Devoir Maison

À rendre le 31 Mai 2024

La qualité de la rédaction et la précision des raisonnements influent sur la notation

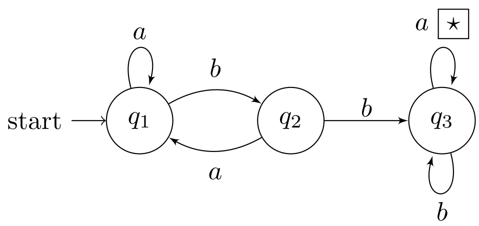
Exercice 1 : Machines séquentielles

1) Donnez une machine séquentielle M_1 qui compte le nombre de sous-chaines *bab* dans le mot reçu en entrée. L'alphabet d'entrée est $\Sigma = \{a,b\}$ et l'alphabet de sortie est $\Gamma = \{\star\}$. Attention, plusieurs sous-chaines peuvent s'intersecter. Par exemple, $f_1(babab) = \star\star$ (où f_1 est la fonction calculée par M_1). **(1 point)**

2) Donnez une machine séquentielle M_2 qui, à partir d'un mot de $\{a,b\}^*$, supprime les trois premières occurences de a et les deux premières occurences de b. Si w contient au plus trois occurences de a, alors M_2 supprime toutes les occurences de a. De même, si w contient au plus deux occurences de b, alors M supprime toutes les occurences de b.

Par exemple, $f_2(abababababab) = babab$, $f_2(bbbaa) = b$ et $f_2(ababa) = \varepsilon$ (où f_2 est la fonction calculée par M_2). L'alphabet d'entrée et l'alphabet de sortie sont tous les deux $\{a,b\}$. **(2 points)**

3) Décrivez (en français) la fonction calculée par la machine séquentielle ci-dessous. **(2 points)**



Exercice 2 : Grammaires non-contextuelles

Pour chacun des langages $\mathscr{L}_1, \mathscr{L}_2$ et $\mathscr{L}_3$ ci-dessous, montrez qu'il s'agit d'un langage algébrique.

1) $\mathscr{L}_1$ est l'ensemble des mots de $\{a,b\}^*$ contenant au moins un a et finissant par un b. **(1 point)**

2) $\mathscr{L}_2$ est l'ensemble des mots de $\{a,b\}^*$ de la forme $a^n b^n$ pour $n \in \mathbb{N}$. **(1 point)**

3) $\mathscr{L}_3$ est l'ensemble des mots w de $\{a,\bar{a}\}^*$ tels que :

- w contient autant de a que de $\bar{a}$, et
- pour tout préfixe u de w, si u est différent de ε et w, alors u contient strictement plus de a que de $\bar{a}$.

Par exemple, les mots $aa\bar{a}a\bar{a}\bar{a}$ et $aaa\bar{a}\bar{a}\bar{a}$ sont des mots de $\mathscr{L}_3$. En revanche, les mots $a\bar{a}\bar{a}$, $aa\bar{a}$ et $a\bar{a}a\bar{a}$ n'appartiennent pas à $\mathscr{L}_3$. Si a est vu comme une parenthèse ouvrante, et $\bar{a}$ comme une parenthèse fermante, alors $\mathscr{L}_3$ représente les expressions bien parenthésées. **(2 points)**

Exercice 3 : Opérations sur les langages algébriques

Soient $\mathscr{L}_1$ et $\mathscr{L}_2$ deux langages algébriques sur un même alphabet Σ. Soient $G_1 = (\Sigma, V_1, S_1, P_1)$ et $G_2 = (\Sigma, V_2, S_2, P_2)$ deux grammaires définissant respectivement $\mathscr{L}_1$ et $\mathscr{L}_2$. Démontrez les propriétés suivantes.

1) L'union de $\mathscr{L}_1$ et $\mathscr{L}_2$, le langage $\mathscr{L}_1 \cup \mathscr{L}_2 = \{u \mid u \in \mathscr{L}_1 \text{ ou } u \in \mathscr{L}_2\}$, est algébrique. **(2 points)**

2) La concaténation de $\mathscr{L}_1$ et $\mathscr{L}_2$, le langage $\mathscr{L}_1 \cdot \mathscr{L}_2 = \{u \cdot v \mid u \in \mathscr{L}_1 \text{ et } v \in \mathscr{L}_2\}$, est algébrique. **(2 points)**

3) L'itération de $\mathscr{L}_1$, le langage $\mathscr{L}_1^\star = \{u^t \mid u \in \mathscr{L}_1 \text{ et } t \in \mathbb{N}\}$ est algébrique. **(2 points)**

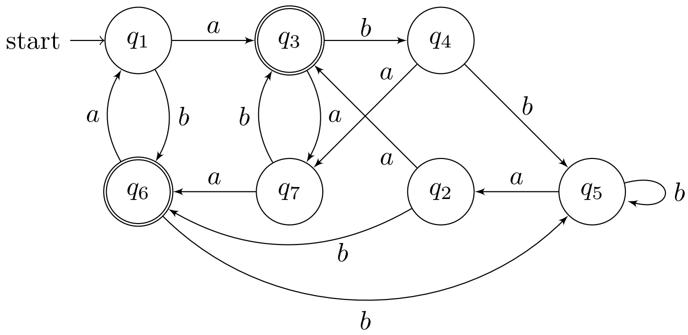
Exercice 4 : Lemme de l'étoile

On considère le langage $\mathscr{L}_1 = \{a^n b^m c^{2(n+m)}$ avec n et m des entiers$\}$. L'objectif de cet exercice est de montrer que $\mathscr{L}_1$ est un langage algébrique et que ce n'est pas un langage rationnel.
Pour cela, vous aurez besoin du lemme de l'étoile, énoncé ci-dessous.

Théorème 1 (Lemme de l'étoile) *Soit $\mathscr{L}$ un langage rationnel. Il existe un entier N tel que tout mot $W \in L$ de longueur supérieure à N se factorise en 3 morceaux $W = x \cdot y \cdot z$ tels que $|x \cdot y| < N$, $|y| > 0$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, $x \cdot y^k \cdot z \in L$.*

1) Montrez que $\mathscr{L}_1$ est un langage algébrique. **(1 point)**

2) Soit $\mathscr{L}_2$ le langage accepté par l'AFD ci-dessous. Puisque $\mathscr{L}_2$ est un langage rationnel, il vérifie le lemme de l'étoile. Donnez un exemple de mots $u, v, w \in \{a,b\}^*$, avec $v \neq \varepsilon$ tels que pour tout $k \geqslant 0$, le mot $uv^k w$ appartient à $\mathscr{L}_2$. **(2 points)**



3) En utilisant le lemme de l'étoile, montrez que $\mathscr{L}_1$ n'est pas rationnel. **(2 points)**

<u>Indice</u> : il faut procéder par l'absurde. Supposez donc que $\mathscr{L}_1$ est rationnel, et appliquez le lemme de l'étoile pour aboutir à une contradiction.