

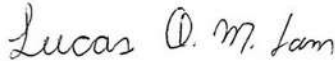
MAC0323 ALGORITMOS E ESTRUTURAS DE DADOS II

FOLHA DE SOLUÇÃO

Nome: Lucas Quaresma Medina Lam

Número USP: 11796399

Assinatura



Sua assinatura atesta a autenticidade e originalidade de seu trabalho e que você se compromete a seguir o código de Ética da USP em suas atividades acadêmicas, incluindo esta atividade.

Exercício: 1

Data: 03/05/2021

SOLUÇÃO

Proposição. A altura de qualquer nó 'x' de uma árvore formada pelo weighted quick-union para N elementos é no máximo $\lg N$

Prova:

Vamos analisar primeiro quando que a altura de x cresce.

A altura de x só cresce, quando fazemos a união de uma árvore T1, que contém x, com outra árvore T2, sendo $T2 \geq T1$, e essa altura aumenta em 1 unidade.

Vemos também que quando ocorre esse incremento na altura de x, o tamanho da árvore que contém x pelo menos dobra (por conta de T2 ser maior ou igual a T1).

E propomos então que o tamanho da árvore que contém x pode dobrar no máximo $\lg N$ vezes. Se começarmos o tamanho da árvore como 1 e tentarmos dobrar i vezes, teríamos o tamanho sendo pelo menos 2^i . Se $i > \lg N$, teríamos que o tamanho da árvore seria maior que a quantidade de elementos ($2^i > N$) o que é impossível, então vemos que i necessita ser $\leq \lg N$.

Portanto, concluímos que a árvore que contém x pode dobrar seu tamanho no máximo $\lg N$ vezes. E como isso está diretamente relacionado com o incremento na altura, vemos que essa só pode ser também no máximo $\lg N$. ■