

# Computação Evolucionária

## Cap 6. Métodos de Otimização Baseados em Enxame: Colônia de Formigas

Gabriela Nunes Lopes

nuneslopesgabriela@gmail.com

DEE / UFMG

# Na aula de hoje

- Algoritmo de Otimização por enxame de formigas

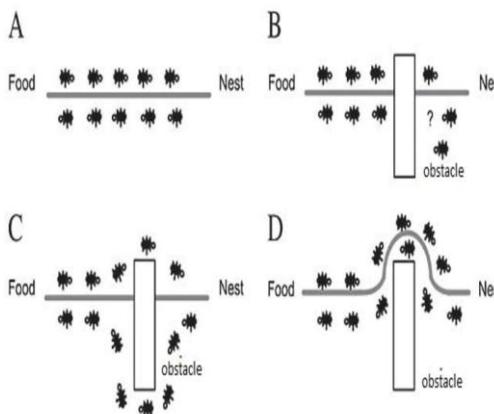


# Otimização por colônia de formigas

- A otimização por colônia de formigas (ACO) é inspirada pelo comportamento de busca de caminho de certas espécies de formigas.
- Como a comida de uma fonte descoberta precisa ser transportada para o formigueiro, muitas espécies de formigas formam "trilhas de transporte", que são marcadas por "assinaturas de odor" de substâncias químicas secretadas chamadas **feromônios** (do grego φέρειν: carregar, transportar e ὄρμη: impulso).
- Como a maioria das formigas é praticamente cega, os feromônios são (além do som e do toque) o principal meio de **comunicação** delas. Seguindo as trilhas de feromônios deixadas por seus companheiros, as formigas encontram o **caminho para uma fonte de comida descoberta**. A **quantidade de feromônios** secretados sinaliza tanto a qualidade quanto a **quantidade da comida descoberta**.

# Otimização por colônia de formigas

- O processo de deixar rastros no ambiente, que desencadeiam ações de outros indivíduos, é comumente chamado de **estigmergia** (do grego στίγμα: marca, sinal e ἔργον: trabalho, ação).
- A estigmergia permite que as formigas descubram e sigam os **caminhos mais curtos** sem ter uma visão global da situação. Tudo o que elas precisam para adaptar seu comportamento aos requisitos globais é de informações locais. Intuitivamente, começando por uma exploração aleatória, o caminho mais curto recebe mais feromônio do que outros caminhos, porque é percorrido por mais indivíduos na mesma quantidade de tempo.

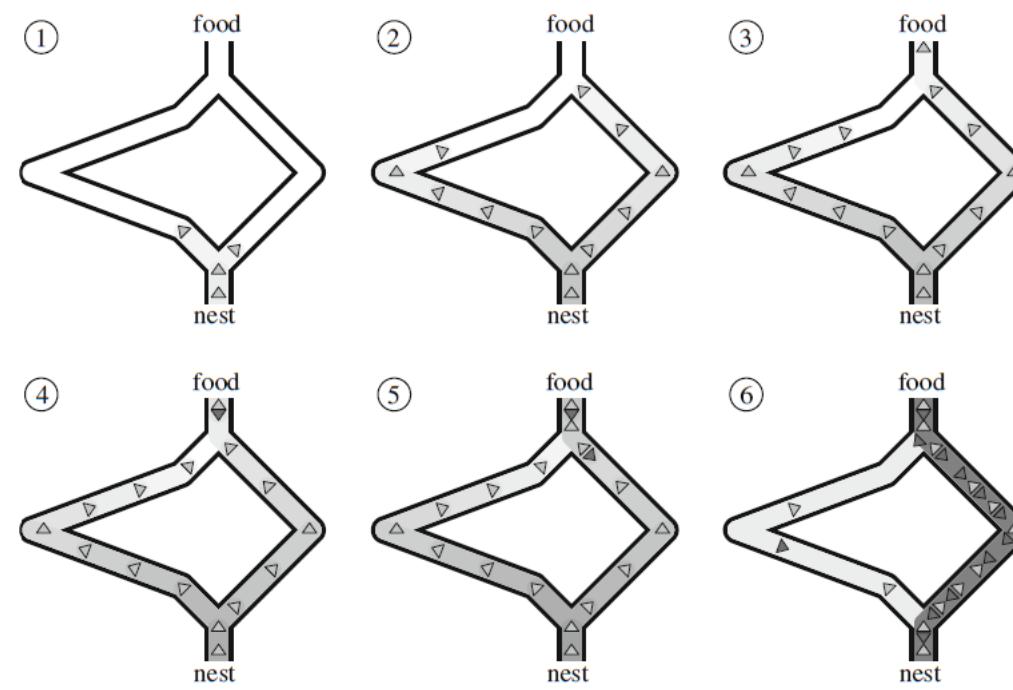


**Fig 1.**  
A: Ants in a pheromone trail between nest and food.  
B: an obstacle interrupts the trail.  
C: Ants find two paths to go around the obstacle

# Experimento da ponte dupla

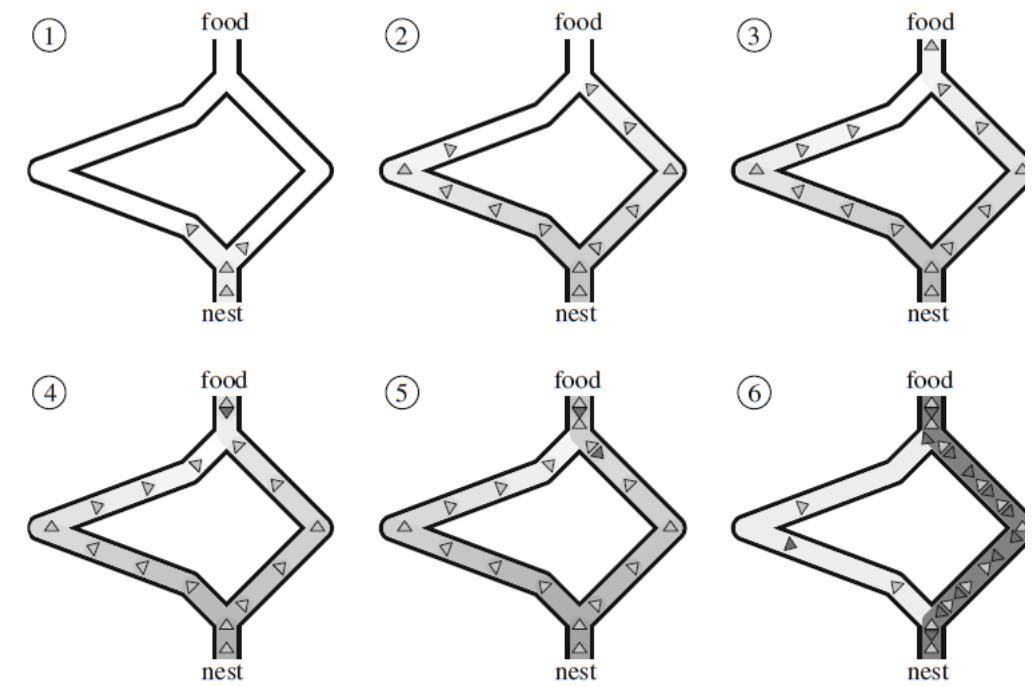
# Experimento da ponte dupla

- Uma ilustração marcante desse fenômeno é o chamado experimento da ponte dupla.
- Neste experimento, o formigueiro de uma colônia de formigas da espécie *Iridomyrmex humilis* foi conectado a uma fonte de **comida** por uma ponte dupla, cujos dois ramos tinham comprimentos diferentes.
- Como as formigas são praticamente cegas, elas são incapazes de ver qual lado da ponte é mais curto. Devido à construção da ponte, elas também não podem derivar nenhuma informação do ângulo em que os dois ramos se bifurcam do caminho inicial (veja a Figura: ambos os ramos começam com  $45^\circ$ ; o ramo mais longo muda de direção apenas mais tarde).



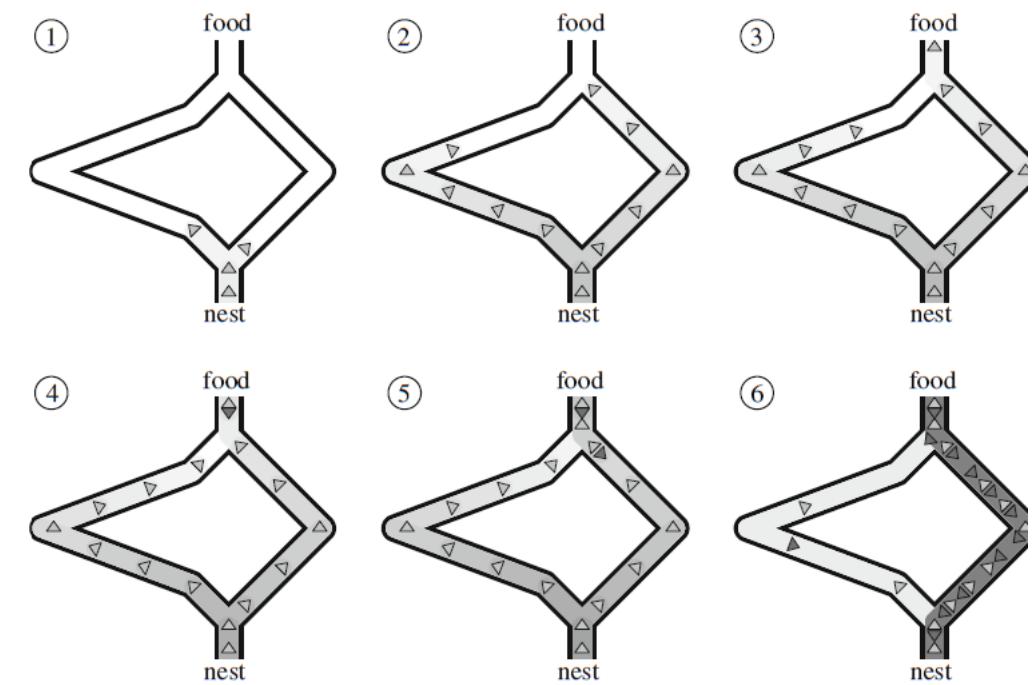
# Experimento da ponte dupla

- Na maioria dos experimentos conduzidos, quase todas as formigas optaram pelo ramo **mais curto** da ponte após apenas alguns minutos.
- Esse fenômeno pode ser explicado da seguinte forma: **no início, ambos os ramos são escolhidos** pelo mesmo número de formigas (ou seja, os ramos são escolhidos com a mesma probabilidade), porque não há feromônio em nenhum deles (passos 1 e 2).
- No entanto, as formigas que seguem o ramo mais curto alcançam a fonte de **comida mais rapidamente** (simplesmente porque um caminho mais curto significa menos tempo de viagem, passo 3).



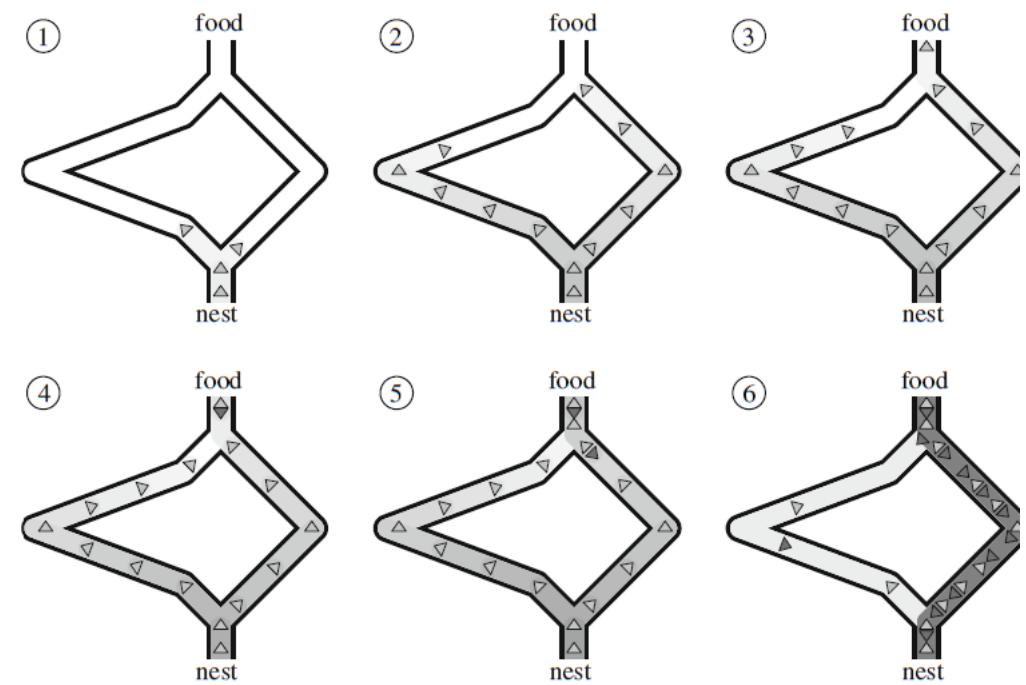
# Experimento da ponte dupla

- As formigas que retornam da fonte de comida observam mais feromônio no ramo mais curto, porque mais formigas já alcançaram a fonte de comida neste ramo (e mais formigas significam mais feromônio secretado, passos 4 e 5).
- Isso leva a uma preferência crescente pelo ramo mais curto, de modo que após algum tempo o ramo mais curto é escolhido quase exclusivamente (passo 6).
- O princípio fundamental aqui é que o caminho mais curto é sistematicamente reforçado, o que também é chamado de auto-catalisação: quanto mais feromônio houver em um caminho, mais formigas escolherão esse caminho; mais formigas viajando por um caminho depositam mais feromônio nele e assim por diante.



