Tesis de Licenciatura en Ciencias de la Computación

Números Muy Normales

Lucas Puterman

Directora: Verónica Becher
Codirector: Olivier Carton
Departamento de Computación
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires
19 de Noviembre, 2019

Sobre secuencias aleatorias

Supongamos que tiramos una moneda infinitas veces y anotamos un 1 cada vez que sale cara y 0 cada vez que sale ceca ¿Cuáles de estas secuencias es creíble que sea el resultado de este experimento?

Sobre secuencias aleatorias

Supongamos que tiramos una moneda infinitas veces y anotamos un 1 cada vez que sale cara y 0 cada vez que sale ceca ¿Cuáles de estas secuencias es creíble que sea el resultado de este experimento?

- $11111111111111111111111111111111111\ldots$

Sobre secuencias aleatorias

Supongamos que tiramos una moneda infinitas veces y anotamos un 1 cada vez que sale cara y 0 cada vez que sale ceca ¿Cuáles de estas secuencias es creíble que sea el resultado de este experimento?

- $11111111111111111111111111111111\ldots$
- $01010101010101010101010101010101\ldots$

Sobre secuencias aleatorias

Supongamos que tiramos una moneda infinitas veces y anotamos un 1 cada vez que sale cara y 0 cada vez que sale ceca ¿Cuáles de estas secuencias es creíble que sea el resultado de este experimento?

- $11111111111111111111111111111111111\dots$
- $01010101010101010101010101010101010\dots$
- $10000110001010001110010010110011010\dots$

Secuencias normales

Podemos pensar que en una secuencia aleatoria no hay ningún patrón de ℓ símbolos que sea más frecuente que otro.

Secuencias normales

Podemos pensar que en una secuencia aleatoria no hay ningún patrón de ℓ símbolos que sea más frecuente que otro.
Nos gustaría que para un prefijo de una secuencia aleatoria suficientemente grande, la cantidad de ocurrencias de cada palabra de cierta longitud sea casi la misma.

Definición (Borel, 1909)

Dado un alfabeto A y alguna secuencia infinita $u \in A^\omega$, decimos que u es *normal* si para todos los tamaños de bloque ℓ, sucede que todos los bloques posibles de tamaño ℓ ocurren con la misma frecuencia.

Secuencias normales

Podemos pensar que en una secuencia aleatoria no hay ningún patrón de ℓ símbolos que sea más frecuente que otro.
Nos gustaría que para un prefijo de una secuencia aleatoria suficientemente grande, la cantidad de ocurrencias de cada palabra de cierta longitud sea casi la misma.

Definición (Borel, 1909)

Dado un alfabeto A y alguna secuencia infinita $u \in A^\omega$, decimos que u es *normal* si para todos los tamaños de bloque ℓ, sucede que todos los bloques posibles de tamaño ℓ ocurren con la misma frecuencia.

Problema (Borel, 1909)

Encontrar ejemplos naturales de secuencias normales.
Decidir si la representación en base b de π, e ó $\sqrt{2}$ es normal.

La secuencia de Champernowne

Teorema (Champernowne, 1933)

La secuencia

$$123456789101112131415161718192 0\ldots$$

es normal sobre el alfabeto $A = \{0, 1, \ldots, 9\}$.

$champ$, La secuencia que usaremos

Teorema (Champernowne, 1933)

Sea A un alfabeto. Llamamos $X(n)$ a la concatenación de todas las palabras de longitud n formadas por símbolos de A en orden lexicográfico. La palabra infinita $X(1)X(2)\dots$ es normal en el alfabeto A

$champ$, La secuencia que usaremos

Teorema (Champernowne, 1933)

Sea A un alfabeto. Llamamos $X(n)$ a la concatenación de todas las palabras de longitud n formadas por símbolos de A en orden lexicográfico. La palabra infinita $X(1)X(2)\dots$ es normal en el alfabeto A

En particular, nosotros vamos a usar el alfabeto $A = \{0, 1\}$ Entonces, por ejemplo:

$$X(2) = 00\,01\,10\,11$$

$champ$, La secuencia que usaremos

Teorema (Champernowne, 1933)

Sea A un alfabeto. Llamamos $X(n)$ a la concatenación de todas las palabras de longitud n formadas por símbolos de A en orden lexicográfico. La palabra infinita $X(1)X(2)\ldots$ es normal en el alfabeto A

En particular, nosotros vamos a usar el alfabeto $A = \{0, 1\}$ Entonces, por ejemplo:

$$X(2) = 00\,01\,10\,11$$

Entonces, los primeros símbolos de la secuencia que llamamos $champ$

son:

$$champ = 0\,1\,00\,01\,10\,11\,000\,001\,010\,011\,100\,101\,110\,111\,0000\,0001\ \ldots$$

Supernormalidad

Zeev Rudnick de la Universidad de Tel Aviv definió hace unos años la noción de supernomalidad con la que trabajamos en esta tesis.
Benjamin Weiss de la Universidad Hebrea de Jerusalem dio el 16 de Junio de 2010 una conferencia en el Instituto de Altos Estudios de Princeton titulada "Random-like behavior in deterministic systems" donde describe la noción de supernormalidad, a la que llama "Poisson generic".
Lo poco que se conoce sobre esta noción no está publicado.


Figura: Benjamin Weiss y Zeev Rudnick

Que tal si contamos

$$x = 10011110\ldots$$

Contemos cuales son las palabras de tamaño 3 que aparecen en los primeros 8 símbolos de x.

Que tal si contamos

$$x = 10011110\ldots$$

Contemos cuales son las palabras de tamaño 3 que aparecen en los primeros 8 símbolos de x.

$$100$$

Que tal si contamos

$$x = 10011110\ldots$$

Contemos cuales son las palabras de tamaño 3 que aparecen en los primeros 8 símbolos de x.

$$100,\ 001$$

Que tal si contamos

$$x = 10011110\ldots$$

Contemos cuales son las palabras de tamaño 3 que aparecen en los primeros 8 símbolos de x.

$$100, \ 001, \ \ 011$$

Que tal si contamos

$$x = 10011110\ldots$$

Contemos cuales son las palabras de tamaño 3 que aparecen en los primeros 8 símbolos de x.

$$100,\ 001,\ \ 011,\ 111$$

Que tal si contamos

$$x = 10011110\ldots$$

Contemos cuales son las palabras de tamaño 3 que aparecen en los primeros 8 símbolos de x.

$$100,\ 001,\ \ 011,\ 111,\ 111$$

Que tal si contamos

$$x = 10011110\ldots$$

Contemos cuales son las palabras de tamaño 3 que aparecen en los primeros 8 símbolos de x.

