

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

GABRIEL FERNANDES MOTA - 11796402

LUCAS QUARESMA MEDINA LAM - 11796399

ROBERTO OLIVEIRA BOLGHERONI - 11796430

EXERCÍCIO PROGRAMA 2

Modelagem de experimentos físicos

São Paulo

2021

1. INTRODUÇÃO

Esse trabalho da Disciplina MAC0209 - Modelagem e Simulação tem como objetivo estudar e modelar diferentes tipos de sistemas físicos, de formas distintas - no caso, considerando ou não as forças de amortecimento - utilizando como referências experimentos realizados no Laboratório Virtual de Mecânica (<http://www.fep.if.usp.br/~fisfoto/index.php>).

Escolhemos 3 experimentos: Atrito , Queda Livre e Pêndulo Simples, descritos nas subseções a 1.1, 1.2 e 1.3 a seguir.

No entanto, de modo geral, precisamos introduzir os conceitos de velocidade e aceleração instantâneas.

Temos que para qualquer modelo físico que represente um corpo em movimento, podemos estimar as velocidades e acelerações médias de todo o percurso com as seguintes equações:

- Velocidade média:

$$v_{med} = \frac{\Delta s}{\Delta t} ,$$

ou seja, variação de posição/angulação sobre variação do tempo em todo o percurso.

- Aceleração média:

$$a_{med} = \frac{\Delta v}{\Delta t} ,$$

ou seja, variação da velocidade sobre variação do tempo em todo o percurso.

Indo além, podemos obter os valores de velocidades e acelerações instantâneas pelo limite das equações anteriores quando o valor da variação de tempo tende a zero, ou seja, através das equações

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} \quad \text{e} \quad a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

Dessa forma, quanto menor o intervalo de tempo utilizado para o cálculo, melhor a aproximação dos valores de velocidade e aceleração instantâneas.

1.1 Descida na rampa (Atrito):

Esse experimento trata do movimento descida de um bloco sobre um plano inclinado. Esse experimento possui diversos fatores que influenciam os

resultados, como o material do bloco, o material do plano, o peso do bloco e a inclinação da rampa.

Como o nosso intuito com a modelagem é analisar a influência do atrito, optamos por escolher um experimento de cada variação:

- Bloco de aço, superfície de madeira;
- Bloco de aço, superfície de vidro, área de contato grande;
- Bloco de aço, superfície de vidro, área de contato pequena;
- Bloco de aço, superfície de vidro, com sobrepeso.

de maneira que, todos os experimentos tenham a mesma inclinação, para estudar como o tipo de material da rampa, assim como a área de contato e o peso do bloco afetam o atrito e o movimento.

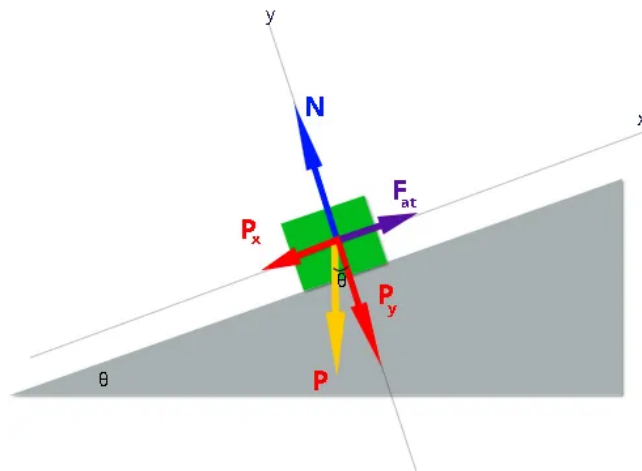


Figura 1: Ilustração das forças atuantes em um bloco numa rampa de inclinação θ , sendo N a força normal, P a força peso, P_x e P_y as decomposições da força peso horizontal e vertical, respectivamente, e F_{at} a força de atrito.

$$F = P_x - F_{at}$$

$$m * a = m * g * \text{sen}\theta - \mu_d * N$$

$$N = P_y = m * g * \cos\theta \Rightarrow m * a = m * g * \text{sen}\theta - \mu_d * m * g * \cos\theta$$

$$a = g * (\text{sen}\theta - \mu_d * \cos\theta)$$

1.2 Queda Livre:

Esse experimento se trata de um movimento vertical no qual os corpos são abandonados em uma certa altura e são acelerados pela gravidade em direção ao solo. Na queda dos corpos, o amortecimento do movimento, a força de arrasto atuante sobre ele é ocasionado pela resistência do ar.

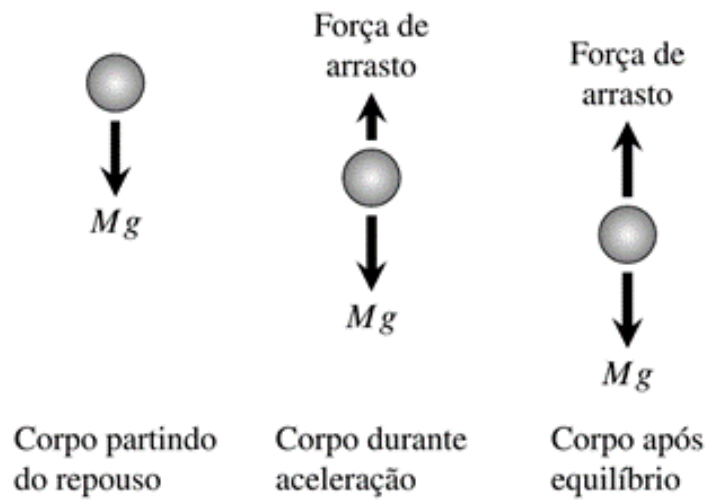


Figura 2: Esquema ilustrativo sobre como funciona a força de arrasto em instante de tempo diferente

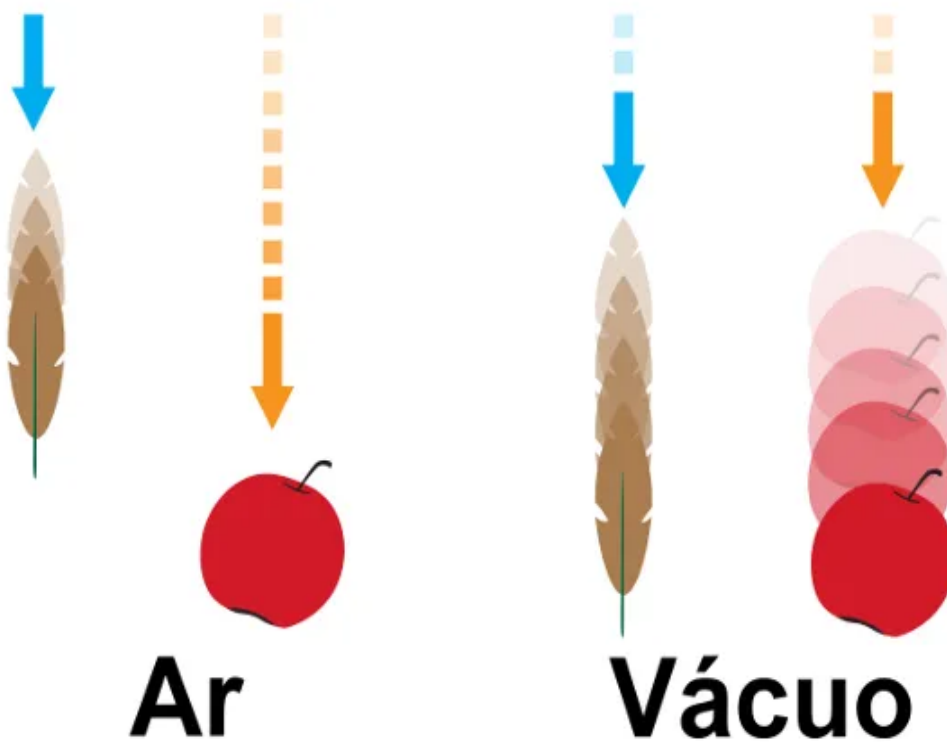


Figura 3: Esquema ilustrativo de como é a queda de corpos em sistemas diferentes, no primeiro na presença de uma atmosfera, em atrito com o ar, e no segundo, no vácuo.

A partícula se movimenta segundo a equação:

$$x = x_0 + v_0 t - g t^2 / 2$$

Em que x é a posição final, x_0 a posição inicial, v_0 a velocidade inicial, t o instante de tempo e g é a aceleração gravitacional.

Derivando temos:

$$dx/dt = v(t) = v_0 - gt$$

$$d^2x/dt^2 = dv/dt = a(t) = -g$$

Por Euler temos:

$$a(t) = \Delta V / \Delta T \Rightarrow -g \approx \Delta V / \Delta T \Rightarrow$$

$$v(t + \Delta t) - v(t) \approx -g \Delta T \Rightarrow v(t + \Delta t) \approx -g \Delta T + v(t)$$

Ainda:

$$v(t) = \Delta S / \Delta T \Rightarrow s(t + \Delta t) = v(t) \Delta T + s(t)$$

1.3 Pêndulo Simples:

O experimento do pêndulo simples consiste em pendurar uma esfera de massa m a um fio de comprimento L e massa desprezível. Então deslocamos o pêndulo de sua posição de repouso, de forma a criar um ângulo θ entre o eixo de repouso e a posição deslocada do pêndulo. Ao soltar o pêndulo, ele irá descrever uma trajetória oscilatória passando pelo ponto de repouso, descrevendo um Movimento Harmônico.

Podemos realizar duas modelagens para esse fenômeno. A simplificada considera apenas as forças envolvidas na figura acima, de forma que a força resultante no pêndulo em um dado instante pode ser adquirida pela equação

$$F_r = mg \sin \theta$$

Tomando ângulos muito pequenos ($\theta \ll 1$), temos

$$F_r = mg \theta$$

da qual podemos depreender

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{mg}{L} x = 0$$

Dessa forma, obtemos uma equação horária do deslocamento angular, a saber

$$\theta(t) = \theta_0 \cos(t \omega_0)$$

onde θ_0 é a amplitude (deslocamento inicial) de oscilação,

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

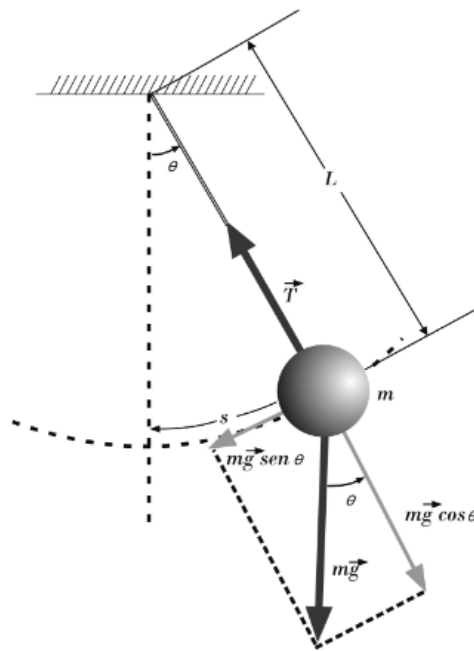


Figura 4: Ilustração do modelo (componentes) e das forças atuantes no pêndulo simples. A saber; Peso e Tração do fio. Descrição da força resultante na esfera, e a equação pela qual é dada.

No entanto, podemos considerar forças de amortecimento do movimento, nesse caso a resistência do ar, dada por

$$F = \frac{1}{2} C_D A \rho v^2,$$

onde ρ é a densidade do fluido onde se processa o deslocamento do corpo em kg/m³, v é a velocidade do corpo em m/s, A é a área de contato do corpo com o fluido em m² e C_D é uma constante adimensional que depende do número de Reynolds, dado por

$$R = \frac{\rho V r_c}{\eta},$$

onde V é a velocidade máxima de deslocamento do corpo em m/s, r_c é a dimensão característica do corpo em m (dado por seu diâmetro nesse caso) e η é a viscosidade do fluido em kg/m/s.

Ao simplificar a fórmula, chegamos na equação que determina a força de arrasto do ar como

$$F = -6\pi\eta r v,$$

onde r é o raio da esfera, permitindo modelar o movimento do pêndulo, adicionando o amortecimento, como segue:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + \frac{mg}{L} x = 0,$$

onde

$$b = 6\pi\eta r$$

Ao resolver a equação diferencial acima, obtemos

$$\theta(t) = \exp(-\alpha t)(\theta_0 \cos(\omega' t)),$$

onde

$$\alpha = \frac{b}{2m},$$

$$\omega' = (\omega_o^2 - \alpha^2)^{1/2}$$

de forma que podemos calcular a posição (angular) do pêndulo em um dado instante t de forma analítica, dadas suas características intrínsecas.

Como o sistema pendular se enquadra no Movimento Harmônico, espera-se que a curva do deslocamento angular em função do tempo no gráfico siga uma forma senoidal, como segue:

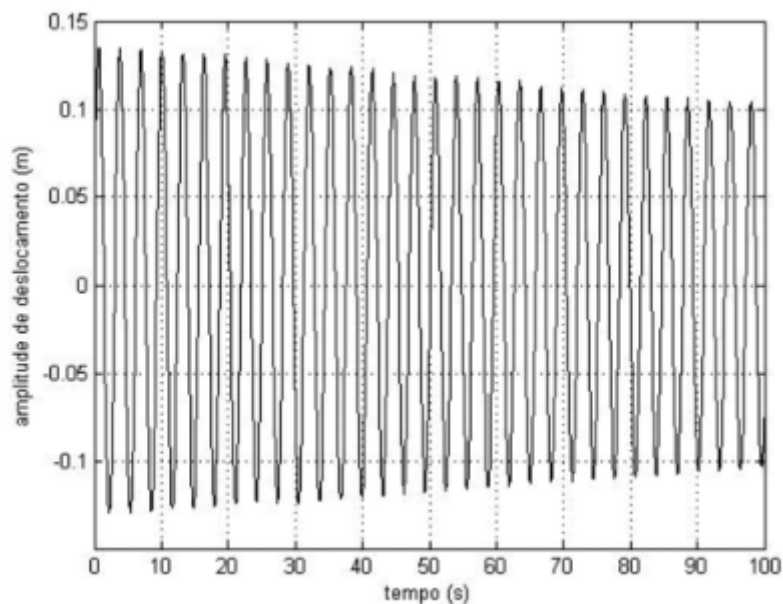


Figura 5: Gráfico da amplitude do deslocamento (em m) de um em função do tempo para um movimento harmônico. Note que a trajetória descreve uma curva senoidal.

2. MÉTODO

Para cada experimento observado, utilizamos os seguintes métodos de obtenção dos dados e cálculos analíticos:

2.1 Descida na rampa

O primeiro passo foi procurar dentre cada um dos experimentos do <http://www.fep.if.usp.br/~fisfoto/translacao/atrito/quadros.php>, analisando seus ângulos até encontrar um experimento entre cada um dos tipos com a mesma inclinação $\theta \approx 0.25$ radianos, para achar tal padrão analisamos a proporção das medidas das réguas nos quadros, a vertical e a sobre a rampa, sendo elas AM4, AVP1, AVG1 e AVS1, com respectivas fontes:

<http://www.fep.if.usp.br/~fisfoto/translacao/atrito/situacoes/atritoAM4.php>,
<http://www.fep.if.usp.br/~fisfoto/translacao/atrito/situacoes/atritoAVP1.php>,
<http://www.fep.if.usp.br/~fisfoto/translacao/atrito/situacoes/atritoAVG1.php>,
<http://www.fep.if.usp.br/~fisfoto/translacao/atrito/situacoes/atritoAVS1.php>.

Então, pela observação dos quadros, coletamos os dados de tempo e posição do bloco na rampa, então ‘plotamos’ esses dados em gráficos para analisar junto da fórmula que representa o movimento, apresentada na introdução, para formar a melhor maneira para criar um modelo e compará-los.

Então, modelamos o cálculo da aceleração pela fórmula da força de Newton, como descrito na introdução, usando $\theta = 1/4$ rad e gravidade = 981cm/s^2 , usando o método de euler a partir da aceleração para achar os valores de velocidade e a posição dos mesmos, a partir de uma posição inicial que é a mesma do bloco no primeiro quadro de cada experimento. No final ajustamos o coeficiente de atrito dinâmico para caber a modelagem de cada experimento, achando os seguintes valores:

$$\mu_{AM4} = 0.1766; \mu_{AVP1} = 0.221; \mu_{AVG1} = 0.158; \mu_{AVS1} = 0.1965.$$

$$F = P_x - F_{at}$$

$$m * a = m * g * \sin\theta - \mu_d * N$$

$$N = P_y = m * g * \cos\theta \Rightarrow m * a = m * g * \sin\theta - \mu_d * m * g * \cos\theta$$

$$a = g * (\sin\theta - \mu_d * \cos\theta)$$

$$v(t + \Delta t) = v(t) + a * \Delta t$$

$$s(t + \Delta t) = s(t) + \Delta t * v(t + \Delta t)$$

2.2 Queda livre

Primeiramente, entramos no site: <http://www.fep.if.usp.br/~fisfoto/translacao/quedaLivre/index.php> e coletamos os dados para realizar os experimentos observando os vídeos nos site de 5

movimentos. Pegamos o seguinte conjunto A de filmagens, que medem o tempo em deci-segundos e a escala da posição de 0,2 cm em 0,2 cm para poder simular melhor o movimento e estimar um comportamento esperado, devido aos possíveis erros de medidas e escalas.

A1 -
<http://www.fep.if.usp.br/~fisfoto/translacao/quedaLivre/situacoes/quedaLivreA1.php>
 A2 -
<http://www.fep.if.usp.br/~fisfoto/translacao/quedaLivre/situacoes/quedaLivreA2.php>
 A3 -
<http://www.fep.if.usp.br/~fisfoto/translacao/quedaLivre/situacoes/quedaLivreA3.php>
 A4 -
<http://www.fep.if.usp.br/~fisfoto/translacao/quedaLivre/situacoes/quedaLivreA4.php>
 A5 -
<http://www.fep.if.usp.br/~fisfoto/translacao/quedaLivre/situacoes/quedaLivreA5.php>
 .

Com os dados coletados, primeiro mudamos a escala dos dados, que foram coletados em deci-segundos para segundos, e também convertemos os 'blocos' de 0,2 cm para unidades de centímetro.

É calculada então a velocidade média nos pares de posições e pontos coletados para cada filmagem e guardamos em vetores.

Após isso, é utilizado o método de Euler para modelagem da posição, velocidade e aceleração com e sem resistência do ar. Sendo:

Posição sem resistência: $s(t + \Delta t) = v(t)\Delta T + s(t)$

Posição com resistência: $s_r(t + \Delta t) = v_r(t)\Delta T + s_r(t)$

Velocidade sem resistência: $v(t + \Delta t) \approx -g\Delta T + v(t)$

Velocidade com resistência: $v_r(t + \Delta t) \approx a_r(t)\Delta T + v_r(t)$

Aceleração sem resistência $a(t) = -g$

Aceleração com resistência $a_r(t) = -g - kv^2(t)$

É tomado a aceleração da gravidade como sendo $g = 980 \text{ cm/s}^2$ e a constante de proporcionalidade do corpo $k = 0,02$.

Para ilustrar os resultados, foram plotados dois gráficos para cada filmagem: um com a comparação entre a posição real, a modelada sem resistência do ar e a com resistência, e outro gráfico com comparação entre a velocidade real, a modelada sem resistência e as com resistência. Então os gráficos foram de: posição em função do tempo e velocidade em função do tempo.

2.3 Pêndulo simples

Foram capturados dados de cinco filmagens experimentais de um pêndulo simples, obtidos a partir do site

<http://www.fep.if.usp.br/~fisfoto/rotacao/penduloSimples/index.php>, como segue; uma esfera de $8,3 \times 10^{-3}$ kg foi presa a um fio de massa desprezível de comprimento $2,9 \times 10^{-1}$ m, deslocado inicialmente a um ângulo de $0,8^\circ$ a partir do repouso de 260° , após o qual o pêndulo foi solto. Durante aproximadamente 2 segundos, 30 fotos foram tiradas em intervalos de tempo pequenos variáveis em torno de 0.07 segundos, demarcando o tempo e a angulação do pêndulo em relação a um transferidor, permitindo obter o valor da angulação atual do pêndulo em cada instante. Para cada filmagem, foram tabelados os valores da angulação do pêndulo (entre 280° e 260°) para cada instante de tempo. Após a coleta dos dados, foram realizados cálculos para: a) obter a angulação do pêndulo em relação ao eixo de repouso (270°); b) obter o valor em radianos para cada ângulo.

Munidos de tais dados, podemos calcular, para cada intervalo de tempo, os valores de velocidade angular instantânea (rad/s) e aceleração angular instantânea (rad/s²), seguindo as relações

$$v_i = \frac{\theta_i - \theta_{i-1}}{t_i - t_{i-1}}, \quad a_i = \frac{v_{i+1} - v_i}{t_{i+1} - t_i},$$

onde v_i equivale a velocidade instantânea calculada no instante t_i , θ_i à angulação do pêndulo no instante t_i , t_i ao i -ésimo instante de tempo capturado, a_i à aceleração instantânea calculada em t_i .

Devido a dificuldade de se calcular tais valores para o primeiro e último intervalos de tempo, por simplicidade, foram adotados os seguintes valores: i) para o primeiro intervalo de tempo, a velocidade angular foi avaliada como zero; ii) para o último intervalo de tempo, a aceleração angular repete o valor anterior (o penúltimo).

