Parcial de Teoría de juegos

Lucas Puterman

27 de Mayo de 2015

1 Ejercicio 1

1.1 A

Tengo n y k pares. Sea F_i con $0 \geq i \geq k$, la fila correspondiente al valor i de las filas del Nim. Como k es par, yo puedo partir imaginariamente el tablero a la mitad en dos subtableros de tamaño $k/2$ de forma tal que para toda fila F_i existe la fila equivalente en el otro subtablero representada por F_{k-i} en el tablero original.

Ahora, el juego comienza con el tablero vacío, por ende la suma Nim del juego será 0. Notemos que la suma Nim del juego está representada de la siguiente forma:

$$F_1 \oplus \cdots \oplus F_k = 0$$

El jugador I comienza poniendo una ficha en una fila F_i del tablero. Lo que debe hacer el jugador II es espejar el juego, es decir, colocar una ficha en la fila F_{k-i+1}, que es la equivalente en el otro subtablero. Luego de los primeros dos turnos, la suma Nim del juego se calcula así:

$$F_1 \oplus \cdots \oplus F_i \oplus \cdots \oplus F_{k-i+1} \oplus \cdots \oplus F_k$$

Pero como todas las filas salvo la F_i y la F_{k-i+1} son 0, y éstas dos tienen el mismo valor, la suma total del juego será 0.

$$F_1 \oplus \cdots \oplus F_i \oplus \cdots \oplus F_{k-i+1} \oplus \cdots \oplus F_k = 0$$

Si II hace eso en cada uno de sus movimientos, luego de colocar todas las fichas en el tablero, como hay n fichas y n es par, el juego quedará con suma Nim 0.

Ahora, como n es par, el jugador I comienza a a jugar al Nim sacando fichas de una de las filas, pero al comenzar el juego la suma Nim era 0, por ende, no importa que saque, está será distinta de 0. Si el jugador II restaurá el 0 en su turno, este se asegura ganar el partido.

1.2 B

Veamos, en este caso n es impar, eso significa que II comenzará a jugar al Nim luego de que concluya la primer etapa de colocar las fichas en el tablero. Supongamos que I y II llenan las filas con las n fichas.

Por el teorema de la suma visto en clase, sabemos que:

$$g(F_1, \cdots, F_k) = g_1(F_1) \oplus \cdots \oplus g_k(F_k)$$

A su vez, sabemos que la función $g(x)$ del Nim es $g(x) = x$, por lo tanto, la función $g(F_1, \cdots, F_k)$ es la suma Nim de las fichas de las k filas del juego.

Ahora, notemos que tenemos una cantidad impar de fichas, por lo tanto, al comenzar el Nim luego de colocar las fichas podemos afirmar que:

$$g(F_1, \cdots, F_k) \neq 0$$

Ya que existe una cantidad impar de filas con fichas impares por lo que la representación binaria de la suma Nim del juego tendrá su último bit en 1.

Por lo tanto podemos decir que al comenzar el juego Nim luego de colocar las fichas, sea $x = n$, $x \in N$ ya que $g(x) \neq 0$. Por el teorema de Sprague-Grundy podemos afirmar que:

$$mex\{g(y)/y \in f(x)\} \neq 0 \rightarrow \exists y/g(y) = 0$$

Por lo tanto, el jugador II que es el que comienza el juego tiene estrategia ganadora.

1.3 C

Veamoslo por inducción en k con k impar ya que queremos ver los movimientos de I.

Caso Base k=1.

Tenemos el tablero vacio $(0, 0, 0)$, que tiene la pinta (x, x, x). Si agregamos una ficha en una de las pilas, sin perder la generalidad, nos quedaría un tablero de la pinta (x, x, y) con $y \geq x$.

Paso inductivo. sup vale para k, veamos que vale para k+2 y k-2.