$$100,\ 001,\ \ 011,\ 111,\ 111,\ 110$$

Que tal si contamos

$$x = 10011110\ldots$$

Contemos cuales son las palabras de tamaño 3 que aparecen en los primeros 8 símbolos de x.

$$100,\ 001,\ \ 011,\ 111,\ 111,\ 110$$

Si contamos las cantidad de ocurrencias de cada palabra de tamaño 3 tenemos:

Palabra	Cantidad
000	0
001	1
010	0
011	1
100	1
101	0
110	1
111	2

Que tal si contamos

$$x = 10011110\dots$$

Contemos cuales son las palabras de tamaño 3 que aparecen en los primeros 8 símbolos de x.

$$100,\ 001,\ \ 011,\ 111,\ 111,\ 110$$

Si contamos las cantidad de ocurrencias de cada palabra de tamaño 3 tenemos:

Palabra	Cantidad
000	0
001	1
010	0
011	1
100	1
101	0
110	1
111	2

k	Cant	Frec
0	3	$3/8$
1	4	$1/2$
2	1	$1/8$
3	0	0
4	0	0
5	0	0
6	0	0
7	0	0
8	0	0

Supernormalidad

Sea x una secuencia binaria. Sea $A^{\lambda}_{k,n}(x)$ la frecuencia de ocurrencia de las palabras de longitud n que ocurren exactamente k veces comenzando en las primeras $\lfloor \lambda 2^n \rfloor$ posiciones de x. Es decir:

$$A^{\lambda}_{k,n}(x) = \frac{\#\{w : |w| = n, \text{cant. de ocurrencias de } w \text{ en } x[1 \ldots \lfloor \lambda 2^n \rfloor] \ = k\}}{2^n}$$

Supernormalidad

Sea x una secuencia binaria. Sea $A^{\lambda}_{k,n}(x)$ la frecuencia de ocurrencia de las palabras de longitud n que ocurren exactamente k veces comenzando en las primeras $\lfloor \lambda 2^n \rfloor$ posiciones de x. Es decir:

$$A^{\lambda}_{k,n}(x) = \frac{\#\{w : |w| = n, \text{cant. de ocurrencias de } w \text{ en } x[1 \dots \lfloor \lambda 2^n \rfloor] \ = k\}}{2^n}$$

$$A^{\lambda}_{k,n}(x) = \frac{\#\{w : |w| = n, |x[1 ... \lfloor \lambda 2^n \rfloor]|_w = k\}}{2^n}$$

Supernormalidad

Sea x una secuencia binaria. Sea $A^{\lambda}_{k,n}(x)$ la frecuencia de ocurrencia de las palabras de longitud n que ocurren exactamente k veces comenzando en las primeras $\lfloor \lambda 2^n \rfloor$ posiciones de x. Es decir:

$$A^{\lambda}_{k,n}(x) = \frac{\#\{w : |w| = n, \text{cant. de ocurrencias de } w \text{ en } x[1 \ldots \lfloor \lambda 2^n \rfloor] \ = k\}}{2^n}$$

$$A^{\lambda}_{k,n}(x) = \frac{\#\{w : |w| = n, |x[1 ... \lfloor \lambda 2^n \rfloor]|_w = k\}}{2^n}$$

Definición

Sea λ un real mayor a cero. Decimos que la secuencia binaria x es λ-supernormal si para todo entero no negativo k sucede que

$$\lim_{n \to \infty} A^{\lambda}_{k,n}(x) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}$$

Decimos que x es supernormal si es λ-supernormal para todo λ.

El resultado de esta tesis

El resultado de esta tesis

Teorema

La noción de supernormalidad es más fuerte que la noción de normalidad. Es decir, los siguientes enunciados son ciertos:

1. *Sea x una secuencia infinita. Si x es normal, no necesariamente x es supernormal. (normal $\not\Rightarrow$ supernormal)*
2. *Sea x una secuencia infinita. Si x es supernormal, entonces x es normal. (supernormal $\Rightarrow$ normal)*

El resultado de esta tesis

Teorema

La noción de supernormalidad es más fuerte que la noción de normalidad. Es decir, los siguientes enunciados son ciertos:

1. *Sea x una secuencia infinita. Si x es normal, no necesariamente x es supernormal. (normal $\not\Rightarrow$ supernormal)*
2. *Sea x una secuencia infinita. Si x es supernormal, entonces x es normal. (supernormal $\Rightarrow$ normal)*

¿Es $champ$ supernormal?

La forma más simple de ver que una secuencia normal no es supernormal es encontrar un ejemplo, y que mejor ejemplo que $champ$.

Recordemos

$X(n)$ es la concatenación de todas las palabras de longitud n sobre el alfabeto $A = \{0, 1\}$ en order lexicográfico.
Llamamos $champ$ a la concatenación de $X(n)$ para $n = 1, 2, \ldots$

$$champ = 0\ 1\ 00\ 01\ 10\ 11\ 000\ 001\ 010\ 011\ 100\ 101\ 110\ 111\ 0000\ 0001\ \ldots$$

¿Es $champ$ supernormal?

La forma más simple de ver que una secuencia normal no es supernormal es encontrar un ejemplo, y que mejor ejemplo que $champ$.

Recordemos

$X(n)$ es la concatenación de todas las palabras de longitud n sobre el alfabeto $A = \{0, 1\}$ en order lexicográfico.
Llamamos $champ$ a la concatenación de $X(n)$ para $n = 1, 2, \ldots$

$$champ = 0\;1\;00\;01\;10\;11\;000\;001\;010\;011\;100\;101\;110\;111\;0000\;0001\;\ldots$$

¿Qué sucede cuando contamos la cantidad de palabras de tamaño n en los primeros 2^n símbolos de $champ$?

¿Es *champ* supernormal?

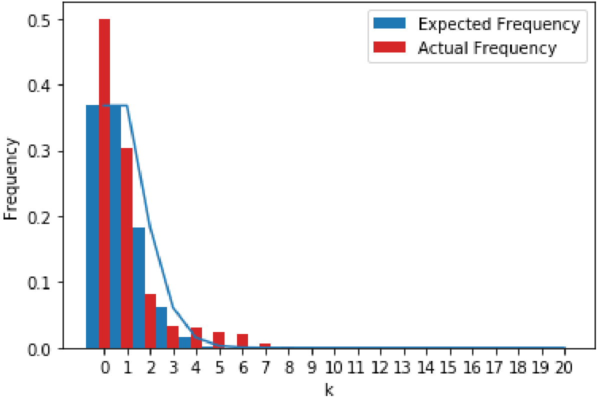

Figura: Frecuencias observadas y esperadas en $champ$ for $n = 16$ y $\lambda = 1$.