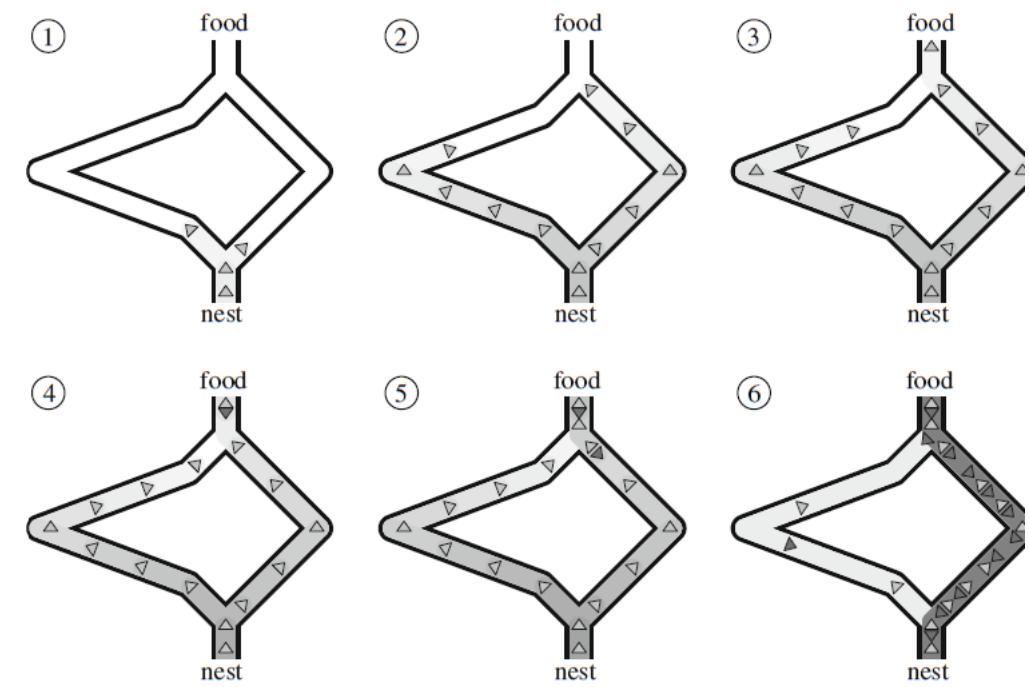
# Experimento da ponte dupla

- Note que o caminho mais curto só pode ser encontrado se as formigas depositarem feromônio em **ambas as direções**, ou seja, no caminho do formigueiro para a comida e no caminho da comida para o formigueiro.
- Suponha, por exemplo, que elas depositem feromônio apenas no caminho para **a fonte de comida**.
- Embora as **primeiras** formigas que retornam da fonte de comida escolham o caminho mais curto (porque há mais feromônio neste caminho), a quantidade de feromônio neste caminho não é **aumentada sistematicamente**, porque de acordo com nossa suposição as formigas não depositam feromônio no caminho de volta da fonte de comida.



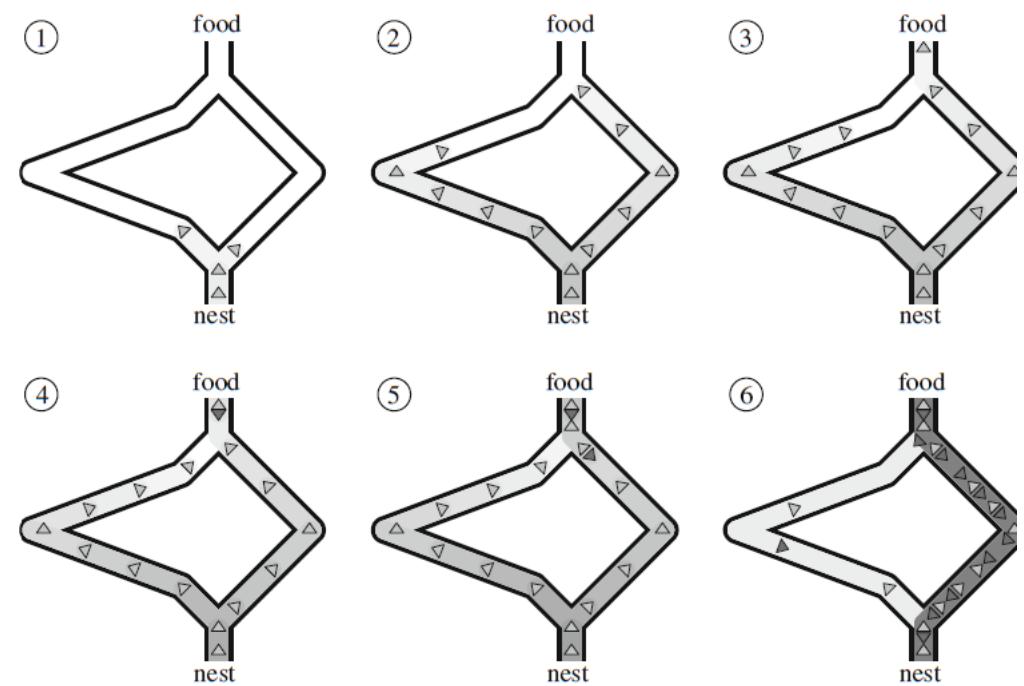
# Experimento da ponte dupla

- A diferença inicial de feromônio é eventualmente igualada pelas formigas que chegam (embora um pouco mais tarde) no caminho mais longo.
- O mesmo argumento se aplica para a direção oposta, pelo menos se supusermos que as formigas não conseguem se lembrar de qual caminho vieram e, portanto, escolhem o **caminho de retorno** aleatoriamente com base na quantidade de feromônio: neste caso, a diferença de feromônio teria que ser causada pelas formigas que retornam no caminho mais curto e, portanto, chegam mais cedo ao formigueiro.
- Embora inicialmente as formigas que partem do formigueiro depois que as primeiras formigas retornaram da fonte de comida observem uma diferença de feromônio, essa diferença é eventualmente igualada pelas formigas que retornam no ramo mais longo. **Como consequência, nenhuma preferência pelo caminho mais curto pode se desenvolver.**



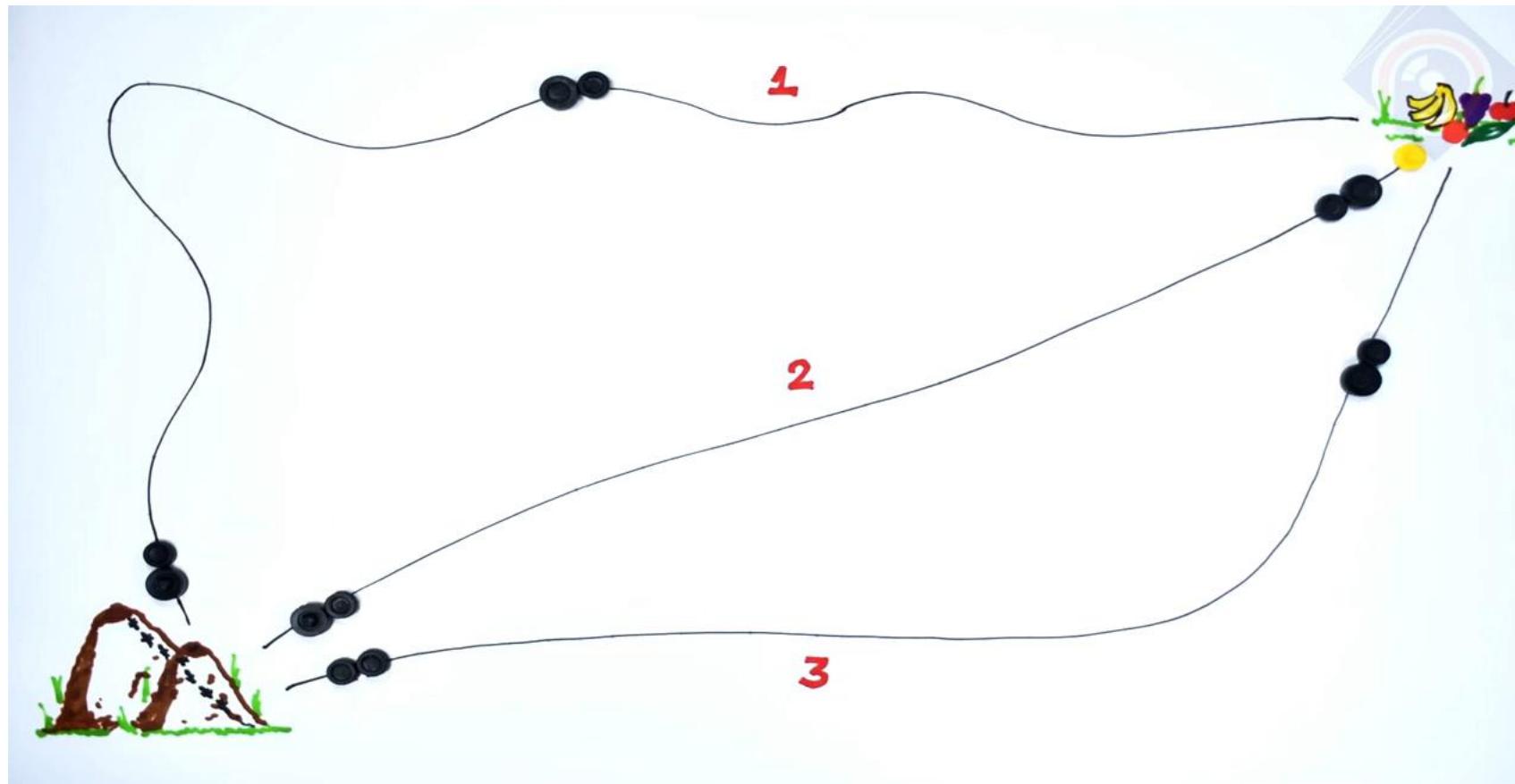
# Experimento da ponte dupla

- Claro, devido às flutuações aleatórias na seleção de um caminho (as formigas escolhem essencialmente de forma aleatória), a busca pode ainda convergir para um dos ramos sob tais condições. Ou seja, eventualmente quase todas as formigas podem escolher **o mesmo ramo da ponte**. No entanto, se este é o ramo mais curto ou o mais longo é totalmente aleatório.
- Além disso, observe que (sob as condições originais, ou seja, feromônio é depositado em ambas as direções) **o caminho mais curto é encontrado apenas se ambos os ramos existirem desde o início e nenhum deles contiver qualquer feromônio**: uma preferência por um caminho estabelecido (marcado com feromônio) é mantida.



# Experimento da ponte dupla

- Como poderíamos ilustrar esse princípio?



# Segundo Experimento da Ponte Dupla

- Esta afirmação plausível é suportada por um segundo experimento de ponte:
- Em uma configuração inicial, o formigueiro e a fonte de comida eram conectados **apenas pelo ramo mais longo da ponte**.
- O segundo, ramo mais curto, foi adicionado apenas após algum tempo. Nesta configuração, **a maioria das formigas continuou usando o ramo mais longo**, que haviam estabelecido na fase inicial do experimento. Apenas em casos muito raros as formigas mudaram para o caminho mais curto (provavelmente causado por uma forte flutuação aleatória nas seleções de caminho).

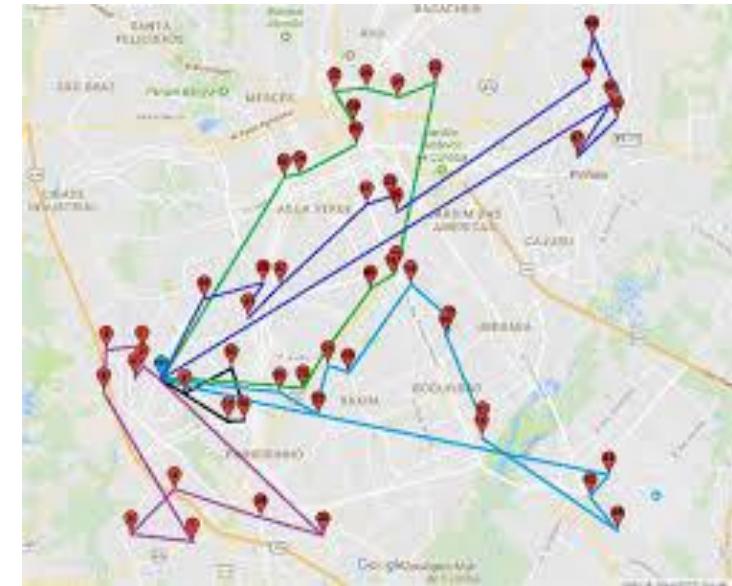
# Aplicações da ACO

# Aplicações da ACO

- Para aplicar a otimização por colônia de formigas a outros problemas de otimização, o problema deve ser formulado como **uma busca em um grafo**.
- Em particular, deve ser possível descrever um candidato a solução como um **conjunto de arestas**. No entanto, essas arestas não precisam formar um caminho.
- Contanto que haja um procedimento iterativo com o qual as arestas do conjunto possam ser **escolhidas** (com base em probabilidades descritas por feromônios), a otimização por colônia de formigas é **aplicável**.
- Ainda mais genericamente, a otimização por colônia de formigas é **aplicável** se os candidatos a solução forem construídos com a ajuda de uma série de **decisões** (aleatórias), onde cada decisão estende uma solução (parcial).
- A razão para isso é que a sequência de decisões pode ser interpretada como um caminho em um grafo de decisões (também chamado de grafo de construção). As formigas exploram caminhos neste grafo de decisões e tentam encontrar o melhor (mais curto, mais barato) caminho, que resulta em um melhor conjunto ou sequência de decisões.

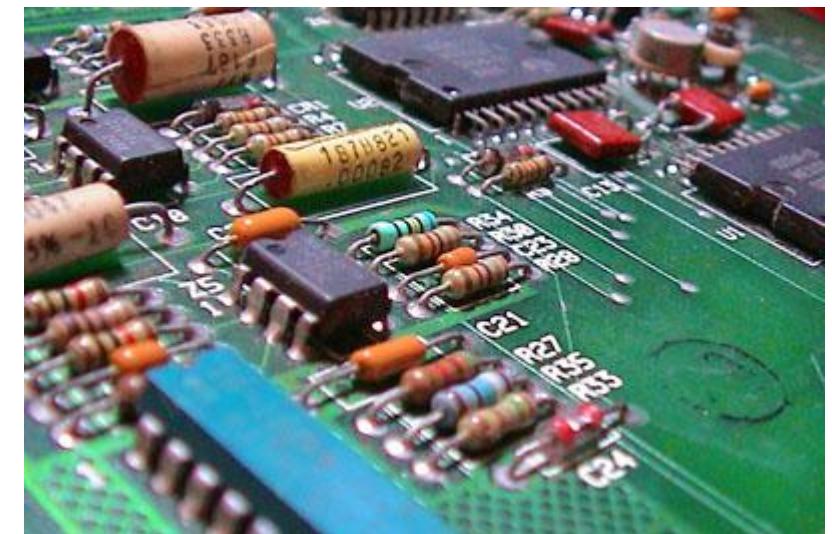
# Aplicações da ACO

- Alguns exemplos de aplicação da ACO são:
- **Roteamento de Veículos:** A otimização por colônia de formigas pode ser aplicada para encontrar rotas eficientes para veículos, como entregas de mercadorias ou serviços de transporte público. As formigas simulam o comportamento de busca de alimentos, onde cada formiga representa um veículo e as trilhas de feromônios correspondem às rotas. Ao longo do tempo, as rotas mais curtas e eficientes acumulam mais feromônios, orientando outras formigas a seguir esses caminhos, resultando em rotas otimizadas.
- **Redes de Telecomunicações:** Na otimização de redes de telecomunicações, as formigas podem ser usadas para determinar as configurações ideais de roteamento de dados. Cada formiga pode representar um possível caminho de transmissão, e as trilhas de feromônios indicam a qualidade do caminho. Com o tempo, as formigas convergem para os caminhos mais eficientes, ajudando a otimizar o desempenho da rede.