Veamos, por hipótesis inductiva, el jugador II recibió un tablero de la pinta (x, x, y) con $y \geq x$ sin perdida de la generalidad

Ahora, II debe agregar una ficha, de esta forma puede dejarle a I un tablero de la pinta $(x + 1, x, y)$ con $y \geq x$ o $(x, x, y + 1)$.
Aqui es el turno de I, si $n > k + 1$ entonces debe agregar una ficha, por lo que puede dejar si recibió el primer caso $(x + 1, x + 1, y)$ con $y \geq x$ que cumple los requisitos, o bien, si recibió el segundo caso, $(x, x, y + 2)$ que también los cumple. Ahora si $n = k + 1$ debe quitar una ficha, en este caso puede quitar la que agregó II en el turno anterior, como por hipótesis inductiva II recibió algo de la pinta (x, x, y) con $y \geq x$, si quita lo último agregado, quedará algo igual.

1.4 D

Veamos, si $x = 2^h - 1$ entonces su representación binaria tiene la pinta:

$$(011 \cdots 1)_2$$

Y sea, $x + 1 = 2^h$, su representación binaria tiene la pinta:

$$(100 \cdots 0)_2$$

Es decir, $x + 1$ tendrá un 1 seguido de $h - 1$ ceros y x tendrá un 0 seguido de $h - 1$ unos.

Ahora, notemos que si aplicamos la suma Nim a lo siguiente nos queda algo así:

$$\begin{array}{cccc} & 1000 & \cdots & 0 \\ \oplus & & & \\ & 0111 & \cdots & 1 \\ \hline & 1111 & \cdots & 1 \end{array} \tag{1}$$

Como podemos ver, al aplicar la suma Nim, en la representación binaria nos quedarán h unos. Ahora sea $y = 2^{h+1}$, como y es una potencia de dos entonces la representación binaria de y sería:

$$y = (10 \cdots 0)_2$$

Es decir, un 1 seguido de h ceros. Por otro lado, la representación binaria de $y - 1 = 2^{h+1} - 1$ sería:

$$y - 1 = (01 \cdots 1)_2$$

Es decir, h unos.

Notemos que esto es exactamente lo que obtuvimos al aplicar la suma Nim entre x y $x + 1$.

Veamos ahora que sucede si $x \neq 2^h - 1$:

Sea $x \neq 2^h - 1$. Su representación binaria tendrá la pinta:

$$(b_k b_{k-1} \cdots b_1)_2$$

donde $k = \lfloor \log_2 x \rfloor$.

Ahora, como $x \neq 2^h - 1$ entonces existe b_i tal que b_i es el bit de la representación binaria de x que tenga el primer 0, notemos también que $b_i \neq b_k$.

Sea $y = x + 1$, podemos decir que la representación binaria de y tiene la pinta:

$$(b_k b_{k-1} \cdots b_{i-1} 10 \cdots 0)_2$$

Es decir, todos los bits anteriores a b_i permanecen iguales que en x, el bit $b_i = 1$ y todos los siguientes son 0.

Si hacemos suma Nim entre x e y obtendremos algo así:

$$
\begin{array}{c|cccccc}
 & b_k & \cdots & b_{i-1} & 0 & b_{i+1} & \cdots & b_1 \\
\oplus & & & & & & & \\
 & b_k & \cdots & b_{i-1} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\
\hline
 & 0 & \cdots & 0 & 1 & b_{i+1} & \cdots & b_1
\end{array} \tag{2}
$$

Notemos que como $b_i \neq b_k$ el resultado es estrictamente menor a x ya que todos los bits anteriores a b_i quedan en 0 luego de aplicar la suma Nim.

1.5 E

Veamos, n es par, por lo que podemos afirmar que luego de colocar las fichas, será I quien comience a jugar al Nim.

Ahora como vimos en el punto C (1.3) es posible dejar siempre una posición donde dos pilas tienen la misma cantidad de fichas, y la tercera tiene la misma cantidad o más, es decir, las pilas quedan de la forma (x, x, y) con $x \leq y$.