Também foram calculadas as velocidades e acelerações médias, v_i^* e a_i^* , como segue: para cada instante de tempo t_i , foi calculada as médias das velocidades e acelerações v_i e a_i de cada filmagem, obtendo v_i^* .

Além dos valores de velocidade e aceleração angulares, foi possível calcular o valor do período (médio) de oscilação, ou seja, o tempo médio de uma oscilação completa do pêndulo, avaliado como a metade do tempo de duas oscilações. Note que as observações dos instantes 1, 15 e 30 passam pelo mesmo ponto (o inicial), para todas as filmagens.

Já a simulação programática do movimento do pêndulo foi feita de forma analítica; ou seja, a partir de equações horárias do ângulo foram criadas duas funções: uma que realiza o cálculo sem considerar forças de amortecimento e outra que considera a resistência do ar como amortecimento do movimento. Para ambas, foram calculados os valores em instantes equiespaçados - a cada 0.01 segundos - dentro do intervalo de 0 a 2.2 segundos. Ou seja, foram calculadas as posições do pêndulo em 220 instantes de tempo, para cada função (com e sem amortecimento).

Com os valores analíticos da posição (angulação) $f(t)$ em cada instante t em mãos, foi possível estimar, para cada filmagem, os valores de velocidade e aceleração

angular instantâneas, para cada um dos instantes de tempo, obedecendo as equações:

$$v_i = \frac{f(t_i) - f(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}}, \quad a_i = \frac{v_{i+1} - v_i}{t_{i+1} - t_i},$$

de forma análoga ao cálculo das velocidades e acelerações instantâneas experimentais.

Para cada filmagem, foram “printados” os valores de período médio e os valores analíticos obtidos calculados nos instantes de cada experimento, para as funções com e sem amortecimento. Também foram plotados os gráficos de: posição (ângulo) em função do tempo, velocidade angular em função do tempo, aceleração angular em função do tempo, comparados em 3 linhas distintas: valores experimentais, valores analíticos com e sem amortecimento.

Para a modelagem, foi necessário assumir valores para as características do sistema, realizado de acordo com a lista a seguir:

```
g = 9.81 # valor da aceleracao da gravidade
L = 0.2905 # comprimento do fio
ni = 1.853 # viscosidade do ar
raio = 1/100 # raio da esfera em metros
A = 1 # area de contato entre a esfera e o ar
a0 = -0.1570796327 # angulo inicial em relacao ao eixo de repouso
```

3. VERIFICAÇÃO DO PROGRAMA

3.1 Descida na Rampa

$$F = P_x - F_{at}$$

$$m * a = m * g * \text{sen}\theta - \mu_d * N$$

$$N = P_y = m * g * \text{cos}\theta \Rightarrow m * a = m * g * \text{sen}\theta - \mu_d * m * g * \text{cos}\theta$$

$$a = g * (\text{sen}\theta - \mu_d * \text{cos}\theta)$$

$$v(t + \Delta t) = v(t) + a * \Delta t$$

$$s(t + \Delta t) = s(t) + \Delta t * v(t + \Delta t)$$

Dado um valor inicial da posição (s_0) em centímetros, um tempo inicial (t_0) e um tempo final (t_f) em segundos, representando o início e o fim do intervalo de tempo do movimento, respectivamente, partindo do pressuposto que o corpo começa o movimento com velocidade inicial igual a 0, ou seja, velocidade no primeiro quadro, no momento t_0 , é igual a 0, além de um θ , que representa o ângulo de inclinação da rampa em radianos e μ_i que é o coeficiente de atrito dinâmico para esse movimento. Nessas circunstâncias o código para modelar tal sistema é o seguinte, ele retorna um objeto com uma lista de momentos dentro do intervalo e outras duas listas com os valores de posição e velocidade respectivamente em cada lista:

```
from math import sin, cos

def modelagem(s0, t0, tf, theta, mi):
    # s0 e t0 são o espaço e tempo iniciais respectivamente,
    # tf o tempo final, theta o ângulo de inclinação da rampa
    # e mi o coeficiente de atrito dinâmico
    s = [s0]
    t = [t0]
    dt = (tf-t0)/50
    v = [0]
    g = 981
    a = g*sin(theta) - mi*g*cos(theta)
    for i in range(0, 50):
        t.append(t[i] + dt)
        v.append(v[i] + a*dt)
        s.append(s[i] + v[i+1]*dt)
    return {
        "tempo": t,
        "velocidade": v,
        "espaço": s
    }
```

Lembrando que as funções \sin e \cos da biblioteca math recebem um número como parâmetro, que representa um ângulo em radianos, e retornam o valor do seno e cosseno, respectivamente.

Além disso, estamos usando 981cm/s^2 como aproximação para o valor da gravidade. Bom lembrar também que dividimos nosso intervalo em 50 sub-intervalos, ou seja $\Delta t = (t_f - t_0)/50$

Exemplo: um corpo que parte de movimento da posição 0 ($s_0 = 0$), partindo do repouso (velocidade inicial nula), no intervalo de tempo de 10 segundos ($t_0 = 0$ e $t_f = 10$) em uma rampa com inclinação de 45° ($\pi/4$ radianos, então $\theta \approx 0.785398$) e coeficiente de atrito dinâmico igual a 0.3 ($\mu_d = 0.3$).

$$a = g * (\sin\theta - \mu_d * \cos\theta)$$

$$a = 981 * (\sin(\pi/4) - 0.3 * \cos(\pi/4))$$

$$\sin(\pi/4) = \cos(\pi/4) \approx 0.7071$$

$$a = 981 * 0.7071 * 0.7 = 485.56557\text{cm/s}^2$$

$$\Delta t = (t_f - t_0)/50 = (10 - 0)/50 = 0.2\text{s}$$

$$v(t + \Delta t) = v(t) + a * \Delta t = v(t) + 485.56557 * 0.2 = v(t) + 97.113114$$

$$\text{Lembrando que } v(0) = 0$$

$$\text{Logo } v = [0, 97.113114, 194.226228, \dots, 4855.6557]$$

$$s(t + \Delta t) = s(t) + \Delta t * v(t + \Delta t) = s(t) + 0.2 * v(t + 0.2)$$

Com $s(0) = 0$ e dado o vetor v já calculado anteriormente temos:

$$s = [0, 97.113114 * 0.2, 97.113114 * 0.2 + 194.226228 * 0.2, \dots]$$

$$s = [0, 97.113114 * 0.2, 97.113114 * 0.2 * 3, \dots, 97.113114 * 0.2 * \sum(i = 1, i \leq n)(i)]$$

Sabendo que há 50 itens na lista, uma vez que é equivalente a quantidade de intervalos e definimos que a mesma é 50, então:

$$s = [0, 19.4226228, 58.2678684, \dots, 24763.8441]$$

Provamos portanto o funcionamento do algoritmo quando o mesmo tem o retorno para modelagem(0, 0, 10, 0.785398, 0.3) o seguinte:

```
{
    'tempo': [0, 0.2, 0.4, 0.6000000000000001, 0.8, 1.0, 1.2, 1.4, 1.5999999999999999,
1.7999999999999998, 1.9999999999999998, 2.1999999999999997, 2.4, 2.6,
2.8000000000000003, 3.0000000000000004, 3.2000000000000006, 3.4000000000000001,
3.6000000000000001, 3.8000000000000001, 4.0000000000000001, 4.2000000000000001,
4.4000000000000001, 4.6000000000000001, 4.8000000000000002, 5.0000000000000002,
5.2000000000000002, 5.4000000000000002, 5.6000000000000002, 5.8000000000000002,
6.0000000000000003, 6.2000000000000003, 6.4000000000000003, 6.6000000000000003,
6.8000000000000003, 7.0000000000000003, 7.2000000000000004, 7.4000000000000004,
7.6000000000000004, 7.8000000000000004, 8.0000000000000004, 8.2000000000000003,
8.4000000000000002, 8.6000000000000001, 8.8, 9.0, 9.2, 9.399999999999999,
9.599999999999998, 9.799999999999997, 9.999999999999996],
    'velocidade': [0, 97.11401585866864, 194.22803171733727, 291.34204757600594,
388.45606343467455, 485.57007929334316, 582.6840951520118, 679.7981110106804,
776.912126869349, 874.0261427280176, 971.1401585866862, 1068.254174445355,
1165.3681903040235, 1262.4822061626921, 1359.5962220213607, 1456.7102378800294,
1553.824253738698, 1650.9382695973666, 1748.0522854560352, 1845.1663013147038,
1942.2803171733724, 2039.394333032041, 2136.50834889071, 2233.6223647493784,
2330.736380608047, 2427.8503964667157, 2524.9644123253843, 2622.078428184053,
2719.1924440427215, 2816.30645990139, 2913.4204757600587, 3010.5344916187273,
3107.648507477396, 3204.7625233360645, 3301.876539194733, 3398.9905550534017,
```

```

3496.1045709120704, 3593.218586770739, 3690.3326026294076, 3787.446618488076,
3884.560634346745, 3981.6746502054134, 4078.788666064082, 4175.902681922751,
4273.01669778142, 4370.130713640088, 4467.244729498757, 4564.3587453574255,
4661.472761216094, 4758.586777074763, 4855.700792933431],
    'espaço': [0, 19.42280317173373, 58.268409515201185, 116.53681903040237,
194.22803171733727, 291.34204757600594, 407.8788666064083, 543.8384888085443,
699.2209141824142, 874.0261427280177, 1068.254174445355, 1281.9050093344258,
1514.9786473952306, 1767.475088627769, 2039.3943330320412, 2330.736380608047,
2641.501231355787, 2971.68888527526, 3321.299342366467, 3690.332602629408,
4078.7886660640825, 4486.667532670491, 4913.969202448633, 5360.693675398508,
5826.840951520117, 6312.4110308134605, 6817.403913278537, 7341.819598915348,
7885.658087723892, 8448.91937970417, 9031.603474856181, 9633.710373179927,
10255.240074675407, 10896.19257934262, 11556.567887181567, 12236.365998192248,
12935.586912374663, 13654.23062972881, 14392.297150254692, 15149.786473952307,
15926.698600821655, 16723.03353086274, 17538.791264075557, 18373.971800460105,
19228.57514001639, 20102.601282744406, 20996.05022864416, 21908.921977715643,
22841.216529958863, 23792.933885373815, 24764.074043960503]
}

```

3.2 Queda Livre

Nessa parte, faremos a verificação das seções do código que modela a Queda Livre.

Primeiramente, olhemos para a função que realiza a estimativa da velocidade do corpo utilizando os dados coletados:

```

def calculaVel(posicao, tempo):
    velocidade = [0]

    for i in range(1, len(posicao)):
        delta_s = posicao[i]-posicao[i-1]
        delta_t = tempo[i]-tempo[i-1]
        velocidade.append(delta_s/delta_t)
    return velocidade

```

Dado um vetor com as posições e um vetor com os tempos monta um vetor de velocidades e calcula a velocidade naquele instante, sendo a primeira sempre igual a 0. Utilizamos a seguinte fórmula para essa modelagem:

$$v(t_i) = \frac{s(t_i) - s(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}}$$

Fazendo a verificação então para uma possível entrada, como $s(t_i) = 20$ cm, $s(t_{i-1}) = 10$ cm, $t_i = 4$ s e $t_{i-1} = 2$ s temos:

$$v(4) = \frac{20 - 10}{4 - 2} = 5 \text{ cm/s}$$

Substituindo as entradas no programa, temos:

```
testPosicao = [10, 20]
testTempo = [2, 4]

testVel = calculaVel(testPosicao, testTempo)

print(testVel)

[0, 5.0]
```

tendo como saída na posição 0 e 1 do vetor de velocidade, 0 e 5 como esperado.

Agora, iremos olhar para as funções que fazem a modelagem e simulação do movimento, sem e com resistência do ar.

```
# CONSTANTES
GRAVITY = 980
k = 0.02

def aceleration():
    return -GRAVITY

def acelerationResistance(vt):
    return -GRAVITY - k*vt*abs(vt)

def velocity(vt, delta_t): # v(t + delta_t) = a(t)*delta_t + v(t)
    return aceleration()*delta_t + vt

def velocityResistance(vt, delta_t): # v_r(t + delta_t) = a_r(t)*delta_t + v_r(t)
    return acelerationResistance(vt)*delta_t + vt

def position(vt, st, delta_t): # s(t + delta_t) = v(t)*delta_t + s(t)
    return vt*delta_t + st
```

```
# CONSTANTES
GRAVITY = 980
k = 0.02
```

Temos então duas constantes, a aceleração da gravidade, que vale 980 cm/s², e o 'k', que é a constante específica para o corpo no cálculo da força de arrasto.

```
def aceleration():  
    return -GRAVITY
```

Para a função 'aceleration()' seu funcionamento é trivial, visto que apenas retorna o valor de uma constante com um sinal de menos.

```
def acelerationResistance(vt):  
    return -GRAVITY - k*vt*abs(vt)
```

Já para a função 'acelerationResistance(vt)', e vemos que esta retorna a mesma constante, subtraída da força de arrasto, que é dado pela fórmula $kv^2(t)$, onde $v(t)$ é a velocidade em algum instante de tempo. Sendo então $vt = -5$, temos:

$$a_r(t) = -980 - (0.02 * (-5) * 5) = -979.5$$

Substituindo os valores no código:

```
testAceleration = acelerationResistance(-5)  
print(testAceleration)  
-979.5
```

```
def velocity(vt, delta_t): #  $v(t + \text{delta\_t}) = a(t)*\text{delta\_t} + v(t)$   
    return aceleration()*delta_t + vt
```

Olhando para a função 'velocity(vt, delta_t)', vemos que ela retorna a velocidade sem resistência no próximo instante de tempo, que é calculado multiplicando a aceleração sem resistencia por um intervalo de tempo, adicionado da velocidade anterior. Sendo $vt = -5$, $\text{delta_t} = 0.01$, aceleração = -980

$$v(t) = -980 * 0.01 - 5 = -14.8$$

Substituindo os valores no código:

```
testVelocity = velocity(-5, 0.01)  
print(testVelocity)  
-14.8
```



```
def velocityResistance(vt, delta_t): #  $v_r(t + \text{delta\_t}) = a_r(t) * \text{delta\_t} + v_r(t)$   
    return accelerationResistance(vt)*delta_t + vt
```

Analisando agora a função 'velocityResistance(vt, delta_t)', vemos que ela retorna a velocidade com resistência no próximo instante de tempo, que é calculado multiplicando a aceleração com resistência por um intervalo de tempo, adicionado da velocidade anterior. Sendo $v_t = -5$, $\text{delta_t} = 0.01$, $\text{aceleração}_r = -979.5$

$$v_r(t) = -979.5 * 0.01 - 5 = -14.795$$

Substituindo os valores no código:

```
testVelocityResistance = velocityResistance(-5, 0.01)  
print(testVelocityResistance)  
  
-14.795
```

```
def position(vt, st, delta_t): #  $s(t + \text{delta\_t}) = v(t) * \text{delta\_t} + s(t)$   
    return vt*delta_t + st
```

Por último, observando a função 'position(vt, st, delta_t)', vemos que ela retorna a posição no próximo instante, multiplicando a velocidade no instante anterior pelo intervalo de tempo, acrescido da posição anterior. Sendo $v_t = -5$, $\text{delta_t} = 0.01$ e $s_t = -20$

$$s(t) = -5 * 0.01 - 20 = -20.05$$

Substituindo os valores no código:

```
testPosition = position(-5,-20, 0.01)  
print(testPosition)  
  
-20.05
```

Sendo essas, as partes do código em que calculam os valores que modelam e simulam o movimento, para inseri-los nos seus respectivos vetores e assim, conseguir plotar o gráfico da função.

3.3 Pêndulo Simples

Analisaremos a seguir as seções mais importantes do código encarregado de realizar os cálculos da modelagem e simulação do Pêndulo Simples.

Iniciamos observando as primeiras declarações e cálculos do programa.

```
# DADOS DO SISTEMA
g = 9.81 # valor da aceleracao da gravidade
L = 0.2905 # comprimento do fio
ni = 1.853 # viscosidade do ar
raio = 1/100 # raio da esfera em metros
A = 1 # area de contato entre a esfera e o ar
a0 = -0.1570796327 # angulo inicial em relacao ao eixo de repouso
```

Nessa primeira seção, definimos as variáveis características do sistema em análise.

```
# DADOS CALCULADOS DO SISTEMA
b = 6*math.pi*(raio)* ni * math.pow(10, -5) # valor auxiliar no calculo analitico amortecido
w0 = math.sqrt(g/L) # frequencia angular
m = 8.37 * 10**(-3) # massa da esfera em kg
alpha = b/(2*m) # valor auxiliar no calculo analitico amortecido
wL = math.sqrt( math.pow(w0,2) - math.pow(alpha,2) ) # valor auxiliar no calculo analitico amortecido
```

Em seguida, definimos os valores calculados para o sistema com base nas variáveis características, obedecendo às equações físicas descritas na introdução. Note que “w0” identifica o parâmetro ω_0 da introdução, “wL” o parâmetro ω , enquanto “alpha” é o α . Veja que fazemos uso da constante pi e das funções pow e sqrt da biblioteca math de python, que representam, respectivamente, a constante pi, a função de potenciação e a raiz quadrada. Considerando que as funções da biblioteca math de python retornam os valores descritos acima, note que cada parâmetro é calculado de acordo com as equações que os definem e, portanto, o código é correto. Vejamos a seguir a função que realiza o cálculo analítico do ângulo do pêndulo em um instante t de tempo.

```
def ang(t): # calculo analitico do angulo em funcao do tempo
    return a0 * math.cos(t * w0)
```

Dado que a0 e w0 são como descritos acima e math.cos retorna o valor aproximado do cosseno de um ângulo dado como parâmetro em radianos, veja que a função retorna o valor analítico do ângulo em função do tempo de acordo com a equação descrita na introdução.

```
def angAmort(t): # calculo analitico do angulo em funcao do tempo c/ amortecimento por resistencia do ar
    return math.exp(-alpha*t) * (a0*math.cos(wL*t))
```

É fácil de ver que, tomando alpha e wL como descritos acima e math.exp como a função da biblioteca math do python que retorna o valor da exponencial de um número dado como parâmetro, a função angAmort(t) acima retorna o valor do ângulo do pêndulo no instante t quando considerando a resistência do ar, seguindo a equação descrita na introdução.

Assim sendo, as funções que calculam analiticamente os valores de angulação do pêndulo estão corretas.

Vamos demonstrar com um teste. Tome um sistema de pêndulo com as variáveis características como definidas acima. Então o valores dados pelas equações da introdução para um instante $t = 2$, podem ser avaliadas, pelos métodos com e sem resistência do ar, como a seguir:

Para a função f calculando o ângulo sem resistência do ar

$$\begin{aligned} * f(2) &= \theta_0 \cdot \cos(t \cdot \omega_0) \sim (-0.1570796327) \cdot \cos\left(2 \cdot \sqrt{\frac{9.81}{0.2905}}\right) \\ &\sim -0.0921243443304 \end{aligned}$$

Calculando usando a função definida no código acima, obtemos:

```
ang(2)
```

```
-0.09212434433043971
```

Para a função f calculando o ângulo com resistência do ar

$$\begin{aligned} * f(t) &= e^{(-\alpha \cdot t)} \cdot (\theta_0 \cdot \cos(t \cdot \omega')) \sim e^{(2.086 \times 10^{-4} \cdot 2)} \cdot (-0.15707 \cdot \cos(2 \cdot \omega')) \\ &\sim -0.09212118292162974 \end{aligned}$$

Calculando usando a função definida no código acima, obtemos:

```
angAmort(2)
```

```
-0.09208590767003114
```

Ou seja, os valores obtidos pelo código são próximos os suficiente para avaliar os valores dados e, portanto, podemos atestar a correção do código.