# Aplicações da ACO

- **Planejamento de Produção:** Em ambientes de fabricação, a otimização por colônia de formigas pode ser aplicada para planejar eficientemente a produção e a logística. As formigas podem representar unidades de produção ou máquinas, e as trilhas de feromônios podem indicar a utilidade ou eficiência de certas sequências de produção. Isso ajuda a reduzir os tempos de espera, maximizar o uso de recursos e otimizar a produção global.
- **Design de Circuitos Eletrônicos:** No design de circuitos eletrônicos, a otimização por colônia de formigas pode ser usada para encontrar configurações otimizadas de circuitos. As formigas podem ser usadas para explorar o espaço de solução em busca de configurações que atendam aos requisitos de desempenho, como minimização de área, consumo de energia ou latência. As trilhas de feromônios podem representar a qualidade das soluções encontradas, ajudando a convergir para designs eficientes



# Aplicação da ACO

## Como funcionam essas soluções?

- Cada formiga constrói uma solução candidata. Ela começa em um dos vértices dados e então se move de vértice para vértice, escolhendo a aresta a seguir de acordo com uma distribuição de probabilidade proporcional à quantidade de feromônio que observa nas arestas.
- Infelizmente, um problema fundamental de tal abordagem direta são os ciclos percorridos pelas formigas, pois eles introduzem uma tendência a se reforçarem: se uma formiga percorre um ciclo, o feromônio depositado por ela torna provável que a formiga percorra o mesmo ciclo novamente. Esse inconveniente é contrabalançado **depositando feromônio apenas após o caminho completo ter sido construído**.
- Além disso, antes que o feromônio seja depositado, quaisquer ciclos que um caminho possa conter são removidos.

# Aplicação da ACO

- Outro problema potencial é que a busca pode se concentrar em candidatos a solução que são construídos **cedo** no processo. Uma vez que esses candidatos a solução recebem feromônio, há uma tendência a permanecer neles (ou em variações menores deles). Isso pode levar a uma convergência prematura.
- Para lidar com esse problema, é comum introduzir a **evaporação do feromônio** (que desempenha apenas um papel secundário na natureza).
- Outras extensões e melhorias benéficas incluem fazer com que a **quantidade de feromônio depositado dependa da qualidade da solução candidata** construída e a introdução de heurísticas para melhorar a seleção de arestas, por exemplo, considerando não apenas o feromônio, mas também o peso da aresta.

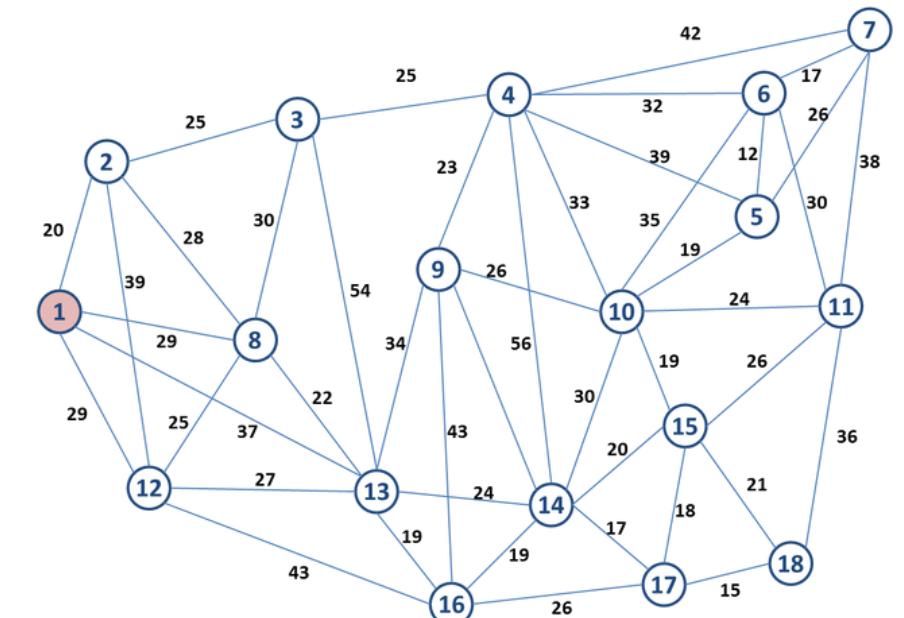
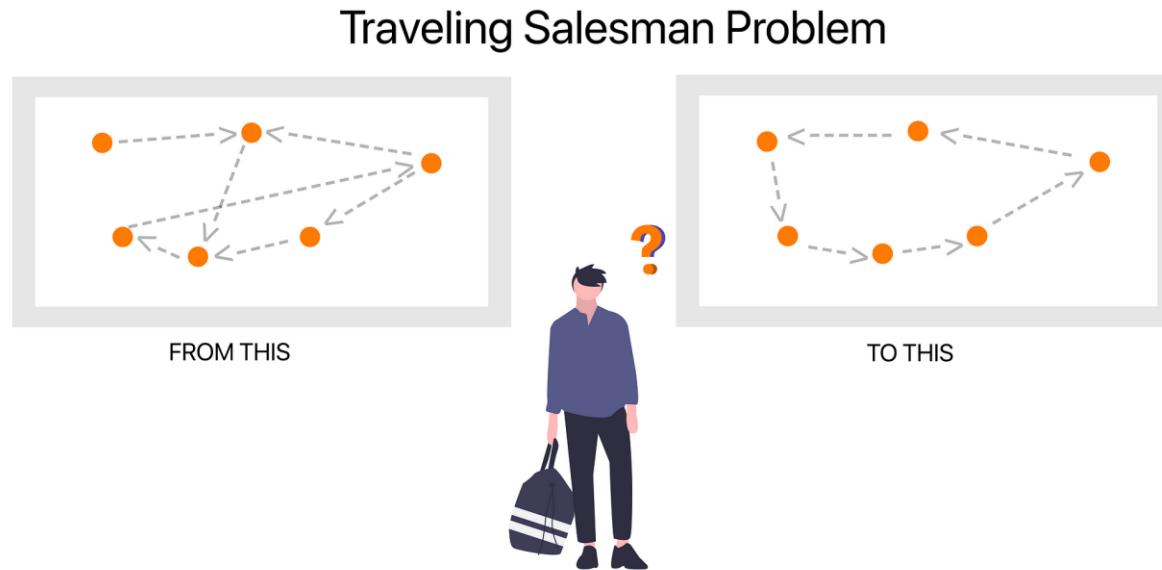
# Aplicações da ACO

- Alguém tem mais alguma ideia de aplicação?

# Problema do Caixeiro Viajante

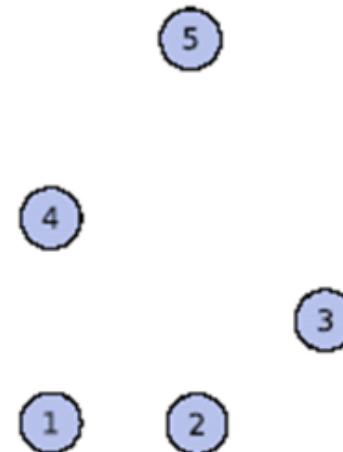
# ACO Para Problema do Caixeiro Viajante

- O que é?
  - O vendedor deve passar por todas as cidades e retornar à cidade de início.



# ACO Para Problema do Caixeiro Viajante

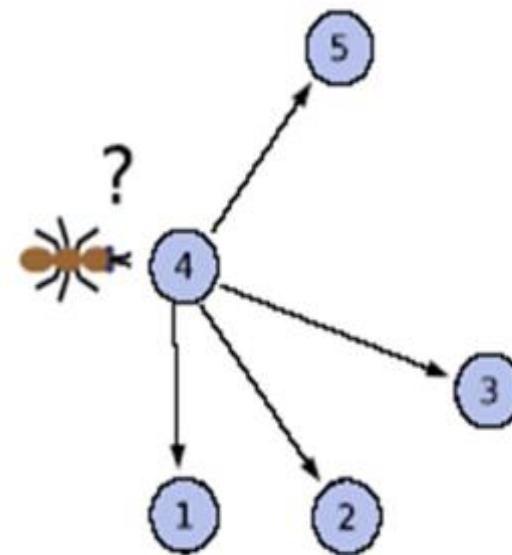
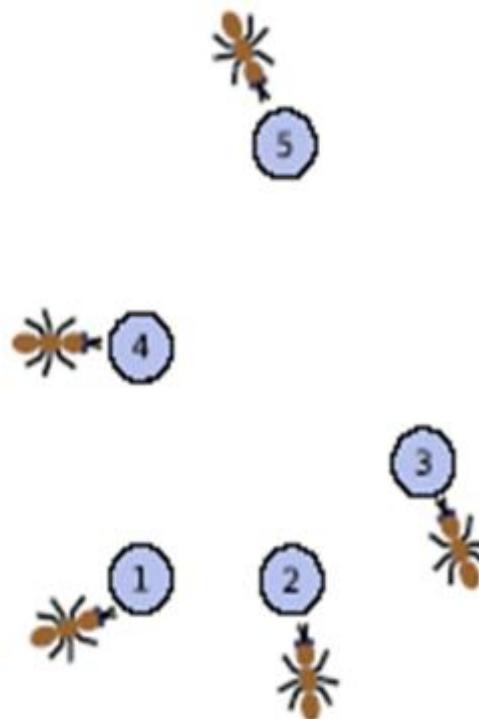
Considere o exemplo de 5 cidades dado abaixo:



Cada formiga construirá uma solução movendo-se de uma cidade para outra. No início, cada formiga é colocada em uma cidade diferente (ou colocada aleatoriamente).

# ACO Para Problema do Caixeiro Viajante

Começando de uma cidade  $i$ , a formiga move-se escolhendo probabilisticamente a cidade vizinha  $j$  (entre os vizinhos factíveis).



# ACO Para Problema do Caixeiro Viajante

A probabilidade da formiga  $k$  que está na cidade  $i$  de escolher a cidade  $j$  é dada pela regra

$$p_{ij}^k = \frac{\tau_{ij}^\alpha \eta_{ij}^\beta}{\sum_{l \in N_j^k} \tau_{il}^\alpha \eta_{jl}^\beta}, \text{ quando } j \in N_i^k.$$

onde:

$\tau_{ij}$  é o feromônio associado à aresta  $(i, j)$

$\alpha$  e  $\beta$  são parâmetros para determinar a influência do feromônio e da informação heurística

$N_j^k$  é a vizinhança factível da formiga  $k$  (isto é, o conjunto de cidades ainda não visitadas pela formiga  $k$ ).

Associado a aresta  $(i, j)$  existe uma valor heurístico  $\eta_{ij}$  dado por

$$\eta_{ij} = 1/c_{ij}$$

que representa a atratividade da formiga visitar a cidade  $i$  depois de visitar a cidade  $j$ .

O valor  $\eta_{ij}$  é inversamente proporcional à distância  $c_{ij}$  entre as cidades  $i$  e  $j$ .

A partir de uma cidade  $i$ , a escolha da cidade candidata  $j$  é feita de acordo com a probabilidade de transição, com idéia similar à escolha por roleta de algoritmos genéticos.

# ACO Para Problema do Caixeiro Viajante

No feromônio  $\tau_{ij}$  associado à aresta  $(i, j)$  ocorrem dois eventos:

## 1. Evaporação

- evita que o feromônio acumulado cresça indefinidamente;
- permite esquecer pobres decisões do passado de busca; e
- permite soluções diferentes.

## 2. Depósito de feromônio de todas as formigas que passaram sobre $(i, j)$

Depois que todas as formigas contruíram suas viagens, o feromônio é atualizado:

$\Delta\tau_{ij}^k$  é a quantidade de feromônio que a formiga  $k$  deposita sobre a aresta  $(i, j)$ :

$$\begin{cases} \Delta\tau_{ij}^k = Q/L_k \text{ quando a aresta } (i, j) \text{ pertence } S_k \\ \Delta\tau_{ij}^k = 0 \text{ em caso contrário onde } Q \text{ é uma constante} \end{cases}$$

$$\tau_{ij} = (1 - \rho)\tau_{ij} + \sum_{k=1}^m \Delta\tau_{ij}^k$$



# ACO Para Problema do Caixeiro Viajante

## Critérios de parada:

- número máximo de iterações;
- estagnação ou convergência;
- situação na qual todas as formigas seguem sempre o mesmo percurso;

A estagnação é causada pelo excessivo crescimento de feromônio nas arestas de uma viagem subótima. Apesar da natureza estocástica do algoritmo, uma forte concentração de feromônio nas arestas força a formiga a fazer sempre o mesmo percurso.

