo el sistema puede describirse mediante dos funciones de onda:

$$\phi_I(x) = \phi_i(x) + \phi_r(x) = Ae^{\frac{i}{\hbar}px} + Be^{\frac{-i}{\hbar}px} \tag{1}$$

$$\phi_{II}(x) = \phi_t(x) = Ce^{\frac{i}{\hbar}p'x} \tag{2}$$

Además podemos distinguir dos expresiones diferentes para cada momento lineal:

$$p = \sqrt{2mE} \quad p' = \sqrt{2m(E+V)} \tag{3}$$

3. Ecuación del coeficiente R

Para obtener el coeficiente de reflexión **R** hemos de usar la ecuación de continuidad $|\vec{j}|$ pues:

$$R = \frac{|\vec{j_r}|}{|\vec{j_i}|} \tag{4}$$

Sabiendo que $|\vec{j}|$ es:

$$|\vec{j}| = \frac{\hbar}{2m}|\vec{\nabla}(\phi)\phi * - \vec{\nabla}(\phi*)\phi| \tag{5}$$

Obtendremos la expresión de $|\vec{j_r}|$ y $|\vec{j_i}|$ conociendo las derivadas de ϕ_i y ϕ_r y de sus conjugados las cuales son:

$$\phi*_i = A^* e^{\frac{-i}{\hbar}px} \tag{6}$$

$$\phi*_r = B^* e^{\frac{i}{\hbar}px} \tag{7}$$

De esta forma las derivadas de las funciones son:

$$\frac{d\phi_i}{dx} = \frac{Api}{\hbar} e^{\frac{i}{\hbar}px} \tag{8}$$

$$\frac{d\phi *_i}{dx} = \frac{-A^* pi}{\hbar} e^{\frac{-i}{\hbar}px} \tag{9}$$

$$\frac{d\phi_r}{dx} = \frac{-Bpi}{\hbar} e^{\frac{-i}{\hbar}px} \tag{10}$$

$$\frac{d\phi *_r}{dx} = \frac{B^* pi}{\hbar} e^{\frac{i}{\hbar}px} \tag{11}$$

Sustituyendo ahora en $|\vec{j}|$ para ambos casos obtenemos:

$$|\vec{j_i}| = \frac{\hbar}{2m} |\frac{Api}{\hbar} e^{\frac{i}{\hbar}px} A^* e^{\frac{-i}{\hbar}px} + \frac{A^* pi}{\hbar} e^{\frac{-i}{\hbar}px} A e^{\frac{i}{\hbar}px}| = \tag{12}$$

$$= \frac{\hbar}{2m} |\frac{2|A|^2 pi}{\hbar}| = \frac{|A|^2 p|i|}{m} \tag{13}$$

$$|\vec{j_r}| = \frac{\hbar}{2m} |\frac{-Bpi}{\hbar} e^{\frac{-i}{\hbar}px} B^* e^{\frac{i}{\hbar}px} - \frac{B^* pi}{\hbar} e^{\frac{i}{\hbar}px} B e^{\frac{-i}{\hbar}px}| = \tag{14}$$

$$= \frac{\hbar}{2m} |\frac{-2|B|^2 pi}{\hbar}| = \frac{|B|^2 p|i|}{m} \tag{15}$$

Si calculamos ahora R a partir de los resultados obtenidos tendremos la formula más general de R:

$$R = \frac{\frac{|B|^2 p|i|}{m}}{\frac{|A|^2 p|i|}{m}} = \frac{|B|^2}{|A|^2} \tag{16}$$

4. Obtención de las constantes A y B

Para calcular **A** y **B** debemos usar las condiciones de contorno sobre las funciones de ondas del sistema. Estas condiciones son:

$$\phi_I(L) = \phi_{II}(L) \quad \frac{d\phi_I(L)}{dx} = \frac{d\phi_{II}(L)}{dx} \tag{17}$$

Ampliando las ecuaciones obtendremos un sistema de ecuaciones. Aplicando la primera condición de contorno tendremos la siguiente relación:

$$\phi_I(L) = Ae^{\frac{i}{\hbar}pL} + Be^{\frac{-i}{\hbar}pL} = \phi_{II}(L) = Ce^{\frac{i}{\hbar}p'L} \tag{18}$$

Cuya ecuación final es:

$$Ae^{\frac{i}{\hbar}pL} + Be^{\frac{-i}{\hbar}pL} = Ce^{\frac{i}{\hbar}p'L} \tag{19}$$