Agora vejamos a aplicação dessas funções.

```
dt = 0.01 # intervalo de tempo entre cada ponto para o calculo analitico da posicao
t = 0 # instante de tempo inicial
```

```

while t < 2.2:
    # calculo analitico da angulacao atual de acordo com a angulacao inicial (a0) e o tempo atual
    aList.append(ang(t)) # sem amortecimento
    aListAmort.append(angAmort(t)) # amortecido
    # incremento do tempo de experimento
    tList.append(t)
    t += dt

```

Veja que as seções acima calculam os valores analíticos sem e com amortecimento do ângulo do pêndulo em cada instante t , para todos os valores de t no intervalo $[0, 2.2[$ distantes 0.01 segundos um do outro, inserindo os valores nos vetores que os agrupam.

```

# calculo das velocidades instantaneas como variacao do angulo sobre a variacao do tempo em cada intervalo
vList.append(0)
vListAmort.append(0)
t=dt
i=0
while t < 2.2:
    vList.append( ( ang(t) - ang(t-dt) )/dt )
    vListAmort.append( ( angAmort(t) - angAmort(t-dt) )/dt )
    t += dt
    i+=1

```

O código acima realiza o cálculo da velocidade instantânea analítica em cada instante de tempo t no intervalo $[0, 2.2[$ distantes 0.01 segundos um do outro. Note que

$(\text{ang}(t) - \text{ang}(t-dt))/dt$ e $(\text{angAmort}(t) - \text{angAmort}(t-dt))/dt$

realizam o cálculo das velocidades instantâneas sem e com amortecimento de acordo com as equações descritas anteriormente na seção 2.3, pois, se $\text{ang}(t)$ determina $\theta(t)$, e se $d_t = t_i - t_{i-1}, \forall i$,

então

$$\frac{\text{ang}(t_i) - \text{ang}(t_{i-1})}{d_t} = \frac{\theta(t_i) - \theta(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}} = v(t_i)$$

Veja que, também como dito anteriormente na seção 2.3, a velocidade instantânea no instante $t=0$ foi determinada como valendo zero, no código a seguir :

```

vList.append(0)
vListAmort.append(0)

```

```

# calculo das aceleracoes instantaneas como variacao da velocidade angular sobre a variacao do tempo em cada intervalo
t=0
i=0
while t < 2.2 -dt:
    accList.append((vList[i+1] - vList[i])/dt) # com amortecimento
    accListAmort.append((vListAmort[i+1] - vListAmort[i])/dt) # com amortecimento
    t += dt
    i+=1
accList.append(accList[len(accList) -1 ])
accListAmort.append(accListAmort[len(accListAmort) -1 ])

```

Para o cálculo das acelerações instantâneas analíticas, podemos seguir a mesma linha de prova.

$$\frac{(vList[i+1] - vList[i])/dt)}{d_t} \quad \text{e} \quad \frac{(vListAmort[i+1] - vListAmort[i])/dt)}{d_t}$$

calculam, respectivamente, as acelerações instantâneas utilizando os vetores $vList$ e $vListAmort$, que armazenam as velocidades instantâneas ao longo de todos os pontos t . Veja que

$vList[i]$ determina o valor da velocidade instantânea no instante de tempo $t_i = i \cdot d_t$, para número inteiro, então

$$\frac{vList[i+1] - vList[i]}{d_t} = \frac{v((i+1)d_t) - vList(i \cdot d_t)}{d_t} = \frac{v(t_{i+1}) - v(t)}{t_{i+1} - t_i}$$

Veja então que o código acima determina o cálculo dos valores de aceleração instantâneas de t_i de acordo com as equações da seção 2.3.

O código a seguir define os vetores que armazenarão os valores de velocidades e acelerações instantâneas de uma filmagem.

```
BASEV = []
BASEACC = []
```

Note que se $BASE$ é um vetor que armazena os instantes de tempo t_i das observações da filmagem, e $BASEANGLES$ é um vetor que armazena os valores dos ângulos das observações da filmagem, de tal forma que

$$BASE[i] = t_i \Rightarrow BASEANGLES[i] = \theta(t_i),$$

e se $BASEVMED$ e $BASEACCMED$ são vetores que armazenam, respectivamente, as velocidades e acelerações instantâneas médias de todas as filmagens em cada instante t , de forma que

$$BASEVMED[i] = \frac{1}{5} \cdot \sum_{j=0}^4 BASEV_j[i],$$

$$BASEACCMED[i] = \frac{1}{5} \cdot \sum_{j=0}^4 BASEACC_j[i],$$

então o código a seguir calcula as velocidades e acelerações instantâneas experimentais de todos os instantes t observados e calcula a parte de filmagem j nas médias de velocidades e acelerações instantâneas:

```

BASEV.append(0)

for j in range(1, len(BASET) ):
    BASEV.append( (BASEANGLES[j] - BASEANGLES[j-1])/(BASET[j]-BASET[j-1]) )
    BASEV_MED[j]+=((BASEANGLES[j] - BASEANGLES[j-1])/(BASET[j]-BASET[j-1]) /5)

for j in range(0, len(BASET)-1 ):
    BASEACC.append( (BASEV[j+1] - BASEV[j])/(BASET[j+1]-BASET[j]) )
    BASEACC_MED[j] += ((BASEV[j+1] - BASEV[j])/(BASET[j+1]-BASET[j])/5)
BASEACC.append(BASEACC[len(BASEACC)-1])
BASEACC_MED[len(BASEACC) -1 ] += (BASEACC[len(BASEACC)-1]/5)

```

Note que a velocidade instantânea inicial vale por convenção 0, de acordo com o descrito na seção 2.3. Note então que, para cada iteração, $BASET[j]$ equivale ao valor de j -ésimo instante de tempo da filmagem e que $BASEANGLES[j]$ equivale ao valor do j -ésimo ângulo do pêndulo. Portanto,

$$BASEV(j) = \frac{BASEANGLES[j] - BASEANGLES[j-1]}{BASET[j] - BASET[j-1]} = \frac{\theta_j - \theta_{j-1}}{t_j - t_{j-1}} = v(t_j)$$

que equivale à equação da velocidade instantânea dada na seção 2.3, e então

$$BASEACC(j) = \frac{BASEV[j+1] - BASEV[j]}{BASET[j+1] - BASET[j]} = \frac{v(t_{j+1}) - v(t_j)}{t_{j+1} - t_j} = a(t_j)$$

equivale à equação da aceleração instantânea dada na seção 2.3.

Além disso, se $BASEVMED[j]$ guarda o valor da média de velocidades instantâneas no instante t_j em todas as filmagens subtraído do valor de um quinto da velocidade instantânea no instante t_j da filmagem atual, então o código

```

BASEV_MED[j]+=((BASEANGLES[j] - BASEANGLES[j-1])/(BASET[j]-BASET[j-1]) /5)

```

adiciona o valor faltante, tornando o vetor em questão o armazém das médias das velocidades instantâneas de todas as filmagens. Um princípio análogo pode ser dito para o vetor contendo as médias das acelerações instantâneas em cada instante de todas as filmagens, pelo código seguinte

```

BASEACC_MED[j] += ((BASEV[j+1] - BASEV[j])/(BASET[j+1]-BASET[j])/5)

```

4. DADOS

Seguem abaixo os dados recolhidos para análise e os resultados obtidos para os cálculos realizados programaticamente durante a pesquisa.

4.1 Descida na rampa

4.1.1 Bloco de aço, rampa de madeira

Com coeficiente de atrito $\mu=0.1766$ e aceleração $a=77.50663720380177$ cm/s²

TEMPO (em s)	POSIÇÃO NA RAMPA (em cm)	POSIÇÃO NA MODELAGEM (em cm)	VELOCIDADE NA MODELAGEM (em cm/s)
11.912	18.3	18.3	0
11.945	18.3	18.384404727914937	2.5577190277254176
11.976	18.4	18.538177896127284	4.960424781043318
12.012	18.7	18.817201790060967	7.75066372038015
12.045	19.0	19.157378420748444	10.308382748105567
12.079	19.3	19.597461106791638	12.94360841303488
12.112	19.8	20.10900491233672	15.501327440760297
12.145	20.4	20.704953445796736	18.059046468485715
12.179	21.0	21.40855869833286	20.69427213341503
12.212	21.7	22.175874406650482	23.25199116114045
12.246	22.5	23.056039778736874	25.887216826069764
12.279	23.4	23.9947226619121	28.444935853795183
12.312	24.6	25.01781027300226	31.002654881520602

Tabela 1: Valores das observações, tempo e posição do bloco na rampa, de <http://www.fep.if.usp.br/~fisfoto/translacao/atrito/situacoes/atritoAM4.php> e obtidos pelo algoritmo nos momentos das observações, da posição e velocidade da modelagem.

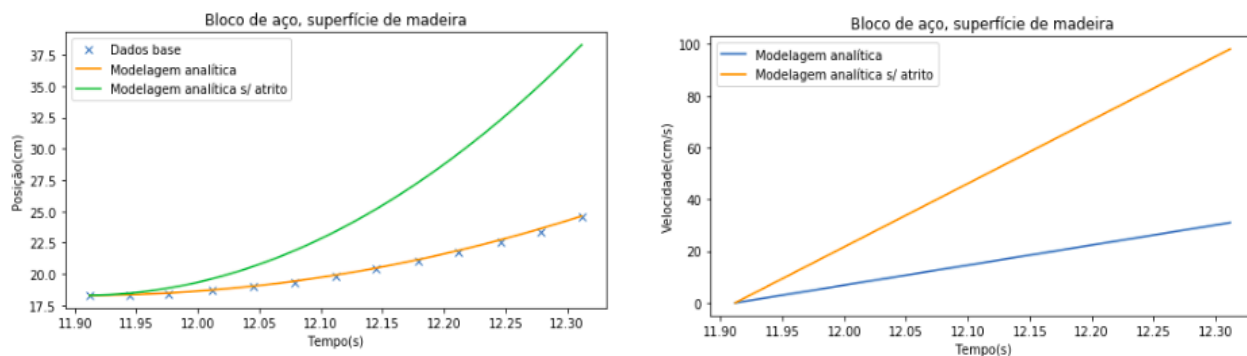


Figura 6: Gráfico do deslocamento do bloco na rampa em função do tempo, em três métodos: Resultados das observações (dados base), modelagens analíticas com e sem atrito, calculadas em intervalos 50 intervalos equidistantes.

Figura 7: Gráfico do velocidade do bloco na rampa em função do tempo, calculado pela modelagens analíticas, com e sem atrito, em intervalos 50 intervalos equidistantes.

4.1.2 Bloco de aço, superfície de vidro, com sobrepeso

Com coeficiente de atrito $\mu=0.1965$ e aceleração $a=58.60463880652674$ cm/s²

TEMPO (em s)	POSIÇÃO RAMPA cm)	NA (em	POSIÇÃO MODELAGEM cm)	NA (em	VELOCIDADE MODELAGEM (em cm/s)	NA
0.067	20.1		20.1		0	
0.100	20.1		20.16382045166031		1.9339530806153824	
0.133	20.2		20.291461354980925		3.867906161230765	
0.167	20.3		20.490717126923116		5.860463880652674	
0.200	20.5		20.74793288664496		7.794416961268056	
0.234	20.7		21.08069002578842		9.786974680689966	
0.267	21.1		21.467480641911497		11.720927761305347	
0.300	21.5		21.91809170969488		13.654880841920729	
0.334	22.0		22.450104620780532		15.64743856134264	
0.400	23.2		23.738117372470377		19.515344722573403	
0.434	24.0		24.469386055498216		21.50790244199531	
0.467	24.8		25.24296728774437		23.441855522610695	

0.500	25.6	26.08036897165083	25.375808603226076
0.534	26.6	27.010893426620864	27.368366322647987

Tabela 2: Valores das observações, tempo e posição do bloco na rampa, de <http://www.fep.if.usp.br/~fisfoto/translacao/atrito/situacoes/atritoAVS1.php> e obtidos pelo algoritmo nos momentos das observações, da posição e velocidade da modelagem.

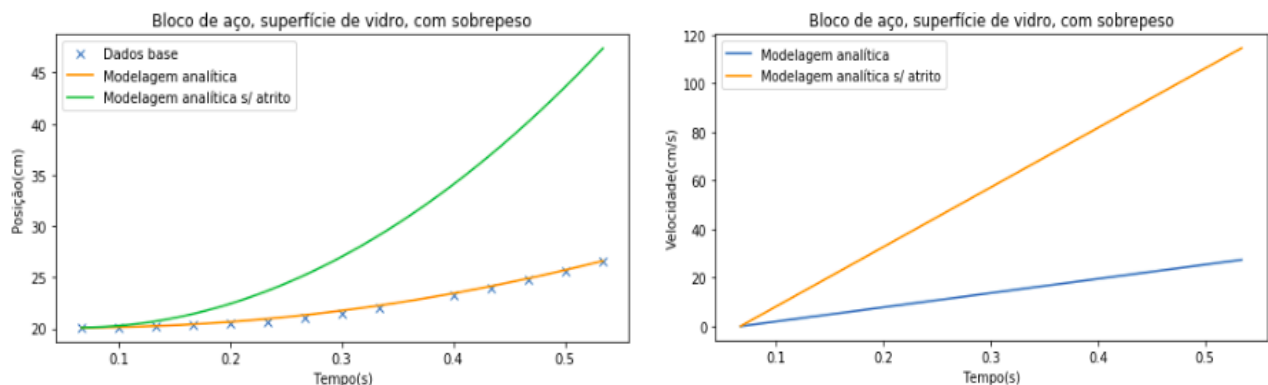


Figura 8: Gráfico do deslocamento do bloco na rampa em função do tempo, em três métodos: Resultados das observações (dados base), modelagens analíticas com e sem atrito, calculadas em intervalos 50 intervalos equidistantes.

Figura 9: Gráfico do velocidade do bloco na rampa em função do tempo, calculado pela modelagens analíticas, com e sem atrito, em intervalos 50 intervalos equidistantes.

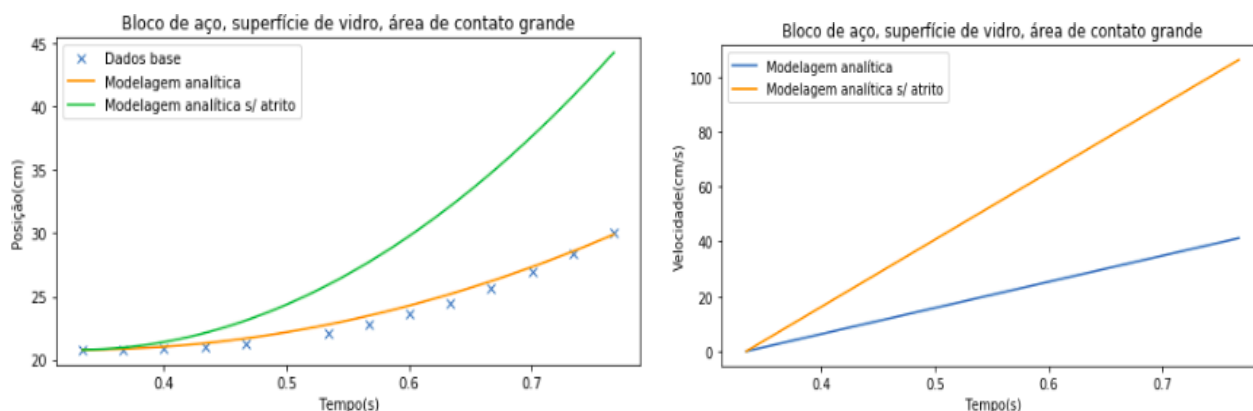
4.1.3 Bloco de aço, superfície de vidro, área de contato grande

Com coeficiente de atrito $\mu=0.158$ e aceleração $a=95.17383168567696\text{cm/s}^2$

TEMPO (em s)	POSIÇÃO NA RAMPA (em cm)	POSIÇÃO NA MODELAGEM (em cm)	VELOCIDADE NA MODELAGEM (em cm/s)
0.334	20.8	20.8	0
0.367	20.8	20.903644302705704	3.1407364456273372
0.400	20.9	21.110932908117107	6.28147289125468
0.434	21.0	21.434523935848407	9.517383168567694
0.467	21.3	21.852241883116843	12.658119614195037
0.534	22.1	23.127571227704916	19.034766337135395
0.567	22.8	23.859362819536084	22.175502782762727
0.601	23.6	24.72335086357866	25.411413060075745

0.634	24.5	25.66557179726686	28.55214950570309
0.667	25.7	26.711437033660765	31.69288595133043
0.701	27.0	27.89901610543464	34.92879622864344
0.734	28.4	29.155310683685578	38.06953267427078
0.767	30.0	30.515249564642218	41.21026911989812

Tabela 3: Valores das observações, tempo e posição do bloco na rampa, de <http://www.fep.if.usp.br/~fisfoto/translacao/atrito/situacoes/atritoAVG1.php> e obtidos pelo algoritmo nos momentos das observações, da posição e velocidade da modelagem.



4.1.4 Bloco de aço, superfície de vidro, área de contato pequena

Com coeficiente de atrito $\mu=0.221$ e aceleração $a=35.333334247067484\text{cm/s}^2$

TEMPO (em s)	POSIÇÃO NA RAMPA (em cm/s)	POSIÇÃO NA MODELAGEM (em cm/s)	VELOCIDADE NA MODELAGEM (em cm/s ²)
-----------------	-------------------------------	-----------------------------------	--

0.067	20.7	20.7	0
0.100	20.7	20.738478000995055	1.166000030153227
0.133	20.7	20.815434002985167	2.332000060306454
0.167	20.8	20.935567339425198	3.5333334247067487
0.200	20.9	21.09064534343558	4.699333454859976
0.234	21.0	21.291268015290427	5.9006668192602705
0.267	21.1	21.524468021321074	7.066666849413497
0.300	21.2	21.796146028346776	8.232666879566723
0.334	21.4	22.116902036641655	9.434000243967018
0.367	21.7	22.466702045687622	10.600000274120244
0.400	22.1	22.854980055728646	11.766000304273472
0.434	22.5	23.295869400463555	12.967333668673765
0.467	23.0	23.762269412524848	14.133333698826993
0.534	24.2	24.867814107781342	16.500667093380514
0.567	25.0	25.450814122857953	17.66666712353374
0.601	25.9	26.09232613944771	18.868000487934033

Tabela 4: Valores das observações, tempo e posição do bloco na rampa, de <http://www.fep.if.usp.br/~fisfoto/translacao/atrito/situacoes/atritoAVP1.php> e obtidos pelo algoritmo nos momentos das observações, da posição e velocidade da modelagem.

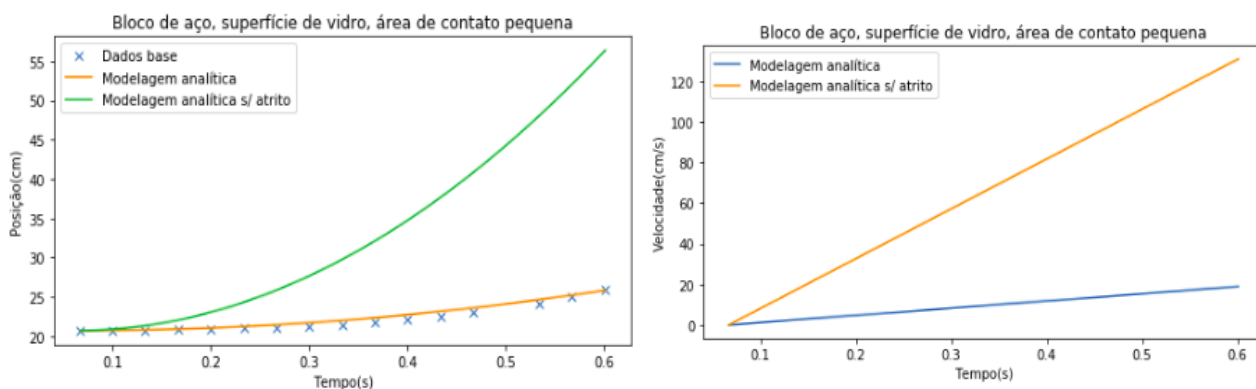


Figura 12: Gráfico do deslocamento do bloco na rampa em função do tempo, em três métodos: Resultados das observações (dados base), modelagens analíticas com e sem atrito, calculadas em intervalos 50 intervalos equidistantes.

Figura 13: Gráfico do velocidade do bloco na rampa em função do tempo, calculado pela modelagens analíticas, com e sem atrito, em intervalos 50 intervalos equidistantes.

4.1.5 Comparação

Nesse tópico vamos colocar cada uma das modelagens lado a lado para poder compará-las e tirar conclusões.

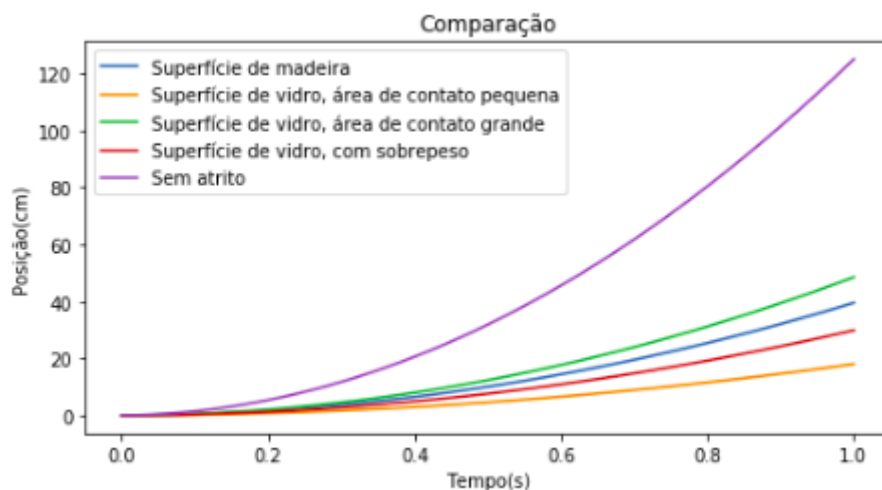


Figura 14: Gráfico do deslocamento do bloco na rampa em função do tempo, calculados 4 com atrito, respectivamente modelando cada tipo de experimento, e 1 sem atrito.

4.2 Queda Livre

4.2.1 Filmagem 1

MODELAGEM DAS POSIÇÕES 1			
TEMPO (em s)	POSIÇÃO REAL (em cm)	POSIÇÃO SEM RESISTÊNCIA DO AR (em cm)	POSIÇÃO COM RESISTÊNCIA DO AR (em cm)
0.0	-0,7	-0.7	-0.7
0.01875	-1	-1.044531250000001	-1.044531250000001
0.03750	-1,7	-1.733593750000003	-1.731219714355469
0.05625	-2,6	-2.767187500000004	-2.7530086077693605

0.0750	-4,1	-4.1453125000000 01	-4.0984477003291 73
0.09375	-5,8	-5.86796875	-5.7522139158532 2
0.1125	-7,8	-7.93515625	-7.6958125274650 94

Tabela 5: Posição do corpo (em m) em cada instante. Relação da posição do corpo calculados em cada modelagem com a real.