# ACO Para Problema do Caixeiro Viajante

## Algoritmo do ACO

Coloque cada formiga em uma cidade aleatória

Para  $t = 1$  até o número máximo de iterações

Para  $k = 1$  até  $m$  (nº de formigas)

Enquanto a formiga  $k$  não construir a viagem  $S_k$

Seleciona a próxima cidade pela regra da probabilidade:

$$p_{ij}^k = \frac{\tau_{ij}^\alpha \eta_{ij}^\beta}{\sum_{l \in N_i^k} \tau_{il}^\alpha \eta_{jl}^\beta}, \text{ quando } j \in N_i^k.$$

Fim

Calcule a distância  $L_k$  da viagem  $S_k$

Se  $L_k < L^*$  então

$$S^* = S_k, L^* = L_k$$

Fim

Fim

Atualize os feromônios:  $\tau_{ij} = (1 - \rho)\tau_{ij} + \sum_{k=1}^m \Delta\tau_{ij}^k$ , onde:

$$\begin{cases} \Delta\tau_{ij}^k = Q/L_k & \text{quando a aresta } (i, j) \text{ pertence } S_k, \text{ onde } Q \text{ é uma constante} \\ \Delta\tau_{ij}^k = 0 & \text{em caso contrário.} \end{cases}$$

Fim

O resultado é a rota  $S^*$

Inicializa as trilhas de feromônios com valores positivos;  
Faça

Para cada formiga  $i$  faça

Constrói uma solução;

Mede a qualidade da solução;

fim

Atualiza a trilha de feromônicos através do depósito e evaporação;

enquanto critério de parada não satisfeito;

# ACO Para Problema do Caixeiro Viajante

- De forma mais formal, procedemos da seguinte maneira: cada formiga constrói uma solução atravessando um ciclo hamiltoniano (aleatório). Para evitar que uma cidade já visitada seja revisitada, dotamos cada formiga de uma "memória", consistindo no conjunto C de índices das cidades que ainda não foram visitadas. (Observe que isso difere do protótipo biológico!) Uma formiga constrói um circuito fechado (ciclo hamiltoniano) da seguinte forma:

1. A formiga começa em uma cidade arbitrária (escolhida aleatoriamente).
2. A formiga observa os feromônios nas conexões de sua cidade atual i para qualquer cidade j que ainda não tenha visitado. Então ela escolhe se mover para a cidade j com a probabilidade:

$$p_{ij} = \frac{\phi_{ij}}{\sum_{k \in C} \phi_{ik}},$$

onde C é o conjunto de índices das cidades que ainda não foram visitadas e  $\phi_{ij}$  é a quantidade de feromônio na conexão da cidade i para a cidade j.

$$p_{ij}^k = \frac{\tau_{ij}^\alpha \cdot \eta_{ij}^\beta}{\sum_{j \in J} \tau_{ij}^\alpha \cdot \eta_{ij}^\beta}$$

Onde:

- $p_{ij}^k$  é a probabilidade da formiga  $k$  escolher a cidade  $j$  a partir da cidade  $i$ .
- $\tau_{ij}$  é a quantidade de feromônio na aresta entre as cidades  $i$  e  $j$ .
- $\eta_{ij}$  é a heurística que representa a "desejabilidade" de ir de  $i$  para  $j$ .
- $\alpha$  e  $\beta$  são parâmetros que controlam a influência dos feromônios e da heurística, respectivamente.

- 3. A formiga repete o passo 2 até que tenha visitado todas as cidades.

# ACO Para Problema do Caixeiro Viajante

## Inicialização:

- Primeiro, criamos um conjunto de formigas e as colocamos em cidades aleatórias.
- Cada formiga tem uma memória que armazena as cidades que ela já visitou e uma maneira de construir uma solução para o problema.

## Construção de Soluções:

- Cada formiga, em cada iteração, decide qual cidade visitar a seguir baseando-se em uma regra de probabilidade.
- A probabilidade de uma formiga visitar uma cidade específica é influenciada por dois fatores principais: feromônios e heurística.
- *Feromônios*: As formigas depositam feromônios nas arestas entre as cidades que visitam. A quantidade de feromônio depositada é inversamente proporcional ao custo da aresta. Quanto menor o custo, mais feromônio é depositado.
- *Heurística*: A heurística é uma medida da "desejabilidade" de uma cidade com base em informações adicionais, como a distância entre as cidades.

## Atualização de Feromônios:

- Depois que todas as formigas completam sua jornada, os feromônios são atualizados.
- Feromônios evaporam com o tempo para evitar que o algoritmo fique preso em soluções subótimas.
- A quantidade de feromônio evaporado é controlada por um parâmetro de taxa de evaporação.

## Iteração:

- O processo de construção de soluções, atualização de feromônios e evaporação é repetido por várias iterações.
- A cada iteração, as formigas gradualmente convergem para rotas melhores, influenciadas pelo feromônio depositado.

## Critério de Parada:

- O algoritmo continua iterando até que um critério de parada seja alcançado, como um número máximo de iterações ou uma melhoria na melhor solução encontrada.

# Exercício

# Exemplo 1

1. Resolva 2 iterações para resolver o problema do Caixeiro Viajante com 5 cidades dado abaixo, usando a técnica ACO com os parâmetros e tabelas de distâncias e feromônios dados abaixo.

custos

5

| $c_{ij}$ | 1   | 2   | 3   | 4   | 5   |
|----------|-----|-----|-----|-----|-----|
| 1        | 0,0 | 1,0 | 2,2 | 2,0 | 4,1 |
| 2        | 1,0 | 0,0 | 1,4 | 2,2 | 4,0 |
| 3        | 2,2 | 1,4 | 0,0 | 2,2 | 3,2 |
| 4        | 2,0 | 2,2 | 2,2 | 0,0 | 2,2 |
| 5        | 4,1 | 4,0 | 3,2 | 2,2 | 0,0 |

| $\eta_{ij} = 1/c_{ij}$ | 1        | 2        | 3        | 4        | 5        |
|------------------------|----------|----------|----------|----------|----------|
| 1                      | $\infty$ | 1,00     | 0,45     | 0,50     | 0,24     |
| 2                      | 1,00     | $\infty$ | 0,71     | 0,45     | 0,25     |
| 3                      | 0,45     | 0,71     | $\infty$ | 0,45     | 0,31     |
| 4                      | 0,50     | 0,45     | 0,45     | $\infty$ | 0,45     |
| 5                      | 0,24     | 0,25     | 0,31     | 0,45     | $\infty$ |

$$\alpha = 0,5$$
$$\beta = 0,5$$

4

3

1

2

| $\tau_{ij}$ | 1        | 2        | 3        | 4        | 5        |
|-------------|----------|----------|----------|----------|----------|
| 1           | $\infty$ | 0,30     | 0,25     | 0,20     | 0,30     |
| 2           | 0,30     | $\infty$ | 0,20     | 0,20     | 0,30     |
| 3           | 0,25     | 0,20     | $\infty$ | 0,10     | 0,15     |
| 4           | 0,20     | 0,20     | 0,10     | $\infty$ | 0,45     |
| 5           | 0,30     | 0,30     | 0,15     | 0,45     | $\infty$ |

Os valores de T  
são aleatórios  
para começar o  
algoritmo

# Exemplo 1 – Façam no Excel

- Para resolvê-lo, deveremos considerar:

$$\alpha = 0,5$$

$$\beta = 0,5$$

| $c_{ij}$ | 1   | 2   | 3   | 4   | 5   |
|----------|-----|-----|-----|-----|-----|
| 1        | 0,0 | 1,0 | 2,2 | 2,0 | 4,1 |
| 2        | 1,0 | 0,0 | 1,4 | 2,2 | 4,0 |
| 3        | 2,2 | 1,4 | 0,0 | 2,2 | 3,2 |
| 4        | 2,0 | 2,2 | 2,2 | 0,0 | 2,2 |
| 5        | 4,1 | 4,0 | 3,2 | 2,2 | 0,0 |

| $\eta_{ij} = 1/c_{ij}$ | 1        | 2        | 3        | 4        | 5        |
|------------------------|----------|----------|----------|----------|----------|
| 1                      | $\infty$ | 1,00     | 0,45     | 0,50     | 0,24     |
| 2                      | 1,00     | $\infty$ | 0,71     | 0,45     | 0,25     |
| 3                      | 0,45     | 0,71     | $\infty$ | 0,45     | 0,31     |
| 4                      | 0,50     | 0,45     | 0,45     | $\infty$ | 0,45     |
| 5                      | 0,24     | 0,25     | 0,31     | 0,45     | $\infty$ |

| $\tau_{ij}$ | 1        | 2        | 3        | 4        | 5        |
|-------------|----------|----------|----------|----------|----------|
| 1           | $\infty$ | 0,30     | 0,25     | 0,20     | 0,30     |
| 2           | 0,30     | $\infty$ | 0,20     | 0,20     | 0,30     |
| 3           | 0,25     | 0,20     | $\infty$ | 0,10     | 0,15     |
| 4           | 0,20     | 0,20     | 0,10     | $\infty$ | 0,45     |
| 5           | 0,30     | 0,30     | 0,15     | 0,45     | $\infty$ |

$$p_{ij}^k = \frac{\tau_{ij}^\alpha \eta_{ij}^\beta}{\sum_{l \in N_j^k} \tau_{il}^\alpha \eta_{jl}^\beta}, \text{ quando } j \in N_i^k$$

O valor de  $\eta_{ij}$  é o inverso do custo  $c_{ij}$ . Desta forma, os menores custos têm maior atratividade para a técnica. A formiga 1 começa a rota pela cidade 1.

| $\eta_{ij} = 1/c_{ij}$ | 1        | 2        | 3        | 4        | 5        |
|------------------------|----------|----------|----------|----------|----------|
| 1                      | $\infty$ | 1,00     | 0,45     | 0,50     | 0,24     |
| 2                      | 1,00     | $\infty$ | 0,71     | 0,45     | 0,25     |
| 3                      | 0,45     | 0,71     | $\infty$ | 0,45     | 0,31     |
| 4                      | 0,50     | 0,45     | 0,45     | $\infty$ | 0,45     |
| 5                      | 0,24     | 0,25     | 0,31     | 0,45     | $\infty$ |

# Exemplo 1

## 1ª iteração

$k = 1$

A formiga 1 começa na cidade 1

$$p_{12}^1 = \tau_{12}^\alpha \eta_{12}^\beta / (\tau_{13}^\alpha \eta_{23}^\beta + \tau_{14}^\alpha \eta_{24}^\beta + \tau_{15}^\alpha \eta_{25}^\beta) = 0,3^{0,5} \cdot 1^{0,5} / (0,25^{0,5} \cdot 0,71^{0,5} + 0,2^{0,5} \cdot 0,45^{0,5} + 0,3^{0,5} \cdot 0,25^{0,5}) =$$

$$p_{13}^1 = \tau_{13}^\alpha \eta_{13}^\beta / (\tau_{12}^\alpha \eta_{32}^\beta + \tau_{14}^\alpha \eta_{34}^\beta + \tau_{15}^\alpha \eta_{35}^\beta) = 0,25^{0,5} \cdot 0,45^{0,5} / (0,3^{0,5} \cdot 0,71^{0,5} + 0,2^{0,5} \cdot 0,45^{0,5} + 0,3^{0,5} \cdot 0,31^{0,5}) =$$

$$p_{14}^1 = \tau_{14}^\alpha \eta_{14}^\beta / (\tau_{12}^\alpha \eta_{42}^\beta + \tau_{13}^\alpha \eta_{43}^\beta + \tau_{15}^\alpha \eta_{45}^\beta) = 0,2^{0,5} \cdot 0,5^{0,5} / (0,3^{0,5} \cdot 0,45^{0,5} + 0,25^{0,5} \cdot 0,45^{0,5} + 0,3^{0,5} \cdot 0,45^{0,5}) =$$

$$p_{15}^1 = \tau_{15}^\alpha \eta_{15}^\beta / (\tau_{12}^\alpha \eta_{52}^\beta + \tau_{13}^\alpha \eta_{53}^\beta + \tau_{14}^\alpha \eta_{54}^\beta) = 0,3^{0,5} \cdot 0,24^{0,5} / (0,3^{0,5} \cdot 0,25^{0,5} + 0,25^{0,5} \cdot 0,15^{0,5} + 0,2^{0,5} \cdot 0,45^{0,5}) =$$

A formiga 1 vai da cidade 1 para a cidade 2.

Cidades vizinhas não visitadas:  $N=\{2,3,4,5\}$

$$p_{23}^1 = \tau_{23}^\alpha \eta_{23}^\beta / (\tau_{24}^\alpha \eta_{34}^\beta + \tau_{25}^\alpha \eta_{35}^\beta) = 0,2^{0,5} \cdot 0,71^{0,5} / (0,2^{0,5} \cdot 0,45^{0,5} + 0,3^{0,5} \cdot 0,31^{0,5}) = 0,62$$

$$p_{24}^1 = \tau_{24}^\alpha \eta_{24}^\beta / (\tau_{23}^\alpha \eta_{43}^\beta + \tau_{25}^\alpha \eta_{45}^\beta) = 0,2^{0,5} \cdot 0,45^{0,5} / (0,2^{0,5} \cdot 0,45^{0,5} + 0,3^{0,5} \cdot 0,45^{0,5}) = 0,45$$

$$p_{25}^1 = \tau_{25}^\alpha \eta_{25}^\beta / (\tau_{23}^\alpha \eta_{53}^\beta + \tau_{24}^\alpha \eta_{54}^\beta) = 0,3^{0,5} \cdot 0,25^{0,5} / (0,2^{0,5} \cdot 0,31^{0,5} + 0,2^{0,5} \cdot 0,45^{0,5}) = 0,50$$

A formiga 1 vai da cidade 2 para a cidade 3.

Cidades vizinhas não visitadas:  $N=\{4,5\}$

$$p_{34}^1 = \tau_{34}^\alpha \eta_{34}^\beta / \tau_{35}^\alpha \eta_{45}^\beta = 0,1^{0,5} \cdot 0,45^{0,5} / 0,15^{0,5} \cdot 0,45^{0,5} = 0,816$$

$$p_{35}^1 = \tau_{35}^\alpha \eta_{35}^\beta / \tau_{34}^\alpha \eta_{54}^\beta = 0,15^{0,5} \cdot 0,31^{0,5} / 0,1^{0,5} \cdot 0,45^{0,5} = 1,016$$

A formiga 1 vai da cidade 3 para a cidade 5, finalizando a rota na cidade 4.

$k = 1$

1ª cidade: 1

2ª cidade: maior  $p_{ij}$  na coluna 2

3ª cidade: maior  $p_{ij}$  na coluna 3

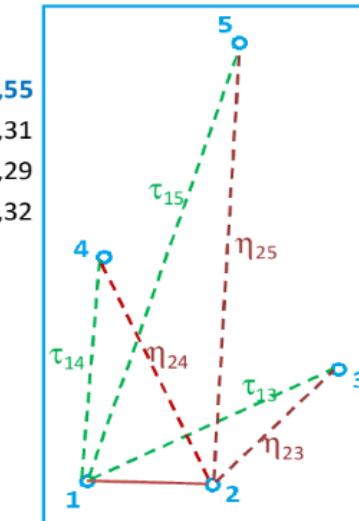
4ª cidade: maior  $p_{ij}$  na coluna 5

5ª cidade: 4

fechamento da rota: 1

$L_1 = 9,8$  rota: 1 - 2 - 3 - 5 - 4 - 1

$$p_{ij}^k = \frac{\tau_{ij}^\alpha \eta_{ij}^\beta}{\sum_{l \in N_j^k} \tau_{il}^\alpha \eta_{jl}^\beta}, \text{ quando } j \in N_i^k$$



| $\tau_{ij}$ | 1        | 2        | 3        | 4        | 5        |
|-------------|----------|----------|----------|----------|----------|
| 1           | $\infty$ | 0,30     | 0,25     | 0,20     | 0,30     |
| 2           | 0,30     | $\infty$ | 0,20     | 0,20     | 0,30     |
| 3           | 0,25     | 0,20     | $\infty$ | 0,10     | 0,15     |
| 4           | 0,20     | 0,20     | 0,10     | $\infty$ | 0,45     |
| 5           | 0,30     | 0,30     | 0,15     | 0,45     | $\infty$ |

| $p_{ij}$ | 1    | 2    | 3    | 4     | 5     |
|----------|------|------|------|-------|-------|
| 1        |      | 0,55 | 0,31 | 0,29  | 0,32  |
| 2        |      |      | 0,62 | 0,45  |       |
| 3        |      |      |      | 0,816 | 1,016 |
| 4        | 1,00 |      |      |       |       |
| 5        |      |      |      | 1,00  |       |

| $x_{ij}$    | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|-------------|---|---|---|---|---|
| N={2,3,4,5} | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| N={3,4,5}   | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| N={4,5}     | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| N={4}       | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
|             | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |

Para decidir se a formiga 1 vai da cidade 1 para a cidade 2, note que calculamos os valores de  $\tau_{11}$  e  $\eta_{21}$  para todas as cidades 1 ainda não visitadas. Desta forma, a técnica prevê o que acontece com a decisão de usar a cidade 2 analisando todas as cidades ainda não visitadas.

