

Devoir 3

Lucas Pandolphi Zini (2177706)

25 mars 2024

**POLYTECHNIQUE
MONTREAL**

UNIVERSITÉ
D'INGÉNIERIE



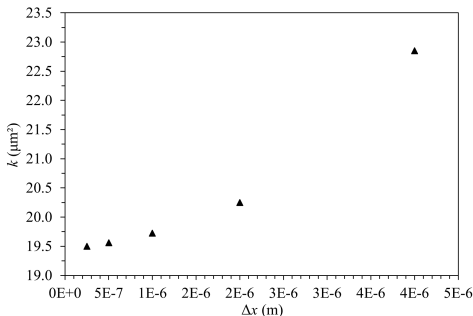
(A) Incertitude sur la solution numérique (u_{num})

Maillage le plus fin considéré : $N_x = 200$ et $\Delta x = 1 \times 10^{-6}$ m.

L'ordre de convergence observé (\hat{p}) a été obtenu en calculant la perméabilité (k) pour trois maillages avec un facteur de raffinement $r = 2$:

$$\hat{p} = \frac{\ln \left(\frac{f_3 - f_2}{f_2 - f_1} \right)}{\ln 2} = \frac{\ln \left(\frac{22,8513 - 20,2503}{20,2503 - 19,7265} \right)}{\ln 2} = 2,3120.$$

La convergence asymptotique est illustrée dans la figure ci-dessous :



(A) Incertitude sur la solution numérique (u_{num})

Il s'est avéré qu'il faut calculer le *Grid Convergence Index* (GCI), défini à un niveau de confiance de 95,4 % :

$$\left| \frac{\hat{p} - p_f}{p_f} \right| = \left| \frac{2,3120 - 2}{2} \right| = 0,1560 > 0,1 \Rightarrow Fs = 3;$$

$$p = \min(\max(0,5; \hat{p}); p_f) = \min(\max(0,5; 2,3120); 2) = 2;$$

$$\text{GCI} = \frac{3}{r^p - 1} |f_2 - f_1| = \frac{3}{2^2 - 1} |20,2503 - 19,7265| = 0,5238 \mu\text{m}^2.$$

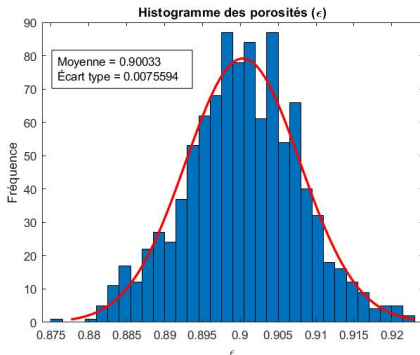
L'incertitude numérique est donc

$$u_{\text{num}} = \frac{\text{GCI}}{2} = 0,2619 \mu\text{m}^2.$$

(B) Incertitude sur les données d'entrée (u_{input})

La méthode Monte-Carlo a été utilisée pour estimer u_{input} avec un échantillon de 1000 valeurs de porosité (ϵ) et de taille des fibres.

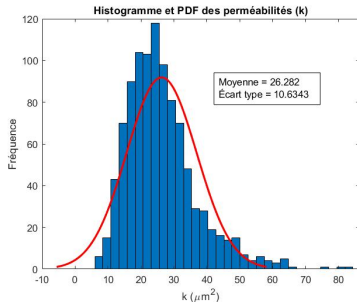
L'histogramme des porosités obtenues et leur fonction de densité de probabilité (PDF) sont présentés ci-dessous :



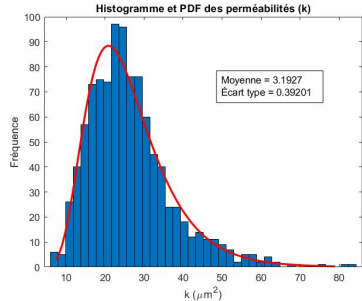
La distribution normale obéit aux données d'entrée
($\bar{\epsilon} = 0,900$, $\sigma = 0,0075$).

(B) Incertitude sur les données d'entrée (u_{input})

Les résultats de perméabilité suivent la loi log-normale, comme le montrent les figures ci-dessous :



Distribution normale



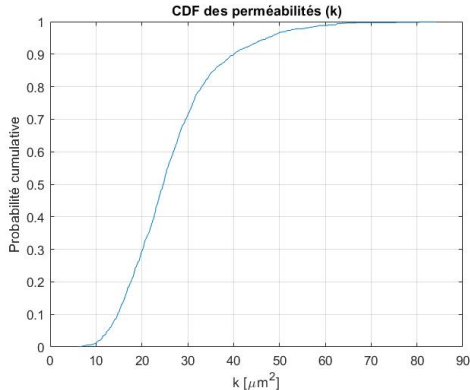
Distribution log-normale

Moyenne : $e^{\mu} = e^{3,1927} = 24,3532 \mu\text{m}^2$.