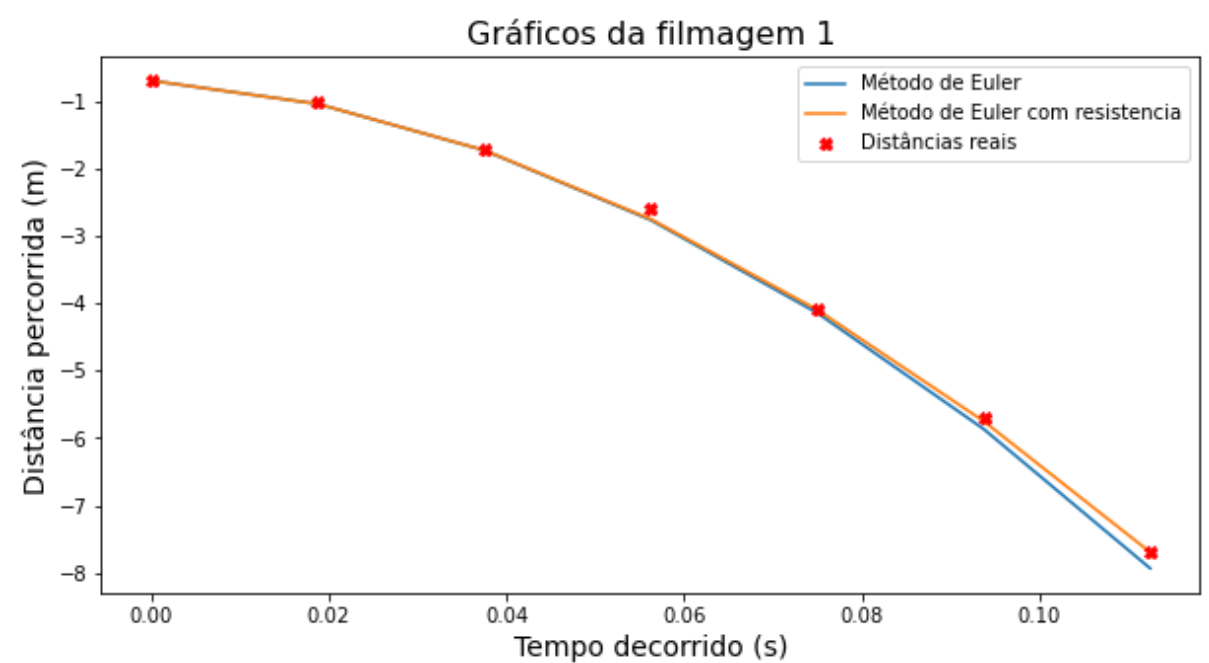


Figura 15: Gráfico da Distância percorrida pelo corpo em função do tempo, de acordo com cada modelagem e em comparação com a posição real.

MODELAGEM DAS VELOCIDADES 1			
TEMPO (em ds)	VELOCIDADE REAL (em cm/s)	VELOCIDADE SEM RESISTÊNCIA DO AR (em cm/s)	VELOCIDADE COM RESISTÊNCIA DO AR (em cm/s)
0.0	0	0	0
0.01875	-16	-18,375	-18,375
0.03750	-37,33333333	-36,75	-36,62338477
0.05625	-48	-55,125	-54,49540765
0.0750	-80	-73,5	-71,7567516

0.09375	-85,33333333	-91,875	-88,20086483
0.1125	-106,6666667	-110,25	-103,6585926

Tabela 6: Velocidade do corpo (em cm/s) em cada instante. Relação da velocidade do corpo calculados em cada modelagem com a estimada.

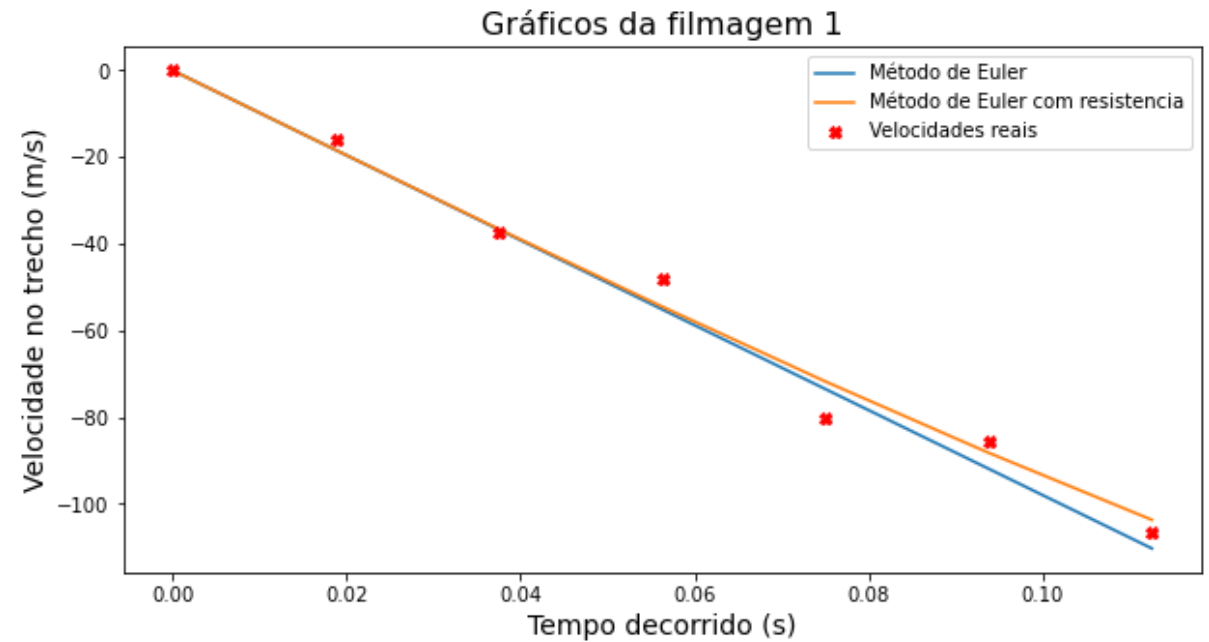


Figura 16: Gráfico da velocidade do corpo em função do tempo, de acordo com cada modelagem e em comparação com a velocidade estimada.

4.2.2 Filmagem 2

MODELAGEM DAS POSIÇÕES 2			
TEMPO (em s)	POSIÇÃO REAL (em cm)	POSIÇÃO SEM RESISTÊNCIA DO AR (em cm)	POSIÇÃO COM RESISTÊNCIA DO AR (em cm)
0,00104	-0,7	-0.700000000000000001	-0.700000000000000001
0,01979	-1	-1.044531250000000001	-1.044531250000000001
0,03854	-1,7	-1.733593750000000003	-1.731219714355469
0,05729	-2,6	-2.767187500000000004	-2.7530086077693605

0,07604	-4,1	-4.1453125000000 01	-4.0984477003291 73
0,09479	-5,8	-5.86796875	-5.7522139158532 2
0,11354	-7,8	-7.93515625	-7.6958125274650 94

Tabela 7: Posição do corpo (em m) em cada instante. Relação da posição do corpo calculados em cada modelagem com a real.

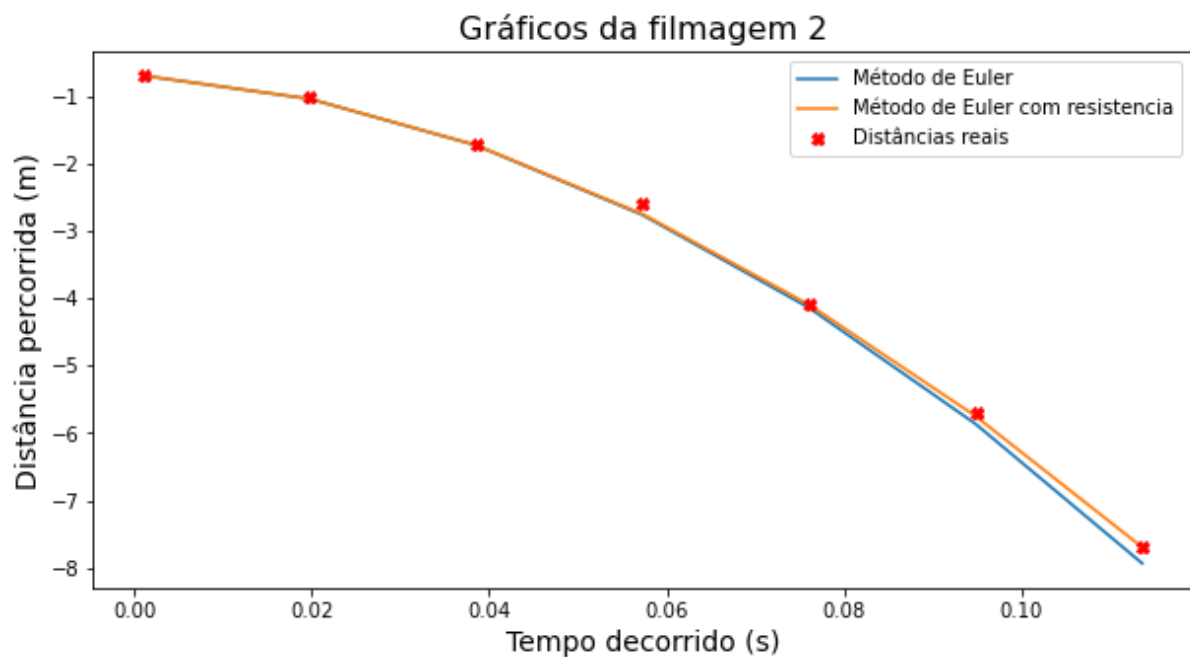


Figura 17: Gráfico da Distância percorrida pelo corpo em função do tempo, de acordo com cada modelagem e em comparação com a posição real.

MODELAGEM DAS VELOCIDADES 2			
TEMPO (em ds)	VELOCIDADE REAL (em cm/s)	VELOCIDADE SEM RESISTÊNCIA DO AR (em cm/s)	VELOCIDADE COM RESISTÊNCIA DO AR (em cm/s)
0,00104	0	0	0
0,01979	-15.999999999999999	-18,375	-18,375
0,03854	-37.33333333333333	-36,75	-36,62338477
0,05729	-48.000000000000001	-55,125	-54,49540765
0,07604	-79.99999999999999	-73,5	-71,7567516

0,09479	-85.33333333333337	-91,875	-88,20086483
0,11354	-106.66666666666666	-110,25	-103,6585926

Tabela 8: Velocidade do corpo (em cm/s) em cada instante. Relação da velocidade do corpo calculados em cada modelagem com a estimada.

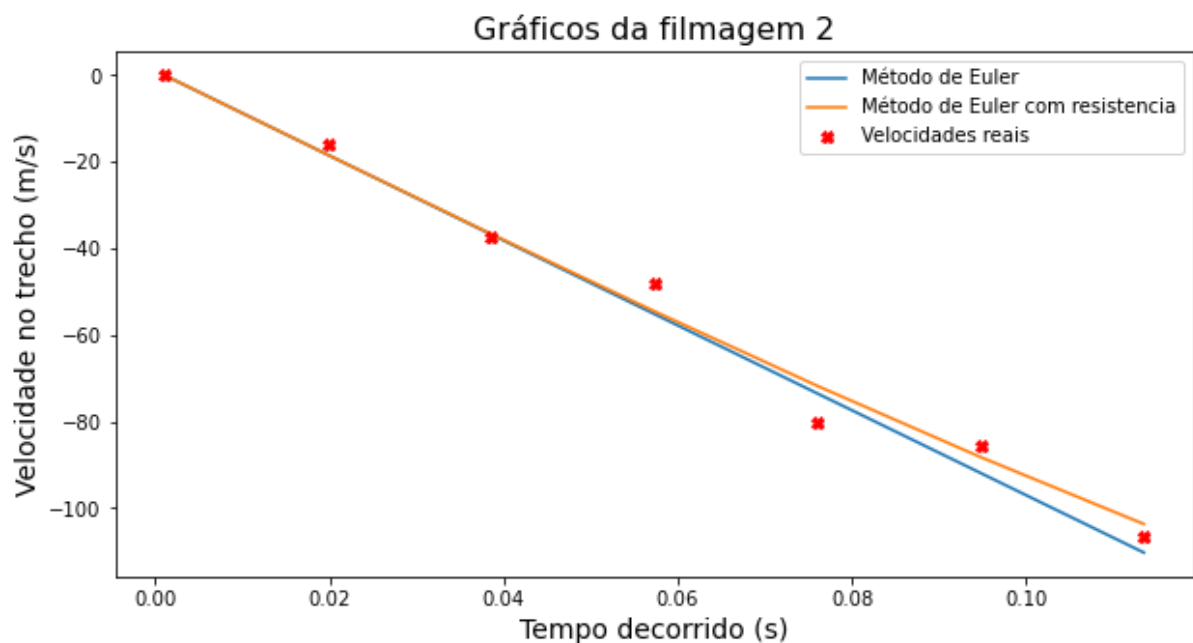


Figura 18: Gráfico da velocidade do corpo em função do tempo, de acordo com cada modelagem e em comparação com a velocidade estimada.

4.2.3 Filmagem 3

MODELAGEM DAS POSIÇÕES 3			
TEMPO (em s)	POSIÇÃO REAL (em cm)	POSIÇÃO SEM RESISTÊNCIA DO AR (em cm)	POSIÇÃO COM RESISTÊNCIA DO AR (em cm)
0,00208	-0,8	-0,8	-0,8
0,02083	-1,1	-1,14453125	-1,14453125
0,03958	-1,8	-1,83359375	-1,831219714
0,05833	-2,6	-2,8671875	-2,853008608
0,07708	-4,2	-4,2453125	-4,1984477
0,09583	-5,9	-5,96796875	-5,852213916
0,11458	-7,9	-8,03515625	-7,795812527

Tabela 9: Posição do corpo (em m) em cada instante. Relação da posição do corpo calculados em cada modelagem com a real.

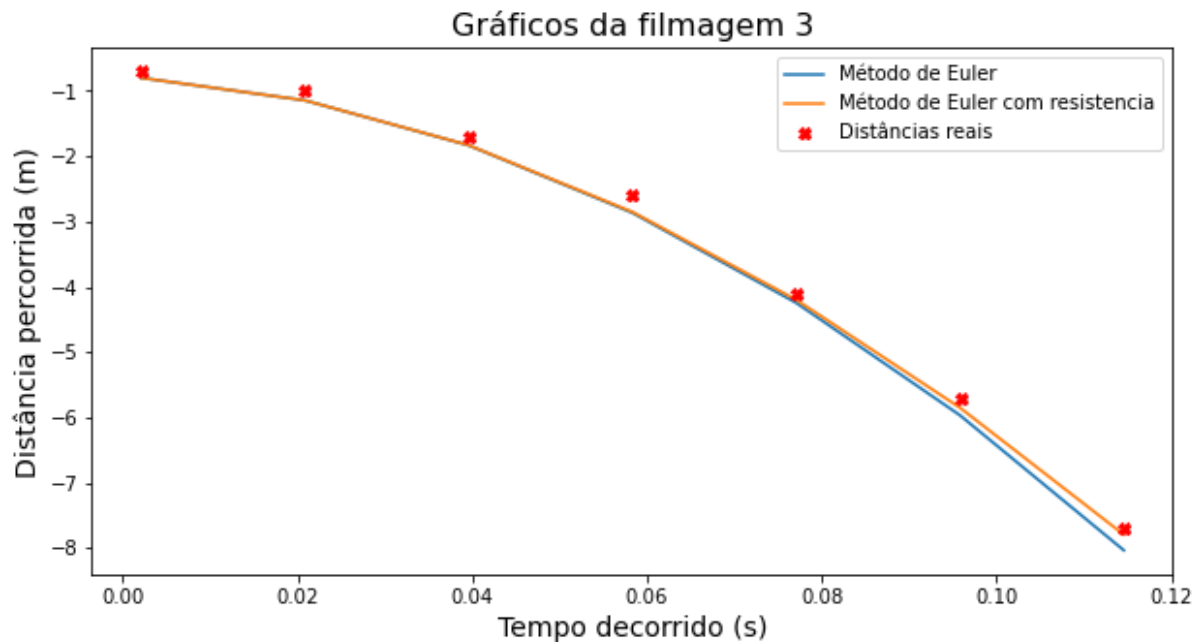


Figura 19: Gráfico da Distância percorrida pelo corpo em função do tempo, de acordo com cada modelagem e em comparação com a posição real.

MODELAGEM DAS VELOCIDADES 3			
TEMPO (em ds)	VELOCIDADE REAL (em cm/s)	VELOCIDADE SEM RESISTÊNCIA DO AR (em cm/s)	VELOCIDADE COM RESISTÊNCIA DO AR (em cm/s)
0,00208	0	0	0
0,02083	-16	-18,375	-18,375
0,03958	-37,33333333	-36,75	-36,62338477
0,05833	-42,66666667	-55,125	-54,49540765
0,07708	-85,33333333	-73,5	-71,7567516
0,09583	-90,66666667	-91,875	-88,20086483
0,11458	-106,6666667	-110,25	-103,6585926

Tabela 10: Velocidade do corpo (em cm/s) em cada instante. Relação da velocidade do corpo calculados em cada modelagem com a estimada.

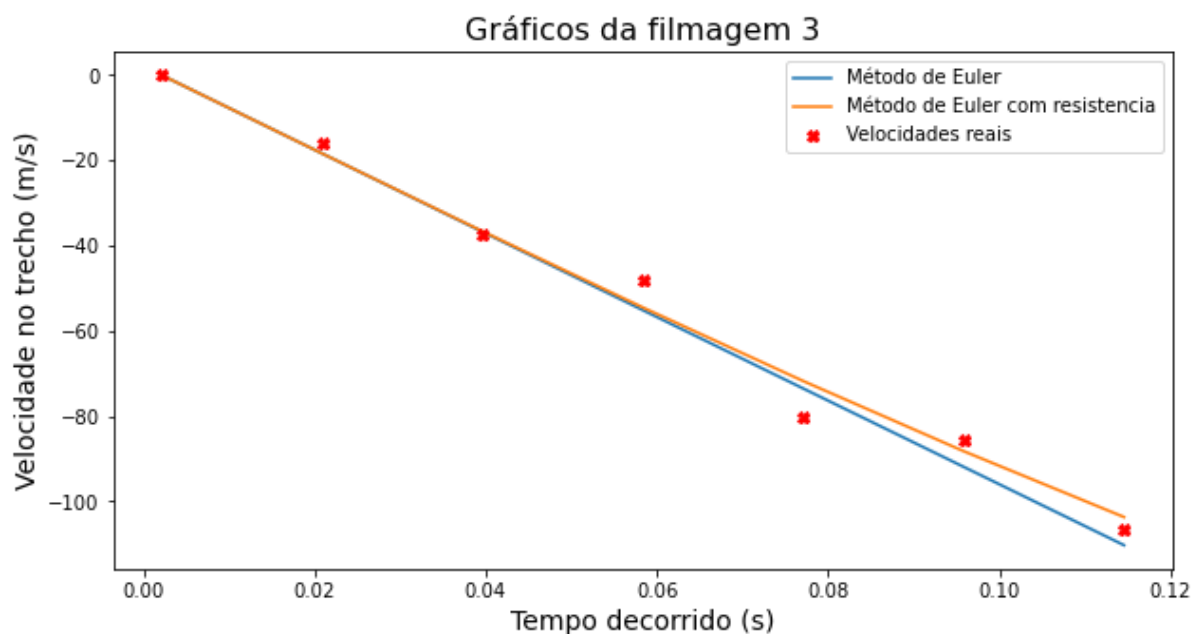


Figura 20: Gráfico da velocidade do corpo em função do tempo, de acordo com cada modelagem e em comparação com a velocidade estimada.

4.2.4 Filmagem 4

MODELAGEM DAS POSIÇÕES 4			
TEMPO (em s)	POSIÇÃO REAL (em cm)	POSIÇÃO SEM RESISTÊNCIA DO AR (em cm)	POSIÇÃO COM RESISTÊNCIA DO AR (em cm)
0,00312	-0.8	-0,8	-0,8
0,02188	-1.1	-1,144898848	-1,144898848
0,04062	-1.8	-1,833593848	-1,831219814
0,05938	-2.7	-2,867922696	-2,853731245
0,07812	-4.3	-4,245312696	-4,198450397
0,09688	-6.0	-5,969071544	-5,853260902
0,11562	-8.0	-8,035156544	-7,795819822

Tabela 11: Posição do corpo (em m) em cada instante. Relação da posição do corpo calculados em cada modelagem com a real.