# Exemplo 1

1<sup>a</sup> iteração

$k = 1$

A formiga 1 começa na cidade 1

Cidades vizinhas não visitadas:  $N=\{2,3,4,5\}$

$$p_{1j}^k = \frac{\tau_{ij}^\alpha \eta_{ij}^\beta}{\sum_{l \in N_i^k} \tau_{il}^\alpha \eta_{jl}^\beta}, \text{ quando } j \in N_i^k$$

|   |             |
|---|-------------|
| $p_{12}^1 = \tau_{12}^\alpha \eta_{12}^\beta / (\tau_{13}^\alpha \eta_{23}^\beta + \tau_{14}^\alpha \eta_{24}^\beta + \tau_{15}^\alpha \eta_{25}^\beta) = 0,3^{0,5} \cdot 1^{0,5} / (0,25^{0,5} \cdot 0,71^{0,5} + 0,2^{0,5} \cdot 0,45^{0,5} + 0,3^{0,5} \cdot 0,25^{0,5}) =$    | <b>0,55</b> |
| $p_{13}^1 = \tau_{13}^\alpha \eta_{13}^\beta / (\tau_{12}^\alpha \eta_{32}^\beta + \tau_{14}^\alpha \eta_{34}^\beta + \tau_{15}^\alpha \eta_{35}^\beta) = 0,25^{0,5} \cdot 0,45^{0,5} / (0,3^{0,5} \cdot 0,71^{0,5} + 0,2^{0,5} \cdot 0,45^{0,5} + 0,3^{0,5} \cdot 0,31^{0,5}) =$ | 0,31        |
| $p_{14}^1 = \tau_{14}^\alpha \eta_{14}^\beta / (\tau_{12}^\alpha \eta_{42}^\beta + \tau_{13}^\alpha \eta_{43}^\beta + \tau_{15}^\alpha \eta_{45}^\beta) = 0,2^{0,5} \cdot 0,5^{0,5} / (0,3^{0,5} \cdot 0,45^{0,5} + 0,25^{0,5} \cdot 0,45^{0,5} + 0,3^{0,5} \cdot 0,45^{0,5}) =$  | 0,29        |
| $p_{15}^1 = \tau_{15}^\alpha \eta_{15}^\beta / (\tau_{12}^\alpha \eta_{52}^\beta + \tau_{13}^\alpha \eta_{53}^\beta + \tau_{14}^\alpha \eta_{54}^\beta) = 0,3^{0,5} \cdot 0,24^{0,5} / (0,3^{0,5} \cdot 0,25^{0,5} + 0,25^{0,5} \cdot 0,15^{0,5} + 0,2^{0,5} \cdot 0,45^{0,5}) =$ | 0,32        |

A formiga 1 vai da cidade 1 para a cidade 2. Cidades vizinhas não visitadas:  $N=\{3,4,5\}$

|  |             |
|--|-------------|
| $p_{23}^1 = \tau_{23}^\alpha \eta_{23}^\beta / (\tau_{24}^\alpha \eta_{34}^\beta + \tau_{25}^\alpha \eta_{35}^\beta) = 0,2^{0,5} \cdot 0,71^{0,5} / (0,2^{0,5} \cdot 0,45^{0,5} + 0,3^{0,5} \cdot 0,31^{0,5}) =$ | <b>0,62</b> |
| $p_{24}^1 = \tau_{24}^\alpha \eta_{24}^\beta / (\tau_{23}^\alpha \eta_{43}^\beta + \tau_{25}^\alpha \eta_{45}^\beta) = 0,2^{0,5} \cdot 0,45^{0,5} / (0,2^{0,5} \cdot 0,45^{0,5} + 0,3^{0,5} \cdot 0,45^{0,5}) =$ | 0,45        |
| $p_{25}^1 = \tau_{25}^\alpha \eta_{25}^\beta / (\tau_{23}^\alpha \eta_{53}^\beta + \tau_{24}^\alpha \eta_{54}^\beta) = 0,3^{0,5} \cdot 0,25^{0,5} / (0,2^{0,5} \cdot 0,31^{0,5} + 0,2^{0,5} \cdot 0,45^{0,5}) =$ | 0,50        |

A formiga 1 vai da cidade 2 para a cidade 3. Cidades vizinhas não visitadas:  $N=\{4,5\}$

|   |              |
|---|--------------|
| $p_{34}^1 = \tau_{34}^\alpha \eta_{34}^\beta / \tau_{35}^\alpha \eta_{45}^\beta = 0,1^{0,5} \cdot 0,45^{0,5} / 0,15^{0,5} \cdot 0,45^{0,5} =$ | 0,816        |
| $p_{35}^1 = \tau_{35}^\alpha \eta_{35}^\beta / \tau_{34}^\alpha \eta_{45}^\beta = 0,15^{0,5} \cdot 0,31^{0,5} / 0,1^{0,5} \cdot 0,45^{0,5} =$ | <b>1,016</b> |

A formiga 1 vai da cidade 3 para a cidade 5, finalizando a rota na cidade 4.

$k = 1$

1<sup>a</sup> cidade: 1

2<sup>a</sup> cidade: maior  $p_{ij}$  na coluna 2

3<sup>a</sup> cidade: maior  $p_{ij}$  na coluna 3

4<sup>a</sup> cidade: maior  $p_{ij}$  na coluna 5

5<sup>a</sup> cidade: 4

fechamento da rota: 1

**L<sub>1</sub> = 9,8   rota: 1 - 2 - 3 - 5 - 4 - 1**

| $p_{ij}$ | 1           | 2           | 3           | 4           | 5            |
|----------|-------------|-------------|-------------|-------------|--------------|
| 1        |             | <b>0,55</b> | 0,31        | 0,29        | 0,32         |
| 2        |             |             | <b>0,62</b> | 0,45        | 0,50         |
| 3        |             |             |             | 0,816       | <b>1,016</b> |
| 4        | <b>1,00</b> |             |             |             |              |
| 5        |             |             |             | <b>1,00</b> |              |

$N=\{2,3,4,5\}$   
 $N=\{3,4,5\}$   
 $N=\{4,5\}$

| $x_{ij}$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|----------|---|---|---|---|---|
| 0        | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0        | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 0        | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 1        | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0        | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |

arcos usados:

| $\eta_{ij} = 1/c_{ij}$ | 1        | 2        | 3        | 4        | 5        |
|------------------------|----------|----------|----------|----------|----------|
| 1                      | $\infty$ | 1,00     | 0,45     | 0,50     | 0,24     |
| 2                      | 1,00     | $\infty$ | 0,71     | 0,45     | 0,25     |
| 3                      | 0,45     | 0,71     | $\infty$ | 0,45     | 0,31     |
| 4                      | 0,50     | 0,45     | 0,45     | $\infty$ | 0,45     |
| 5                      | 0,24     | 0,25     | 0,31     | 0,45     | $\infty$ |

| $\tau_{ij}$ | 1        | 2        | 3        | 4        | 5        |
|-------------|----------|----------|----------|----------|----------|
| 1           | $\infty$ | 0,30     | 0,25     | 0,20     | 0,30     |
| 2           | 0,30     | $\infty$ | 0,20     | 0,20     | 0,30     |
| 3           | 0,25     | 0,20     | $\infty$ | 0,10     | 0,15     |
| 4           | 0,20     | 0,20     | 0,10     | $\infty$ | 0,45     |
| 5           | 0,30     | 0,30     | 0,15     | 0,45     | $\infty$ |

| $c_{ij}$ | 1   | 2   | 3   | 4   | 5   |
|----------|-----|-----|-----|-----|-----|
| 1        | 0,0 | 1,0 | 2,2 | 2,0 | 4,1 |
| 2        | 1,0 | 0,0 | 1,4 | 2,2 | 4,0 |
| 3        | 2,2 | 1,4 | 0,0 | 2,2 | 3,2 |
| 4        | 2,0 | 2,2 | 2,2 | 0,0 | 2,2 |
| 5        | 4,1 | 4,0 | 3,2 | 2,2 | 0,0 |

Escolhemos a maior probabilidade, e podemos calcular da mesma forma a sequência da rota: da cidade 2 para a cidade 3, e assim sucessivamente. A rota encontrada da formiga 1 tem custo **L<sub>1</sub> = 9,8**. Devemos guardar quais arcos são usados por cada formiga.

# Exemplo 1

$k = 2$

A formiga 2 começa na cidade 2

Cidades vizinhas não visitadas:  $N=\{1,3,4,5\}$

$$p_{21}^2 = \tau_{21}^\alpha \eta_{21}^\beta / (\tau_{23}^\alpha \eta_{13}^\beta + \tau_{24}^\alpha \eta_{14}^\beta + \tau_{25}^\alpha \eta_{15}^\beta) = 0,3^{0,5} \cdot 1^{0,5} / (0,2^{0,5} \cdot 0,45^{0,5} + 0,2^{0,5} \cdot 0,5^{0,5} + 0,3^{0,5} \cdot 0,24^{0,5}) = 0,62$$

$$p_{23}^2 = \tau_{23}^\alpha \eta_{23}^\beta / (\tau_{21}^\alpha \eta_{31}^\beta + \tau_{24}^\alpha \eta_{34}^\beta + \tau_{25}^\alpha \eta_{35}^\beta) = 0,2^{0,5} \cdot 0,71^{0,5} / (0,3^{0,5} \cdot 0,45^{0,5} + 0,45^{0,5} \cdot 0,45^{0,5} + 0,3^{0,5} \cdot 0,31^{0,5}) = 0,39$$

$$p_{24}^2 = \tau_{24}^\alpha \eta_{24}^\beta / (\tau_{21}^\alpha \eta_{41}^\beta + \tau_{23}^\alpha \eta_{43}^\beta + \tau_{25}^\alpha \eta_{45}^\beta) = 0,2^{0,5} \cdot 0,45^{0,5} / (0,3^{0,5} \cdot 0,45^{0,5} + 0,2^{0,5} \cdot 0,45^{0,5} + 0,3^{0,5} \cdot 0,45^{0,5}) = 0,28$$

$$p_{25}^2 = \tau_{25}^\alpha \eta_{25}^\beta / (\tau_{21}^\alpha \eta_{51}^\beta + \tau_{23}^\alpha \eta_{53}^\beta + \tau_{24}^\alpha \eta_{54}^\beta) = 0,3^{0,5} \cdot 0,25^{0,5} / (0,3^{0,5} \cdot 0,24^{0,5} + 0,2^{0,5} \cdot 0,31^{0,5} + 0,2^{0,5} \cdot 0,45^{0,5}) = 0,33$$

A formiga 2 vai da cidade 2 para a cidade 1. Cidades vizinhas não visitadas:  $N=\{3,4,5\}$

$$p_{13}^2 = \tau_{13}^\alpha \eta_{13}^\beta / (\tau_{14}^\alpha \eta_{34}^\beta + \tau_{15}^\alpha \eta_{35}^\beta) = 0,25^{0,5} \cdot 0,45^{0,5} / (0,2^{0,5} \cdot 0,45^{0,5} + 0,3^{0,5} \cdot 0,31^{0,5}) = 0,55$$

$$p_{14}^2 = \tau_{14}^\alpha \eta_{14}^\beta / (\tau_{13}^\alpha \eta_{43}^\beta + \tau_{15}^\alpha \eta_{45}^\beta) = 0,2^{0,5} \cdot 0,5^{0,5} / (0,25^{0,5} \cdot 0,45^{0,5} + 0,3^{0,5} \cdot 0,45^{0,5}) = 0,45$$

$$p_{15}^2 = \tau_{15}^\alpha \eta_{15}^\beta / (\tau_{13}^\alpha \eta_{53}^\beta + \tau_{14}^\alpha \eta_{54}^\beta) = 0,3^{0,5} \cdot 0,24^{0,5} / (0,25^{0,5} \cdot 0,31^{0,5} + 0,2^{0,5} \cdot 0,45^{0,5}) = 0,47$$

A formiga 2 vai da cidade 1 para a cidade 3. Cidades vizinhas não visitadas:  $N=\{4,5\}$

$$p_{34}^2 = \tau_{34}^\alpha \eta_{34}^\beta / \tau_{35}^\alpha \eta_{45}^\beta = 0,1^{0,5} \cdot 0,45^{0,5} / 0,15^{0,5} \cdot 0,45^{0,5} = 0,816$$

$$p_{35}^2 = \tau_{35}^\alpha \eta_{35}^\beta / \tau_{34}^\alpha \eta_{54}^\beta = 0,15^{0,5} \cdot 0,31^{0,5} / 0,1^{0,5} \cdot 0,45^{0,5} = 1,016$$

A formiga 2 vai da cidade 3 para a cidade 5, finalizando a rota na cidade 4.