Si I hace esa estrategia, cuando comience a retirar fichas recibirá algo con la pinta $(x, x, y+1)$ o $(x, x+1, y)$. Veamos los dos casos:

- Si recibe $(x, x, y+1)$, entonces si retira todas las filas de la última pila, por lo que quedará $(x, x, 0)$ como las dos primeras filas tienen suma Nim 0, entonces I se asegura la victoria.
- Si recibe $(x, x+1, y)$, sabíamos por el punto C que $x \leq y$, por lo tanto, $y > 0$ ya que si $y = 0$ entonces $x = 0$ y eso es absurdo porque n es par. Además y es impar porque n es par y o bien x es impar, o bien $x+1$ lo es.
  Ahora, si $x = y$, I remueve la pila de $x+1$ y quedaría $(x, 0, y) = (x, 0, x)$ que tiene suma Nim 0 y se asegura la victoria.

  Si $y > x$ notemos que $x \oplus x+1 < x$ si $x \neq 2^h - 1$ (visto en el item D). Si esto sucede entonces la suma Nim es distinta de 0 porque $y > x \oplus x+1$. Supongamos que esto no sucede, entonces $x = 2^h - 1$ y $x+1 = 2^h$. Entonces, sea $z = x \oplus x+1 = 2^{h+1} - 1$.
  Notemos que la suma Nim del juego es $z \oplus y$, y notemos también que esta será 0 solo si $y = z$, pero $z = 2^{h+1} - 1$, si $y = 2^{h+1} - 1$ entonces $z + y = 2^{h+2} - 2$, pero esto es absurdo ya que $z + y = n$ y vimos por el enunciado que $n \neq 2^j - 2$.

2

2.1

Veamos que $Val(A) \leq Val(B)$.

Sea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ y sea $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & b_{m3} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}$

Sean $P = (p_1, \cdots, p_n)$ y $Q = (q_1, \cdots, q_m)$ estrategias óptimas para I y II respectivamente en A.

Ahora, veamos que:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p_i A_{ij} q_j = P^t A Q = Val(A)$$

Como $\forall i \in [1..n], j \in [1..m] a_{ij} \leq b_{ij} \Rightarrow P^t B Q \leq Val(A)$

Pero éstas pueden o no ser óptimas en B. Sean P', Q' tal que son estrategias óptimas en B para I y II respectivamente. Entonces, $p'_i \leq p_i \wedge q'_j \leq q_j \forall i \in [1..n], j \in [1..m]$.

$$\Rightarrow P'^t B Q' = Val(B) \geq P^t B Q \geq P^t A Q = Val(A)$$
$$\Rightarrow Val(B) \geq Val(A)$$

2.2

Calculemos los equilibrios de Nash del juego. Los equilibrios puros se ven a simple vista y son (L,R) y (R,L) donde los pagos son (0,2) y (2,0). Calculemos el equilibrio mixto:

$$p1 + (1-p)0 = 2p + (1-p) - M$$
$$p = 2p + -M + Mp$$
$$M = p + Mp$$
$$M = p(1+M)$$
$$M/(1+M) = p$$

La cuenta para II es análoga, entonces el equiilbrio mixto sería:

$$(p = M/1 + M, q = M/1 + M)$$

Ahora, cuando M tiende a infinito, los dos jugadores tenderán a elegir L, por lo que los pagos tienden a 1. Notemos tambien que cuando M es más chico, -M se agranda, y los pagos se agragdan por lo que no sucede lo mismo que en el caso del juego no bimatricial ya que si suponemos que la matriz B sería una con valores de M muy grandes, esta cumpliría los requisitos pero los pagos serían menores por lo que el valor del juego sería menor.

