PREFEITURA MUNICIPAL DE
FEIRA DE SANTANA

Guarda Municipal 2018

Matemática

Essa apostila foi desenvolvida exclusivamente para os usuários do APP Approvado. Trata-se de um material completo, seguindo à risca o Edital do Concurso da Prefeitura de Feira de Santana, para o cargo de Guarda Municipal. Foi utilizado para a sua correta elaboração, fontes e informações dos principais sites do ensino da Matemática, e blogs especializados em concurso público. Diga-se de passagem, que VOCÊ estará com a faca e o queijo na mão se caso conseguir sintetizar e massificar todo o conteúdo desse material.

Então, não perca tempo.Desça logo para o sumário e deposite toda a sua força mental durante o seus momentos de estudo.

NÚMEROS REAIS

O conjunto dos números reais surge para designar a união do conjunto dos números racionais e o conjunto dos números irracionais. É importante lembrar que o conjunto dos números racionais é formado pelos seguintes conjuntos: Números Naturais e Números Inteiros. Vamos exemplificar os conjuntos que unidos formam os números reais. Veja:

Números Naturais (N): 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, ...
Números Inteiros (Z): ..., –8, –7, –6, –5, –4, –3, – 2, –1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, ...
Números Racionais (Q): 1/2, 3/4, 0,25, –5/4,
Números Irracionais (I): √2, √3, –√5, 1,32365498...., 3,141592....

Podemos concluir que o conjunto dos números reais é a união dos seguintes conjuntos:

N *U* Z *U* Q *U* I = **R** ou **Q *U* I** = **R**

Os números reais podem ser representados por qualquer número pertencente aos conjuntos da união acima. Essas designações de conjuntos numéricos existem no intuito de criar condições de resolução de equações e funções, as soluções devem ser dadas obedecendo aos padrões matemáticos e de acordo com a condição de existência da incógnita na expressão.

O conjunto dos **números reais** é formado pela união entre o conjunto dos números racionais e o conjunto dos números irracionais. Existem várias propriedades a respeito dos números reais, que são extensões das propriedades dos números racionais. Essas propriedades estão relacionadas com a ordem dos **números reais** e com o estudo das operações matemáticas básicas aplicadas aos elementos desse conjunto.

A definição dos **números reais** depende das definições dos conjuntos dos números racionais e irracionais, que, por sua vez, dependem da definição dos números inteiros. Dessa maneira, todos os números geralmente estudados até o final do Ensino Fundamental e início do Ensino Médio são os números reais.

De posse da definição de números reais, discutiremos as propriedades mais importantes relacionadas com esse conjunto numérico.

Propriedades do conjunto dos números reais

As propriedades a seguir são decorrentes da definição dos **números reais** e também da inclusão das operações "adição" e "multiplicação" entre os elementos desse conjunto.

O conjunto dos números reais é um conjunto completo

Existe uma relação feita entre o **conjunto dos números** reais e a reta numérica, que é construída da seguinte maneira: para cada número real, existe um e apenas um ponto representando-o na reta numérica. É possível mostrar que a reta não contém nenhum "furo", isto é, ponto que não represente número real algum. Portanto, o conjunto dos números reais é completo.

→ O conjunto dos números reais é um conjunto ordenado

Ainda avaliando a reta numérica, comparando dois **números reais** quaisquer, aquele que estiver mais à esquerda é menor do que aquele que estiver mais à direita. Além disso, se estiverem no mesmo ponto, serão iguais. Essa é a ordenação do conjunto dos números reais representada na reta numérica.

Dados os números reais “a”, “b” e “c”, as seguintes propriedades operatórias são válidas:

1 – Associatividade:

$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$

$a + (b + c) = (a + b) + c$

2 – Comutatividade:

$a \cdot b = b \cdot a$

$a + b = b + a$

3 – Existência de elemento neutro único para a soma e para a multiplicação:

$a + 0 = a$

$a \cdot 1 = a$

4 – Existência de elemento inverso único para a soma e para a multiplicação:

$a + (-a) = 0$

$a \cdot \frac{1}{a} = 1$

5 – Distributividade:

$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

NÚMEROS COMPLEXOS

amos considerar a equação **$x^2 - 2x + 5 = 0$**:

$$\Delta = (-2)^2 - 4.1.5 = -16$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{-16}}{2} \Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{16.(-1)}}{2} \Rightarrow x = \frac{2 \pm 4\sqrt{-1}}{2} \Rightarrow x = 1 \pm 2\sqrt{-1} \qquad \sqrt{-1}$$

Sabemos que o número não pertence ao conjunto dos números reais, pois não existe nenhum número que elevado ao quadrado resulte em **-1**. Para que a equação acima tenha solução, temos que estender o conjunto dos números reais para obter um novo conjunto, chamado de **conjunto dos números complexos** e representado por .

O número foi denominado unidade imaginária e criou-se o número **i**, de modo que:

$$\boxed{i^2 = -1}$$

Logo,

$$\boxed{i = \sqrt{-1}}$$

Portanto, as soluções da equação **x² - 2x + 5 = 0** em são **1 - 2i** e **1 + 2i**.

Forma algébrica de um número complexo

Todo número complexo **z** pode ser escrito na forma:

$$\boxed{z = a + bi, \text{ com } a, b}$$

Essa forma é chamada forma algébrica do número complexo. Observe que um número complexo nesse formato tem duas partes:

Indicamos:

Re(z) = a

Im(z) = b

Exemplos

- **z = 3 + 5i** **Re(z) = 3** e **Im(z) = 5**
- **z = -7 +18i** **Re(z) = -7** e **Im(z) = 18**
- **z = 53 – 25i** **Re(z) = 53** e **Im(z) = -25**

- Se a parte real do número complexo é nula, então o número é **imaginário puro**.

Exemplo: z = 3i **Re(z) = 0** e **Im(z) = 3**

Exemplo

Determine o valor de **k** para que o número complexo **z = (k – 4) +3i** seja imaginário puro:

Resolução

Para que o número seja imaginário puro, a parte real deve ser nula:

$$k - 4 = 0 \qquad \mathbf{k = 4}$$

- Se a parte imaginária do número complexo é nula, então o número é **real**.

Exemplo: z = 10   Re(z) = 10 e **Im(z) = 0**

Exemplo

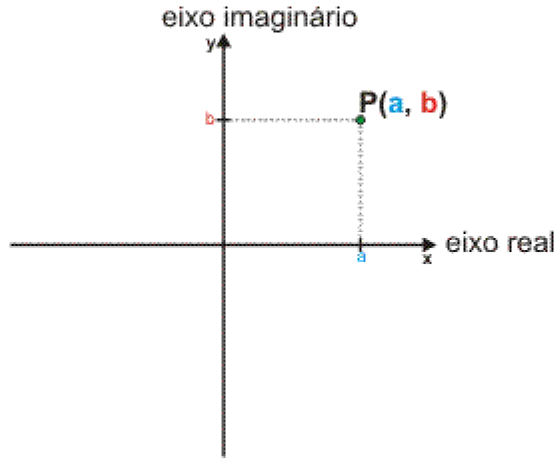
Determine o valor de **k** para que o número complexo $\mathbf{z = 3+(k^2 - 4)i}$ seja um número real:

Resolução

Para que o número seja real, a parte imaginária deve ser nula:

$$k^2 - 4 = 0 \qquad k^2 = 4 \qquad \mathbf{k = -2} \text{ ou } \mathbf{k = 2}$$

Podemos associar qualquer número complexo **z = a +bi** a um ponto no plano de Argand-Gauss. No eixo das abscissas (eixo real,) representa-se a parte real, e, no eixo das ordenadas (eixo imaginário), a parte imáginária do número complexo. O ponto **P** é o **afixo**ou **imagem geométrica de z**.