$k = 2$

1ª cidade: 2

2ª cidade: maior  $p_{ij}$  na coluna 1

3ª cidade: maior  $p_{ij}$  na coluna 3

4ª cidade: maior  $p_{ij}$  na coluna 5

5ª cidade: 4

fechamento da rota: 2

$L_2 = 10,8$  rota: 2 - 1 - 3 - 5 - 4 - 2

| $p_{ij}$ | 1    | 2    | 3    | 4     | 5     |
|----------|------|------|------|-------|-------|
| 1        |      |      | 0,55 | 0,45  | 0,47  |
| 2        | 0,62 |      | 0,39 | 0,28  | 0,33  |
| 3        |      |      |      | 0,816 | 1,016 |
| 4        |      | 1,00 |      |       |       |
| 5        |      |      |      | 1,00  |       |

$N=\{3,4,5\}$

$N=\{1,3,4,5\}$

$N=\{4,5\}$

$N=\{4\}$

arcos usados:

| $x_{ij}$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|----------|---|---|---|---|---|
| 0        | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1        | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0        | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0        | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0        | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |

Cada linha é a cidade de início

Os cálculos são feitos de forma similar para as demais formigas. A formiga 2 começa a rota pela cidade 2, com custo  $L_2 = 10,8$ .

| $\eta_{ij} = 1/c_{ij}$ | 1        | 2        | 3        | 4        | 5        |
|------------------------|----------|----------|----------|----------|----------|
| 1                      | $\infty$ | 1,00     | 0,45     | 0,50     | 0,24     |
| 2                      | 1,00     | $\infty$ | 0,71     | 0,45     | 0,25     |
| 3                      | 0,45     | 0,71     | $\infty$ | 0,45     | 0,31     |
| 4                      | 0,50     | 0,45     | 0,45     | $\infty$ | 0,45     |
| 5                      | 0,24     | 0,25     | 0,31     | 0,45     | $\infty$ |

| $\tau_{ij}$ | 1        | 2        | 3        | 4        | 5        |
|-------------|----------|----------|----------|----------|----------|
| 1           | $\infty$ | 0,30     | 0,25     | 0,20     | 0,30     |
| 2           | 0,30     | $\infty$ | 0,20     | 0,20     | 0,30     |
| 3           | 0,25     | 0,20     | $\infty$ | 0,10     | 0,15     |
| 4           | 0,20     | 0,20     | 0,10     | $\infty$ | 0,45     |
| 5           | 0,30     | 0,30     | 0,15     | 0,45     | $\infty$ |

| $c_{ij}$ | 1   | 2        | 3        | 4        | 5   |
|----------|-----|----------|----------|----------|-----|
| 1        | 0,0 | 1,0      | 2,2      | 2,0      | 4,1 |
| 2        | 1,0 | $\infty$ | 1,4      | 2,2      | 4,0 |
| 3        | 2,2 | 1,4      | $\infty$ | 2,2      | 3,2 |
| 4        | 2,0 | 2,2      | 2,2      | $\infty$ | 2,2 |
| 5        | 4,1 | 4,0      | 3,2      | 2,2      | 0,0 |

# Exemplo 1

$k = 3$

A formiga 3 começa na cidade 3

Cidades vizinhas não visitadas:  $N=\{1,2,4,5\}$

$$p_{31}^3 = \tau_{31}^\alpha \eta_{31}^\beta / (\tau_{32}^\alpha \eta_{12}^\beta + \tau_{34}^\alpha \eta_{14}^\beta + \tau_{35}^\alpha \eta_{15}^\beta) = 0,39$$

$$p_{32}^3 = \tau_{32}^\alpha \eta_{32}^\beta / (\tau_{31}^\alpha \eta_{21}^\beta + \tau_{34}^\alpha \eta_{24}^\beta + \tau_{35}^\alpha \eta_{25}^\beta) = 0,42$$

$$p_{34}^3 = \tau_{34}^\alpha \eta_{34}^\beta / (\tau_{31}^\alpha \eta_{41}^\beta + \tau_{32}^\alpha \eta_{42}^\beta + \tau_{35}^\alpha \eta_{45}^\beta) = 0,23$$

$$p_{35}^3 = \tau_{35}^\alpha \eta_{35}^\beta / (\tau_{31}^\alpha \eta_{51}^\beta + \tau_{32}^\alpha \eta_{52}^\beta + \tau_{34}^\alpha \eta_{54}^\beta) = 0,32$$

A formiga 3 vai da cidade 3 para a cidade 2. Cidades vizinhas não visitadas:

$N=\{1,4,5\}$

$$p_{21}^3 = \tau_{21}^\alpha \eta_{21}^\beta / (\tau_{24}^\alpha \eta_{14}^\beta + \tau_{25}^\alpha \eta_{15}^\beta) = 0,93$$

$$p_{24}^3 = \tau_{24}^\alpha \eta_{24}^\beta / (\tau_{21}^\alpha \eta_{41}^\beta + \tau_{25}^\alpha \eta_{45}^\beta) = 0,40$$

$$p_{25}^3 = \tau_{25}^\alpha \eta_{25}^\beta / (\tau_{21}^\alpha \eta_{51}^\beta + \tau_{24}^\alpha \eta_{54}^\beta) = 0,48$$

A formiga 3 vai da cidade 2 para a cidade 1. Cidades vizinhas não visitadas:

$N=\{4,5\}$

$$p_{14}^3 = \tau_{14}^\alpha \eta_{14}^\beta / \tau_{15}^\alpha \eta_{45}^\beta = 0,856$$

$$p_{15}^3 = \tau_{15}^\alpha \eta_{15}^\beta / \tau_{14}^\alpha \eta_{54}^\beta = 0,897$$

A formiga 3 vai da cidade 1 para a cidade 5, finalizando a rota na cidade 4.

$k = 3$

1<sup>a</sup> cidade: 3

2<sup>a</sup> cidade: maior  $p_{ij}$  na coluna 2

3<sup>a</sup> cidade: maior  $p_{ij}$  na coluna 1

4<sup>a</sup> cidade: maior  $p_{ij}$  na coluna 5

5<sup>a</sup> cidade: 4

fechamento da rota: 3

$L_3 = 10,9$  rota: 3 - 2 - 1 - 5 - 4 - 3

| $p_{ij}$ | 1    | 2    | 3    | 4    | 5    |
|----------|------|------|------|------|------|
| 1        |      |      |      | 0,86 | 0,90 |
| 2        | 0,93 |      |      | 0,40 | 0,48 |
| 3        | 0,39 | 0,42 |      | 0,23 | 0,32 |
| 4        |      |      | 1,00 |      | 1,00 |
| 5        |      |      |      | 1,00 |      |

$N=\{4,5\}$

$N=\{1,4,5\}$

$N=\{1,2,4,5\}$

$N=\{5\}$

arcos usados:

| $x_{ij}$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|----------|---|---|---|---|---|
| 1        | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 2        | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 3        | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 4        | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 5        | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |

| $\eta_{ij} = 1/c_{ij}$ | 1        | 2        | 3        | 4        | 5        |
|------------------------|----------|----------|----------|----------|----------|
| 1                      | $\infty$ | 1,00     | 0,45     | 0,50     | 0,24     |
| 2                      | 1,00     | $\infty$ | 0,71     | 0,45     | 0,25     |
| 3                      | 0,45     | 0,71     | $\infty$ | 0,45     | 0,31     |
| 4                      | 0,50     | 0,45     | 0,45     | $\infty$ | 0,45     |
| 5                      | 0,24     | 0,25     | 0,31     | 0,45     | $\infty$ |

| $\tau_{ij}$ | 1        | 2        | 3        | 4        | 5        |
|-------------|----------|----------|----------|----------|----------|
| 1           | $\infty$ | 0,30     | 0,25     | 0,20     | 0,30     |
| 2           | 0,30     | $\infty$ | 0,20     | 0,20     | 0,30     |
| 3           | 0,25     | 0,20     | $\infty$ | 0,10     | 0,15     |
| 4           | 0,20     | 0,20     | 0,10     | $\infty$ | 0,45     |
| 5           | 0,30     | 0,30     | 0,15     | 0,45     | $\infty$ |

| $c_{ij}$ | 1   | 2        | 3        | 4        | 5   |
|----------|-----|----------|----------|----------|-----|
| 1        | 0,0 | 1,0      | 2,2      | 2,0      | 4,1 |
| 2        | 1,0 | $\infty$ | 1,4      | 2,2      | 4,0 |
| 3        | 2,2 | 1,4      | $\infty$ | 2,2      | 3,2 |
| 4        | 2,0 | 2,2      | 2,2      | $\infty$ | 2,2 |
| 5        | 4,1 | 4,0      | 3,2      | 2,2      | 0,0 |

A formiga 3 começa a rota pela cidade 3, com custo  $L_3 = 10,9$ .

# Exemplo 1

$k = 4$

A formiga 4 começa na cidade 4

Cidades vizinhas não visitadas:  $N=\{1,2,3,5\}$

$$p_{41}^4 = \tau_{41}^\alpha \eta_{41}^\beta / (\tau_{42}^\alpha \eta_{12}^\beta + \tau_{43}^\alpha \eta_{13}^\beta + \tau_{45}^\alpha \eta_{15}^\beta) = 0,32$$

$$p_{42}^4 = \tau_{42}^\alpha \eta_{42}^\beta / (\tau_{41}^\alpha \eta_{21}^\beta + \tau_{43}^\alpha \eta_{23}^\beta + \tau_{45}^\alpha \eta_{25}^\beta) = 0,29$$

$$p_{43}^4 = \tau_{43}^\alpha \eta_{43}^\beta / (\tau_{41}^\alpha \eta_{31}^\beta + \tau_{42}^\alpha \eta_{32}^\beta + \tau_{45}^\alpha \eta_{35}^\beta) = 0,20$$

$$p_{45}^4 = \tau_{45}^\alpha \eta_{45}^\beta / (\tau_{41}^\alpha \eta_{51}^\beta + \tau_{42}^\alpha \eta_{52}^\beta + \tau_{43}^\alpha \eta_{53}^\beta) = 0,73$$

A formiga 4 vai da cidade 4 para a cidade 5. Cidades vizinhas não visitadas:  $N=\{1,2,3\}$

$$p_{51}^4 = \tau_{51}^\alpha \eta_{51}^\beta / (\tau_{52}^\alpha \eta_{12}^\beta + \tau_{53}^\alpha \eta_{13}^\beta) = 0,33$$

$$p_{52}^4 = \tau_{52}^\alpha \eta_{52}^\beta / (\tau_{51}^\alpha \eta_{21}^\beta + \tau_{53}^\alpha \eta_{23}^\beta) = 0,31$$

$$p_{53}^4 = \tau_{53}^\alpha \eta_{53}^\beta / (\tau_{51}^\alpha \eta_{31}^\beta + \tau_{52}^\alpha \eta_{32}^\beta) = 0,26$$

A formiga 4 vai da cidade 5 para a cidade 1. Cidades vizinhas não visitadas:  $N=\{2,3\}$

$$p_{12}^4 = \tau_{12}^\alpha \eta_{12}^\beta / \tau_{13}^\alpha \eta_{23}^\beta = 1,296$$

$$p_{13}^4 = \tau_{13}^\alpha \eta_{13}^\beta / \tau_{12}^\alpha \eta_{32}^\beta = 0,91$$

A formiga 4 vai da cidade 1 para a cidade 2, finalizando a rota na cidade 3.

$k = 4$

1<sup>a</sup> cidade: 4

2<sup>a</sup> cidade: maior  $p_{ij}$  na coluna 5

3<sup>a</sup> cidade: maior  $p_{ij}$  na coluna 1

4<sup>a</sup> cidade: maior  $p_{ij}$  na coluna 2

5<sup>a</sup> cidade: 3

fechamento da rota: 4

$L_4 = 10,9$  rota: 4 - 5 - 1 - 2 - 3 - 4

A formiga 4 começa a rota pela cidade 4, com custo  $L_4 = 10,9$ .

| $p_{ij}$ | 1     | 2     | 3    | 4    | 5    |
|----------|-------|-------|------|------|------|
| 1        |       | 1,30  | 0,91 |      |      |
| 2        |       |       | 1,00 |      |      |
| 3        |       |       |      | 1,00 |      |
| 4        | 0,32  | 0,29  | 0,20 |      | 0,73 |
| 5        | 0,334 | 0,313 | 0,26 |      |      |

$N=\{2,3\}$

$N=\{3\}$

$N=\{1,2,3,5\}$

$N=\{1,2,3\}$

$$p_{ij}^k = \frac{\tau_{ij}^\alpha \eta_{ij}^\beta}{\sum_{l \in N_j^k} \tau_{il}^\alpha \eta_{jl}^\beta}, \text{ quando } j \in N_i^k$$

| $\eta_{ij} = 1/c_{ij}$ | 1        | 2        | 3        | 4        | 5        |
|------------------------|----------|----------|----------|----------|----------|
| 1                      | $\infty$ | 1,00     | 0,45     | 0,50     | 0,24     |
| 2                      | 1,00     | $\infty$ | 0,71     | 0,45     | 0,25     |
| 3                      | 0,45     | 0,71     | $\infty$ | 0,45     | 0,31     |
| 4                      | 0,50     | 0,45     | 0,45     | $\infty$ | 0,45     |
| 5                      | 0,24     | 0,25     | 0,31     | 0,45     | $\infty$ |

| $\tau_{ij}$ | 1        | 2        | 3        | 4        | 5        |
|-------------|----------|----------|----------|----------|----------|
| 1           | $\infty$ | 0,30     | 0,25     | 0,20     | 0,30     |
| 2           | 0,30     | $\infty$ | 0,20     | 0,20     | 0,30     |
| 3           | 0,25     | 0,20     | $\infty$ | 0,10     | 0,15     |
| 4           | 0,20     | 0,20     | 0,10     | $\infty$ | 0,45     |
| 5           | 0,30     | 0,30     | 0,15     | 0,45     | $\infty$ |

| $c_{ij}$ | 1   | 2   | 3   | 4   | 5   |
|----------|-----|-----|-----|-----|-----|
| 1        | 0,0 | 1,0 | 2,2 | 2,0 | 4,1 |
| 2        | 1,0 | 0,0 | 1,4 | 2,2 | 4,0 |
| 3        | 2,2 | 1,4 | 0,0 | 2,2 | 3,2 |
| 4        | 2,0 | 2,2 | 2,2 | 0,0 | 2,2 |
| 5        | 4,1 | 4,0 | 3,2 | 2,2 | 0,0 |

# Exemplo 1

$k = 5$

A formiga 5 começa na cidade 5

Cidades vizinhas não visitadas:  $N=\{1,2,3,4\}$

$$p_{51}^5 = \tau_{51}^\alpha \eta_{51}^\beta / (\tau_{52}^\alpha \eta_{12}^\beta + \tau_{53}^\alpha \eta_{13}^\beta + \tau_{54}^\alpha \eta_{14}^\beta) = 0,21$$

$$p_{52}^5 = \tau_{52}^\alpha \eta_{52}^\beta / (\tau_{51}^\alpha \eta_{21}^\beta + \tau_{53}^\alpha \eta_{23}^\beta + \tau_{54}^\alpha \eta_{24}^\beta) = 0,21$$

$$p_{53}^5 = \tau_{53}^\alpha \eta_{53}^\beta / (\tau_{51}^\alpha \eta_{31}^\beta + \tau_{52}^\alpha \eta_{32}^\beta + \tau_{54}^\alpha \eta_{34}^\beta) = 0,37$$

$$p_{54}^5 = \tau_{54}^\alpha \eta_{54}^\beta / (\tau_{51}^\alpha \eta_{41}^\beta + \tau_{52}^\alpha \eta_{42}^\beta + \tau_{53}^\alpha \eta_{43}^\beta) = 0,45$$

A formiga 5 vai da cidade 5 para a cidade 4. Cidades vizinhas não visitadas:  $N=\{1,2,3\}$

$$p_{41}^5 = \tau_{41}^\alpha \eta_{41}^\beta / (\tau_{42}^\alpha \eta_{12}^\beta + \tau_{43}^\alpha \eta_{13}^\beta) = 0,48$$

$$p_{42}^5 = \tau_{42}^\alpha \eta_{42}^\beta / (\tau_{41}^\alpha \eta_{21}^\beta + \tau_{43}^\alpha \eta_{23}^\beta) = 0,42$$

$$p_{43}^{45} = \tau_{43}^\alpha \eta_{43}^\beta / (\tau_{41}^\alpha \eta_{31}^\beta + \tau_{42}^\alpha \eta_{32}^\beta) = 0,31$$

A formiga 5 vai da cidade 4 para a cidade 1. Cidades vizinhas não visitadas:  $N=\{2,3\}$

$$p_{12}^5 = \tau_{12}^\alpha \eta_{12}^\beta / \tau_{13}^\alpha \eta_{23}^\beta = 1,296$$

$$p_{13}^5 = \tau_{13}^\alpha \eta_{13}^\beta / \tau_{12}^\alpha \eta_{32}^\beta = 0,73$$

A formiga 5 vai da cidade 1 para a cidade 2, finalizando a rota na cidade 3.