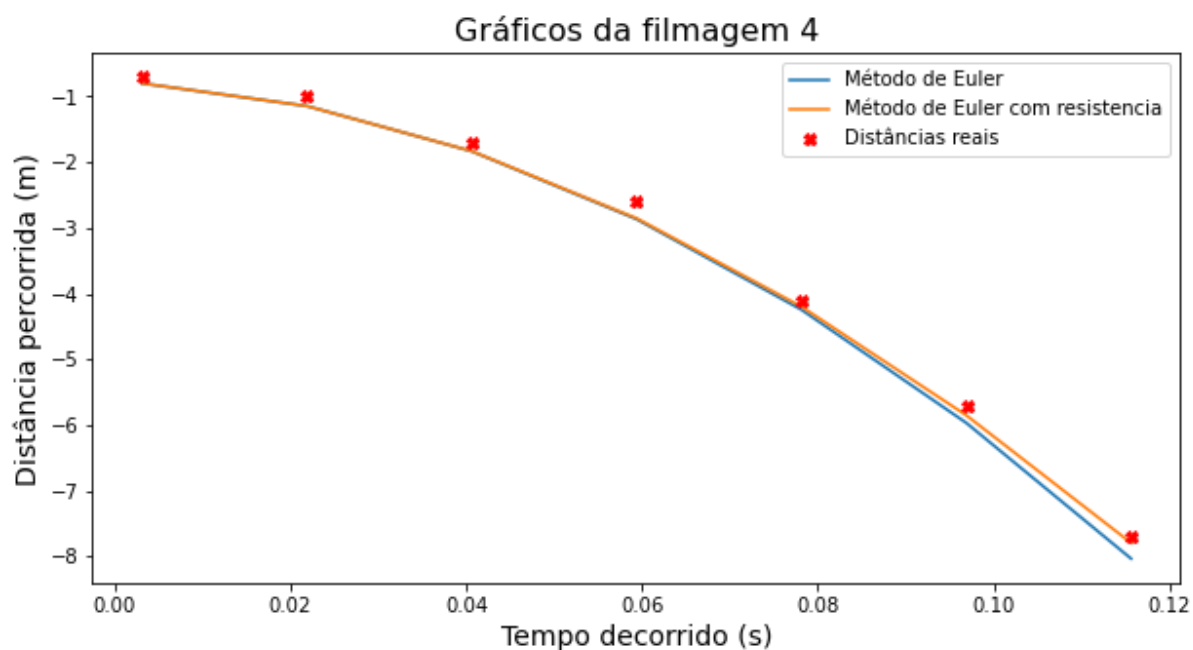


Figura 21: Gráfico da Distância percorrida pelo corpo em função do tempo, de acordo com cada modelagem e em comparação com a posição real.

MODELAGEM DAS VELOCIDADES 4			
TEMPO (em ds)	VELOCIDADE REAL (em cm/s)	VELOCIDADE SEM RESISTÊNCIA DO AR (em cm/s)	VELOCIDADE COM RESISTÊNCIA DO AR (em cm/s)
0,00312	0	0	0
0,02188	-15,99147122	-18,3848	-18,3848
0,04062	-37,35325507	-36,75	-36,62331727
0,05938	-47,97441365	-55,1348	-54,50487376
0,07812	-85,37886873	-73,5	-71,75662494
0,09688	-90,61833689	-91,8848	-88,20951518
0,11562	-106,7235859	-110,25	-103,6584269

Tabela 12: Velocidade do corpo (em cm/s) em cada instante. Relação da velocidade do corpo calculados em cada modelagem com a estimada.

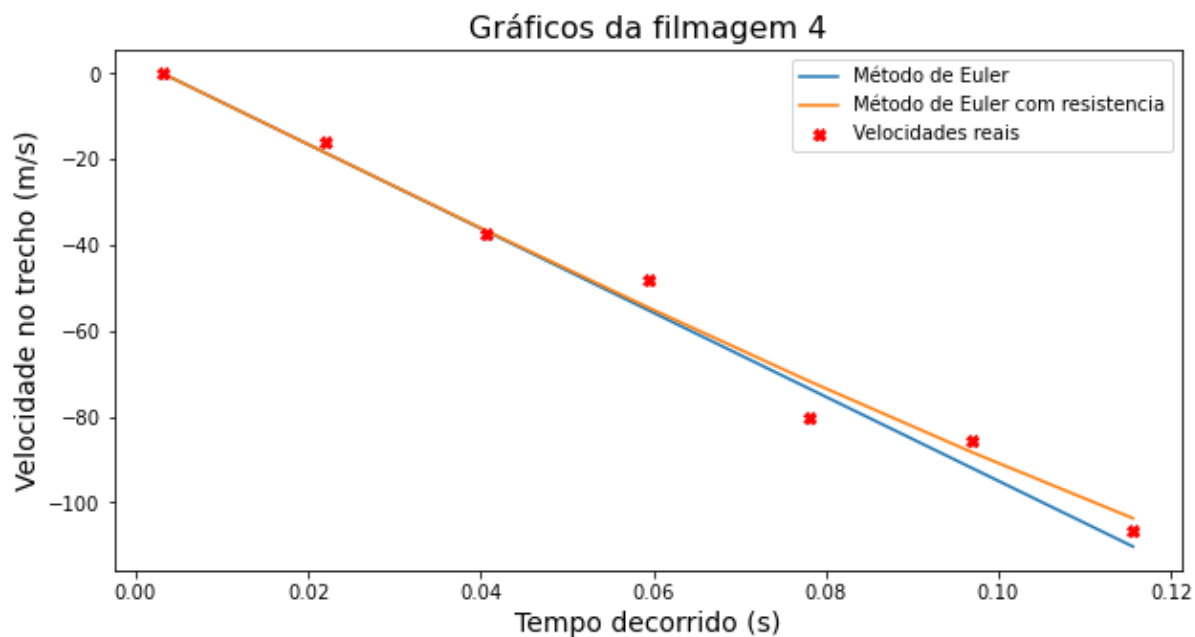


Figura 22: Gráfico da velocidade do corpo em função do tempo, de acordo com cada modelagem e em comparação com a velocidade estimada.

4.2.5 Filmagem 5

MODELAGEM DAS POSIÇÕES 5			
TEMPO (em s)	POSIÇÃO REAL (em cm)	POSIÇÃO SEM RESISTÊNCIA DO AR (em cm)	POSIÇÃO COM RESISTÊNCIA DO AR (em cm)
0,00417	-0,8	-0,8	-0,8
0,02292	-1,2	-1,14453125	-1,14453125
0,04167	-1,9	-1,83359375	-1,831219714
0,06042	-2,9	-2,8671875	-2,853008608
0,07917	-4,4	-4,2453125	-4,1984477
0,09792	-6,1	-5,96796875	-5,852213916
0,11667	-8	-8,03515625	-7,795812527

Tabela 13: Posição do corpo (em m) em cada instante. Relação da posição do corpo calculados em cada modelagem com a real.

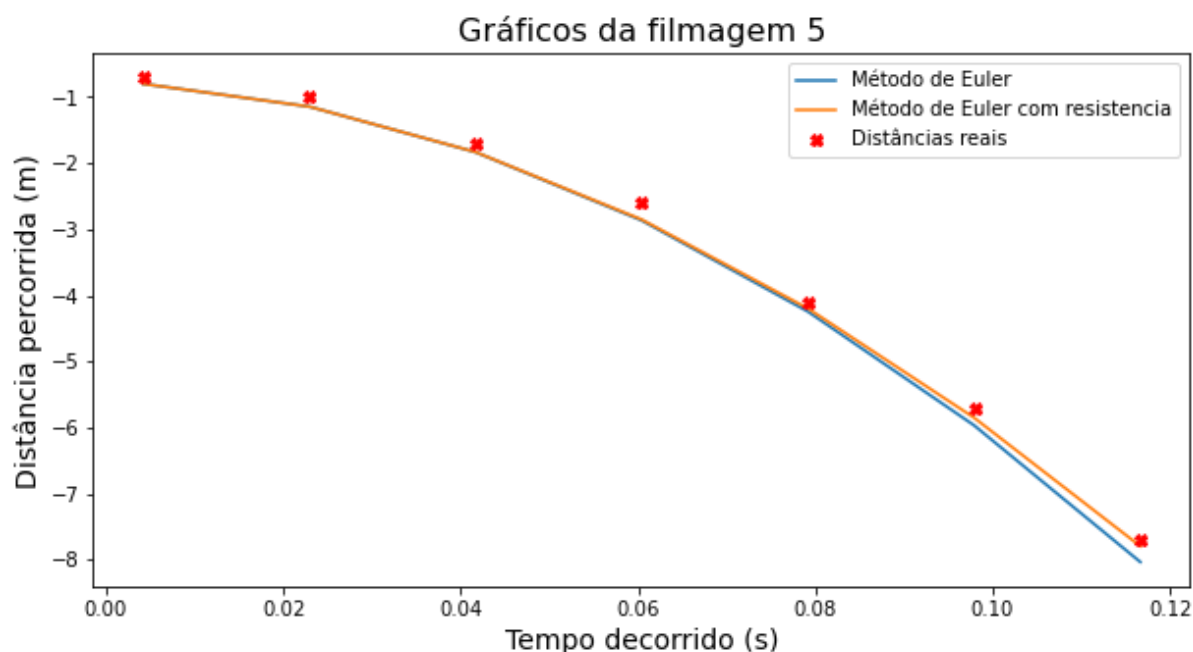


Figura 23: Gráfico da Distância percorrida pelo corpo em função do tempo, de acordo com cada modelagem e em comparação com a posição real.

MODELAGEM DAS VELOCIDADES 5			
TEMPO (em ds)	VELOCIDADE REAL (em cm/s)	VELOCIDADE SEM RESISTÊNCIA DO AR (em cm/s)	VELOCIDADE COM RESISTÊNCIA DO AR (em cm/s)
0,00417	0	0	0
0,02292	-21,33333333	-18,375	-18,375
0,04167	-37,33333333	-36,75	-36,62338477
0,06042	-53,33333333	-55,125	-54,49540765
0,07917	-80	-73,5	-71,7567516
0,09792	-90,66666667	-91,875	-88,20086483
0,11667	-101,3333333	-110,25	-103,6585926

Tabela 14: Velocidade do corpo (em cm/s) em cada instante. Relação da velocidade do corpo calculados em cada modelagem com a estimada.

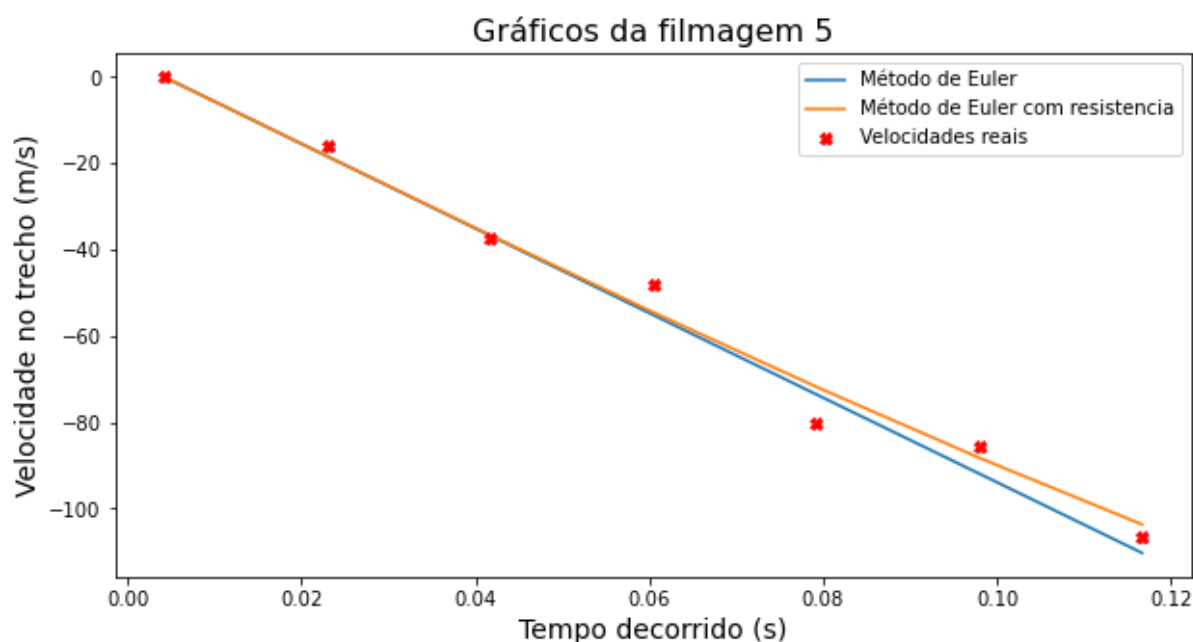


Figura 24: Gráfico da velocidade do corpo em função do tempo, de acordo com cada modelagem e em comparação com a velocidade estimada.

4.3 Pêndulo Simples

A seguir serão inseridos os dados resultantes da captura dos dados experimentais e dos cálculos analíticos para o problema físico Pêndulo Simples para cada filmagem e, posteriormente, para a média dos dados.

4.3.1 Filmagem 1

FILMAGEM 1			
TEMPO (em s)	ANGULAÇÃO EXPERIMENTAL (em rad)	ANGULAÇÃO ANALÍTICA AMORTECIMENTO S/ (em rad)	ANGULAÇÃO ANALÍTICA C/ AMORTECIMENTO (em rad)
0,0021	-0,1570796327	-0,1570679365	-0,1570678676
0,0708	-0,1396263402	-0,1439713927	-0,1439692659
0,1396	-0,1047197551	-0,1081655341	-0,1081623836
0,2083	-0,05235987756	-0,0553844400	-0,0553820330
0,2771	0,01745329252	0,0061984688	0,0061981103
0,3458	0,06981317008	0,0667210834	0,0667162693

0,4146	0,1221730476	0,1168111688	0,1168010641
0,4833	0,1570796327	0,1484471185	0,1484321495
0,5521	0,1658062789	0,1567299445	0,1567118908
0,6208	0,1396263402	0,1403332053	0,1403150292
0,6896	0,09599310886	0,1017960195	0,1017813738
0,7583	0,0436332313	0,0472898707	0,0472823895
0,8271	-0,01745329252	-0,0147446865	-0,0147421417
0,8958	-0,07853981634	-0,0743732147	-0,0743593145
0,9646	-0,1221730476	-0,1223619329	-0,1223373078
1,0333	-0,1483529864	-0,1510257548	-0,1509931971
1,1021	-0,1570796327	-0,1559259418	-0,1558900901
1,1708	-0,1308996939	-0,1362777602	-0,1362444735
1,2396	-0,0872664626	-0,0951238311	-0,0950992316
1,3083	-0,03490658504	-0,0390546928	-0,0390440339
1,3771	0,03490658504	0,0232470633	0,0232403838
1,4458	0,0872664626	0,0818042096	0,0817795348
1,5146	0,1308996939	0,1275488739	0,1275085713
1,5833	0,1570796327	0,1531553409	0,1531047530
1,6521	0,1570796327	0,1546583189	0,1546050155
1,7208	0,1308996939	0,1318171156	0,1317697961
1,7896	0,07853981634	0,0881688076	0,0881358922
1,8583	0,01745329252	0,0307033921	0,0306914907
1,9271	-0,03490658504	-0,0316803188	-0,0316675819
1,9958	-0,09599310886	-0,0889919730	-0,0889549212
2,0646	-0,1308996939	-0,1323565692	-0,1322995641
2,1333	-0,1570796327	-0,1548295447	-0,1547606427

Tabela 15: Valores obtidos para a angulação do pêndulo em função do tempo, para os resultados experimentais e analíticos com e sem amortecimento, na Filmagem 1.

Valores relativos Máximos de erro para as funções analíticas sem e com amortecimento, respectivamente: 8,43% e 8,42%.

Período médio experimental: 1,0656 segundos.

Período médio teórico: 1.0812308609757606 segundos.

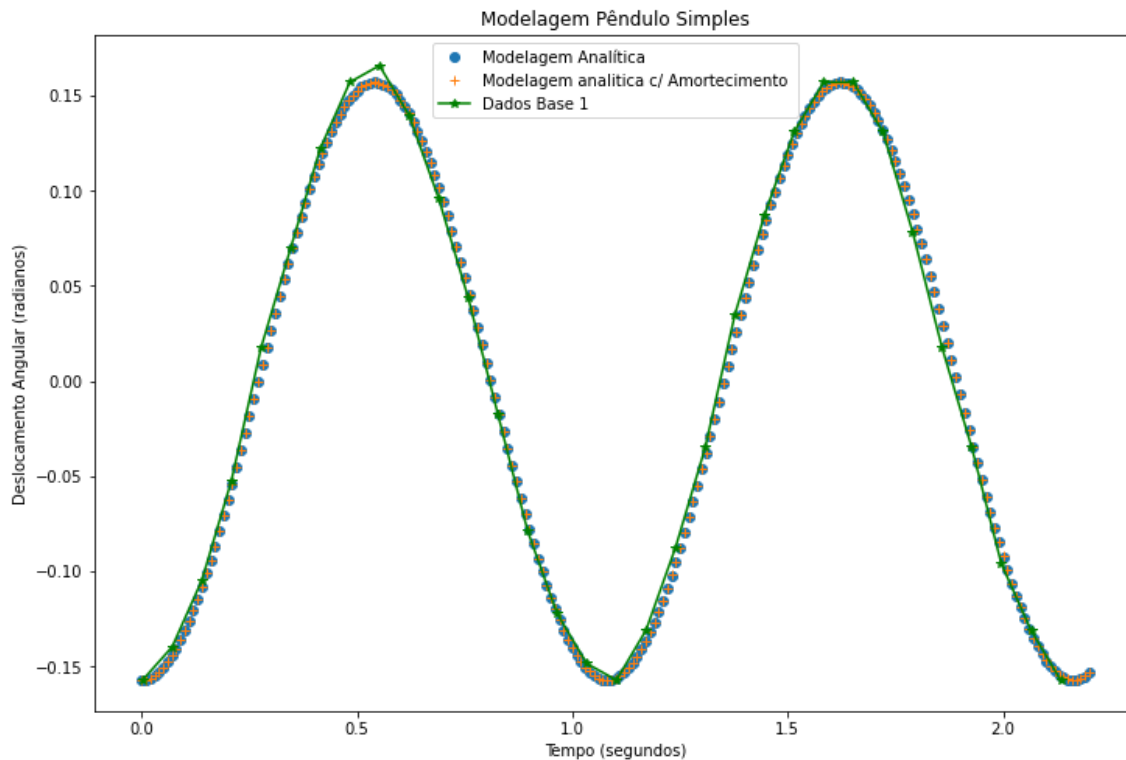


Figura 25: Gráfico do deslocamento angular do pêndulo em função do tempo, em três métodos: Resultados experimentais (filmagem 1), modelagens analíticas com e sem amortecimento, calculadas em intervalos equiespaçados por 0.01 segundos entre 0 e 2.2 segundos.

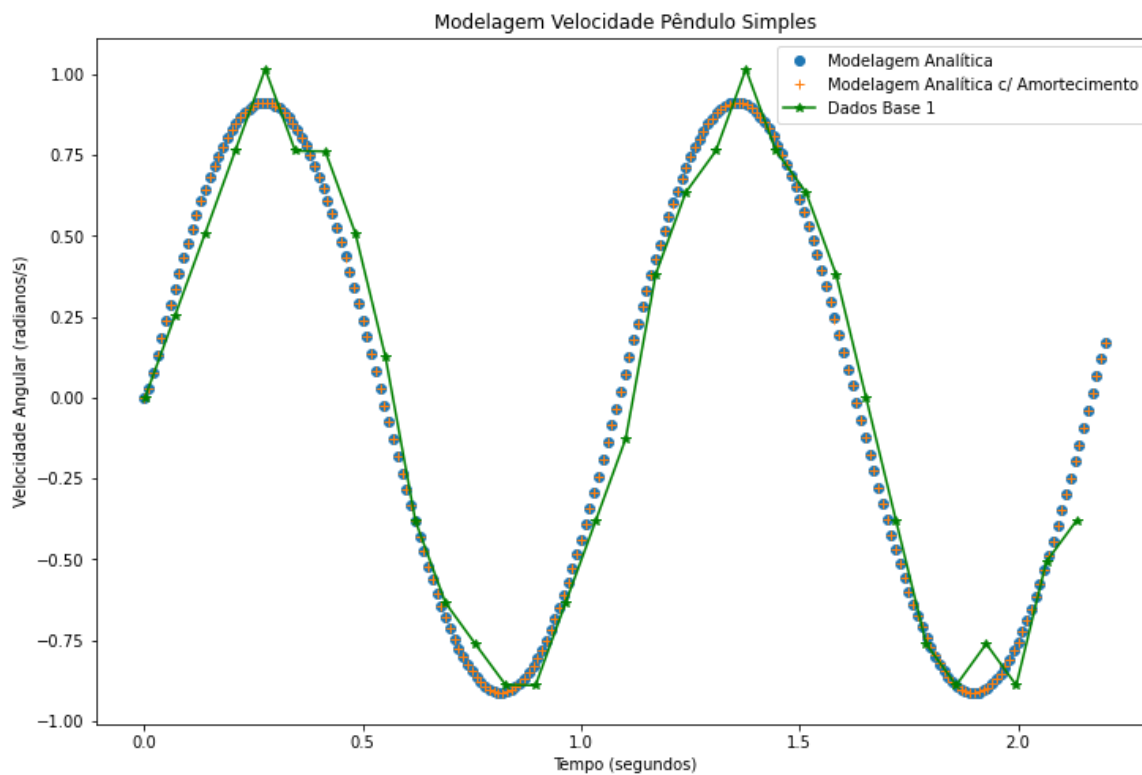


Figura 26: Gráfico da velocidade angular do pêndulo em função do tempo, em três métodos: Resultados experimentais (filmagem 1), modelagens analíticas com e sem

amortecimento, calculadas em intervalos equiespaçados por 0.01 segundos entre 0 e 2.2 segundos.