¿Es $champ$ supernormal?

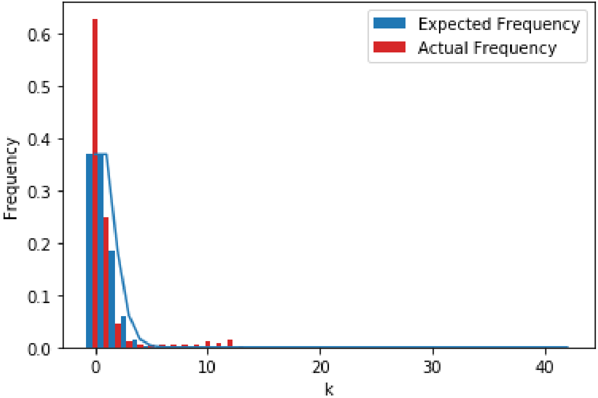

Figura: Frecuencias observadas y esperadas en $champ$ for $n = 22$ y $\lambda = 1$.

Normal $\not\Rightarrow$ Supernormal - Idea de la demostración

- Sabemos que $champ = X(1)X(2)X(3)\ldots$

Normal $\not\Rightarrow$ Supernormal - Idea de la demostración

- Sabemos que $champ = X(1)X(2)X(3)\dots$
- Vamos a buscar el k más grande tal que $X(k)$ este completamente contenido en $champ[1\dots 2^n]$ y contar cuales son las palabras que aparecen adentro.

Normal $\not\Rightarrow$ Supernormal - Idea de la demostración

- Sabemos que $champ = X(1)X(2)X(3)\ldots$
- Vamos a buscar el k más grande tal que $X(k)$ este completamente contenido en $champ[1\ldots 2^n]$ y contar cuales son las palabras que aparecen adentro.
- Para esto buscamos una forma de elegir algunos ns que tengan una pinta que nos sirva.

Normal $\not\Rightarrow$ Supernormal - Idea de la demostración

- Sabemos que $champ = X(1)X(2)X(3)\dots$
- Vamos a buscar el k más grande tal que $X(k)$ este completamente contenido en $champ[1\dots 2^n]$ y contar cuales son las palabras que aparecen adentro.
- Para esto buscamos una forma de elegir algunos ns que tengan una pinta que nos sirva.
- Encontramos que si tomamos $n = d + k + 1$ con $k = 2^d$, sucede que $X(k)$ está completamente contenido en $champ[1\dots 2^n]$ y además ocupa la mitad del espacio.

Normal $\not\Rightarrow$ Supernormal - Idea de la demostración

- Sabemos que $champ = X(1)X(2)X(3)\dots$
- Vamos a buscar el k más grande tal que $X(k)$ este completamente contenido en $champ[1\dots 2^n]$ y contar cuales son las palabras que aparecen adentro.
- Para esto buscamos una forma de elegir algunos ns que tengan una pinta que nos sirva.
- Encontramos que si tomamos $n = d + k + 1$ con $k = 2^d$, sucede que $X(k)$ está completamente contenido en $champ[1\dots 2^n]$ y además ocupa la mitad del espacio.
- Nos fijamos cuales son las palabras de longitud $d + k + 1$ que aparecen adentro de $X(k)$.

Normal $\not\Rightarrow$ Supernormal - Idea de la demostración

- Sabemos que $champ = X(1)X(2)X(3)\dots$
- Vamos a buscar el k más grande tal que $X(k)$ este completamente contenido en $champ[1 \dots 2^n]$ y contar cuales son las palabras que aparecen adentro.
- Para esto buscamos una forma de elegir algunos ns que tengan una pinta que nos sirva.
- Encontramos que si tomamos $n = d + k + 1$ con $k = 2^d$, sucede que $X(k)$ está completamente contenido en $champ[1 \dots 2^n]$ y además ocupa la mitad del espacio.
- Nos fijamos cuales son las palabras de longitud $d + k + 1$ que aparecen adentro de $X(k)$.
- Conociendo las palabras que aparecen, vemos que las son más de lo necesario para que $champ$ sea supernormal.

Que hay adentro de $X(k)$

Recordemos que definimos $k = 2^d$. Veamos como son las palabras de tamaño $d + k + 1$ que suceden adentro de $X(k)$. Tomemos a modo de ejemplo $k = 8$ y $d = 3$.

Que hay adentro de $X(k)$

Recordemos que definimos $k = 2^d$. Veamos como son las palabras de tamaño $d + k + 1$ que suceden adentro de $X(k)$. Tomemos a modo de ejemplo $k = 8$ y $d = 3$.

$$00000000 \qquad 00000001 \qquad 00000010 \qquad 00000011 \qquad 00000100$$

Que hay adentro de $X(k)$

Recordemos que definimos $k = 2^d$. Veamos como son las palabras de tamaño $d + k + 1$ que suceden adentro de $X(k)$. Tomemos a modo de ejemplo $k = 8$ y $d = 3$.

$$(00000000 \quad 0000)0001 \quad 00000010 \quad 00000011 \quad 00000100$$

- Caso 1:

$$x = u_1 u_2 \dots u_k \quad v_1 v_2 \dots v_d v_{d+1}$$

Que hay adentro de $X(k)$

Recordemos que definimos $k = 2^d$. Veamos como son las palabras de tamaño $d + k + 1$ que suceden adentro de $X(k)$. Tomemos a modo de ejemplo $k = 8$ y $d = 3$.

$$0(0000000 \quad 00000)001 \quad 00000010 \quad 00000011 \quad 00000100$$

- Caso 1:

$$x = u_1 u_2 \ldots u_k \quad v_1 v_2 \ldots v_d v_{d+1}$$

- Caso 3:

$$x = u_{n+1} u_{n+2} \ldots u_k \quad v_1 v_2 \ldots v_{d+n+1}$$

  con $n \in \{1, 2, \ldots, k - d - 2\}$.

Que hay adentro de $X(k)$

Recordemos que definimos $k = 2^d$. Veamos como son las palabras de tamaño $d + k + 1$ que suceden adentro de $X(k)$. Tomemos a modo de ejemplo $k = 8$ y $d = 3$.

$$00(000000 \quad 000000)01 \quad 00000010 \quad 00000011 \quad 00000100$$

- Caso 1:

$$x = u_1 u_2 \dots u_k \quad v_1 v_2 \dots v_d v_{d+1}$$

- Caso 3:

$$x = u_{n+1} u_{n+2} \dots u_k \quad v_1 v_2 \dots v_{d+n+1}$$

con $n \in \{1, 2, \dots, k - d - 2\}$.