$k = 5$

1<sup>a</sup> cidade: 5

2<sup>a</sup> cidade: maior  $p_{ij}$  na coluna 4

3<sup>a</sup> cidade: maior  $p_{ij}$  na coluna 1

4<sup>a</sup> cidade: maior  $p_{ij}$  na coluna 2

5<sup>a</sup> cidade: 3

fechamento da rota: 5

$L_5 = 9,8$  rota: 5 - 4 - 1 - 2 - 3 - 5

A formiga 5 começa a rota pela cidade 5, com custo  $L_5 = 9,8$ .

| $\eta_{ij} = 1/c_{ij}$ | 1        | 2        | 3        | 4        | 5        |
|------------------------|----------|----------|----------|----------|----------|
| 1                      | $\infty$ | 1,00     | 0,45     | 0,50     | 0,24     |
| 2                      | 1,00     | $\infty$ | 0,71     | 0,45     | 0,25     |
| 3                      | 0,45     | 0,71     | $\infty$ | 0,45     | 0,31     |
| 4                      | 0,50     | 0,45     | 0,45     | $\infty$ | 0,45     |
| 5                      | 0,24     | 0,25     | 0,31     | 0,45     | $\infty$ |

| $\tau_{ij}$ | 1        | 2        | 3        | 4        | 5        |
|-------------|----------|----------|----------|----------|----------|
| 1           | $\infty$ | 0,30     | 0,25     | 0,20     | 0,30     |
| 2           | 0,30     | $\infty$ | 0,20     | 0,20     | 0,30     |
| 3           | 0,25     | 0,20     | $\infty$ | 0,10     | 0,15     |
| 4           | 0,20     | 0,20     | 0,10     | $\infty$ | 0,45     |
| 5           | 0,30     | 0,30     | 0,15     | 0,45     | $\infty$ |

| arcos usados: |      |      |      |      |   |
|---------------|------|------|------|------|---|
| $p_{ij}$      | 1    | 2    | 3    | 4    | 5 |
| 1             |      | 1,30 | 0,73 |      |   |
| 2             |      |      | 1,00 |      |   |
| 3             |      |      |      | 1,00 |   |
| 4             | 0,48 | 0,42 | 0,31 |      |   |
| 5             | 0,21 | 0,21 | 0,37 | 0,45 |   |

$N=\{2,3\}$        $N=\{3\}$        $N=\{1,2,3\}$        $N=\{1,2,3,4\}$

| $x_{ij}$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|----------|---|---|---|---|---|
| 1        | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 2        | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 3        | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 4        | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 5        | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |

| $c_{ij}$ | 1   | 2   | 3   | 4   | 5   |
|----------|-----|-----|-----|-----|-----|
| 1        | 0,0 | 1,0 | 2,2 | 2,0 | 4,1 |
| 2        | 1,0 | 0,0 | 1,4 | 2,2 | 4,0 |
| 3        | 2,2 | 1,4 | 0,0 | 2,2 | 3,2 |
| 4        | 2,0 | 2,2 | 2,2 | 0,0 | 2,2 |
| 5        | 4,1 | 4,0 | 3,2 | 2,2 | 0,0 |

# Exemplo 1

**Menor rota:**  $S^* = 1 - 2 - 3 - 5 - 4 - 1$   
 $L^* = 9,8$

$Q = 1$   
 $\rho = 0,5$

Depósitos de feromônios de cada formiga

$$\Delta\tau_{ij}^1 = Q / L_1 = 0,102$$

$$\Delta\tau_{ij}^2 = Q / L_2 = 0,093$$

$$\Delta\tau_{ij}^3 = Q / L_3 = 0,092$$

$$\Delta\tau_{ij}^4 = Q / L_4 = 0,092$$

$$\Delta\tau_{ij}^5 = Q / L_5 = 0,102$$

Atualizar os feromônios:

Formigas que usaram o arco (1,2): 1, 4 e 5

$$\tau_{12} = (1-\rho)\tau_{12} + \Delta\tau_{12}^1 + \Delta\tau_{12}^4 + \Delta\tau_{12}^5 = (1-0,5) \times 0,3 + 0,102 + 0,092 + 0,102 = 0,45$$

Formigas que usaram o arco (1,3): 2

$$\tau_{13} = (1-\rho)\tau_{13} + \Delta\tau_{13}^2 = (1-0,5) \times 0,25 + 0,093 = 0,22$$

Formigas que usaram o arco (1,4): nenhuma

$$\tau_{14} = (1-\rho)\tau_{14} = (1-0,5) \times 0,2 = 0,1$$

Formigas que usaram o arco (1,5): 3

$$\tau_{15} = (1-\rho)\tau_{15} + \Delta\tau_{15}^3 = (1-0,5) \times 0,23 + 0,092 = 0,24$$

Formigas que usaram o arco (2,1): 2 e 3

$$\tau_{21} = (1-\rho)\tau_{21} + \Delta\tau_{21}^2 + \Delta\tau_{21}^3 = (1-0,5) \times 0,3 + 0,093 + 0,092 = 0,33$$

Formigas que usaram o arco (2,3): 1, 4 e 5

$$\tau_{23} = (1-\rho)\tau_{23} + \Delta\tau_{23}^1 + \Delta\tau_{23}^4 + \Delta\tau_{23}^5 = (1-0,5) \times 0,2 + 0,102 + 0,092 + 0,102 = 0,4$$

Formigas que usaram o arco (2,4): nenhuma

$$\tau_{24} = (1-\rho)\tau_{24} = (1-0,5) \times 0,2 = 0,1$$

Formigas que usaram o arco (2,5): nenhuma

$$\tau_{25} = (1-\rho)\tau_{25} = (1-0,5) \times 0,3 = 0,15$$

...

| $\tau_{ij}$ | 1        | 2        | 3        | 4        | 5        |
|-------------|----------|----------|----------|----------|----------|
| 1           | $\infty$ | 0,30     | 0,25     | 0,20     | 0,30     |
| 2           | 0,30     | $\infty$ | 0,20     | 0,20     | 0,30     |
| 3           | 0,25     | 0,20     | $\infty$ | 0,10     | 0,15     |
| 4           | 0,20     | 0,20     | 0,10     | $\infty$ | 0,45     |
| 5           | 0,30     | 0,30     | 0,15     | 0,45     | $\infty$ |

| $\eta_{ij} = 1/c_{ij}$ | 1        | 2        | 3        | 4        | 5        |
|------------------------|----------|----------|----------|----------|----------|
| 1                      | $\infty$ | 1,00     | 0,45     | 0,50     | 0,24     |
| 2                      | 1,00     | $\infty$ | 0,71     | 0,45     | 0,25     |
| 3                      | 0,45     | 0,71     | $\infty$ | 0,45     | 0,31     |
| 4                      | 0,50     | 0,45     | 0,45     | $\infty$ | 0,45     |
| 5                      | 0,24     | 0,25     | 0,31     | 0,45     | $\infty$ |

| $k$ | $\tau_{ij} = (1-\rho)\tau_{ij} + \sum \Delta\tau_{ij}(k)$ |
|-----|---|
| 1   | $\infty$ <b>0,45</b> <b>0,22</b> <b>0,10</b> <b>0,24</b>  |
| 2   | <b>0,33</b> $\infty$ <b>0,40</b> <b>0,10</b> <b>0,15</b>  |
| 3   | 0,13 <b>0,19</b> $\infty$ <b>0,14</b> 0,37                |
| 4   | 0,30 <b>0,19</b> <b>0,14</b> $\infty$ 0,32                |
| 5   | 0,24 <b>0,15</b> <b>0,08</b> <b>0,62</b> $\infty$         |

novos feromônios para a próxima iteração

A melhor solução encontrada foi com custo  $L^* = 9,8$ . As "contribuições" de feromônios são feitas com base nos arcos que cada formiga utilizou. As contribuições de cada formiga  $k$  são calculadas por meio do inverso do custo de cada rota:  $\Delta_{ij}^k = Q / L_k$ .

| $c_{ij}$ | 1   | 2   | 3   | 4   | 5   |
|----------|-----|-----|-----|-----|-----|
| 1        | 0,0 | 1,0 | 2,2 | 2,0 | 4,1 |
| 2        | 1,0 | 0,0 | 1,4 | 2,2 | 4,0 |
| 3        | 2,2 | 1,4 | 0,0 | 2,2 | 3,2 |
| 4        | 2,0 | 2,2 | 2,2 | 0,0 | 2,2 |
| 5        | 4,1 | 4,0 | 3,2 | 2,2 | 0,0 |

$k = 1$   
1ª cidade: 1  
2ª cidade: maior  $p_{ij}$  na coluna 2  
3ª cidade: maior  $p_{ij}$  na coluna 3  
4ª cidade: maior  $p_{ij}$  na coluna 4  
5ª cidade: 4  
fechamento da rota: 1  
 $L_1 = 9,8$  rota: 1 - 2 - 3 - 5 - 4 - 1

| $c_{ij}$ | 1   | 2   | 3   | 4   | 5   |
|----------|-----|-----|-----|-----|-----|
| 1        | 0,0 | 1,0 | 2,2 | 2,0 | 4,1 |
| 2        | 1,0 | 0,0 | 1,4 | 2,2 | 4,0 |
| 3        | 2,2 | 1,4 | 0,0 | 2,2 | 3,2 |
| 4        | 2,0 | 2,2 | 2,2 | 0,0 | 2,2 |
| 5        | 4,1 | 4,0 | 3,2 | 2,2 | 0,0 |

1ª cidade: 2  
2ª cidade: maior  $p_{ij}$  na coluna 1  
3ª cidade: maior  $p_{ij}$  na coluna 3  
4ª cidade: maior  $p_{ij}$  na coluna 5  
5ª cidade: 4  
fechamento da rota: 2  
 $L_2 = 10,8$  rota: 2 - 1 - 3 - 5 - 4 - 2

| $c_{ij}$ | 1   | 2   | 3   | 4   | 5   |
|----------|-----|-----|-----|-----|-----|
| 1        | 0,0 | 1,0 | 2,2 | 2,0 | 4,1 |
| 2        | 1,0 | 0,0 | 1,4 | 2,2 | 4,0 |
| 3        | 2,2 | 1,4 | 0,0 | 2,2 | 3,2 |
| 4        | 2,0 | 2,2 | 2,2 | 0,0 | 2,2 |
| 5        | 4,1 | 4,0 | 3,2 | 2,2 | 0,0 |

1ª cidade: 3  
2ª cidade: maior  $p_{ij}$  na coluna 2  
3ª cidade: maior  $p_{ij}$  na coluna 1  
4ª cidade: maior  $p_{ij}$  na coluna 5  
5ª cidade: 4  
fechamento da rota: 3  
 $L_3 = 10,9$  rota: 3 - 2 - 1 - 5 - 4 - 3

| $c_{ij}$ | 1   | 2   | 3   | 4   | 5   |
|----------|-----|-----|-----|-----|-----|
| 1        | 0,0 | 1,0 | 2,2 | 2,0 | 4,1 |
| 2        | 1,0 | 0,0 | 1,4 | 2,2 | 4,0 |
| 3        | 2,2 | 1,4 | 0,0 | 2,2 | 3,2 |
| 4        | 2,0 | 2,2 | 2,2 | 0,0 | 2,2 |
| 5        | 4,1 | 4,0 | 3,2 | 2,2 | 0,0 |

1ª cidade: 4  
2ª cidade: maior  $p_{ij}$  na coluna 5  
3ª cidade: maior  $p_{ij}$  na coluna 1  
4ª cidade: maior  $p_{ij}$  na coluna 2  
5ª cidade: 3  
fechamento da rota: 4  
 $L_4 = 10,9$  rota: 4 - 5 - 1 - 2 - 3 - 4

| $c_{ij}$ | 1   | 2   | 3   | 4   | 5   |
|----------|-----|-----|-----|-----|-----|
| 1        | 0,0 | 1,0 | 2,2 | 2,0 | 4,1 |
| 2        | 1,0 | 0,0 | 1,4 | 2,2 | 4,0 |
| 3        | 2,2 | 1,4 | 0,0 | 2,2 | 3,2 |
| 4        | 2,0 | 2,2 | 2,2 | 0,0 | 2,2 |
| 5        | 4,1 | 4,0 | 3,2 | 2,2 | 0,0 |

$k = 5$   
1ª cidade: 5  
2ª cidade: maior  $p_{ij}$  na coluna 4  
3ª cidade: maior  $p_{ij}$  na coluna 1  
4ª cidade: maior  $p_{ij}$  na coluna 2  
5ª cidade: 3  
fechamento da rota: 5  
 $L_5 = 9,8$  rota: 5 - 4 - 1 - 2 - 3 - 5

# Exemplo 1

## 2<sup>a</sup> iteração

$k = 1$

A formiga 1 começa na cidade 1

Cidades vizinhas não visitadas:  $N=\{2,3,4,5\}$

$$p_{12}^1 = \tau_{12}^\alpha \eta_{12}^\beta / (\tau_{13}^\alpha \eta_{23}^\beta + \tau_{14}^\alpha \eta_{24}^\beta + \tau_{15}^\alpha \eta_{25}^\beta) = 0,78$$

$$p_{13}^1 = \tau_{13}^\alpha \eta_{13}^\beta / (\tau_{12}^\alpha \eta_{32}^\beta + \tau_{14}^\alpha \eta_{34}^\beta + \tau_{15}^\alpha \eta_{35}^\beta) = 0,30$$

$$p_{14}^1 = \tau_{14}^\alpha \eta_{14}^\beta / (\tau_{12}^\alpha \eta_{42}^\beta + \tau_{13}^\alpha \eta_{43}^\beta + \tau_{15}^\alpha \eta_{45}^\beta) = 0,20$$

$$p_{15}^1 = \tau_{15}^\alpha \eta_{15}^\beta / (\tau_{12}^\alpha \eta_{52}^\beta + \tau_{13}^\alpha \eta_{53}^\beta + \tau_{14}^\alpha \eta_{54}^\beta) = 0,30$$

A formiga 1 vai da cidade 1 para a cidade 2.