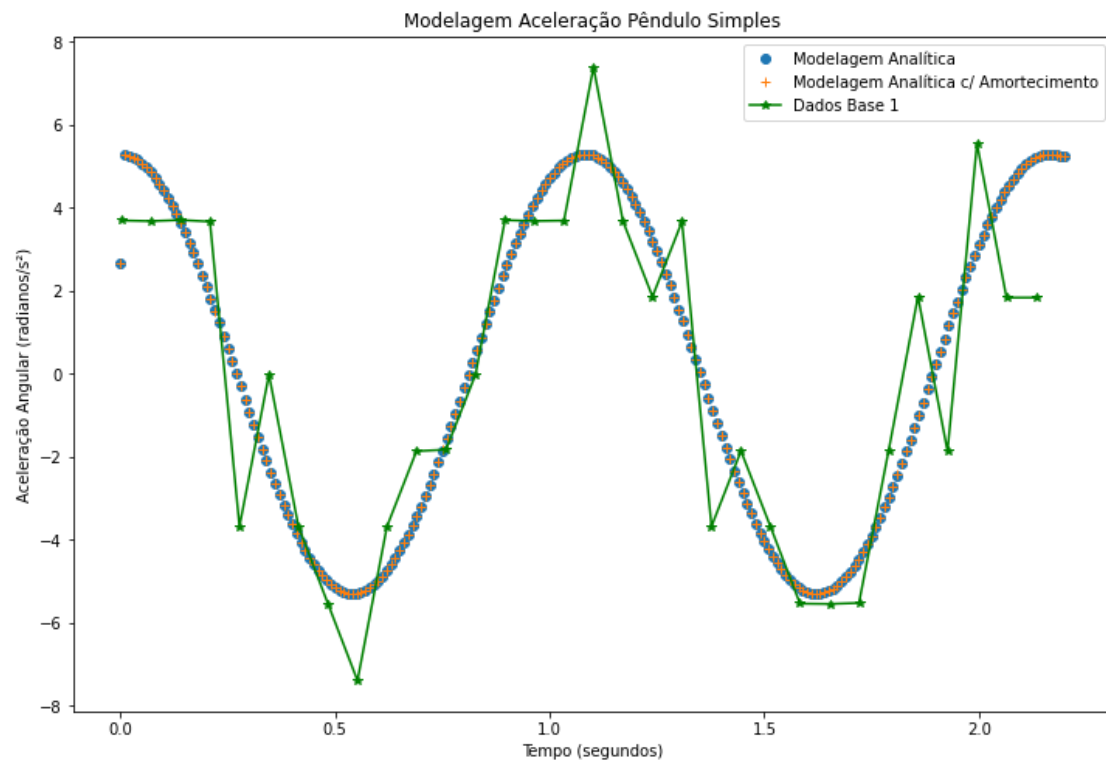


Figura 27: Gráfico da aceleração angular do pêndulo em função do tempo, em três métodos: Resultados experimentais (filmagem 1), modelagens analíticas com e sem amortecimento, calculadas em intervalos equiespaçados por 0.01 segundos entre 0 e 2.2 segundos.

4.3.2 Filmagem 2

		FILMAGEM 2	
TEMPO (em s)	ANGULAÇÃO EXPERIMENTAL (em rad)	ANGULAÇÃO ANALÍTICA S/ AMORTECIMENTO (em rad)	ANGULAÇÃO ANALÍTICA C/ AMORTECIMENTO (em rad)
0,0062	-0,1570796327	-0,1569776916	-0,1569774886
0,0750	-0,1396263402	-0,1423954511	-0,1423932228
0,1437	-0,1047197551	-0,1054212402	-0,1054180794
0,2124	-0,0436332313	-0,0518668739	-0,0518645754
0,2812	0,01745329252	0,0099359698	0,0099353867
0,3500	0,07853981634	0,0701716392	0,0701665147
0,4188	0,1308996939	0,1193393213	0,1193288934
0,4875	0,1570796327	0,1496562232	0,1496410012
0,5562	0,1570796327	0,1564359001	0,1564177465
0,6250	0,1396263402	0,1385691108	0,1385510417
0,6937	0,09599310886	0,0989171072	0,0989027912
0,7625	0,03490658504	0,0436202039	0,0436132651
0,8312	-0,02617993878	-0,0184661538	-0,0184629510
0,9000	-0,0872664626	-0,0777275775	-0,0777129822
0,9688	-0,1221730476	-0,1247292358	-0,1247040250
1,0375	-0,1483529864	-0,1520347588	-0,1520018504
1,1062	-0,1570796327	-0,1554289721	-0,1553931017
1,1750	-0,1221730476	-0,1343307580	-0,1342978291
1,2437	-0,0872664626	-0,0921188605	-0,0920949594
1,3125	-0,03490658504	-0,0353300067	-0,0353203335
1,3812	0,03490658504	0,0269414316	0,0269336677
1,45	0,09599310886	0,0850524056	0,0850266766
1,5188	0,1396263402	0,1297482883	0,1297071771
1,5875	0,1570796327	0,1539612441	0,1539102551
1,6572	0,1570796327	0,1537762825	0,1537231196
1,725	0,1221730476	0,1296929947	0,1296463241
1,7938	0,07853981634	0,0849699545	0,0849381589
1,8625	0,01745329252	0,0269347616	0,0269242975

1,9312	-0,0436332313	-0,0353366036	-0,0353223666
2	-0,09599310886	-0,0921243443	-0,0920859077
2,0788	-0,1308996939	-0,1388786333	-0,1388184080
2,1378	-0,1570796327	-0,1554692982	-0,1553999656

Tabela 16: Valores obtidos para a angulação do pêndulo em função do tempo, para os resultados experimentais e analíticos com e sem amortecimento, na Filmagem 2.

Valores relativos Máximos de erro para as funções analíticas sem e com amortecimento, respectivamente: 7.73% e 7.71%.

Período médio experimental: 1,0658 segundos.

Período médio teórico: 1.0812308609757606 segundos.

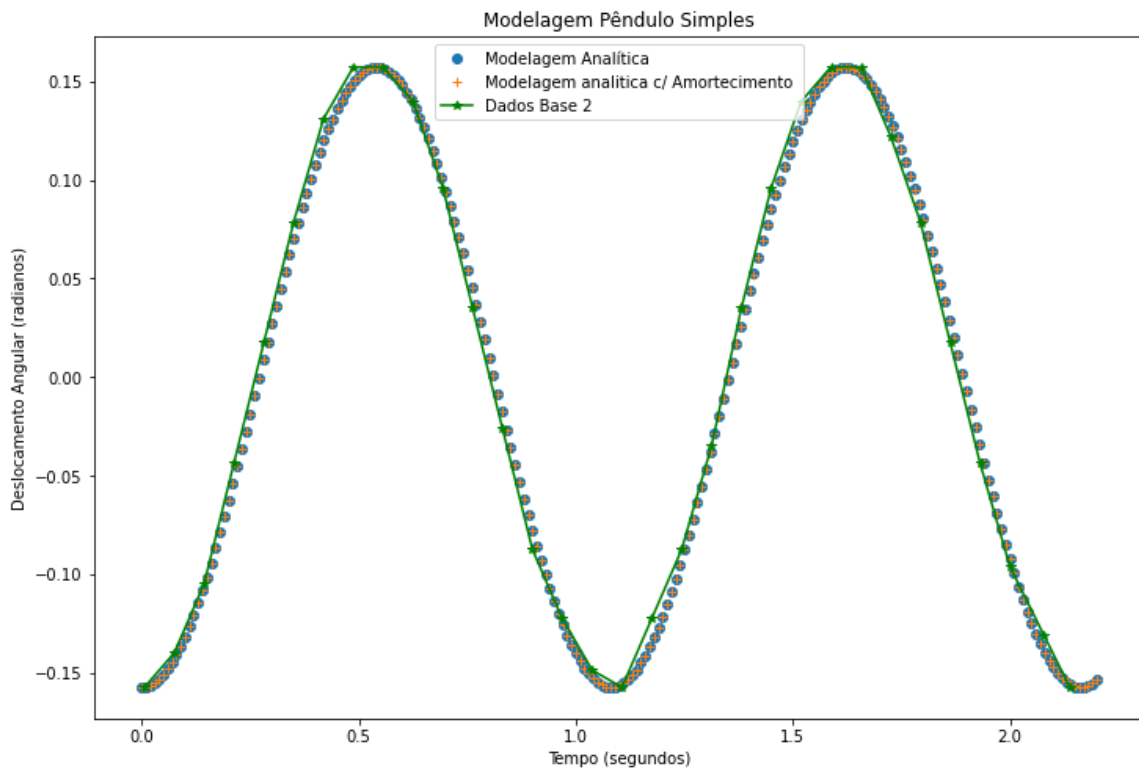


Figura 28: Gráfico do deslocamento angular do pêndulo em função do tempo, em três métodos: Resultados experimentais (filmagem 2), modelagens analíticas com e sem amortecimento, calculadas em intervalos equiespaçados por 0.01 segundos entre 0 e 2.2 segundos.

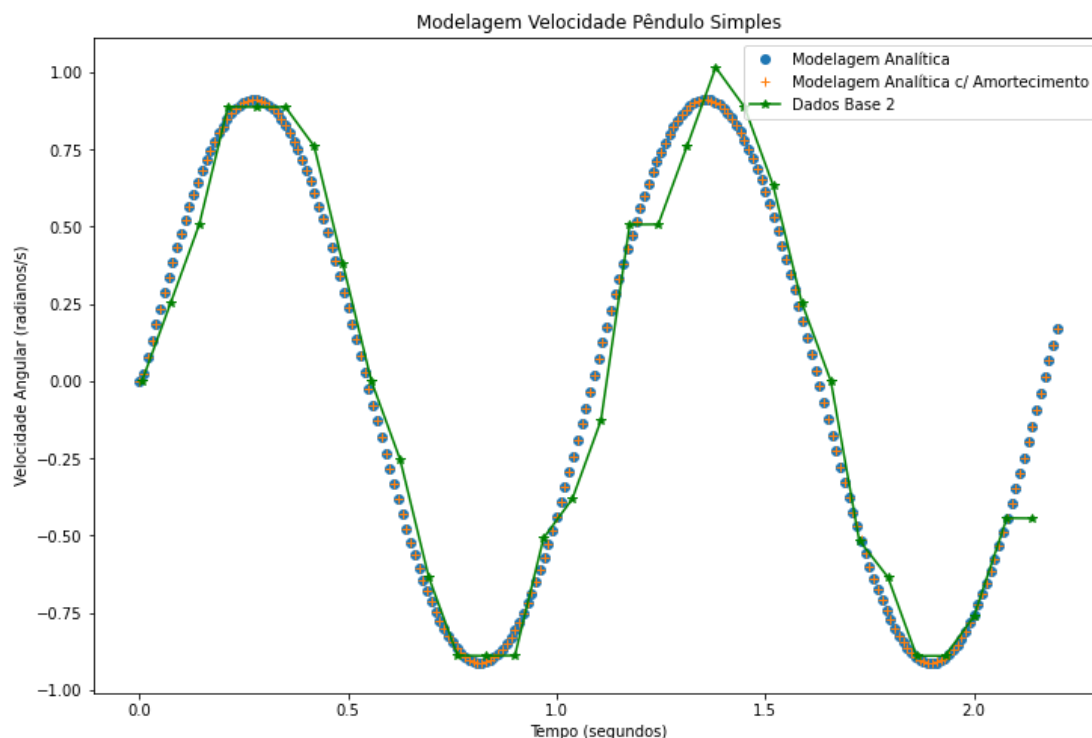


Figura 29: Gráfico da velocidade angular do pêndulo em função do tempo, em três métodos: Resultados experimentais (filmagem 2), modelagens analíticas com e sem amortecimento, calculadas em intervalos equiespaçados por 0.01 segundos entre 0 e 2.2 segundos.

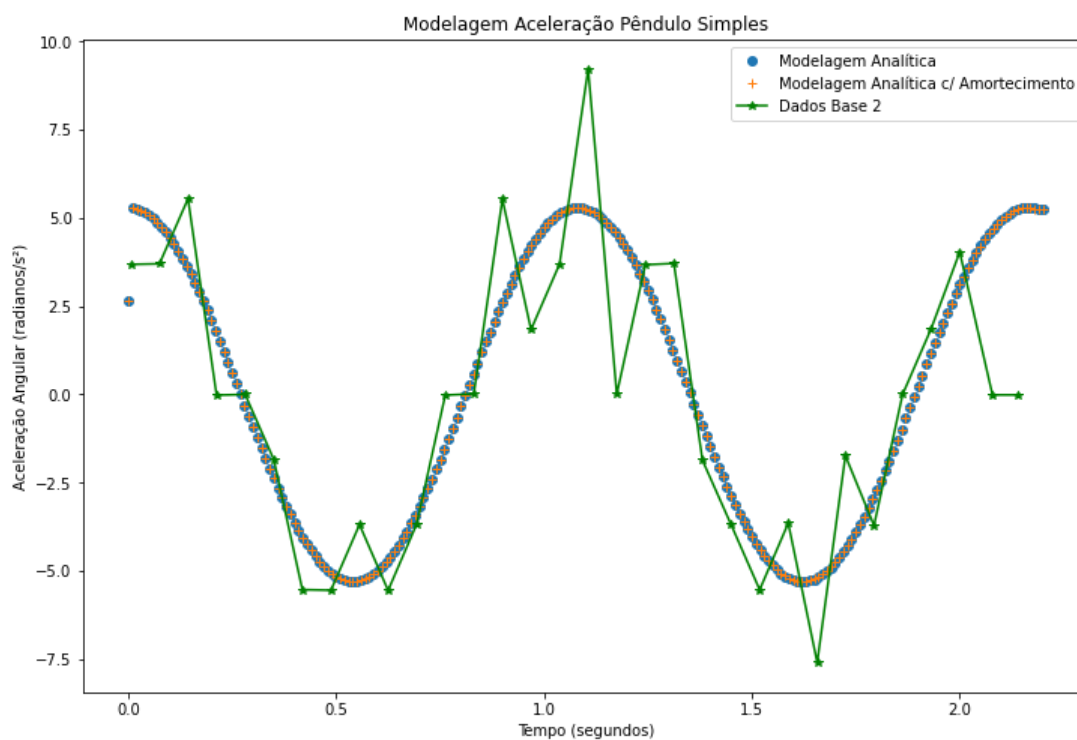


Figura 30: Gráfico da aceleração angular do pêndulo em função do tempo, em três métodos: Resultados experimentais (filmagem 2), modelagens analíticas com e sem amortecimento, calculadas em intervalos equiespaçados por 0.01 segundos entre 0 e 2.2 segundos.

4.3.3 Filmagem 3

		FILMAGEM 3	
TEMPO (em s)	ANGULAÇÃO EXPERIMENTAL (em rad)	ANGULAÇÃO ANALÍTICA S/ AMORTECIMENTO (em rad)	ANGULAÇÃO ANALÍTICA C/ AMORTECIMENTO (em rad)
0,0104	-0,1570796327	-0,1567928538	-0,1567925135
0,0792	-0,1396263402	-0,1407346899	-0,1407323643
0,1479	-0,09599310886	-0,1025479776	-0,1025448131
0,2167	-0,03490658504	-0,0481461235	-0,04814394675
0,2854	0,01745329252	0,0137587634	0,01375794395
0,3542	0,07853981634	0,0735803965	0,07357495856
0,4229	0,1221730476	0,1217387238	0,121727982
0,4917	0,1483529864	0,1507761833	0,1507607153
0,5604	0,1570796327	0,1560426118	0,1560243671
0,6292	0,1396263402	0,1367224758	0,1367045278
0,6979	0,0872664626	0,0959097717	0,09589580688
0,7667	0,03490658504	0,0399245543	0,03991816837
0,8354	-0,02617993878	-0,0222675020	-0,0222636205
0,9042	-0,0872664626	-0,0810356409	-0,08102035347
0,9729	-0,1308996939	-0,1269685207	-0,1269427488
1,0417	-0,1570796327	-0,1529532015	-0,1529199603
1,1104	-0,1570796327	-0,1548284027	-0,1547925353
1,1792	-0,1221730476	-0,1323037400	-0,1322711921
1,2479	-0,07853981634	-0,0889863939	-0,0889632276
1,3167	-0,01745329252	-0,0315842760	-0,03157560072
1,3854	0,03490658504	0,0307100319	0,03070115517
1,4542	0,09599310886	0,0882499391	0,08822316561
1,5229	0,1396263402	0,1318207977	0,1317789171

1,5917	0,1570796327	0,1546754384	0,1546240775
1,6604	0,1483529864	0,1531538368	0,1531007869
1,7229	0,1221730476	0,1307647920	0,130717793
1,7979	0,07853981634	0,0817984297	0,08176775094
1,8667	0,00872664626	0,0231500870	0,02314107311
1,9345	-0,0436332313	-0,0382649952	-0,03824955211
2,0042	-0,09599310886	-0,0952018407	-0,09516203666
2,0729	-0,1396263402	-0,1362811271	-0,1362221959
2,1417	-0,1570796327	-0,1559377733	-0,1558681051

Tabela 17: Valores obtidos para a angulação do pêndulo em função do tempo, para os resultados experimentais e analíticos com e sem amortecimento, na Filmagem 3.

Valores relativos Máximos de erro para as funções analíticas sem e com amortecimento, respectivamente: 9,18% e 9.17%.

Período médio experimental: 1,0655 segundos.

Período médio teórico: 1.0812308609757606 segundos.

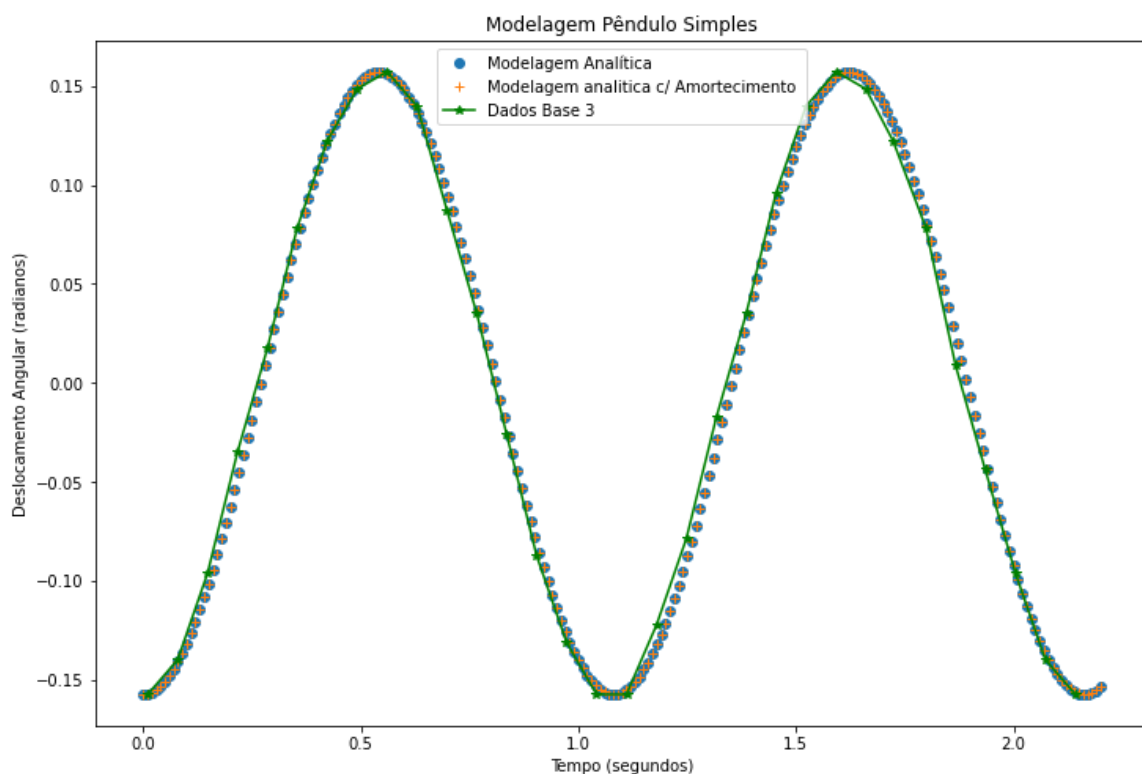


Figura 31: Gráfico do deslocamento angular do pêndulo em função do tempo, em três métodos: Resultados experimentais (filmagem 3), modelagens analíticas com e sem amortecimento, calculadas em intervalos equiespaçados por 0.01 segundos entre 0 e 2.2 segundos.