Écart type : $e^{\sigma} = e^{0,39201} = 1,4800 \mu\text{m}^2$.

(B) Incertitude sur les données d'entrée (u_{input})

La fonction de distribution cumulative (CDF) correspondant à la distribution log-normale est présentée dans la figure suivante :



u_{input} correspond à l'écart type, soit $u_{\text{input}} = 1,4800$.

(C) Incertitude des données expérimentales (u_D)

L'incertitude des données expérimentales a deux composantes :

- b_r , la composante épistémique, informée par le fabricant du perméamètre ($\pm 10 \mu\text{m}^2$);
- s_r , la composante aléatoire, représentée par l'écart type des mesures de perméabilité ($14,7 \mu\text{m}^2$).

u_D est donc

$$u_D^2 = u_r^2 = b_r^2 + s_r^2 = 10^2 + 14,7^2 = 316,1 \mu\text{m}^4$$

$$u_D = u_r = \sqrt{316,1} = 17,8 \mu\text{m}^2.$$

(D) Erreur de la simulation (E)

L'erreur de la simulation est obtenue par

$$E = S - D,$$

où S est la solution numérique, prise comme la médiane des valeurs de perméabilités, et D est la valeur expérimentale, considérée comme la perméabilité médiane mesurée.

Donc, $S = 24,7 \mu\text{m}^2$ et $D = 80,6 \mu\text{m}^2$.

$$E = 24.7 - 80.6 = -55,9 \mu\text{m}^2.$$

(E) Erreur du modèle (δ_{model})

δ_{model} contient différentes contributions :

$$\delta_{\text{model}} = E - (\delta_{\text{input}} + \delta_{\text{num}} - \delta_D)$$

Soit u_{val} l'estimation de l'écart type de la combinaison des erreurs ($\delta_{\text{input}} + \delta_{\text{num}} - \delta_D$). L'erreur du modèle est contenue dans un intervalle :

$$\delta_{\text{model}} \in [E - \kappa u_{\text{val}}, E + \kappa u_{\text{val}}],$$

où $\kappa = 2$ pour un niveau de confiance de 95,4 %.

u_{val} est calculée par

$$u_{\text{val}} = \sqrt{u_{\text{num}}^2 + u_{\text{input}}^2 + u_D^2} = \sqrt{0,2619^2 + 1,4800^2 + 17,8^2}$$

$$u_{\text{val}} = 17,8633 \mu\text{m}^2 \approx 17,8 \mu\text{m}^2.$$

u_{val} est dominée par la composante expérimentale, u_D .

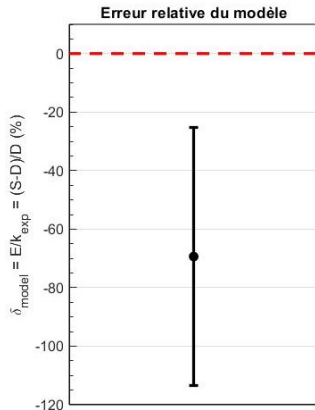
(E) Erreur du modèle (δ_{model})

E est donc une estimation de δ_{model} dans l'intervalle

$$[-55,9 - 2 \times 17,8 \leq \delta_{\text{model}} \leq -55,9 + 2 \times 17,8] \mu\text{m}^2$$

$$[-91,5 \leq \delta_{\text{model}} \leq -20,3] \mu\text{m}^2.$$

L'erreur relative du modèle est représentée dans la figure suivante :



(E) Adéquation du modèle

Le modèle n'est pas valide. Étant donné que $|E| > 2 \times u_{\text{val}}$, il y a une erreur significative entre la simulation et les données expérimentales. Les approximations grossières dans l'étape de simulation suggèrent que le modèle est inadéquat.

Le graphique précédent montre que l'incertitude sur δ_{model} n'atteint pas zéro ; il n'y a donc pas de chevauchement entre les données expérimentales et les réponses de la simulation. Cet écart correspond à un fort biais négatif causé par une erreur systématique constante.

À partir de ces conclusions, certaines améliorations peuvent être envisagées :

- ne pas considérer un ensemble de fibres parallèles, mais un maillage plus complexe et physiquement raisonnable ;
- réaliser la simulation en 3D ;
- considérer la distribution log-normale pour des tailles des fibres et des valeurs de porosité.

Les codes sont disponibles sur

<https://github.com/lucaspzini/MEC8211.git>.