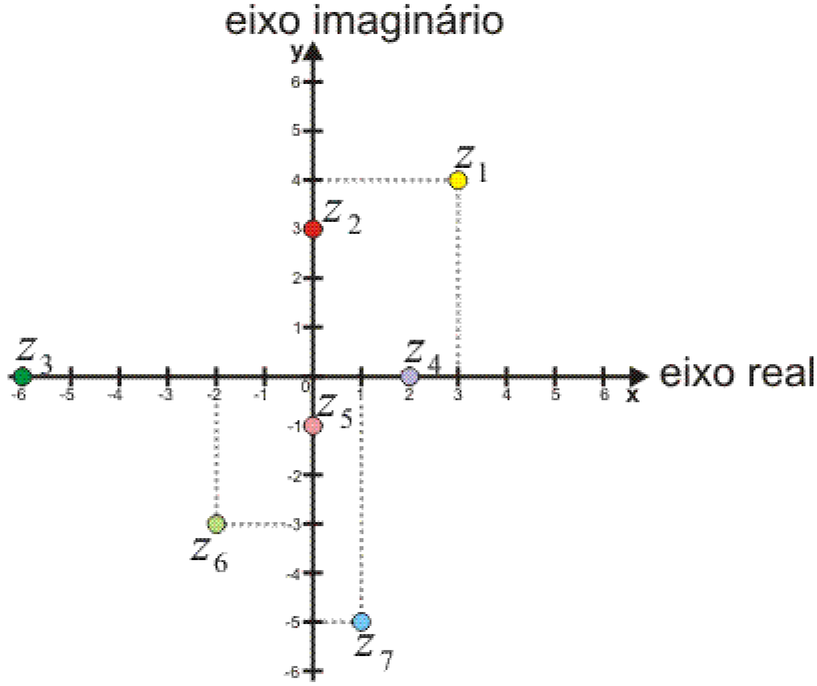
Exemplo

Represente no plano de Argand-Gauss os números complexos:

$$z_1 = 3 + 4i$$
$$z_2 = 3i$$
$$z_3 = -6$$
$$z_4 = 2$$
$$z_5 = -i$$
$$z_6 = -2 - 3i$$
$$z_7 = 1 - 5i$$

Resolução

Cada complexo será um ponto no plano cuja abscissa é a parte real e a ordenada é a parte imaginária:



Note que os números reais estão localizados sobre o eixo real, assim como os números imaginários puros estão sobre o eixo imaginário.

Observação: Não é definida para o campo dos números complexos a relação de ordem, isto é, não existe um número complexo maior ou menor que outro.

SISTEMAS LINEARES

Sistemas lineares é um conjunto de equações lineares, com m equações e n incógnitas. A solução de um sistema linear é a solução de todas as equações lineares. Existem muitas maneiras de resolver um sistema de equações lineares ou sistemas lineares, como quiser chama-los. Aqui, vamos nos aprender a regra mais fácil pois o intuito do site é facilitar a vida do estudante e não complicar.

Equação linear

Antes disso, porém, vamos entender o que é uma equação linear para depois estudarmos e entendermos sistemas lineares.

Uma equação linear é qualquer equação da forma: $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \ldots + a_nx_n = b$ onde $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ são números reais e b é um termo independente. Caso $b = 0$, a equação é chamada de linear homogênea.

Sistema linear

Um sistema linear tem a seguinte forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Cuja solução pertence aos números reais e o conjunto solução do sistema é solução de todas as equações lineares do sistema.

Classificação de sistemas lineares

Os sistemas lineares são classificados de acordo com o número de soluções apresentados pelo mesmo. Assim, os sistemas lineares podem ser classificados como:

1. **SPD – Sistema Possível e Determinado – possui uma única solução.**
2. **SPI – Sistema Possível e Indeterminado – possui infinitas soluções.**
3. **SI – Sistema Impossível – não possui solução.**

Matriz associada a um sistema linear

Podemos associar a um sistema linear algumas matrizes, onde os seus coeficientes ocuparão linhas e colunas da matriz.

Seja o sistema:

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 5x + 2y = 3 \\ x + 2y = 1 \end{cases}$$

Matriz incompleta: formada apenas pelos coeficientes do sistema.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Matriz completa: formada pelos coeficientes do sistema mais os temos independentes.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 5 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

MATRIZES E DETERMINANTES

As **Matrizes** e os **Determinantes** são conceitos utilizados na matemática e em outras áreas como, por exemplo, da informática.
São representadas na forma de tabelas que correspondem a união de números reais ou complexos, organizados em linhas e colunas.

Matriz

A **Matriz** é um conjunto de elementos dispostos em linhas e colunas. As linhas são representadas pela letra 'm' enquanto as colunas pela letra 'n', onde **n ≥ 1** e **m ≥ 1**.

Nas matrizes podemos calcular as quatro operações: soma, subtração, divisão e multiplicação:

Exemplos:
Uma matriz de ordem m por n (m x n)
A = | 1 0 2 4 5|
Logo, A é uma matriz de **ordem 1** (com 1 linha) por 5 (5 colunas)
Lê-se **Matriz de 1 x 5**

$$B = \begin{vmatrix} 4 \\ 6 \\ 0 \end{vmatrix}$$

Logo B é uma matriz de **ordem 3** (com 3 linha) por 1 (1 colunas)
Lê-se **Matriz de 3 x 1**

Determinante

O Determinante é um tipo de matriz, chamada de "**Matriz Quadrada**" que apresenta o mesmo número de linhas e de colunas, ou seja, quando **m = n**.

Neste caso, é chamada de Matriz Quadrada de ordem n. Em outras palavras, toda matriz quadrada possui um determinante, seja ele um número ou uma função associado à ela:

Exemplo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 6 \\ -7 & -9 & 6 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

Assim, para calcular o Determinante da Matriz Quadrada:

- Deve se repetir as 2 primeiras colunas

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 6 \\ -7 & -9 & 6 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 5 \\ -7 & -9 \\ 3 & 2 \end{matrix}\Bigg|$$

- Encontrar as diagonais e multiplicar os elementos, não esquecendo de trocar o sinal no resultado da diagonal secundária:

1. Diagonal principal (da esquerda para a direita): (1,-9,1) (5,6,3) (6,-7,2)
2. Diagonal secundária (da direita para a esquerda): (5,-7,1) (1,6,2) (6,-9,3)
Portanto, o Determinante da matriz 3x3 = 182.

Progressão aritmética

e

Progressão geométrica

Progressão aritmética

O termo "**progressão aritmética**" remete a um desenvolvimento gradual de um processo ou uma sucessão. Em matemática, dizemos que esta sucessão é uma sequência. Podemos exemplificar algumas sequências conhecidas:

- Sequência das eleições para o Executivo a partir de 1994: (1994, 1998, 2002, 2006, 2010, 2014);
- Sequência das edições da Copa do Mundo a partir de 1990: (1990, 1994, ..., 2014, 2018);
- Sequência dos números naturais: (0, 1, 2, 3, 4, 5, ...)

Note que em todos os exemplos acima, as sequências são definidas por uma ordem em seus elementos (também chamados de termos). Definimos o tamanho de uma sequência pelo número de termos que ela possui, o que nos traz a possibilidade de que ela seja infinita ou finita.

