


MAC0323 ALGORITMOS E ESTRUTURAS DE DADOS II

FOLHA DE SOLUÇÃO

Nome: Lucas Quaresma Medina Lam

Número USP: 11796399

Assinatura



Sua assinatura atesta a autenticidade e originalidade de seu trabalho e que você se compromete a seguir o código de Ética da USP em suas atividades acadêmicas, incluindo esta atividade.

Exercício: 2

Data: 10/05/2021

SOLUÇÃO

Proposição. Mostre que $epl(T) = ipl(T) + 2n$, onde n é o número de nós (internos) de T .

Prova:

Usaremos a indução em n

Caso base da indução: Quando $n = 0$, a árvore binária não tem nós internos e tem 1 nó externo, porém o caminho até esse nó vazio é zero. Nesta árvore então $epl(T) = ipl(T) = n = 0$. Portanto temos que $epl(T) = ipl(T) + 2n$

Hipótese de indução: Seja m um numero natural qualquer. Assumiremos que $epl(Tm) = ipl(Tm) + 2m$

Passo indutivo: Mostraremos que $epl(Tm + 1) = ipl(Tm + 1) + 2(m + 1)$ vale para todas as árvores binárias que tem $m + 1$ nós internos. Removemos v , sendo esse qualquer um dos nós internos da árvore que é uma folha. A árvore resultante Tm , tem agora m nós internos. Da hipótese de indução, segue que $epl(Tm) = ipl(Tm) + 2m$.

Suponha que v estava na profundidade da altura da árvore $Tm + 1$, e digamos que $prof(v) = h$. Portanto temos que $epl(Tm + 1) = epl(Tm) + h + 2$ e que $ipl(Tm + 1) = ipl(Tm) + h$. Então temos:

$$\begin{aligned} epl(Tm + 1) &= epl(Tm) + h + 2 \\ &= ipl(Tm) + 2m + h + 2 \\ &= ipl(Tm + 1) - h + 2m + h + 2 \\ &= ipl(Tm + 1) + 2m + 2 \\ &= ipl(Tm + 1) + 2(m + 1) \blacksquare \end{aligned}$$