Ahora si aplicamos la condición de contorno de las derivadas hallaremos la segunda ecuación del sistema:

$$\frac{d\phi_I(L)}{dx} = \frac{ip}{\hbar}(Ae^{\frac{i}{\hbar}pL} - Be^{\frac{-i}{\hbar}pL}) = \frac{d\phi_{II}(L)}{dx} = \frac{ip'}{\hbar}Ce^{\frac{i}{\hbar}p'L} \tag{20}$$

Cuya ecuación final es:

$$Ae^{\frac{i}{\hbar}pL} - Be^{\frac{-i}{\hbar}pL} = \frac{p'}{p}Ce^{\frac{i}{\hbar}p'L} \tag{21}$$

Ahora, si relacionamos las ecuaciones (18) y (20) podremos despejar **A** y **B**. Primero sumaremos ambas ecuaciones con tal de obtener A.

$$2Ae^{\frac{i}{\hbar}pL} = Ce^{\frac{i}{\hbar}p'L}(1 + \frac{p'}{p}) \tag{22}$$

Despejando A veremos que su relación en función de C es:

$$A = \frac{C}{2}e^{\frac{i}{\hbar}(p'-p)L}(1 + \frac{p'}{p}) \tag{23}$$

Cuyo complejo conjugado A* es:

$$A^* = \frac{C^*}{2}e^{\frac{i}{\hbar}(p-p')L}(1 + \frac{p'}{p}) \tag{24}$$

Seguidamente podremos calcular B si restamos (18) entre (20):

$$2Be^{\frac{-i}{\hbar}pL} = Ce^{\frac{i}{\hbar}p'L}(1 - \frac{p'}{p}) \tag{25}$$

Si despemajos B su expresión será la siguiente:

$$B = \frac{C}{2}e^{\frac{i}{\hbar}(p'+p)L}(1 - \frac{p'}{p}) \tag{26}$$

Asimismo el complejo conjugado de B corresponde a:

$$B^* = \frac{C}{2}e^{\frac{-i}{\hbar}(p'+p)L}(1 - \frac{p'}{p}) \tag{27}$$

Habiendo obtenido tanto A como B , junto a sus conjugados, solo resta calcular el módulo cuadrado de ambos y calcular R. Multiplicando cada constante con su conjugado obtenemos los siguientes módulos:

$$|A|^2 = \frac{|C|^2}{4}(e^{\frac{i}{\hbar}(p'-p)L}(1+\frac{p'}{p}))(e^{\frac{i}{\hbar}(p-p')L}(1+\frac{p'}{p})) \tag{28}$$

$$|B|^2 = \frac{|C|^2}{4}(e^{\frac{i}{\hbar}(p'+p)L}(1-\frac{p'}{p}))(e^{\frac{-i}{\hbar}(p'+p)L}(1-\frac{p'}{p})) \tag{29}$$

Tras operar con las exponenciales $|A|^2$ y $|B|^2$ serán :

$$|A|^2 = \frac{|C|^2}{4}(1+\frac{p'}{p})^2 \tag{30}$$

$$|B|^2 = \frac{|C|^2}{4}(1-\frac{p'}{p})^2 \tag{31}$$

5. Obtención del coeficiente de reflexión R

Finalmente podremos calcular **R** usando la formula obtenida en el primer apartado:

$$R = \frac{|B|^2}{|A|^2} = \frac{\frac{|C|^2}{4}(1-\frac{p'}{p})^2}{\frac{|C|^2}{4}(1+\frac{p'}{p})^2} = \frac{(1-\frac{p'}{p})^2}{(1+\frac{p'}{p})^2} \tag{32}$$

Si desarrollamos los binomios y sustituimos p y p' por sus expresiones completas saldrá la solución del problema y tendremos **R** en función de E y V:

$$R = \frac{1-\sqrt{\frac{2m(E+V)}{2mE}}+\frac{2m(E+V)}{2mE}}{1+\sqrt{\frac{2m(E+V)}{2mE}}+\frac{2m(E+V)}{2mE}} \tag{33}$$

Desarrollándola más nos queda una solución más compacta:

$$R = \frac{2-2\sqrt{1+\frac{V}{E}}+\frac{V}{E}}{2+2\sqrt{1+\frac{V}{E}}+\frac{V}{E}} \tag{34}$$