Que hay adentro de $X(k)$

Recordemos que definimos $k = 2^d$. Veamos como son las palabras de tamaño $d + k + 1$ que suceden adentro de $X(k)$. Tomemos a modo de ejemplo $k = 8$ y $d = 3$.

$$000(00000 \quad 0000000)1 \quad 00000010 \quad 00000011 \quad 00000100$$

- Caso 1:

$$x = u_1 u_2 \dots u_k \quad v_1 v_2 \dots v_d v_{d+1}$$

- Caso 3:

$$x = u_{n+1} u_{n+2} \dots u_k \quad v_1 v_2 \dots v_{d+n+1}$$

con $n \in \{1, 2, \dots, k - d - 2\}$.

Que hay adentro de $X(k)$

Recordemos que definimos $k = 2^d$. Veamos como son las palabras de tamaño $d + k + 1$ que suceden adentro de $X(k)$. Tomemos a modo de ejemplo $k = 8$ y $d = 3$.

$$0000(0000 \quad 00000001) \quad 00000010 \quad 00000011 \quad 00000100$$

- Caso 1:

$$x = u_1 u_2 \dots u_k \quad v_1 v_2 \dots v_d v_{d+1}$$

- Caso 2:

$$x = u_{k-d-1} \dots u_k \quad v_1 v_2 \dots v_k$$

- Caso 3:

$$x = u_{n+1} u_{n+2} \dots u_k \quad v_1 v_2 \dots v_{d+n+1}$$

con $n \in \{1, 2, \dots, k - d - 2\}$.

Que hay adentro de $X(k)$

Recordemos que definimos $k = 2^d$. Veamos como son las palabras de tamaño $d + k + 1$ que suceden adentro de $X(k)$. Tomemos a modo de ejemplo $k = 8$ y $d = 3$.

$$00000(000 \quad 00000001 \quad 0)0000010 \quad 00000011 \quad 00000100$$

- Caso 1:

$$x = u_1 u_2 \dots u_k \quad v_1 v_2 \dots v_d v_{d+1}$$

- Caso 2:

$$x = u_{k-d-1} \dots u_k \quad v_1 v_2 \dots v_k$$

- Caso 3:

$$x = u_{n+1} u_{n+2} \dots u_k \quad v_1 v_2 \dots v_{d+n+1}$$

  con $n \in \{1, 2, \dots, k - d - 2\}$.

- Caso 4:

$$x = u_{k-d-1+n} u_{k-d+n} \dots u_k \quad v_1 v_2 \dots v_k \quad w_1 w_2 \dots w_{d+1-n}$$

  con $n \in \{1, 2, \dots, d\}$

Que hay adentro de $X(k)$

Recordemos que definimos $k = 2^d$. Veamos como son las palabras de tamaño $d + k + 1$ que suceden adentro de $X(k)$. Tomemos a modo de ejemplo $k = 8$ y $d = 3$.

$$000000(00 \quad 00000001 \quad 00)000010 \quad 00000011 \quad 00000100$$

- Caso 1:

$$x = u_1 u_2 \dots u_k \quad v_1 v_2 \dots v_d v_{d+1}$$

- Caso 2:

$$x = u_{k-d-1} \dots u_k \quad v_1 v_2 \dots v_k$$

- Caso 3:

$$x = u_{n+1} u_{n+2} \dots u_k \quad v_1 v_2 \dots v_{d+n+1}$$

  con $n \in \{1, 2, \dots, k - d - 2\}$.

- Caso 4:

$$x = u_{k-d-1+n} u_{k-d+n} \dots u_k \quad v_1 v_2 \dots v_k \quad w_1 w_2 \dots w_{d+1-n}$$

  con $n \in \{1, 2, \dots, d\}$

Que hay adentro de $X(k)$

Recordemos que definimos $k = 2^d$. Veamos como son las palabras de tamaño $d + k + 1$ que suceden adentro de $X(k)$. Tomemos a modo de ejemplo $k = 8$ y $d = 3$.

$$0000000(0 \qquad 00000001 \qquad 000)00010 \qquad 00000011 \qquad 00000100$$

- Caso 1:

$$x = u_1 u_2 \dots u_k \quad v_1 v_2 \dots v_d v_{d+1}$$

- Caso 2:

$$x = u_{k-d-1} \dots u_k \quad v_1 v_2 \dots v_k$$

- Caso 3:

$$x = u_{n+1} u_{n+2} \dots u_k \quad v_1 v_2 \dots v_{d+n+1}$$

  con $n \in \{1, 2, \dots, k - d - 2\}$.

- Caso 4:

$$x = u_{k-d-1+n} u_{k-d+n} \dots u_k \quad v_1 v_2 \dots v_k \quad w_1 w_2 \dots w_{d+1-n}$$

  con $n \in \{1, 2, \dots, d\}$

Que hay adentro de $X(k)$

Recordemos que definimos $k = 2^d$. Veamos como son las palabras de tamaño $d + k + 1$ que suceden adentro de $X(k)$. Tomemos a modo de ejemplo $k = 8$ y $d = 3$.

00000000 (00000001 0000)0010 00000011 00000100

- Caso 1:

$$x = u_1 u_2 \dots u_k \quad v_1 v_2 \dots v_d v_{d+1}$$

- Caso 2:

$$x = u_{k-d-1} \dots u_k \quad v_1 v_2 \dots v_k$$

- Caso 3:

$$x = u_{n+1} u_{n+2} \dots u_k \quad v_1 v_2 \dots v_{d+n+1}$$

  con $n \in \{1, 2, \dots, k - d - 2\}$.

- Caso 4:

$$x = u_{k-d-1+n} u_{k-d+n} \dots u_k \quad v_1 v_2 \dots v_k \quad w_1 w_2 \dots w_{d+1-n}$$

  con $n \in \{1, 2, \dots, d\}$

Que hay adentro de $X(k)$

Recordemos que definimos $k = 2^d$. Veamos como son las palabras de tamaño $d + k + 1$ que suceden adentro de $X(k)$. Tomemos a modo de ejemplo $k = 8$ y $d = 3$.

$$11111011 \qquad 11111100 \qquad 11111101 \qquad 11111(110 \qquad 11111111 \qquad 0\ldots$$

- Caso 1:

$$x = u_1 u_2 \ldots u_k \quad v_1 v_2 \ldots v_d v_{d+1}$$

- Caso 2:

$$x = u_{k-d-1} \ldots u_k \quad v_1 v_2 \ldots v_k$$

- Caso 3:

$$x = u_{n+1} u_{n+2} \ldots u_k \quad v_1 v_2 \ldots v_{d+n+1}$$

con $n \in \{1, 2, \ldots, k - d - 2\}$.