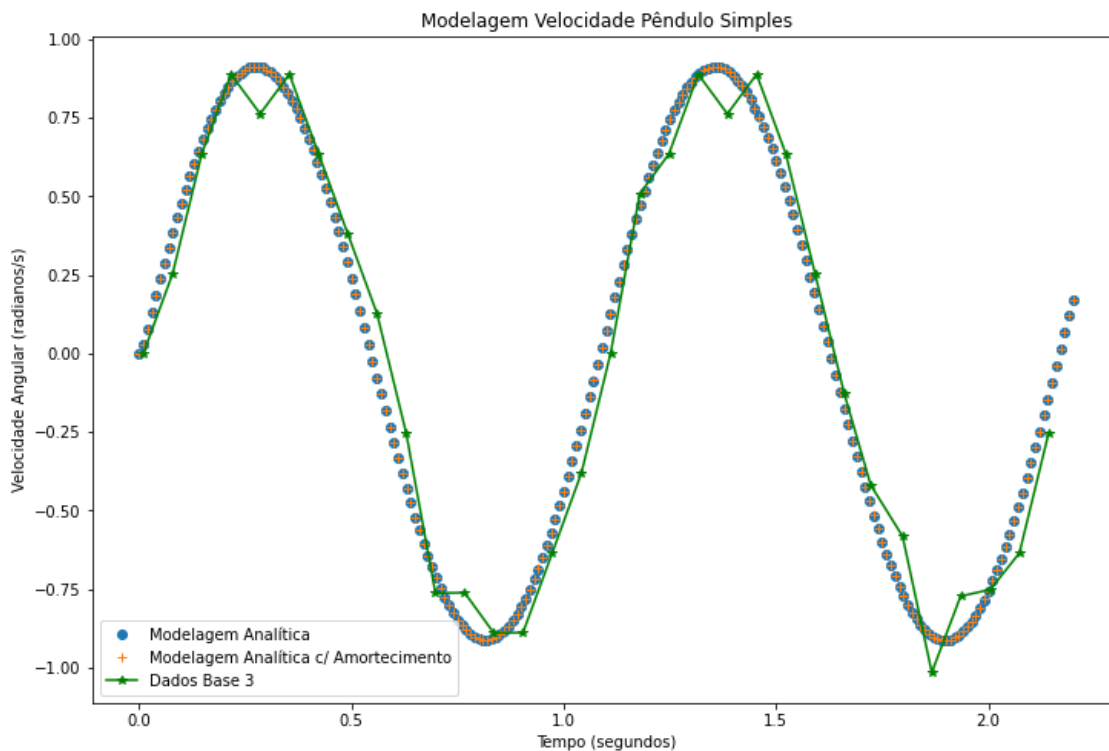


Figura 32: Gráfico da velocidade angular do pêndulo em função do tempo, em três métodos: Resultados experimentais (filmagem 3), modelagens analíticas com e sem amortecimento, calculadas em intervalos equiespaçados por 0.01 segundos entre 0 e 2.2 segundos.

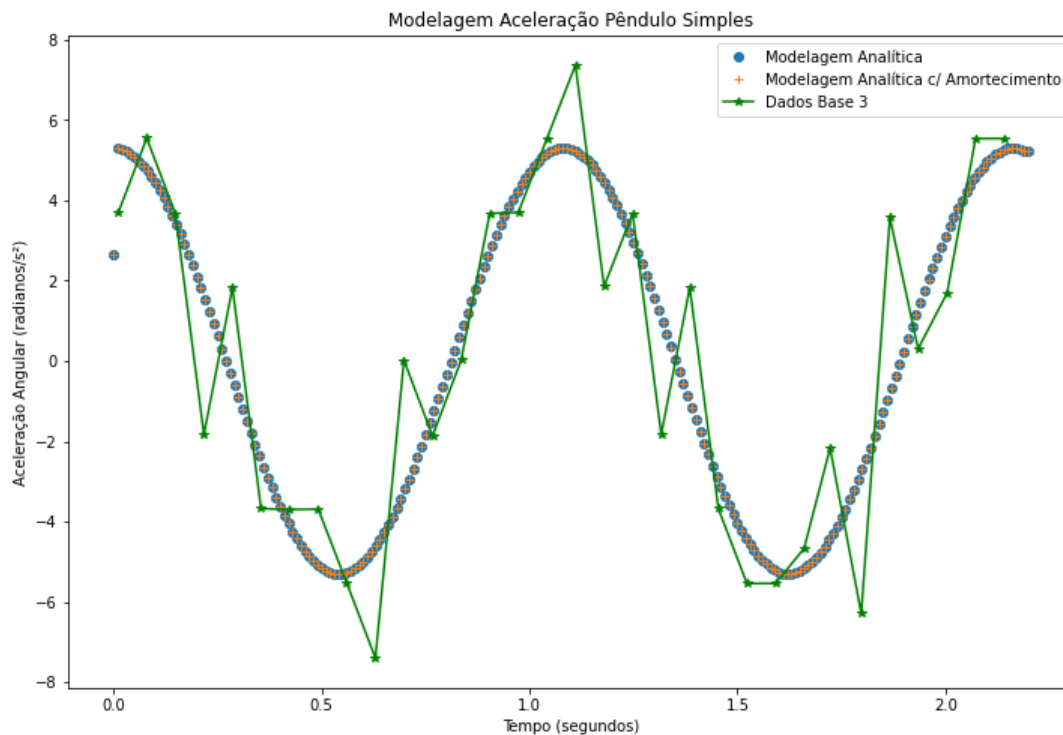


Figura 33: Gráfico da aceleração angular do pêndulo em função do tempo, em três métodos: Resultados experimentais (filmagem 3), modelagens analíticas com e sem

amortecimento, calculadas em intervalos equiespaçados por 0.01 segundos entre 0 e 2.2 segundos.

4.3.4 Filmagem 4

		FILMAGEM 4	
TEMPO (em s)	ANGULAÇÃO EXPERIMENTAL (em rad)	ANGULAÇÃO ANALÍTICA S/ AMORTECIMENTO (em rad)	ANGULAÇÃO ANALÍTICA C/ AMORTECIMENTO (em rad)
0,0146	-0,1570796327	-0,1565146204	-0,1565141436
0,0833	-0,1396263402	-0,1390326027	-0,1390301862
0,1521	-0,0872664626	-0,09961363103	-0,09961046982
0,2208	-0,03490658504	-0,04457040161	-0,04456834841
0,2896	0,02617993878	0,01757336146	0,01757229945
0,3583	0,0872664626	0,07686573207	0,07685998563
0,4271	0,1308996939	0,1241249849	0,1241139239
0,4958	0,1570796327	0,1517828531	0,151767152
0,5646	0,1570796327	0,1555563748	0,1555380507
0,6333	0,1308996939	0,1348412448	0,1348234284
0,7021	0,0872664626	0,0928453064	0,09283170644
0,7708	0,03490658504	0,0362939404	0,03628810422
0,8396	-0,02617993878	-0,0260555864	-0,0260510218
0,9083	-0,0872664626	-0,08421839615	-0,08420243631
0,9771	-0,1308996939	-0,1291876818	-0,1291613463
1,0458	-0,1570796327	-0,1537619	-0,1537283515
1,1146	-0,1570796327	-0,1541356079	-0,154099766
1,1833	-0,1221730476	-0,1302489587	-0,130216805
1,2521	-0,07853981634	-0,0858009215	-0,08577850936
1,3208	-0,01745329252	-0,02790956513	-0,02790187545
1,3896	0,0436332313	0,03446033934	0,03445034849
1,4583	0,1047197551	0,09132065067	0,0912928675
1,5271	0,1396263402	0,1338662604	0,1338236127
1,5958	0,1570796327	0,1552837612	0,1552320655
1,6646	0,1483529864	0,1522565441	0,1522036717

1,7333	0,1221730476	0,1252693987	0,1252241032
1,8021	0,07853981634	0,07850142167	0,07847191078
1,8707	0,00872664626	0,01953278135	0,01952515982
1,9396	-0,05235987756	-0,04276263012	-0,04274532648
2,0083	-0,09599310886	-0,09815137824	-0,09811025713
2,0771	-0,1396263402	-0,1381468096	-0,1380869506
2,1458	-0,1483529864	-0,1563439116	-0,1562739282

Tabela 18: Valores obtidos para a angulação do pêndulo em função do tempo, para os resultados experimentais e analíticos com e sem amortecimento, na Filmagem 4.

Valores relativos Máximos de erro para as funções analíticas sem e com amortecimento, respectivamente: 8.53% e 8.54%.

Período médio experimental: 1,0656 segundos.

Período médio teórico: 1.0812308609757606 segundos.

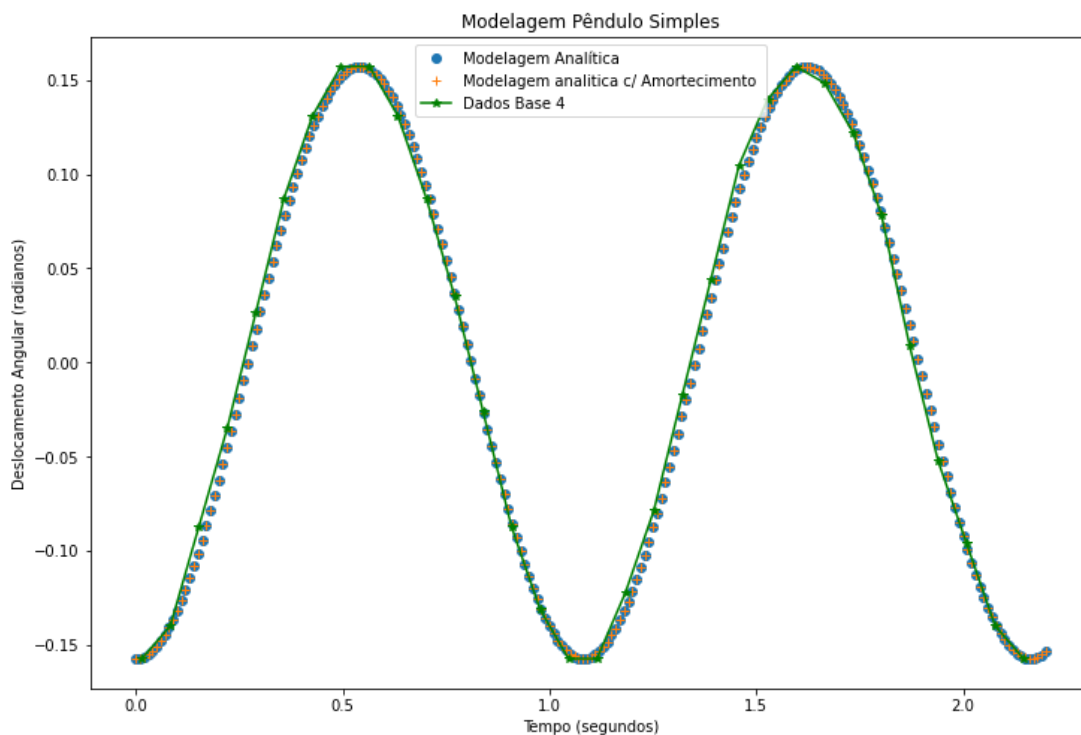


Figura 34: Gráfico do deslocamento angular do pêndulo em função do tempo, em três métodos: Resultados experimentais (filmagem 4), modelagens analíticas com e sem amortecimento, calculadas em intervalos equiespaçados por 0.01 segundos entre 0 e 2.2 segundos.

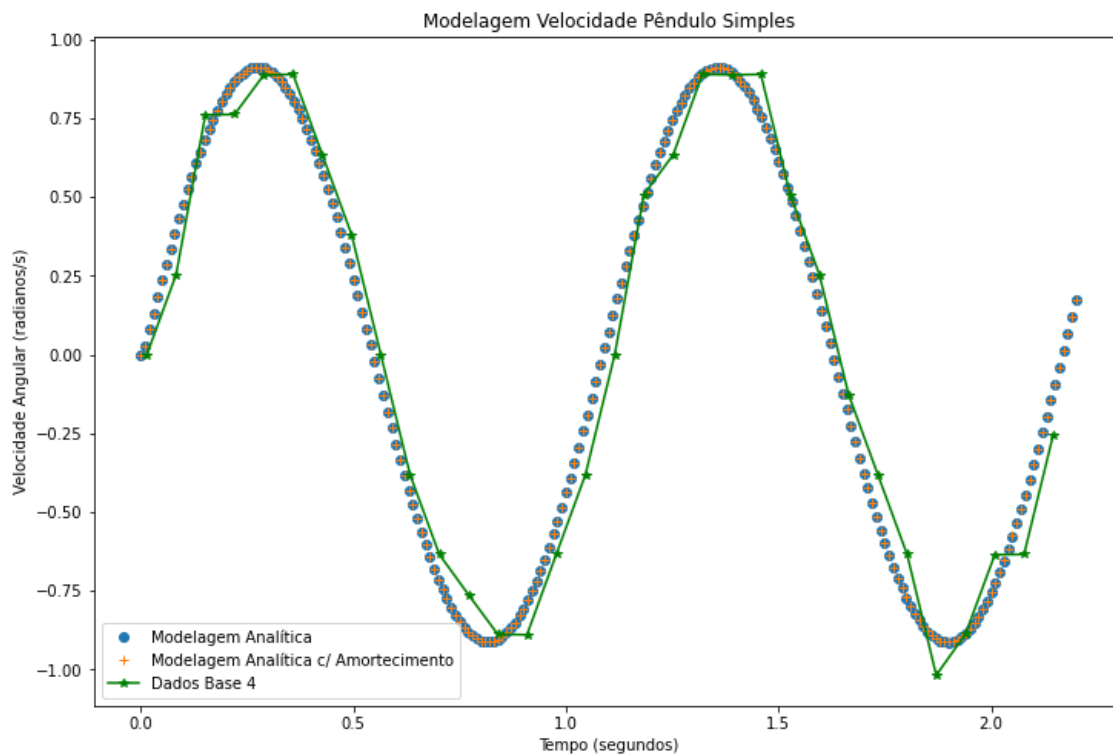


Figura 35: Gráfico da velocidade angular do pêndulo em função do tempo, em três métodos: Resultados experimentais (filmagem 4), modelagens analíticas com e sem amortecimento, calculadas em intervalos equiespaçados por 0.01 segundos entre 0 e 2.2 segundos.

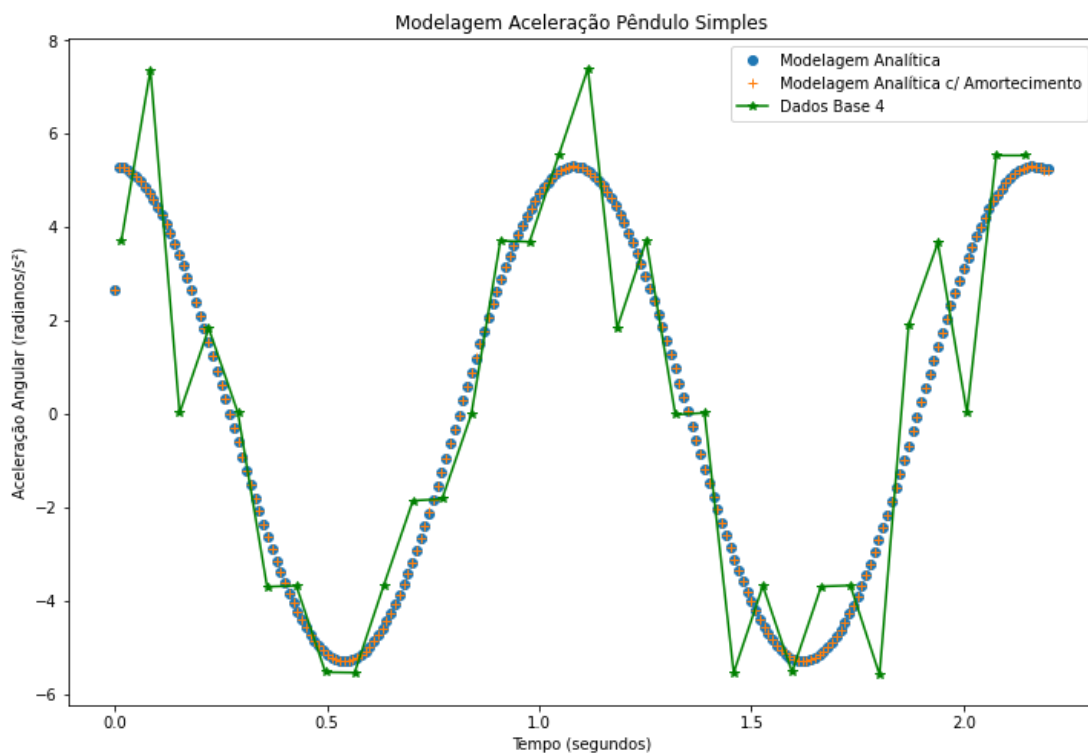


Figura 36: Gráfico da aceleração angular do pêndulo em função do tempo, em três métodos: Resultados experimentais (filmagem 4), modelagens analíticas com e sem amortecimento, calculadas em intervalos equiespaçados por 0.01 segundos entre 0 e 2.2 segundos.

4.3.5 Filmagem 5

		FILMAGEM 5	
TEMPO (em s)	ANGULAÇÃO EXPERIMENTAL (em rad)	ANGULAÇÃO ANALÍTICA AMORTECIMENTO S/ (em rad)	ANGULAÇÃO ANALÍTICA C/ AMORTECIMENTO (em rad)
0,0187	-0,1570796327	-0,1561530834	-0,1561524741
0,0875	-0,1396263402	-0,1372071788	-0,1372046739
0,1562	-0,0872664626	-0,09669190257	-0,09668875137
0,2250	-0,03490658504	-0,04088125131	-0,04087933225
0,2938	0,02617993878	0,02137749172	0,02137618111
0,3625	0,0872664626	0,08018594122	0,08017987632
0,4312	0,1308996939	0,1263831241	0,1263717537
0,5000	0,1570796327	0,152724736	0,1527088037
0,5687	0,1570796327	0,1549923363	0,1549739461
0,6375	0,1308996939	0,1328347756	0,1328171079
0,7062	0,0872664626	0,08980044545	0,08978721471
0,7750	0,02617993878	0,03255343082	0,03254816765
0,8438	-0,03490658504	-0,02982815045	-0,02982289888
0,9125	-0,0872664626	-0,08742919595	-0,08741255106
0,9812	-0,1308996939	-0,1312797899	-0,1312529156
1,0500	-0,1570796327	-0,1544998193	-0,1544659745
1,1187	-0,1483529864	-0,1533707451	-0,1533349499
1,1875	-0,1221730476	-0,12806741	-0,1280356827
1,2562	-0,07853981634	-0,08264198145	-0,08262032381
1,3250	-0,01745329252	-0,02412881806	-0,02412214902
1,3989	0,05235987756	0,04268834454	0,04267588559
1,4625	0,1047197551	0,09441249432	0,09438368782
1,5312	0,1396263402	0,1357861168	0,1357427414
1,6	0,1570796327	0,1558155228	0,1557635136

1,6688	0,1483529864	0,151268558	0,1512158962
1,7375	0,1221730476	0,1229192571	0,1228747037
1,8062	0,06981317008	0,07523779511	0,07520944682
1,875	0	0,01563246222	0,01562634876
1,9438	-0,05235987756	-0,04643853764	-0,04641970599
2,0125	-0,1047197551	-0,1011150727	-0,1010726214
2,0812	-0,1396263402	-0,139888706	-0,1398279726
2,15	-0,1570796327	-0,1566679344	-0,1565976688

Tabela 19: Valores obtidos para a angulação do pêndulo em função do tempo, para os resultados experimentais e analíticos com e sem amortecimento, na Filmagem 5.

Valores relativos Máximos de erro para as funções analíticas sem e com amortecimento, respectivamente: 9.95% e 9.94%.

Período médio experimental: 1,0657 segundos.

Período médio teórico: 1.0812308609757606 segundos.

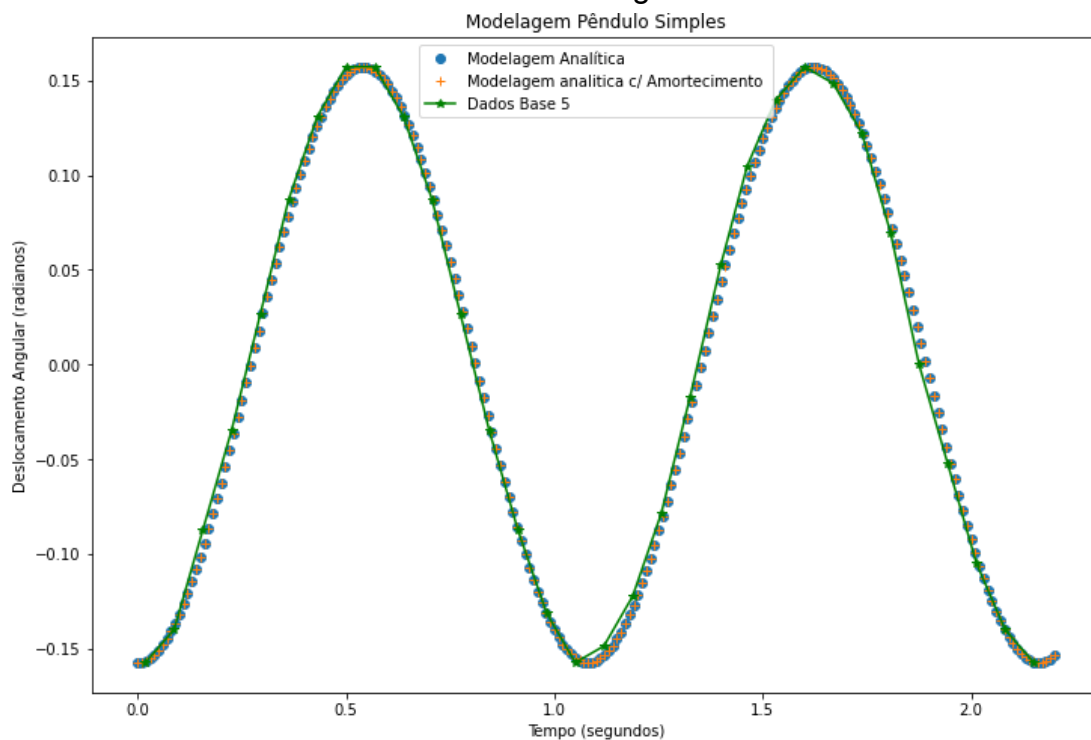


Figura 37: Gráfico do deslocamento angular do pêndulo em função do tempo, em três métodos: Resultados experimentais (filmagem 5), modelagens analíticas com e sem amortecimento, calculadas em intervalos equiespaçados por 0.01 segundos entre 0 e 2.2 segundos.