Em uma sequência, finita ou infinita, nomeamos os termos em função de sua posição, ou seja, nos exemplos acima temos que o 1º termo de cada um são: 1994, 1990 e 0. O segundo termo: 1998, 1994 e 1. Assim, determinamos que um termo de uma sequência em função de sua posição pode ser chamado de , onde n representa a sua posição (1ª, 2ª, 3ª, ..., nª). Dizemos também que o primeiro e o último termo de uma sequência finita (e) são chamados de extremos de uma sequência. Podemos então representa-la de uma forma genérica:

$$(a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots a_n)$$

Definição formal de Sequência Numérica

"Uma sequência numérica é uma função f, definida no conjunto dos números naturais, ou inteiros positivos tal que: $f{:}n \rightarrow f(n)=a_n$. Onde o n é chamado de índice e a_n o n-ésimo elemento da sequência, ou termo geral."

Termo Geral de uma Progressão Aritmética

Perceba que, nos exemplos acima, todos os termos das sequências, a partir do 2º, são obtidos com a soma de um número fixo. Vejamos a sequência dos números naturais: Cada termo, iniciando com 0 (a_1) é obtido somando 1 ao seu anterior. Ou seja:

$a_2 = a_1 + 1 = 1$

$a_3 = a_2 + 1 = (a_1+1)+1 = 2$

$a_4 = a_3 + 1 = (a_2+1)+1 = [(a_1+1)+1]+1 = 3$

...

No caso da sequência dos números naturais, o número 1 que é somado a cada termo é chamado de **razão da progressão** (r). Em uma progressão aritmética (P.A.), cada termo de uma seqüência é a soma do elemento anterior com sua razão. Se analisarmos os outros exemplos, vemos que elas possuem uma razão igual a 4. Vamos agora reescrever os termos da seqüência em função de r (razão).

$$a_2 = a_1 + r$$

$$a_3 = a_2 + r = (a_1+r)+r = a_1+2r$$

$a_4 = a_3 + r = (a_2+r)+r = [(a_1+r)+r]+r = a_1+3r$

...

Ora, se continuarmos realizando esta operação para os próximos termos, encontramos então uma fórmula para determinar o termo geral de uma progressão aritmética, que será dado por:

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$

E supondo um caso em que não sabemos qual é o seu primeiro termo, podemos usar uma forma generalizada do termo geral da P.A. Sejam *m* e *n* posições quaisquer dos termos, temos:

$$a_n = a_m + (n-m)r$$

Imagine que nosso desejo seja obter o 500º termo da sequência dos números naturais. Como $a_1 = 0$, $r = 1$ e buscamos o termo a_{500}, pela fórmula teremos:

$a_{500} = a_1+(500-1)r$

$a_{500} = 0+(500-1) . 1$

$a_{500} = 499$

O termo da 500ª posição dos números naturais é o número 499.

Propriedade importante!

Qualquer termo de uma P.A., a partir do segundo termo (a_2), é sempre igual à média aritmética entre os termos anterior e posterior a ele. Então para $n \geq 2$, temos que:

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$$

Exemplo: Seja a sequência em progressão aritmética definida por (-7, -2, 3, 8, 13, 18), note que:

$$a_2 = \frac{a_{2-1} + a_{2+1}}{2} = \frac{a_1 + a_3}{2} = \frac{-7+3}{2} = \frac{-4}{2} = -2$$

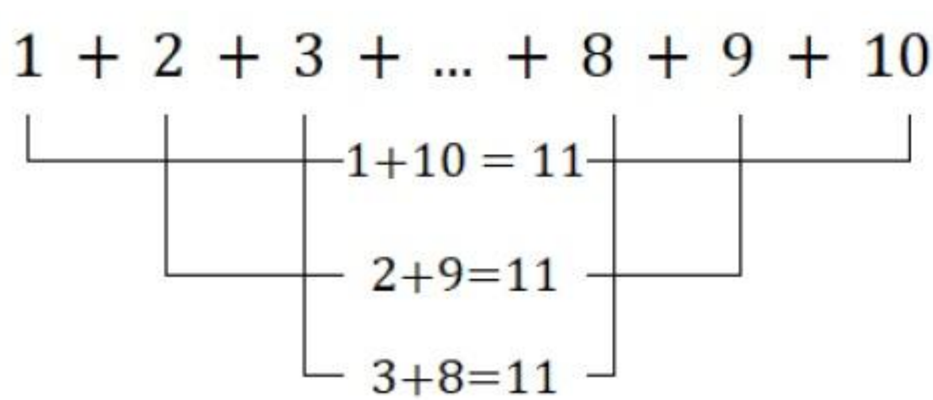
$$a_5 = \frac{a_{5-1} + a_{5+1}}{2} = \frac{a_4 + a_6}{2} = \frac{8+18}{2} = \frac{26}{2} = 13$$

Soma dos termos de uma progressão aritmética finita

Tomemos a sequência dos números naturais de 1 a 10: (1, 2, 3, 4, ..., 8, 9, 10) e representaremos a soma de 10 termos da P.A. por S_{10}. Então escrevemos:

$$S_{10} = 1 + 2 + 3 + ... + 8 + 9 + 10$$

O matemático Carl Friedrich Gauss (1777-1855) notou que em toda PA finita existe uma relação em que ao escolhermos um termo qualquer em uma sequência e somarmos ao seu extremo simétrico (ou o seu termo equidistante) obtemos sempre o mesmo valor, veja abaixo:



Gauss utilizou este procedimento para obter a fórmula da soma dos termos da PA. No exemplo acima, notem que teremos, no total, n/2 parcelas de valor (n+1), ou seja (5 x 11 = 55). Esta relação vale para a soma dos termos de uma P.A. Gauss constatou então que:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + ... + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$$

$$S_n = (a_1+a_n) + (a_1+a_n) + ... + (a_1+a_n)$$

Como existem n/2 parcelas iguais a (a_1+a_n), então a fórmula é dada por:

$$S_n=(a_1+a_n)n2$$

Esta fórmula serve para qualquer PA de qualquer razão, pois independente do valor dos seus termos as propriedades das somas de suas parcelas também são válidas.

Progressão Geométrica

Progressão Geométrica (PG) corresponde a uma sequência numérica cujo quociente (**q**) ou razão entre um número e outro (exceto o primeiro) é **sempre igual**.

Em outras palavras, o número **multiplicado** pela razão (q) estabelecida na sequência, corresponderá ao próximo número, por exemplo:

PG: (2,4,8,16, 32, 64, 128, 256...)

No exemplo acima, podemos constatar que a razão ou quociente (q) da PG entre os números, ou seja, o número que multiplicado pela razão (q) determina seu consecutivo, é o número 2 :

2 . 2 = 4

4 . 2 = 8

8 . 2 = 16

16 . 2 = 32

32 . 2 = 64

64 . 2 = 128

128 . 2 = 256

Vale lembrar que a razão de uma PG é sempre **constante** e pode ser qualquer número racional (positivos, negativos, frações) exceto o número zero (0).