- Caso 4:

$$x = u_{k-d-1+n} u_{k-d+n} \ldots u_k \quad v_1 v_2 \ldots v_k \quad w_1 w_2 \ldots w_{d+1-n}$$

con $n \in \{1, 2, \ldots, d\}$

- Caso 5: Si x comienza al final de $X(k)$ o cerca, se pueden llegar a necesitar palabras fuera de $X(k)$ para completar $d + k + 1$.

Análisis por caso - Caso 1

$$x = u_1 u_2 \dots u_k \quad v_1 v_2 \dots v_d v_{d+1}$$

Este caso representa a la ocurrencia alineada de u de tamaño k seguido por los primeros $d+1$ símbolos de v

$$(00000000 \qquad 0000)\ 0001$$

$$(00000001 \qquad 0000)\ 0010$$

$$(00000010 \qquad 0000)\ 0011$$

$$\vdots$$

$$(00001110 \qquad 0000)\ 1111$$

$$(00001111 \qquad 0001)\ 0000$$

$$(00010000 \qquad 0001)\ 0001$$

$$\vdots$$

$$(11111110 \qquad 1111)\ 1111$$

Análisis por caso - Caso 1

$$x = u_1 u_2 \dots u_k \quad v_1 v_2 \dots v_d v_{d+1}$$

Este caso representa a la ocurrencia alineada de u de tamaño k seguido por los primeros $d+1$ símbolos de v

$$(00000000 \qquad 0000)\ 0001$$

$$(00000001 \qquad 0000)\ 0010$$

$$(00000010 \qquad 0000)\ 0011$$

$$\vdots$$

$$(00001110 \qquad 0000)\ 1111$$

$$(00001111 \qquad 0001)\ 0000$$

$$(00010000 \qquad 0001)\ 0001$$

$$\vdots$$

$$(11111110 \qquad 1111)\ 1111$$

Análisis por caso - Caso 1

$$x = u_1 u_2 \dots u_k \quad v_1 v_2 \dots v_d v_{d+1}$$

Este caso representa a la ocurrencia alineada de u de tamaño k seguido por los primeros $d+1$ símbolos de v

$$\underbrace{A}_{d+1} \qquad \underbrace{B}_{k-d-1} \qquad A$$

$$\underbrace{A}_{d+1} \qquad \underbrace{11\dots1}_{k-d-1} \qquad next(A)$$

$(00000000 \quad 0000)\ 0001$

$(00000001 \quad 0000)\ 0010$

$(00000010 \quad 0000)\ 0011$

$\vdots$

$(00001110 \quad 0000)\ 1111$

$(00001111 \quad 0001)\ 0000$

$(00010000 \quad 0001)\ 0001$

$\vdots$

$(11111110 \quad 1111)\ 1111$

Análisis por caso - Caso 1

$$x = u_1 u_2 \dots u_k \quad v_1 v_2 \dots v_d v_{d+1}$$

Este caso representa a la ocurrencia alineada de u de tamaño k seguido por los primeros $d+1$ símbolos de v

$$(00000000 \quad 0000)\ 0001$$
$$(00000001 \quad 0000)\ 0010$$
$$(00000010 \quad 0000)\ 0011$$
$$\vdots$$
$$(00001110 \quad 0000)\ 1111$$
$$(00001111 \quad 0001)\ 0000$$
$$(00010000 \quad 0001)\ 0001$$
$$\vdots$$
$$(11111110 \quad 1111)\ 1111$$

$$\underbrace{A}_{d+1} \quad \underbrace{B}_{k-d-1} \quad A$$

$$\underbrace{A}_{d+1} \quad \underbrace{11\dots1}_{k-d-1} \quad next(A)$$

Del primer esquema tenemos:

$$2^{d+1}(2^{k-d-1} - 1) = 2^k - \frac{1}{2 \cdot 2^d}$$

Mientras que del segundo:

$$2^{d+1} - 1$$

Juntos son menos que $2^k - 2 \cdot 2^d$

Análisis por caso - Caso 2

$$x = u_{k-d-1} \dots u_k \quad v_1 v_2 \dots v_k$$

Este caso representa a la ocurrencia alineada de v de tamaño k precedida por los últimos $d+1$ símbolos de u

$$0000\ (0000 \qquad 00000001)$$

$$0000\ (\ 0001 \qquad 00000010)$$

$$\vdots$$

$$0000\ (1111 \qquad 10000000)$$

$$1000\ (0000 \qquad 10000001)$$

$$\vdots$$

$$1111\ (1110 \qquad 11111111)$$

Análisis por caso - Caso 2

$$x = u_{k-d-1} \dots u_k \quad v_1 v_2 \dots v_k$$

Este caso representa a la ocurrencia alineada de v de tamaño k precedida por los últimos $d+1$ símbolos de u

$0000\ (0000 \quad 00000001)$

$0000\ (\ 0001 \quad 00000010)$

$\vdots$

$0000\ (1111 \quad 10000000)$

$1000\ (0000 \quad 10000001)$

$\vdots$

$1111\ (1110 \quad 11111111)$

Análisis por caso - Caso 2

$$x = u_{k-d-1} \dots u_k \quad v_1 v_2 \dots v_k$$

Este caso representa a la ocurrencia alineada de v de tamaño k precedida por los últimos $d+1$ símbolos de u

$0000\ (0000 \qquad 00000001)$

$0000\ (\ 0001 \qquad 00000010)$

$$\underbrace{A}_{d+1} \qquad \underbrace{B}_{k-d-1} \qquad next(A)$$

$\vdots$

$0000\ (1111 \qquad 10000000)$

$1000\ (0000 \qquad 10000001)$

$\vdots$

$1111\ (1110 \qquad 11111111)$

Análisis por caso - Caso 2

$$x = u_{k-d-1} \dots u_k \quad v_1 v_2 \dots v_k$$

Este caso representa a la ocurrencia alineada de v de tamaño k precedida por los últimos $d+1$ símbolos de u

$0000\ (0000 \quad 00000001)$

$0000\ (0001 \quad 00000010)$

$\vdots$

$0000\ (1111 \quad 10000000)$

$1000\ (0000 \quad 10000001)$

$\vdots$

$1111\ (1110 \quad 11111111)$

$$\underbrace{A}_{d+1} \qquad \underbrace{B}_{k-d-1} \qquad next(A)$$

Este esquema nos da:

$$(2^{d+1}2^{k-d}) - 1 = 2 \cdot 2^k - 1$$

palabras distintas.
Que es menos que $2 \cdot 2^k$ palabras distintas.