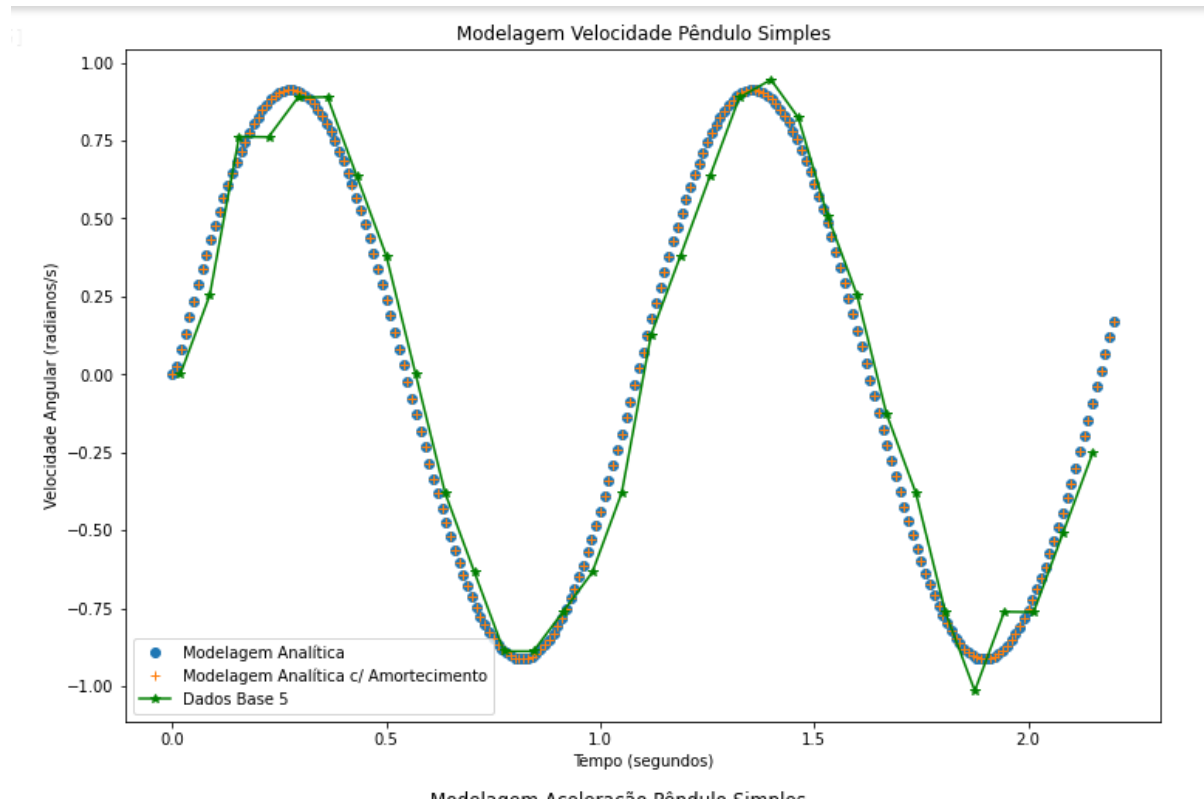


Figura 38: Gráfico da velocidade angular do pêndulo em função do tempo, em três métodos: Resultados experimentais (filmagem 5), modelagens analíticas com e sem amortecimento, calculadas em intervalos equiespaçados por 0.01 segundos entre 0 e 2.2 segundos.

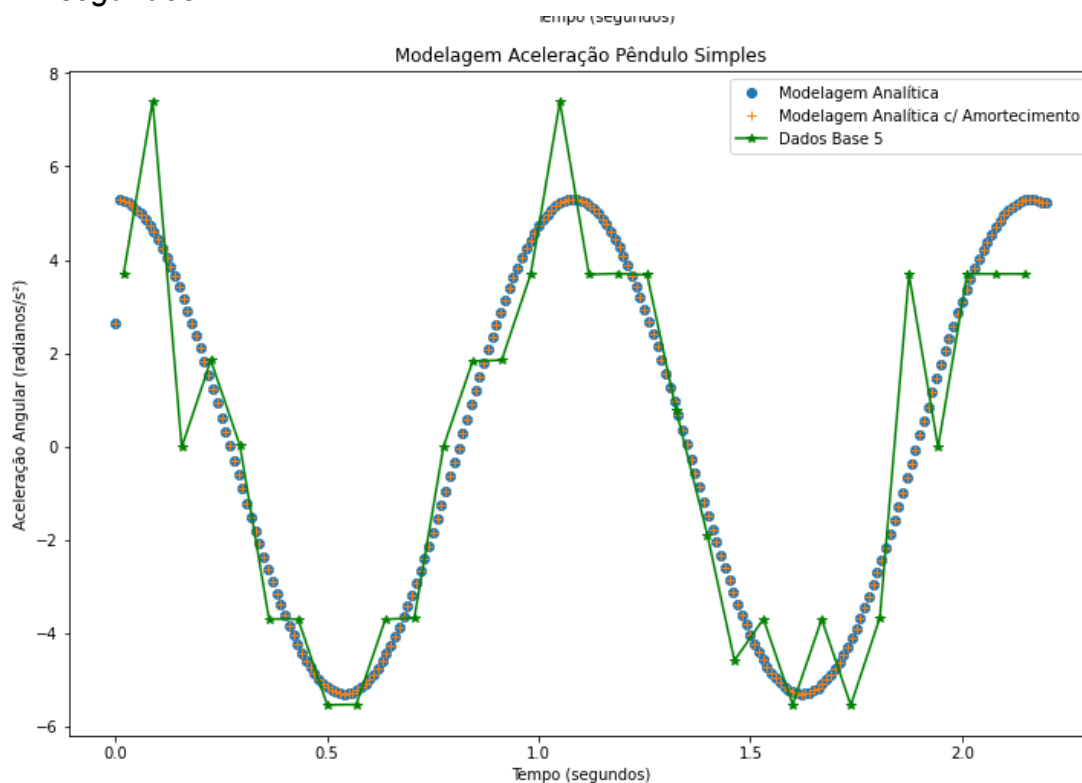


Figura 39: Gráfico da aceleração angular do pêndulo em função do tempo, em três métodos: Resultados experimentais (filmagem 5), modelagens analíticas com e sem

amortecimento, calculadas em intervalos equiespaçados por 0.01 segundos entre 0 e 2.2 segundos.

4.3.6 Média

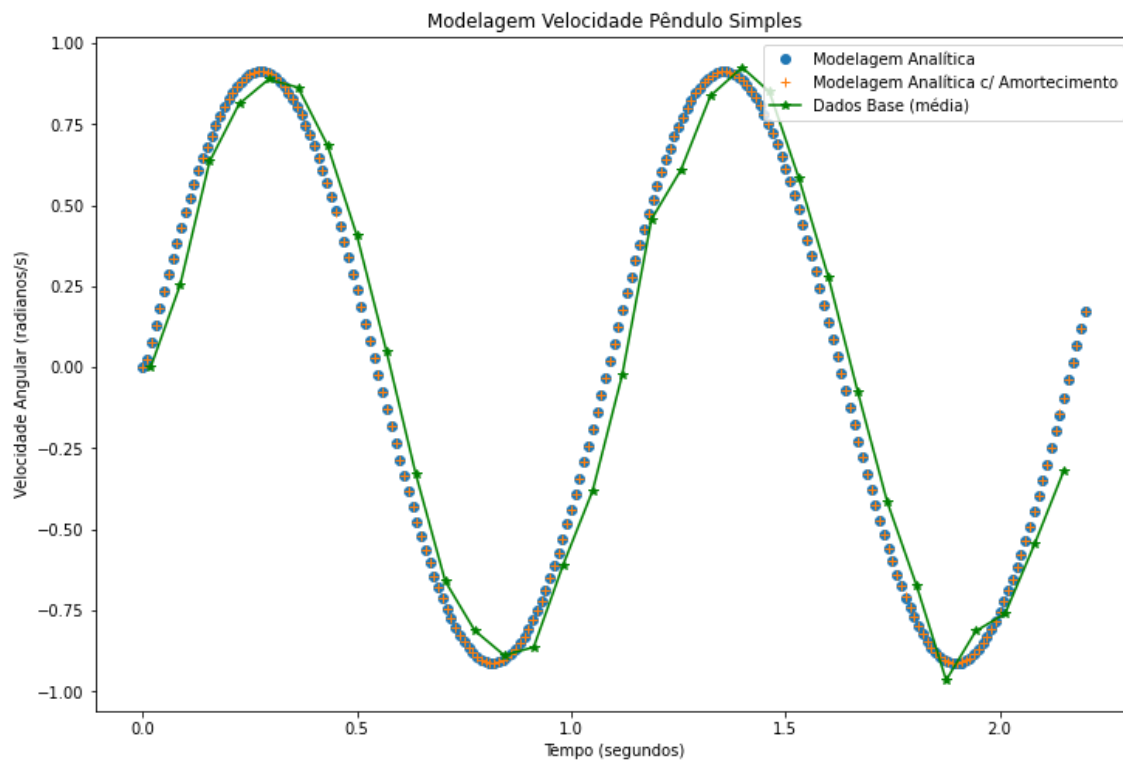


Figura 40: Gráfico da velocidade angular do pêndulo em função do tempo, em três métodos: Resultados experimentais (média das cinco filmagens), modelagens analíticas com e sem amortecimento, calculadas em intervalos equiespaçados por 0.01 segundos entre 0 e 2.2 segundos.

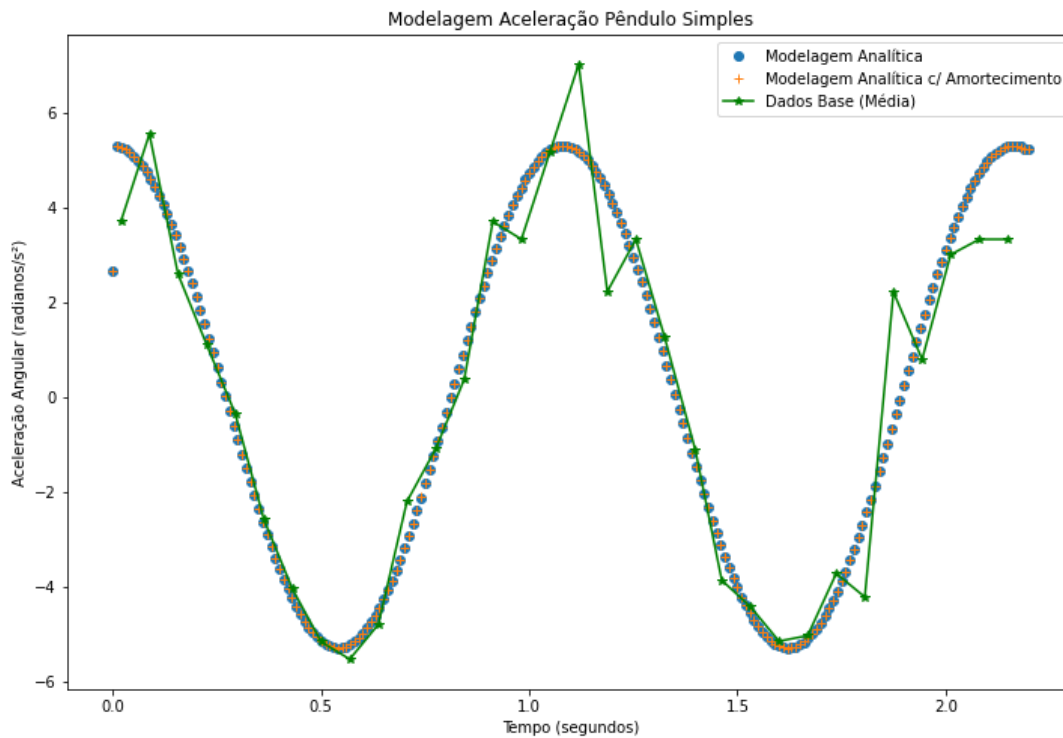


Figura 41: Gráfico da aceleração angular do pêndulo em função do tempo, em três métodos: Resultados experimentais (média das cinco filmagens), modelagens analíticas com e sem amortecimento, calculadas em intervalos equiespaçados por 0.01 segundos entre 0 e 2.2 segundos.

Média dos valores relativos máximos de erro para as funções analíticas sem e com amortecimento, respectivamente: 8.767% e 8.763%.

Média do período médio experimental: 1.06567 segundos.

5. ANÁLISE

5.1 Descida na rampa

De acordo com os gráficos de velocidade e posição por tempo, podemos perceber que elas seguem o comportamento da fórmula física, em que a velocidade cresce linearmente, sendo ela maior quanto menor é o coeficiente de atrito, e o deslocamento do corpo cresce exponencialmente.

Esse comportamento se repete por todos os experimentos, independente dos materiais ou pesos. Porém, não quer dizer que eles sejam iguais, eles possuem taxas diferentes e valores que, com o passar do tempo, se diferenciam cada vez mais.

5.2 Queda Livre

Observando as tabelas e gráficos acima, é possível estudar como as duas diferentes modelagens, utilizando a resistência do ar e não a utilizando, se comportam em relação às posições e as velocidades reais.

Conseguimos notar que para a tabela e o gráfico da posição, a curva das duas modelagens se parece com uma função de segundo grau com a concavidade para baixo. A modelagem utilizando a força de arrasto do ar interpola bem os pontos em que estão medidas as posições reais do corpo, tendo diferenças desprezíveis. Já a modelagem não utilizando algum tipo de amortecimento, não deixa muito a desejar também e começa a destoar das posições reais do corpo apenas pelas ultimas observações.

Para a tabela e o gráfico da velocidade, conseguimos notar que o gráfico da modelagem sem amortecimento se comporta como uma função linear, e já com amortecimento, conforme a velocidade vai aumentando, a linha vai começando a se curvar. As duas modelagens acabam tendo erros consideráveis com as posições reais estimadas, porém a com amortecimento acaba fazendo uma aproximação melhor para os pontos.

5.3 Pêndulo Simples

É possível notar que, para os gráficos de posição (angulação) em função do tempo, das seções 4.3.1 até 4.3.5, ambas as curvas obtidas das simulações analíticas se aproximam muito dos valores experimentais capturados, com poucas diferenças, as quais são mínimas. Também é notória a proximidade dos valores obtidos nas simulações sem e com resistência do ar. Veja que a média dos erros máximos obtidos de cada filmagem para com sua simulação é de aproximadamente 9% para ambas as modelagens. Pelos gráficos é fácil de observar que as curvas das funções seguem muito próximas, em todas as filmagens, mantendo a forma senoidal, característica do movimento pendular.

Já para os valores de velocidade e aceleração, observamos muito mais inconsistências das simulações para com os resultados experimentais. Há muito mais pontos divergentes, além de que as diferenças são relativamente altas quando ocorrem. No entanto, entre si, as curvas que descrevem as funções analíticas (com e sem amortecimento) são praticamente coincidentes nos gráficos de velocidade e aceleração angular em função do tempo, e apesar de possuírem diferenças pontuais com a curva obtida dos resultados experimentais, as três mantêm uma mesma forma (senoidal), a qual caracteriza o movimento do Pêndulo, tal qual descrito na introdução. Fato é que ao se observar os gráficos (da seção 4.3.6) de velocidade e aceleração angulares em função do tempo gerados pelas funções analíticas juntamente aos valores médios das filmagens, notamos uma proximidade maior entre os resultados experimentais e as simulações analíticas, gerando uma suavidade maior da curva experimental próximo às curvas analíticas.

6. INTERPRETAÇÃO

6.1 Descida da rampa

A partir da análise dos gráficos e dos dados temos três conclusões, lembrando que ao dizer que o coeficiente de atrito dinâmico é maior, significa que a aceleração é menor, logo a velocidade e o deslocamento cresce lentamente.

Primeiro quanto ao material da rampa, quando comparado a madeira ao vidro, percebemos que a madeira oferece maior resistência ao movimento, ou seja, o coeficiente de atrito dinâmico é maior na madeira.

A segunda conclusão é relacionada a área de contato entre a rampa e o bloco, quanto menor é essa, maior é o coeficiente de atrito dinâmico, mesmo com o mesmo peso, portanto concluímos que quanto menor é a distribuição da massa, ou seja, maior massa por área de contato, logo o bloco vai sofrer mais da força de atrito.

A última observação é em relação a massa do corpo, esperávamos que a massa não fosse interferir no movimento, como visto nas fórmulas apresentadas na introdução. Porém, ao observar o bloco com sobrepeso, percebemos que a massa influencia o coeficiente de atrito dinâmico que afeta diretamente o movimento. Isso deve acontecer, pois, assim como percebemos no item anterior, quanto maior a densidade, ou seja massa por área de contato, maior o atrito o corpo vai sofrer.

6.2 Queda livre

Em relação às posições, como são medidas experimentalmente, olhando através de uma fita com escala, conseguimos ter uma boa estimativa da posição real do corpo pela foto, e as duas modelagens feitas conseguem simular bem o comportamento do objeto em relação a sua posição pelo tempo, porém a com amortecimento, como esperado, consegue fazer uma melhor aproximação.

Para a velocidade, como não a medimos experimentalmente e de alguma forma utilizamos uma estimativa calculando a velocidade média e assumindo como se fosse a velocidade instantânea, era de se esperar que ocorresse algumas diferenças em relação às modelagens, pois não conseguimos estimar e ter medidas mais precisas de qual era a velocidade real naquele ponto com tal precisão para tomarmos como referência. E conseguimos observar também, que apesar de ser em menor escala, a modelagem com amortecimento consegue fazer aproximações melhores das “reais”, e também parece se comportar melhor do que o primeiro método em comparação com o que seria uma queda livre da vida real, onde teria uma diminuição da aceleração conforme vai passando o tempo e aumentando a velocidade.

6.3 Pêndulo Simples

Os resultados obtidos na análise confirmam as expectativas sobre a modelagem do sistema pendular. Os gráficos de posição/velocidade/aceleração em função do tempo estão de acordo com o esperado para o modelo físico em questão. No entanto, as modelagens com e sem resistência do ar não apresentam diferenças significativas nos resultados. Isso pode ser explicado pela pequena influência amortecedora do ar no movimento pendular, sobretudo ao considerarmos um intervalo de tempo amostral tão curto (cerca de 2 segundos). Estima-se que diferenças mais significativas só poderiam ser observadas em experimentos mais longos, nos quais ocorreria um maior acúmulo da força refreadora do ar no pêndulo.

Já as variações entre as curvas analíticas versus experimentais nos gráficos de velocidade e aceleração angulares em função do tempo podem ser compreendidas pelo cálculo da velocidade e aceleração instantânea; os valores são obtidos pelo quociente entre a variação de deslocamento angular/velocidade angular pela variação do tempo em um dado intervalo. No entanto, os dados experimentais fornecem intervalos de tempo substancialmente grandes - cerca de sete centésimos - enquanto os dados analíticos utilizam um centésimo de intervalo de tempo. Quanto menor o intervalo de tempo, melhor a estimativa da velocidade/aceleração dado um instante de tempo, daí a maior suavidade das curvas analíticas em comparação às curvas experimentais. Como salientado na seção 5.3, as curvas experimentais obtidas pelas médias das velocidades/acelerações angulares instantâneas são mais suaves e tendem a se aproximar das curvas analíticas, indicando que o modelo adotado é adequado ao sistema físico em questão e que as diferenças para com os valores experimentais é gerada pela insuficiência dos dados dos experimentos.

7. CRÍTICA

Com este trabalho tivemos a oportunidade de aprender mais sobre formas variadas de modelar um problema, e também nos familiarizar com a modelagem desses sistemas físicos reais, tendo de simular-los através da implementação de algoritmos.

Para chegar ao resultado final próximo dos dados reais, aprendemos sobre as formas de amortecimento dos movimentos, atrito e resistência do ar, principalmente ao compará-los às modelagens sem essas forças de arraste. Permitindo que a gente entendesse melhor como essas afetam o movimento, e como as circunstâncias do experimento conseguem afetar a mesma, aumentando ou diminuindo o amortecimento do movimento.

Computacionalmente, exercitamos a modelagem de diferentes sistemas físicos reais, alguns que já tínhamos visto em aula ou praticado em exercícios de classe, mas estudar eles e entender como projetá-los e modelá-los com e sem amortecimento foi uma boa prática.

8. LOG

Coletar dados experimentais	2h30
Estudar modelagem física dos experimentos	2h
Tratar dados experimentais	3h30
Organizar e comentar código	3h
Simular programaticamente Posição/Velocidade/Aceleração para cada experimento	3h
Geração dos Gráficos/tabelas/resultados	4h30
Montagem do Relatório	11h00

..