Classificação das Progressões Geométricas

De acordo com o **valor da razão (q)**, podemos dividir as Progressões Geométricas (PG) em 4 tipos:

PG Crescente

Na PG crescente a razão é sempre positiva (q > 0) formada por números crescentes, por exemplo:

(1, 3, 9, 27, 81, ...), onde q = 3

PG Decrescente

Na PG decrescente a razão é sempre positiva (q > 0) e diferente de zero (0) formada por números decrescentes, ou seja, os números da sequência são sempre menores do que seus antecessores, por exemplo:

(-1, -3, -9, -27, -81, ...) onde q = 3

PG Oscilante

Na PG oscilante, a razão é negativa (q

(3,-6,12,-24,48,-96,192,-384,768,...), onde q = -2

PG Constante

Na PG constante, a razão é sempre igual a 1 formada pelos mesmos números a, por exemplo:

(5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, ...) onde q = 1

Fórmula do Termo Geral

Para encontrar qualquer elemento da PG, utiliza-se a expressão:

an = a1 . q(n - 1)

Onde:

an: número que queremos obter

a1: o primeiro número da sequência

q(n - 1): razão elevada ao número que queremos obter, menos 1

Assim, para identificar o termo 20 de uma PG de razão (q) 2 e número inicial 2, calcula-se:

PG: (2,4,8,16, 32, 64, 128,...)

A20 = 2 . 2(20 - 1)

A20 = 2 . 2(19)

A20 = 1048576

Soma dos Termos da PG

Para calcular a soma dos números presentes numa PG, utiliza-se a seguinte fórmula:

$$S_n = \frac{a_1\,(1 - qn)}{1 - q}$$

onde:

Sn: Soma dos números da PG

a1: primeiro termo da sequência

q : razão

n: quantidade de elementos da PG

Dessa forma, para calcular a soma dos 10 primeiros termos da seguinte PG (1,2,4,8,16, 32,...):

$$S_n = \frac{a_1\,(1 - qn)}{1 - q}$$

$$S_{10} = \frac{1\,(1 - 210)}{1 - 2}$$

$$S_{10} = 1023$$

POLINÔMIOS

Estudaremos agora o que é um polinômio, como calcular seu valor numérico, efetuar operações aritméticas, entre outros assuntos sobre este importante conteúdo matemático.

Definição

Chamamos de **função polinomial** ou, simplesmente, **polinômio** a função definida por:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

Em que:

- $a_n x^n,\ a_{n-1} x^{n-1},\ a_{n-2} x^{n-2}, \dots,\ a_2 x^2,\ a_1 x,\ a_0$, com **n** $\in \mathbb{N}$ são os termos do polinômio (note que todos os expoentes devem ser números naturais);
- $a_n,\ a_{n-1},\ a_{n-2},\ \dots,\ a_2,\ a_1\ e\ a_0$ são números reais chamados coeficientes;
- a_0 é o termo independente de **x**;
- **x** é a variável.

Grau de um polinômio

O grau de um polinômio é o expoente máximo que ele possui.

Se $a_n \neq 0$, então o expoente máximo **n** é dito grau do polinômio e indicamos **gr(P) = n**.

Exemplos

- **P(x) = 5** ou **P(x) = 5xº** é um **polinômio constante**, ou seja, **gr(P) = 0**.
- **P(x) = 3x + 5** é um **polinômio do 1º grau**, isto é, **gr(P) = 1**.
- **P(x) = 4x³+7x²** é um **polinômio do 3º grau**, ou seja, **gr(P) = 3**

Obs.: Se **P(x) = 0**, não se define o grau do polinômio.

Valor numérico

O valor numérico de um polinômio **P(x)**, para **x = a**, é o número que se obtém substituindo **x**por **a** e efetuando todas as operações indicadas pela relação que define o polinômio.

Exemplo

Considere o polinômio $P(x) = x^2 - 2x - 3$:

$$P(2) = 2^2 - 2.2 - 3 \Rightarrow P(2) = -3$$

$$P(1) = 1^2 - 2.1 - 3 \Rightarrow P(1) = -4$$

Raiz de um polinômio

Se **P(a) = 0**, o número **a** é chamado de **raiz** ou**zero** de **P(x)**.

Exemplo 1

Considere o polinômio $P(x) = x^2 - 4x - 12$:

$$P(6) = 6^2 - 4.6 - 12 \Rightarrow P(6) = 0$$

$$P(-2) = (-2)^2 - 4(-2) - 12 \Rightarrow P(-2) = 0$$

6 e **-2** são raízes de **P(x)**

Exemplo 2

Sabendo-se que **–3** é raiz de **P(x) = x^3 + 4x^2 - ax + 1**, calcule o valor de **a**.

Resolução

Como **-3** é raiz de **P(x)** temos que:

$$P(-3) = 0 \Rightarrow (-3)^3 + 4.(-3)^2 - a.(-3) + 1 = 0 \Rightarrow -27 + 36 + 3a + 1 = 0 \Rightarrow 3a = -10 \Rightarrow a = -\frac{10}{3}$$

Exemplo 3

Seja **P(x)** um polinômio do 2º grau. Sabendo-se que **2** é raiz de **P(x)**, **P(-1) = 12** e **P(0) = 6**, calcule **P(3)**.

Resolução

Sabemos que um polinômio do 2º grau é da forma **P(x) = ax^2 + bx + c**. Podemos encontrar os valores de **a**, **b** e **c** através dos dados fornecidos pelo enunciado:

Como **2** é raiz de **P(x)**:

$$P(2) = 0 \Rightarrow a.2^2 + b.2 + c = 0 \Rightarrow 4a + 2b = -c \qquad \textbf{(I)}$$

Como **P(-1) = 12**:

$$P(-1) = 12 \Rightarrow a.(-1)^2 + b.(-1) + c = 12 \Rightarrow a - b = 12 - c \qquad \textbf{(II)}$$

Como **P(0) = 6**:

$$P(0) = 6 \Rightarrow a.0^2 + b.0 + c = 6 \Rightarrow c = 6$$

Substituindo o valor de **c** em **(I)** e **(II)**, temos um sistema de equações:

$$\begin{cases} 4a + 2b = -6 \\ a - b = 6 \quad \times 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4a + 2b = -6 \\ 2a - 2b = 12 \end{cases}$$

$$6a = 6 \Rightarrow a = 1$$

$$a - b = 6 \Rightarrow 1 - b = 6 \Rightarrow b = -5$$

Assim:

$$P(x) = ax^2 + bx + c \Rightarrow P(x) = x^2 - 5x + 6$$

Calculando o valor de **P(3)**:

$$P(x) = x^2 - 5x + 6 \Rightarrow P(3) = 3^2 - 5.3 + 6 \Rightarrow P(3) = 9 - 15 + 6 \Rightarrow P(3) = 0$$

Polinômios idênticos

Dizemos que dois polinômios **A(x)** e **B(x)** são idênticos (indica-se $A(x) \equiv B(x)$) quando assumem valores numéricos iguais para qualquer valor comum atribuído à variável **x.**

A condição necessária para que dois polinômios sejam iguais ou idênticos é que os coeficientes dos termos correspondentes sejam iguais.

Exemplo 1

Os polinômios $A(x) = x^2 - 1 \;\; e \;\; B(x) = (x+1)(x-1)$ são idênticos?

Resolução

Efetuando a multiplicação em **B(x)**, temos:

$$B(x) = (x+1)(x-1) \Rightarrow B(x) = x^2 - 1$$

Note que os coeficientes dos termos correspondentes de **A(x)** e **B(x)** são iguais. Portanto $A(x) \equiv B(x)$.

Exemplo 2

Calcule **a, b** e **c**, sabendo-se que $x^2 - 2x + 1 \equiv a(x^2 + x + 1) + (bx + c)(x + 1)$.