3

3.1 A

Si, el grafo de la imagen representa un equilibrio de Nash porque veamos que todos los vecinos de un $Flanders$ son $Homero$ por lo tanto si un $Flanders$ decide pasarse a $Homero$, no tendrá ningún vecino para robarle el taladro por lo que su pagó bajará de $b - c$ a 0. Por otro lado, cualquier $Homero$ del tablero tiene como vecino a un $Flanders$, por lo que si decide cambiarse a $Flanders$ su pagó que actualmente es b bajará a $b - c$.

3.2 C

Sea $G(V, E)$ el grafo y sea *Adyacencia* su matriz de adyacencia. Cada nodo estará incializado en Homero por defecto.

Luego se meterán todos los nodos en una cola de prioridad, donde la prioridad esté definida por el grado del nodo.

Se irán extrayendo uno a uno, si un nodo tiene todos sus vecinos $Homero$ entonces se convertirá en $Flanders$.

Este algoritmo devuelve un equilibro de Nash como el de la foto donde hay la mínima cantidad de $Flanders$. Si un nodo es $Homero$ y ninguno de sus vecinos es $Flanders$, entonces se convierte en $Flanders$.

```
Q = colaDePrioridad

for each v in V do
        v.tipo = HOMERO
        Q.encolar(v)
end for

while Q.vacia() == false do
        Nodo w = Q.desencolar()
    bool hayFlanders = false
    while hayFlanders == false && i < adyacencia(v).size() do
            if adyacencia(v)[i].tipo == FLANDERS then
                hayFlanders = true
        end If
        end While
    if hayFlanders == false then
            w.tipo = FLANDERS
    end if
end While
```

3.3 B

Veamos, el algoritmo dado para el item C devuelve un equilibrio de Nash válido. Ahora, notemos que encola todos los nodos en una Cola de Prioridad y luego los va desencolando según el grado del nodo. Si tomamos la cola de prioridad priorizando los de menor grado, el algoritmo devolvería otro equilibrio de Nash distinto y este también sería válido. Podemos ver que este equilibrio es distinto si nos fijamos que el primero en ser desencolado en el algoritmo de C será $Flanders$, mientras que ese mismo nodo en el algoritmo modificado seraá el último en ser desencolado, por lo que será $Homero$ si su grado es mayor a 0, y si su grado es 0 entonces ningún nodo está conectado con otro ya que era el de mayor grado en C.

3.4 D

- Nos pide encontrar una familia de grafos tal que el equilibrio de Nash necesite un número de taladros independiente de N. Si tomamos como familia K_n es decir el grafo completo de n nodos, como todos los nodos están conectados con todos los otros solo se necesita un *Flanders* independientemente de la cantidad de nodos que tenga el grafo.

- Aquí nos pide encontrar una familia de grafos tal que todo equilibrio de Nash necesita al menos N/2 taladros, pero existe una distribución de taladros tal que 2 sean suficientes para que todos tengan un taladro o tengan un vecino que tenga taladro.

  Veamos, sean v y w dos nodos que llamaremos "centrales", estos nodos están conectados entre sí. Para todo otro nodo w en el grafo distinto de estos dos, o bien w tiene como único vecino a v, o bien lo tiene a w.

  De esta manera para lograr todos los equilibrios de Nash necestio N/2 nodos *Flanders* pero si v y w son *Flanders* todos los nodos tendrán o un taladro o un vecino con taladro. Y veamos, que este no es un equilibrio ya que v es *Flanders* pero tiene un vecino que tambieén lo es.

- Por último nos piden encontrar una familia tal que todo equilibrio de Nash utiliza aproximadamente una fracción N/k de taladros, con k fijo (y que el grafo no sea unión de dos o más grafos disjuntos).

  Aquí podemos considerar una familia de grafos de la siguiente manera, definimos componentes conexas como k_m para un m dado y luego conectamos a un nodo de cada una de las componentes con las otras. De esta manera necesitaria un *Flanders* por cada una de las componentes conexas originales y k estaría definido como N/m.