Análisis por caso - Caso 3

$$x = u_{n+1}u_{n+2}\dots u_k \quad v_1v_2\dots v_{d+n+1} \qquad n \in \{1, 2, \dots, k-d-2\}$$

Este caso representa cuando los $k+d+1$ símbolos son tomados de dos palabras u y v de longitud k y ninguna de las dos está completas.
Ejemplo tomando $n = 3$, $k = 8$ y $d = 3$.

$$000\ (0000\ 0 \qquad 000\ 0000)\ 1$$

$$000\ (0000\ 1 \qquad 000\ 0001)\ 0$$

$$000\ (0001\ 0 \qquad 000\ 0001)\ 1$$

$$000\ (0001\ 1 \qquad 000\ 0010)\ 0$$

$$\vdots$$

$$111\ (1110\ 1 \qquad 111\ 1111)\ 0$$

$$111\ (1111\ 0 \qquad 111\ 1111)\ 1$$

Análisis por caso - Caso 3

$$x = u_{n+1}u_{n+2}\dots u_k \quad v_1v_2\dots v_{d+n+1} \qquad n \in \{1, 2, \dots, k-d-2\}$$

Este caso representa cuando los $k+d+1$ símbolos son tomados de dos palabras u y v de longitud k y ninguna de las dos está completas.
Ejemplo tomando $n = 1$, $k = 8$ y $d = 3$.

$$\begin{array}{ll}
0\ (0000\ 000 & 0\ 0000)\ 001 \\
0\ (0000\ 001 & 0\ 0000)\ 010 \\
\vdots & \\
0\ (0001\ 110 & 0\ 0001)\ 111 \\
0\ (0001\ 111 & 0\ 0010)\ 000 \\
0\ (0010\ 000 & 0\ 0010)\ 001 \\
\vdots & \\
1\ (1111\ 101 & 1\ 1111)\ 110 \\
0\ (1111\ 110 & 1\ 1111)\ 111
\end{array}$$

Análisis por caso - Caso 3

$$x = u_{n+1}u_{n+2}\ldots u_k \quad v_1v_2\ldots v_{d+n+1} \qquad n \in \{1, 2, \ldots, k-d-2\}$$

Este caso representa cuando los $k+d+1$ símbolos son tomados de dos palabras u y v de longitud k y ninguna de las dos está completas.
Ejemplo tomando $n = 1$, $k = 8$ y $d = 3$.

$$0\ (0000\ 000 \qquad 0\ 0000)\ 001$$
$$0\ (0000\ 001 \qquad 0\ 0000)\ 010$$
$$\vdots$$
$$0\ (0001\ 110 \qquad 0\ 0001)\ 111$$
$$0\ (0001\ 111 \qquad 0\ 0010)\ 000$$
$$0\ (0010\ 000 \qquad 0\ 0010)\ 001$$
$$\vdots$$
$$1\ (1111\ 101 \qquad 1\ 1111)\ 110$$
$$0\ (1111\ 110 \qquad 1\ 1111)\ 111$$

Análisis por caso - Caso 3

$$x = u_{n+1}u_{n+2}\dots u_k \quad v_1v_2\dots v_{d+n+1} \qquad n \in \{1,2,\dots,k-d-2\}$$

Este caso representa cuando los $k+d+1$ símbolos son tomados de dos palabras u y v de longitud k y ninguna de las dos está completas.
Ejemplo tomando $n=1$, $k=8$ y $d=3$.

$$\begin{array}{ll}
0\ (\color{red}{0000}\ 000 & 0\ \color{red}{0000})\ 001 \\
0\ (\color{red}{0000}\ 001 & 0\ \color{red}{0000})\ 010 \\
\vdots & \\
0\ (\color{red}{0001}\ 110 & 0\ \color{red}{0001})\ 111 \\
0\ (\color{red}{0001}\ \color{blue}{111} & 0\ \color{cyan}{0010})\ 000 \\
0\ (\color{red}{0010}\ 000 & 0\ \color{red}{0010})\ 001 \\
\vdots & \\
1\ (\color{red}{1111}\ 101 & 1\ \color{red}{1111})\ 110 \\
0\ (\color{red}{1111}\ 110 & 1\ \color{red}{1111})\ 111
\end{array}$$

$$\underbrace{\color{red}{A}}_{d+1} \quad \underbrace{B}_{k-d-1} \quad \color{red}{A}$$

$$\underbrace{\color{red}{A}}_{d+1} \quad \underbrace{\color{blue}{11\dots1}C}_{k-d-1} \quad \color{cyan}{next(A)}$$

Análisis por caso - Caso 3

$$x = u_{n+1}u_{n+2}\dots u_k \quad v_1v_2\dots v_{d+n+1} \qquad n \in \{1, 2, \dots, k-d-2\}$$

Este caso representa cuando los $k+d+1$ símbolos son tomados de dos palabras u y v de longitud k y ninguna de las dos está completas. Ejemplo tomando $n = 1$, $k = 8$ y $d = 3$.

$$
\begin{array}{ll}
0\ (0000\ 000 & 0\ 0000)\ 001 \\
0\ (0000\ 001 & 0\ 0000)\ 010 \\
\vdots & \\
0\ (0001\ 110 & 0\ 0001)\ 111 \\
0\ (0001\ 111 & 0\ 0010)\ 000 \\
0\ (0010\ 000 & 0\ 0010)\ 001 \\
\vdots & \\
1\ (1111\ 101 & 1\ 1111)\ 110 \\
0\ (1111\ 110 & 1\ 1111)\ 111
\end{array}
$$

$$\underbrace{A}_{d+1} \quad \underbrace{B}_{k-d-1} \quad A$$

$$\underbrace{A}_{d+1} \quad \underbrace{11\dots1C}_{k-d-1} \quad next(A)$$

Pero el primer esquema ya lo contamos en el caso 1 y el segundo esquema es un caso particular de uno de los esquemas del caso 2. Por lo que el caso 3 no nos arroja nuevas palabras.

Análisis por caso - Caso 4

$$x = u_{k-d-1+n}u_{k-d+n}\dots u_k \quad v_1v_2\dots v_k \quad w_1w_2\dots w_{d+1-n}$$

con $n \in \{1, 2, \dots, d\}$
Este caso representa cuando los $k+d+1$ símbolos son tomados de tres palabras consecutivas u, v y w de longitud k de los cuales k símbolos son tomados de v y los restantes de u y w. Ejemplo tomando $n=1$, $k=8$ y $d=3$.