Resolução

Vamos chamar o primeiro membro de **A(x)** e o segundo membro de **B(x)**:

$$\underbrace{x^2 - 2x + 1}_{A(x)} \equiv \underbrace{a(x^2 + x + 1) + (bx + c)(x + 1)}_{B(x)}$$

Efetuando as multiplicações e somando os termos semelhantes de **B(x)** temos:

$$B(x) = a(x^2 + x + 1) + (bx + c)(x + 1) \Rightarrow B(x) =$$
$$ax^2 + ax + a + bx^2 + bx + cx + c \Rightarrow B(x) = (a + b)x^2 + (a + b + c)x + (a + c)$$

Assim:

$$A(x) \equiv B(x) \Rightarrow 1x^2 - 2x + 1 \equiv (a + b)x^2 + (a + b + c)x + (a + c)$$

Igualando os coeficientes correspondentes, temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} a + b = 1 & \textbf{(I)} \\ a + b + c = -2 & \textbf{(II)} \\ a + c = 1 & \textbf{(III)} \end{cases}$$

Substituindo **(I)** em **(II)**: $a + b + c = -2 \Rightarrow 1 + c = -2 \Rightarrow c = -3$

Substituindo o valor de **c** em **(III)**: $a+c=1 \Rightarrow a-3=1 \Rightarrow a=4$

Substituindo o valor de **a** em **(I)**: $a+b=1 \Rightarrow 4+b=1 \Rightarrow b=-3$

Portanto, **a = 4**, **b = -3** e **c = -3**.

Obs.: Um polinômio é dito **identicamente nulo** se tem todos os seus coeficientes nulos.

Operações com polinômios

A adição, a subtração e a multiplicação de polinômios seguem os procedimentos de Álgebra estudados no Ensino Fundamental.

Quando temos somas ou subtrações basta reduzirmos termos semelhantes, ou seja, operar separadamente potências de mesmo grau.

Nas multiplicações, basta aplicarmos a propriedade distributiva e em seguida reduzirmos os termos semelhantes.

Adição de polinômios

Exemplo: $(3x^3-x^2+5x-6)+(-4x^2+3x+5)=3x^3-5x^2+8x-1$

Subtração de polinômios

Exemplo: $(7x^4-2x^2+4x-4)-(x^2-3x+2)=7x^4-3x^2+7x-6$

Multiplicação de polinômios

Exemplo: $(3x^2-4).(-2x+5)=-6x^3+15x^2+8x-20$

Se **A(x)** e **B(x)** são polinômios, temos que:

- Se **A(x)** e **B(x)** possuem graus diferentes, o grau de **A(x) + B(x)** ou **A(x) – B(x)** é igual ao maior entre os graus de **A(x)** e **B(x)**.
- Se **A(x)** e **B(x)** são de mesmo grau, o grau de **A(x) + B(x)** ou de **A(x) – B(x)** pode ser menor ou igual ao grau dos polinômios **A(x)** e **B(x)** ou, ainda, o polinômio resultante pode ser nulo.
- O grau de **A(x).B(x)** é a soma dos graus de **A(x)** e **B(x)**.

Divisão de polinômios

Vamos pensar em uma divisão de números naturais. Dividir **7 por 5** significa obter o quociente **1** e o resto **2**. Podemos escrever:

$$\begin{array}{r|l} 7 & 5 \\ \hline 2 & 1 \end{array} \qquad \boxed{7=5.1+2}$$

Agora vamos pensar na divisão do polinômio **A(x)** pelo polinômio não-nulo **B(x)**, que gera o quociente **Q(x)** e o resto **R(x)**.

$$\begin{array}{l|l} A(x) & B(x) \\ \hline R(x) & Q(x) \end{array} \qquad \boxed{A(x)=B(x).Q(x)+R(x)}$$

Nessa divisão:

- **A(x)** é o dividendo;
- **B(x)** é o divisor;
- **Q(x)** é o quociente;
- **R(x)** é o resto da divisão.

O grau de **R(x)** deve ser menor que o grau de **B(x)** ou **R(x) = 0**.

Quando **A(x)** é divisível por **B(x)**, dizemos que a divisão é exata, isto é, **R(x) = 0**.

Exemplo 1

Determine o quociente de $A(x) = x^4 + x^3 - 7x^2 + 9x - 1 \;\; por \;\; B(x) = x^2 + 3x - 2$:

Resolução

- Dividimos o termo de maior grau do dividendo pelo termo de maior grau do divisor. O resultado será um termo do quociente:

$$\frac{x^4}{x^2} = x^2 \quad \text{termo do quociente}$$

- Multiplicamos **x²** por **B(x)** e subtraímos o produto de **A(x)**, obtendo o primeiro resto parcial:

$$\begin{array}{rl} x^4+x^3-7x^2+9x-1 & \underline{\left|\, x^2+3x-2 \right.} \\ -\left(x^4+3x^3-2x^2\right) & \quad x^2 \end{array} \quad =$$

$$\begin{array}{rl} \cancel{x^4}+x^3-7x^2+9x-1 & \underline{\left|\, x^2+3x-2 \right.} \\ \underline{-\cancel{x^4}-3x^3+2x^2} & \quad x^2 \\ -2x^3-5x^2+9x-1 & \end{array}$$

- Dividimos o termo de maior grau do primeiro resto parcial pelo termo de maior grau do divisor, e obteremos como o resultado um termo do quociente:

$$\frac{-2x^3}{x^2} = -2x$$

termo do quociente

- Multiplicamos **-2x** por **B(x)** e subtraímos o produto do primeiro resto parcial, obtendo o segundo resto parcial:

$$\begin{array}{rl} x^4+x^3-7x^2+9x-1 & \underline{|\,x^2+3x-2} \\ -x^4-3x^3+2x^2 & x^2-2x \\ \hline -2x^3-5x^2+9x-1 & \\ -(-2x^3-6x^2+4x) & \end{array} \quad =$$

$$\begin{array}{rl} \cancel{x^4}+x^3-7x^2+9x-1 & \underline{|\,x^2+3x-2} \\ -\cancel{x^4}-3x^3+2x^2 & x^2-2x \\ \hline -\cancel{2x^3}-5x^2+9x-1 & \\ \cancel{2x^3}+6x^2-4x & \\ \hline x^2+5x-1 & \end{array}$$

- Dividimos o termo de maior grau do segundo resto parcial pelo termo de maior grau do divisor, e obteremos como o resultado um termo do quociente:

$$\frac{x^2}{x^2}=1$$ termo do quociente

- Multiplicamos **1** por **B(x)** e subtraímos o produto do segundo resto parcial:

$$
\begin{array}{rl|l}
 & x^4+x^3-7x^2+9x-1 & x^2+3x-2 \\ \cline{3-3}
- & x^4-3x^3+2x^2 & x^2-2x+1 \\ \cline{2-2}
 & -2x^3-5x^2+9x-1 & \\
 & 2x^3+6x^2-4x & \\ \cline{2-2}
 & x^2+5x-1 & \\
 & -(x^2+3x-2) &
\end{array}
\quad =
$$

$$
\begin{array}{rl|l}
 & \cancel{x^4}+x^3-7x^2+9x-1 & x^2+3x-2 \\ \cline{3-3}
 & \cancel{-x^4}-3x^3+2x^2 & \boxed{x^2-2x+1} \\ \cline{2-2}
 & \cancel{-2x^3}-5x^2+9x-1 & \\
 & \cancel{2x^3}+6x^2-4x & \\ \cline{2-2}
 & \cancel{x^2}+5x-1 & \\
 & \cancel{-x^2}-3x+2 & \\ \cline{2-2}
 & \boxed{2x+1} &
\end{array}
$$

quociente: Q(x)

resto: R(x)
(O grau do resto é menor que o do divisor)

Como o grau do resto é menor que o grau do divisor, a divisão está encerrada.