Cidades vizinhas não visitadas:  $N=\{3,4,5\}$

$$p_{23}^1 = \tau_{23}^\alpha \eta_{23}^\beta / (\tau_{24}^\alpha \eta_{34}^\beta + \tau_{25}^\alpha \eta_{35}^\beta) = 1,24$$

$$p_{24}^1 = \tau_{24}^\alpha \eta_{24}^\beta / (\tau_{23}^\alpha \eta_{43}^\beta + \tau_{25}^\alpha \eta_{45}^\beta) = 0,31$$

$$p_{25}^1 = \tau_{25}^\alpha \eta_{25}^\beta / (\tau_{23}^\alpha \eta_{53}^\beta + \tau_{24}^\alpha \eta_{54}^\beta) = 0,34$$

A formiga 1 vai da cidade 2 para a cidade 3.

Cidades vizinhas não visitadas:  $N=\{4,5\}$

$$p_{34}^1 = \tau_{34}^\alpha \eta_{34}^\beta / \tau_{35}^\alpha \eta_{45}^\beta = 0,618$$

$$p_{35}^1 = \tau_{35}^\alpha \eta_{35}^\beta / \tau_{34}^\alpha \eta_{54}^\beta = 1,343$$

A formiga 1 vai da cidade 3 para a cidade 5, finalizando a rota na cidade 4.

$k = 1$

1<sup>a</sup> cidade: 1

2<sup>a</sup> cidade: maior  $p_{ij}$  na coluna 2

3<sup>a</sup> cidade: maior  $p_{ij}$  na coluna 3

4<sup>a</sup> cidade: maior  $p_{ij}$  na coluna 5

5<sup>a</sup> cidade: 4

fechamento da rota: 1

$L_1 = 9,8$  rota: 1 - 2 - 3 - 5 - 4 - 1

| $p_{ij}$ | arcos usados: |      |      |       |       |
|----------|---------------|------|------|-------|-------|
|          | 1             | 2    | 3    | 4     | 5     |
| 1        |               | 0,78 | 0,30 | 0,20  | 0,30  |
| 2        |               |      | 1,24 | 0,31  | 0,34  |
| 3        |               |      |      | 0,618 | 1,343 |
| 4        | 1,00          |      |      |       |       |
| 5        |               |      |      | 1,00  |       |

$N=\{2,3,4,5\}$        $N=\{3,4,5\}$        $N=\{4,5\}$        $N=\{4\}$

| $x_{ij}$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|----------|---|---|---|---|---|
| 1        | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 2        | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 3        | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 4        | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 5        | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |

Com as novas taxas de feromônios calculadas, podemos começar a 2<sup>a</sup> iteração. A formiga 1 começa a rota na cidade 1.

# Exemplo 1

$k = 2$

A formiga 2 começa na cidade 2

$$p_{21}^2 = \tau_{21}^\alpha \eta_{21}^\beta / (\tau_{23}^\alpha \eta_{13}^\beta + \tau_{24}^\alpha \eta_{14}^\beta + \tau_{25}^\alpha \eta_{15}^\beta) = 0,69$$

$$p_{23}^2 = \tau_{23}^\alpha \eta_{23}^\beta / (\tau_{21}^\alpha \eta_{31}^\beta + \tau_{24}^\alpha \eta_{34}^\beta + \tau_{25}^\alpha \eta_{35}^\beta) = 0,65$$

$$p_{24}^2 = \tau_{24}^\alpha \eta_{24}^\beta / (\tau_{21}^\alpha \eta_{41}^\beta + \tau_{23}^\alpha \eta_{43}^\beta + \tau_{25}^\alpha \eta_{45}^\beta) = 0,19$$

$$p_{25}^2 = \tau_{25}^\alpha \eta_{25}^\beta / (\tau_{21}^\alpha \eta_{51}^\beta + \tau_{23}^\alpha \eta_{53}^\beta + \tau_{24}^\alpha \eta_{54}^\beta) = 0,23$$

Cidades vizinhas não visitadas:  $N=\{1,3,4,5\}$

A formiga 2 vai da cidade 2 para a cidade 1.

$$p_{13}^2 = \tau_{13}^\alpha \eta_{13}^\beta / (\tau_{14}^\alpha \eta_{34}^\beta + \tau_{15}^\alpha \eta_{35}^\beta) = 0,64$$

$$p_{14}^2 = \tau_{14}^\alpha \eta_{14}^\beta / (\tau_{13}^\alpha \eta_{43}^\beta + \tau_{15}^\alpha \eta_{45}^\beta) = 0,35$$

$$p_{15}^2 = \tau_{15}^\alpha \eta_{15}^\beta / (\tau_{13}^\alpha \eta_{53}^\beta + \tau_{14}^\alpha \eta_{54}^\beta) = 0,51$$

Cidades vizinhas não visitadas:  $N=\{3,4,5\}$

A formiga 2 vai da cidade 1 para a cidade 3.

$$p_{34}^2 = \tau_{34}^\alpha \eta_{34}^\beta / \tau_{35}^\alpha \eta_{45}^\beta = 0,618$$

$$p_{35}^2 = \tau_{35}^\alpha \eta_{35}^\beta / \tau_{34}^\alpha \eta_{54}^\beta = 1,343$$

Cidades vizinhas não visitadas:  $N=\{4,5\}$

A formiga 2 vai da cidade 3 para a cidade 5, finalizando a rota na cidade 4.

$k = 2$

1<sup>a</sup> cidade: 2

2<sup>a</sup> cidade: maior  $p_{ij}$  na coluna 1

3<sup>a</sup> cidade: maior  $p_{ij}$  na coluna 3

4<sup>a</sup> cidade: maior  $p_{ij}$  na coluna 5

5<sup>a</sup> cidade: 4

fechamento da rota: 2

$$L_2 = 10,8 \quad 2-1-3-5-4-2$$

...

| $p_{ij}$ | arcos usados: |      |      |       |       |
|----------|---------------|------|------|-------|-------|
|          | 1             | 2    | 3    | 4     | 5     |
| 1        |               |      | 0,64 | 0,35  | 0,51  |
| 2        | 0,69          |      | 0,65 | 0,19  | 0,23  |
| 3        |               |      |      | 0,618 | 1,343 |
| 4        |               | 1,00 |      |       |       |
| 5        |               |      |      | 1,00  |       |

$x_{ij}$

| $x_{ij}$    | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|-------------|---|---|---|---|---|
| N={3,4,5}   | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| N={1,3,4,5} | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| N={4,5}     | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| N={4}       | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| N={4}       | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |

A formiga 2 começa a rota na cidade 2, e assim sucessivamente. A técnica pode ser executada até que as soluções fiquem todas com mesmo valor da função objetivo.

# Exemplo 1

- E assim os loops prosseguirão até achar a rota com menor custo de acordo com algum dos critérios de parada;

# Exercício 1 – Implementação do problema do caixeiro viajante

- Implemente o problema do caixeiro viajante do exemplo usando uma planilha excel ou linguagem de programação MANUAL (sem bibliotecas) por mais uma iteração (nos slides anteriores, fizemos até a segunda apenas para formiga 2). Inicie a matriz T com valores aleatórios como apresentado.



| $c_{ij}$ | 1   | 2   | 3   | 4   | 5   |
|----------|-----|-----|-----|-----|-----|
| 1        | 0,0 | 1,0 | 2,2 | 2,0 | 4,1 |
| 2        | 1,0 | 0,0 | 1,4 | 2,2 | 4,0 |
| 3        | 2,2 | 1,4 | 0,0 | 2,2 | 3,2 |
| 4        | 2,0 | 2,2 | 2,2 | 0,0 | 2,2 |
| 5        | 4,1 | 4,0 | 3,2 | 2,2 | 0,0 |

| $\eta_{ij} = 1/c_{ij}$ | 1        | 2        | 3        | 4        | 5        |
|------------------------|----------|----------|----------|----------|----------|
| 1                      | $\infty$ | 1,00     | 0,45     | 0,50     | 0,24     |
| 2                      | 1,00     | $\infty$ | 0,71     | 0,45     | 0,25     |
| 3                      | 0,45     | 0,71     | $\infty$ | 0,45     | 0,31     |
| 4                      | 0,50     | 0,45     | 0,45     | $\infty$ | 0,45     |
| 5                      | 0,24     | 0,25     | 0,31     | 0,45     | $\infty$ |

## Exercício 2 – Implementação do problema do caixeiro viajante

- Implemente o problema do caixeiro viajante do exemplo em qualquer linguagem de programação e obtenha o melhor caminho. Inicie a matriz T com valores aleatórios. (pode usar biblioteca). Plete um gráfico do melhor caminho ao longo das iterações.



| $c_{ij}$ | 1   | 2   | 3   | 4   | 5   |
|----------|-----|-----|-----|-----|-----|
| 1        | 0,0 | 1,0 | 2,2 | 2,0 | 4,1 |
| 2        | 1,0 | 0,0 | 1,4 | 2,2 | 4,0 |
| 3        | 2,2 | 1,4 | 0,0 | 2,2 | 3,2 |
| 4        | 2,0 | 2,2 | 2,2 | 0,0 | 2,2 |
| 5        | 4,1 | 4,0 | 3,2 | 2,2 | 0,0 |

| $\eta_{ij} = 1/c_{ij}$ | 1        | 2        | 3        | 4        | 5        |
|------------------------|----------|----------|----------|----------|----------|
| 1                      | $\infty$ | 1,00     | 0,45     | 0,50     | 0,24     |
| 2                      | 1,00     | $\infty$ | 0,71     | 0,45     | 0,25     |
| 3                      | 0,45     | 0,71     | $\infty$ | 0,45     | 0,31     |
| 4                      | 0,50     | 0,45     | 0,45     | $\infty$ | 0,45     |
| 5                      | 0,24     | 0,25     | 0,31     | 0,45     | $\infty$ |

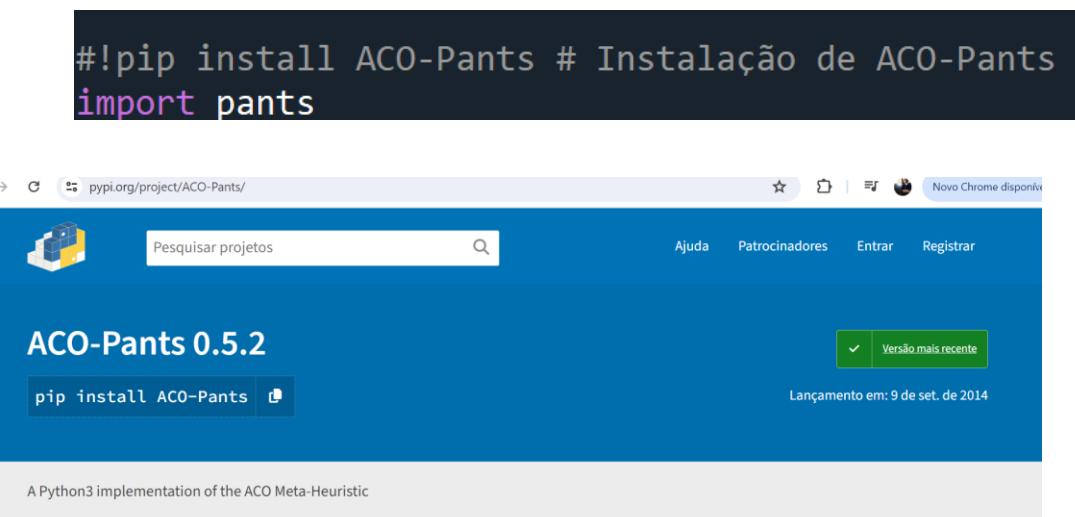
$$\alpha = 0,5$$
$$\beta = 0,5$$

| $\tau_{ij}$ | 1        | 2        | 3        | 4        | 5        |
|-------------|----------|----------|----------|----------|----------|
| 1           | $\infty$ | 0,30     | 0,25     | 0,20     | 0,30     |
| 2           | 0,30     | $\infty$ | 0,20     | 0,20     | 0,30     |
| 3           | 0,25     | 0,20     | $\infty$ | 0,10     | 0,15     |
| 4           | 0,20     | 0,20     | 0,10     | $\infty$ | 0,45     |
| 5           | 0,30     | 0,30     | 0,15     | 0,45     | $\infty$ |

# Dicas

- No Python, utilize a biblioteca Aco- Pants ou qualquer outra de sua preferencia :

```
#!pip install ACO-Pants # Instalação de ACO-Pants
import pants
```



# Dicas

- No Python, sobre biblioteca Aco- Pants:
- Embora os parâmetros de feromônio (alfa, beta, taxa\_evaporacao) sejam definidos para a ACO, essa biblioteca não **utiliza diretamente**. A biblioteca pants tem sua própria forma de gerenciar feromônio

# Dicas

- # Dados de entrada
- c1 = np.array([[0, 1, 2.2, 2, 4.1],
  - [1, 0, 1.4, 2.2, 4],
  - [2.2, 1.4, 0, 2.2, 3.2],
  - [2, 2.2, 2.2, 0, 2.2],
  - [4.1, 4, 3.2, 2.2, 0]])
- 
- distancias = c1
- 
- T = np.array([[float('inf'), 0.3, 0.25, 0.2, 0.3],
  - [0.3, float('inf'), 0.2, 0.2, 0.3],
  - [0.25, 0.2, float('inf'), 0.1, 0.15],
  - [0.2, 0.2, 0.1, float('inf'), 0.45],
  - [0.3, 0.3, 0.15, 0.45, float('inf')]]])

# Referências

- Rudolf Kruse, Christian Borgelt, Christian Braune, Sanaz Mostaghim Matthias Steinbrecher. “Computational Intelligence: A methodological introduction.”
- <https://paulohscwb.github.io/metaheuristicas/>