0000000 (0	000 0000 1	000)00010
0000000 (1	000 0001 0	000)00011
	$\vdots$	
0011111 (0	001 1111 1	001)10000
0011111 (1	010 0000 0	010)00001
	$\vdots$	
1111110 (1	111 1111 0	111)11111

Análisis por caso - Caso 4

$$x = u_{k-d-1+n}u_{k-d+n}\dots u_k \quad v_1v_2\dots v_k \quad w_1w_2\dots w_{d+1-n}$$

con $n \in \{1, 2, \dots, d\}$
Este caso representa cuando los $k+d+1$ símbolos son tomados de tres palabras consecutivas u, v y w de longitud k de los cuales k símbolos son tomados de v y los restantes de u y w. Ejemplo tomando $\mathbf{n = 2}$, $k = 8$ y $d = 3$.

$$
\begin{array}{lll}
000000\ (00 & 00\ 0000\ 01 & 00)000010 \\
000000\ (01 & 00\ 0000\ 10 & 00)000011 \\
 & \vdots & \\
001111\ (01 & 00\ 1111\ 10 & 00)111111 \\
001111\ (10 & 00\ 1111\ 11 & 01)000000 \\
001111\ (11 & 01\ 0000\ 00 & 01)000001 \\
 & \vdots & \\
111111\ (01 & 11\ 1111\ 10 & 11)111111
\end{array}
$$

Análisis por caso - Caso 4

$$x = u_{k-d-1+n}u_{k-d+n}\dots u_k \quad v_1v_2\dots v_k \quad w_1w_2\dots w_{d+1-n}$$

con $n \in \{1, 2, \dots, d\}$

000000 (00 00 0000 01 00)000010

000000 (01 00 0000 10 00)000011

⋮

001111 (01 00 1111 10 00)111111

001111 (10 00 1111 11 01)000000

001111 (11 01 0000 00 01)000001

⋮

111111 (01 11 1111 10 11)111111

Análisis por caso - Caso 4

$$x = u_{k-d-1+n}u_{k-d+n}\dots u_k \quad v_1v_2\dots v_k \quad w_1w_2\dots w_{d+1-n}$$

con $n \in \{1, 2, \dots, d\}$

$$000000\ (00 \quad 00\ 0000\ 01 \quad 00)000010$$

$$000000\ (01 \quad 00\ 0000\ 10 \quad 00)000011$$

$$\vdots$$

$$001111\ (01 \quad 00\ 1111\ 10 \quad 00)111111$$

$$001111\ (10 \quad 00\ 1111\ 11 \quad 01)000000$$

$$001111\ (11 \quad 01\ 0000\ 00 \quad 01)000001$$

$$\vdots$$

$$111111\ (01 \quad 11\ 1111\ 10 \quad 11)111111$$

$$\underbrace{A}_{n} \quad \underbrace{B}_{d+1-n} \quad \underbrace{C}_{k-d+1} \quad next(A) \quad B$$

$$\underbrace{1\dots10}_{n} \quad \underbrace{B}_{d+1-n} \quad \underbrace{1\dots1}_{k-d+1} \quad n(A) \quad n(B)$$

Para el primer esquema tenemos
$2^k \sum_{n=1}^{d} \frac{2^n-1}{2^n}$
Para el segundo esquema $2 \cdot 2^d \sum_{n=1}^{d} 2^{-n}$
Juntos son menos que

$$d2^k + 2 \cdot 2^d$$

Hay demasiadas palabras que no aparecen en $champ$

Si $champ$ fuera supernormal, la frecuencia experada de palabras que aparecen una o más veces en los primeros 2^n símbolos debería satisfacer:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\#\{w : |w| = n, |champ[1..,2^n]|_w > 0\}}{2^n} = 1 - e^{-1}$$

Hay demasiadas palabras que no aparecen en $champ$

Si $champ$ fuera supernormal, la frecuencia experada de palabras que aparecen una o más veces en los primeros 2^n símbolos debería satisfacer:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\#\{w : |w| = n, |champ[1..,2^n]|_w > 0\}}{2^n} = 1 - e^{-1}$$

Sabemos que $X(k)$ ocupa la mitad de las palabras de los primeros 2^{d+k+1} símbolos de $champ$. Si analizamos lo que sucede en las palabras de longitud $d + k + 1$ usando las cotas que calculamos en los diferentes casos, y asumimos que la mitad restante $(2^{d+k} + d + k - 1)$ son todas diferentes, entonces:

$$\lim_{d\to\infty} \frac{\#\{w : |w| = d + k + 1, |champ[1 \dots 2^{d+k+1}]|_w > 0\}}{2^{d+k+1}} <$$

$$\lim_{d\to\infty} \frac{\text{Caso } 1 + \text{Caso } 2 + \text{Caso } 4 + \text{Caso } 5 + \text{otra mitad}}{2^{d+k+1}} =$$

Hay demasiadas palabras que no aparecen en *champ*

Si *champ* fuera supernormal, la frecuencia experada de palabras que aparecen una o más veces en los primeros 2^n símbolos debería satisfacer:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\#\{w : |w| = n, |champ[1..,2^n]|_w > 0\}}{2^n} = 1 - e^{-1}$$

Sabemos que $X(k)$ ocupa la mitad de las palabras de los primeros 2^{d+k+1} símbolos de *champ*. Si analizamos lo que sucede en las palabras de longitud $d+k+1$ usando las cotas que calculamos en los diferentes casos, y asumimos que la mitad restante $(2^{d+k}+d+k-1)$ son todas diferentes, entonces:

$$\lim_{d\to\infty} \frac{\#\{w : |w| = d+k+1, |champ[1\dots 2^{d+k+1}]|_w > 0\}}{2^{d+k+1}} <$$

$$\lim_{d\to\infty} \frac{\text{Caso } 1 + \text{Caso } 2 + \text{Caso } 4 + \text{Caso } 5 + \text{otra mitad}}{2^{d+k+1}} =$$

$$\lim_{d\to\infty} \frac{(2^k - 2\cdot 2^d) + (2\cdot 2^k) + (d2^k + 2\cdot 2^d) + (2d+k+1) + (2^{d+k})}{2^{d+k+1}} =$$

$$\frac{1}{2} < 1 - e^{-1}$$

Acotando palabras distintas en $champ$

Finalmente, si en $champ$ consideramos que los n's tales que $n = d + 2^d + 1$ son una subsecuencia de $n = 1, 2, \ldots,$ podemos afirmar que si:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\#\{w : |w| = n, |champ[1..,2^n]|_w > 0\}}{2^n}$$

existe, este no es $1 - e^{-1}$.