Verificamos que:

$$\underbrace{x^4+x^3-7x^2+9x-1}_{A(x)} \equiv \underbrace{(x^2+3x-2)}_{B(x)}\underbrace{(x^2-2x+1)}_{Q(x)}+\underbrace{(2x+1)}_{R(x)}$$

Exemplo 2

Determine o quociente de $A(x)=x^3+4x^2+x-6\ \ por\ \ B(x)=x+2$:

Resolução

$$
\begin{array}{rl}
\cancel{x^3} + 4x^2 + x - 6 & \underline{\left| \; x + 2 \right.} \\
\underline{\cancel{-x^3} - 2x^2} \qquad & \boxed{x^2 + 2x - 3} \\
\cancel{2x^2} + x - 6 & \\
\underline{\cancel{-2x^2} - 4x} & \\
\cancel{-3x} - \cancel{6} & \\
\underline{\cancel{+3x} \cancel{+ 6}} & \\
\boxed{0} &
\end{array}
$$

quociente: Q(x)

resto: R(x)

Verificamos facilmente que:

$$\underbrace{x^3 + 4x^2 + x - 6}_{A(x)} \equiv \underbrace{(x+2)}_{B(x)}\underbrace{(x^2 + 2x - 3)}_{Q(x)}$$

Nesses dois exemplos, utilizamos o **método da chave** para efetuar a divisão de polinômios.

Pelos exemplos verificamos que:

grau do quociente = **grau do dividendo – grau do divisor**

EQUAÇÕES E INEQUAÇÕES

Equação do 1º Grau

Toda equação na variável x do tipo (ou redutível a) $ax + b = 0$ com $a \neq 0$ e $a , b \in R$ é denominada equação polinomial do 1º grau em x.

$$\text{Se } x \neq 0,\ ax + b = 0 \text{ onde } x = -\frac{b}{a}$$

Exemplos

$3x - 6 = 0$

$3x = 6$

$x = \frac{6}{3}$

$x = 2$

(é raiz, solução ou zero da equação; note que $x = 2$ o único valor de x que torna verdadeira a igualdade.)

Inequação do 1º Grau

Conceito de desigualdade

Os símbolos que representam desigualdades são: $\neq$, >, < e toda sentença aberta (que possui pelo menos uma variável) onde apareça uma desigualdade é uma inequação.
Uma propriedade importante das desigualdades é:

$a > b \Leftrightarrow -a < -b$

Ou seja, multiplicando-se ou dividindo-se uma desigualdade por um número negativo "inverte-se o sentido" da desigualdade.

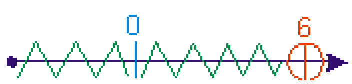
Exemplos

$3x - 5 < x + 7$

$3x - x < 7 + 5$

$2x < 12$

$x < 6$



Equação do 2º Grau

Toda equação na variável x do tipo (ou redutível a) $ax^2 + bx + c = 0$ onde $a \in \mathbb{R}^*$; b , $c \in \mathbb{R}$, é denominada equação polinomial do 2º grau.
Discriminante:

$\Delta = b^2 - 4ac$

Se $\Delta > 0$ temos se Δ $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ $= 0$ temos $x = \frac{-b}{2a}$ se $\Delta < 0$ não existem raízes reais.

Se x_1 e x_2 são as raízes da equação $ax^2 + bx + c = 0$, então

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$$

$$x_1 \,.\, x_2 = \frac{c}{a}$$

Exemplos

$$1x^2 - 7x + 12 = 0 \begin{cases} a = 1 \\ b = -7 \\ c = 12 \end{cases}$$

$\Delta = b^2 - 4 \,.\, a \,.\, c$

$\Delta = 49 - 4 \,.\, 1 \,.\, 12$

$\Delta = 49 - 48$

$\Delta = 1$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{+7 \pm 1}{2} \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 4 \end{cases}$$

Inequação do 2º Grau

Quando estudamos equações do 2º grau lidamos com igualdades, ou seja, expressões em que precisamos encontrar as raízes da equação em questão. Porém, quando tratamos de uma inequação a nossa expressão conterá, ao invés do sinal de igual (=), outros sinais que determinarão uma relação de ordem entre os seus elementos.

- Se $x \geq y$, dizemos que x é maior ou igual a y;
- Se $x > y$, então x é maior do que y;
- Se $x \neq y$, dizemos que x é diferente de y.

Resolvendo inequações do segundo grau

Para resolver uma inequação do 2º grau, é interessante primeiro resolver a equação normalmente e depois determinar as condições de existência em função de suas raízes e de sua desigualdade. Veja abaixo alguns exemplos:

Exemplo 1) Vamos resolver a equação dada por $x^2+5x+6 \geq 0$.

Se igualássemos a equação a zero e resolvê-la como uma equação comum do segundo grau obteríamos as raízes:

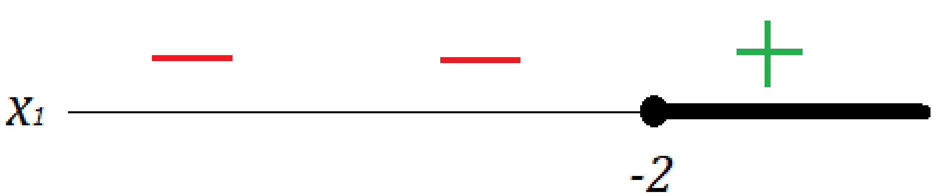
$$x^2+5x+6=0$$

$$x=\frac{-5\pm\sqrt{5^2-4\cdot6}}{2}=\frac{-5\pm1}{2}$$

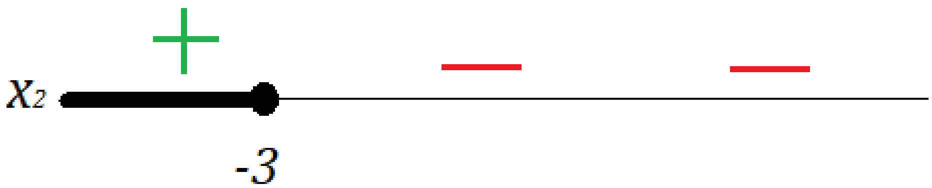
$$\begin{cases} x_1=-2 \\ x_2=-3 \end{cases}$$

Agora devemos analisar ambas as raízes segundo a condição da equação dada onde a solução da equação deve ser maior ou igual a zero. Então devemos estudar o sinal de ambas as raízes obtidas separadamente e depois analisar a representação de ambas na reta, ou seja:

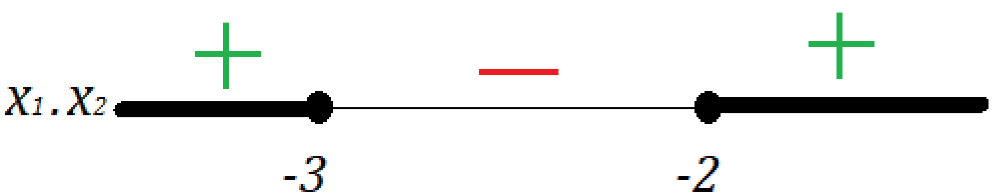
Se x for maior ou igual a -2, os valores da equação são maiores ou iguais a 0, o que cabe, analisando esta raiz a representação no intervalo:



Se x for menor ou igual a -3 então os valores de x também serão maiores que zero:



Sendo assim, o conjunto solução de nossa inequação será representado na reta como:



Ou pode ser escrito como:

$$S=\{x\in R: x\leq -3 \text{ ou } x\geq -2\}=]-\infty,-3]\cup[-2,+\infty[$$

Exemplo 2) Agora, vamos analisar a equação dada por $x^2+x-2\leq 0$.

$$x=-1\pm 1_2-4\cdot(-2)\sqrt{}2=-1\pm 32$$

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -2 \end{cases}$$

Analisando o sinal repetindo o mesmo procedimento acima, obtemos:

- Se $x \geq 1$, os valores da equação serão maiores ou igual zero.
- Se $x \leq -2$, os valores também serão maiores ou iguais a zero.
- Se $-2 \leq x \leq 1$, então os valores serão menores do que zero, o que satisfaz a nossa condição de existência da equação. Logo:

E sua solução pode ser escrita como:

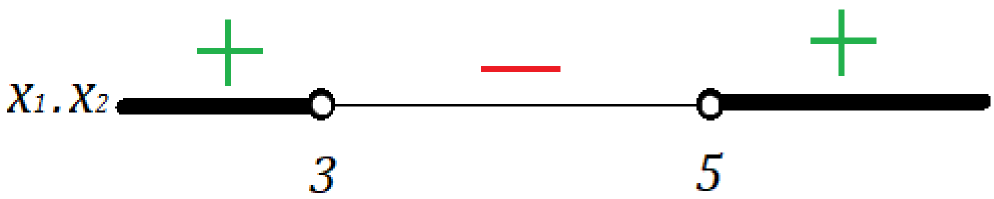
$$S = \{x \in \mathbb{R} : -2 \leq x \leq 1\} = [-2, 1]$$

Exemplo 3) Estudemos a equação $x^2 - 8x + 15 > 0$.

$$x = \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot (15)}}{2} = \frac{8 \pm 2}{2}$$

$$\begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = 3 \end{cases}$$

- Se $x>5$, os valores da equação serão maiores do que zero.
- Se $x<3$, os valores também serão maiores do que zero.
- Se $3<x<5$, então os valores serão menores do que zero. Então podemos afirmar que:



E o conjunto solução será:

$$S=\{x\in R: x<3 \text{ ou } x>2\}=]-\infty,-3]\cup[-2,+\infty[$$

Equações do Segundo Grau:

Definição: É toda equação da forma $y = ax^2 + bx + c$, onde:

y = variável dependente de x.

a = coeficiente de x^2.

x = variável independente.

b = coeficiente x.

c = constante da equação.

As equações do segundo grau ditas completas possuem a, b e c $\neq 0$. Caso algum desses coeficientes seja 0, a equação é dita como incompleta. Observe os exemplos:

a) $x^2 = 4$ é uma equação incompleta, pois $b = 0$

b) $x^2 = x$ é uma equação incompleta, pois $c = 0$

Caso $a = 0$, teremos uma equação do primeiro grau.

Quando as equações forem completas, precisamos saber duas fórmulas para resolver os exercícios, são elas:

1) $\Delta = b^2 – 4.a.c$

2) $x = (– b \pm \sqrt{\Delta}) / 2a$

Exemplo:

1) Resolva a equação $5x^2 – 3x – 2 = 0$

$a = 5$, $b = -3$ e $c = -2$

$\Delta = b^2 – 4.a.c$

$\Delta = (-3)^2 – 4.5.-2$

$\Delta = 9 + 40$

$\Delta = 49$

$\sqrt{\Delta} = 7$

$x = (– b \pm \sqrt{\Delta}) / 2a$

$x1 = (-b + \sqrt{\Delta}) / 2a = (3 + 7) / 10 = 10 / 10 = 1$

$x2 = (-b – \sqrt{\Delta}) / 2a = (3 – 7) / 10 = -4 / 10 = -0.4$

Logo, temos dois valores para x, o “1″ e o “-0.4″.

Equação do segundo grau com b = 0:

Exemplo: $x^2 = 4$

$x = \pm 2$

Equação do segundo grau com c = 0:

Exemplo: $x^2 = x$

$x^2 – x = 0$

$x .(x – 1) = 0$

Temos duas soluções:

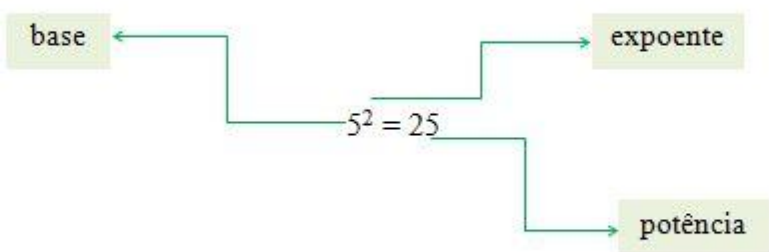
1) $x = 0$

2) $x -1 = 0$ ou $x = 1$

Equação Exponencial

Revisando as potências

Existem alguns elementos de destaque na potenciação. Veja-os separadamente abaixo.



Expoente natural

$$\boxed{a^m = \underbrace{a \,.\, a \,.\, a \,.\, a \,.\, \ldots \,.\, a}_{m \text{ fatores}}} \longrightarrow a \in \mathbb{R} \text{ e } m \in \mathbb{N}, \text{ com } m \geq 2.$$

Expoente inteiro

$$\boxed{a^{-m} = \frac{1}{a^m}} \longrightarrow a \in \mathbb{R}^* \text{ e } m \in \mathbb{N}.$$

Propriedades

$a^n . a^m = a^{n+m}$ → *Multiplicação de potências de mesma base* $a \in R$, $m \in Z^*$ e $n \in Z^*$.

$a^n : a^m = a^{n-m}$ → *Divisão de potências de mesma base* $a \in R^*$, $m \in Z^*$ e $n \in Z^*$.

$(a.b)^m = a^m . b^m$ → *Multiplicação de fatores elevados ao mesmo expoente* $a \in R$, $b \in R$ e $m \in Z^*$.

$(a:b)^m = a^m : b^m$ → *Divisão elevada ao mesmo expoente* $a \in R$, $b \in R^*$ e $m \in Z^*$.

$(a^n)^m = a^{n.m}$ → *Potência de uma potência* $a \in R$, $n \in Z^*$ e $m \in Z^*$.

Potência com expoente racional

$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ → $a \in R^*_+$, $m \in Z$ e $n \in Z^*_+$.

Potência com expoente real

É toda potência do tipo a^m, com $a \in R^*_+$ e $m \in R$.

Equação exponencial

Equação exponencial é toda aquela que apresenta incógnita no expoente. Vejam alguns exemplos.

$8^x = 64$ $\quad (\frac{1}{2})^x = 256$ $\quad 3^{x+1} = 27$

Vamos resolver algumas equações exponenciais cujos dois membros podem ser reduzidos à mesma base.

- $3^{x+1} = 27$

  $3^{x+1} = 3^3$

  $x + 1 = 3$

  $x = 3 - 1$

  $\mathbf{x = 2}$

Fatorando o 27

27	3
9	3
3	3
1	3^3

Com as bases iguais, igualamos os expoentes para encontrarmos o valor de x.