Corolario

Si x es normal, no necesariamente x es supernormal.

Supermormal $\Rightarrow$ Normal - Idea de la demostración

- Fijamos $\lambda = 1$ y veremos que si x es 1-supernormal entonces es normal.
- Para cada ϵ, definimos un k_0 tal que desde la cantidad k_0 haya $\frac{\epsilon}{2}$ palabras.
- Consideramos que una posición en $x[1 \ldots 2^n]$ es *culpable* si la palabra que comienza en esa posición ocurre más de k_0 veces en $x[1 \ldots 2^n]$.
- Acotamos la cantidad de posiciones culpables en $x[1 \ldots 2^n]$ por $2^n\epsilon$
- Con esto, podemos fijar un n, un ϵ y una palabra w y dar una cota superior de la cantidad de apariciones de w en $x[1 \ldots 2^n]$.
- En el límite, esta cota es la esperada $(2^{-|w|})$
- Por último utilizamos el Hot-spot Lemma para ver que x es normal.

El conjunto Bad

Definición

Sea $Bad(n, w, \epsilon)$el conjunto de palabras binarias de longitud n donde w difiere de la frecuencia esperada por más que $n\epsilon$. Entonces,

$$Bad(n, w, \epsilon) = \left\{ v \in \{0, 1\}^n : \left| |v|_w - n2^{-|w|} \right| \geq \epsilon n \right\}$$

Teniendo en cuenta

Una vez acotadas las posiciones culpables, fijamos n, ϵ y w y damos una cota superior de la cantidad de ocurrencias de w en $x[1.,2^n]$. Para eso, consideramos que:

1. Cada posición culpable tiene a lo sumo una ocurrencia de w
2. Cada bloque en $Bad(n, w, \epsilon)$ ocurre en $x[1.,2^n]$ a lo sumo k_0 veces
3. Cada bloque en $Bad(n, w, \epsilon)$ tiene a lo sumo $n - |w| + 1$ ocurrencias de w.
4. La secuencia $x[1.,2^n]$ puede ser dividida en a lo sumo $2^n/n$ bloques consecutivos de longitud n.
5. Cada bloque de longitud n que comienza en una posición no culpable, y no está en bad contiene a lo sumo $n2^{-|w|} + \epsilon n$ ocurrencias de w.
6. Entre dos bloques consecutivos de longitud n hay a lo sumo $|w| - 1$ ocurrencias de w.

Cota para ocurrencias de w

$$
\begin{aligned}
|x[1..2^n]|_w \leq\; & \#\text{posiciones culpables}+ \\
& k_0 \#(\text{bloques malos})(n-|w|+1)+ \\
& \#(\text{bloques no malos empezando} \\
& \text{en posiciones no culpables})(n2^{-|w|}+\epsilon n)+ \\
& \#(\text{interbloques})(|w|-1) \\
\leq\; & 2^n\epsilon+ \\
& 2^{n+1}e^{-\epsilon^2 n/(6|w|)}(n-|w|+1)+ \\
& (2^n/n)(n2^{-|w|}+\epsilon n)+ \\
& (2^n/n)(|w|-1)
\end{aligned}
$$

Cota para ocurrencias de w

$$
\begin{aligned}
|x[1.,2^n]|_w \leq & \#\text{posiciones culpables}+ \\
& k_0\#(\text{bloques malos})(n-|w|+1)+ \\
& \#(\text{bloques no malos empezando} \\
& \text{en posiciones no culpables})(n2^{-|w|}+\epsilon n)+ \\
& \#(\text{interbloques})(|w|-1) \\
\leq & 2^n\epsilon+ \\
& 2^{n+1}e^{-\epsilon^2 n/(6|w|)}(n-|w|+1)+ \\
& (2^n/n)(n2^{-|w|}+\epsilon n)+ \\
& (2^n/n)(|w|-1)
\end{aligned}
$$

Tomando el límite nos queda que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|x[1.,2^n]|_w}{2^n}=2^{-|w|}$$

Hot Spot Lemma

Definición

Una secuencia es normal si y solo si existe una constante C tal que para infinitas longitudes ℓ y para todo w en $\{0,1\}^\ell$,

$$\limsup_{N\to\infty} \frac{|x[1..N]|_w}{N} \leq C\frac{1}{2^{|w|}}$$

Podemos usar el Hot Spot Lemma para concluir que la secuencia es normal.

Agradecimiento y Trabajo futuro

- Demostrar que casi todas las palabras son supernormales
- Encontrar una palabra supernormal (Dar un algoritmo)
- Caracterizar la supernormalidad en términos de compresión

¡Fin!

¿Preguntas?

Bibliografía

Bailey, D. H., and Misiurewicz, M.
A strong hot spot theorem.
Proceedings of the American Mathematical Society 134, 9 (2006), 2495–2501.

Becher, V., and Carton, O.
Normal numbers and computer science.
In *Sequences, Groups, and Number Theory*, V. Berthé and M. Rigo, Eds. Springer International Publishing, Cham, 2018, pp. 233–269.

Becher, V., Carton, O., and Cunningham, I.
Low discrepancy sequences failing poissonian pair correlations.
Archiv der Mathematik 113 (04 2019).

Borel, É.
Les probabilités dénombrables et leurs applications arithmétiques.
Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo (1884-1940) 27, 1 (Dec 1909), 247–271.

Bugeaud, Y.
Distribution Modulo One and Diophantine Approximation.
No. 193 in Cambridge Tracts in Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2012.

Champernowne, D. G.
The Construction of Decimals Normal in the Scale of Ten.
Journal of the London Mathematical Society s1-8, 4 (10 1933), 254–260.

Figuiera, S., and Nies, A.
Feasible analysis and randomness.
Theory Comput Syst (2015) 56 (2015), 439.

Kuipers, L., and Niederreiter, H.
Uniform distribution of sequences.
Dover Publications, Inc., New York, 2006.

Pirsic, I., and Stockinger, W.
The champernowne constant is not poissonian.
Funct. Approx. Comment. Math. 60, 2 (03 2019), 253–262.

Sierpinski, W.
Démonstration élémentaire du théorème de m. borel sur les nombres absolument normaux et détermination effective d'une tel nombre.
Bulletin de la Société Mathématique de France 45 (1917), 125–132.

Weiss, B.