- $\sqrt{7^\wedge x} = 343$

  $7^\wedge \frac{1}{2}x = 343$

  $7^\wedge \frac{1}{2}x = 7^3$

  $\frac{1}{2}x = 3$

  $x = 3.\ \frac{2}{1}$

  $\mathbf{x = 6}$

Fatorando o 343

343	7
49	7
7	7
1	7^3

Com as bases iguais, igualamos os expoentes para encontrarmos o valor de x.

Algumas equações exponenciais não poderão ser reduzidas a bases iguais, nesses casos, deveremos usar o método da substituição, exemplificado na sequência.

Determine a solução da equação $5^{x+1} - 7.5^x = -2$.

$5^{x+1} - 7.5^x = -2$

$5^x.5 - 7.5^x = -2$

$5^x = y$

$5y - 7y = -2$

$-2y = -2$

$y = 1$

como $5^x = y = 1$, temos:

$5^x = 1$

$5^x = 1^0$

$x = 0$

$\mathbf{S = \{0\}}$

Multiplicação de potências de mesma base.

Substitua 5x por y para resolver a equação.

Logarítmicas e Modulares

Logarítmica

Toda função definida pela lei de formação $f(x) = \log_a x$, com $a \neq 1$ e $a > 0$ é denominada função logarítmica de base **a**. Nesse tipo de função o domínio é representado pelo conjunto dos números reais maiores que zero e o contradomínio, o conjunto dos reais.

Exemplos de funções logarítmicas:

$f(x) = \log_2 x$
$f(x) = \log_3 x$
$f(x) = \log_{1/2} x$
$f(x) = \log_{10} x$
$f(x) = \log_{1/3} x$
$f(x) = \log_4 x$
$f(x) = \log_2(x - 1)$
$f(x) = \log_{0,5} x$

Determinando o domínio da função logarítmica

Dada a função $f(x) = \log_{(x-2)}(4-x)$, temos as seguintes restrições:

1) $4 - x > 0 \rightarrow -x > -4 \rightarrow x < 4$
2) $x - 2 > 0 \rightarrow x > 2$
3) $x - 2 \neq 1 \rightarrow x \neq 1+2 \rightarrow x \neq 3$

Realizando a intersecção das restrições 1, 2 e 3, temos o seguinte resultado: ***2 < x < 3 e 3 < x < 4***.

Dessa forma, ***D = {x ? R / 2 < x < 3 e 3 < x < 4}***

Gráfico de uma função logarítmica

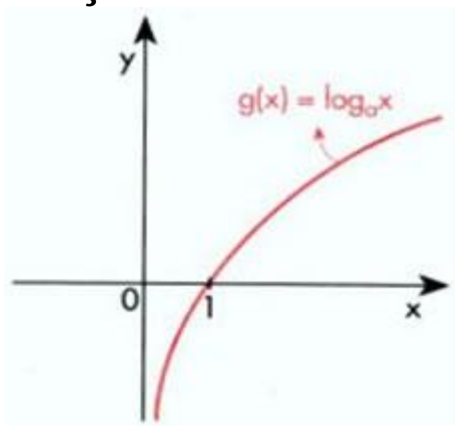
Para a construção do gráfico da função logarítmica devemos estar atentos a duas situações:

? a > 1

? 0 < a < 1

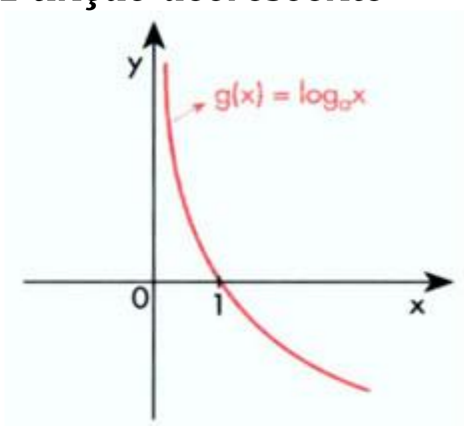
Para $a > 1$, temos o gráfico da seguinte forma:

Função crescente



Para 0 < a < 1, temos o gráfico da seguinte forma:

Função decrescente



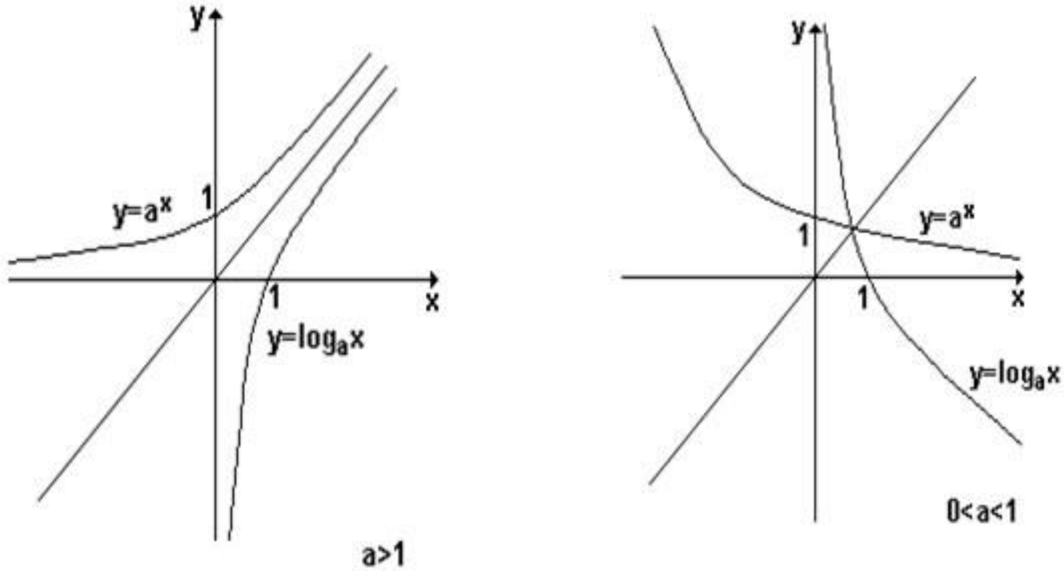
Características do gráfico da função logarítmica y = log$_a$x

O gráfico está totalmente à direita do eixo y, pois ela é definida para x > 0.

Intersecta o eixo das abscissas no ponto (1,0), então a raiz da função é x = 1.

Note que y assume todos as soluções reais, por isso dizemos que a Im(imagem) = R.

Através dos estudos das funções logarítmicas, chegamos à conclusão de que ela é uma função inversa da exponencial. Observe o gráfico comparativo a seguir:



Podemos notar que (x,y) está no gráfico da função logarítmica se o seu inverso (y,x) está na função exponencial de mesma base.

Função modular

Vamos relembrar o conceito de módulo (ou valor absoluto) de um número real:

O módulo de um número real *r* é representado por |*r*| onde:

$$|r| = r \text{ se } r \geq 0$$

$$|r| = -r \text{ se } r < 0$$

E também, algumas propriedades envolvendo os módulos de números reais, algumas delas são:

$$|x| \geq 0 \, \forall x \in R$$

$$|x| = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$|x| \geq x \, \forall x \in R$$

$$|x| \geq |-x| \, \forall x \in R$$

$$|x2| = |x|2 = x2$$

$$|x+y| \leq |x|+|y|$$

$$|x-y| \geq |x|-|y|$$

$$|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$$

$$|xy| = |x||y|$$

$$||x|-|y|| \leq |x-y|$$

Função modular

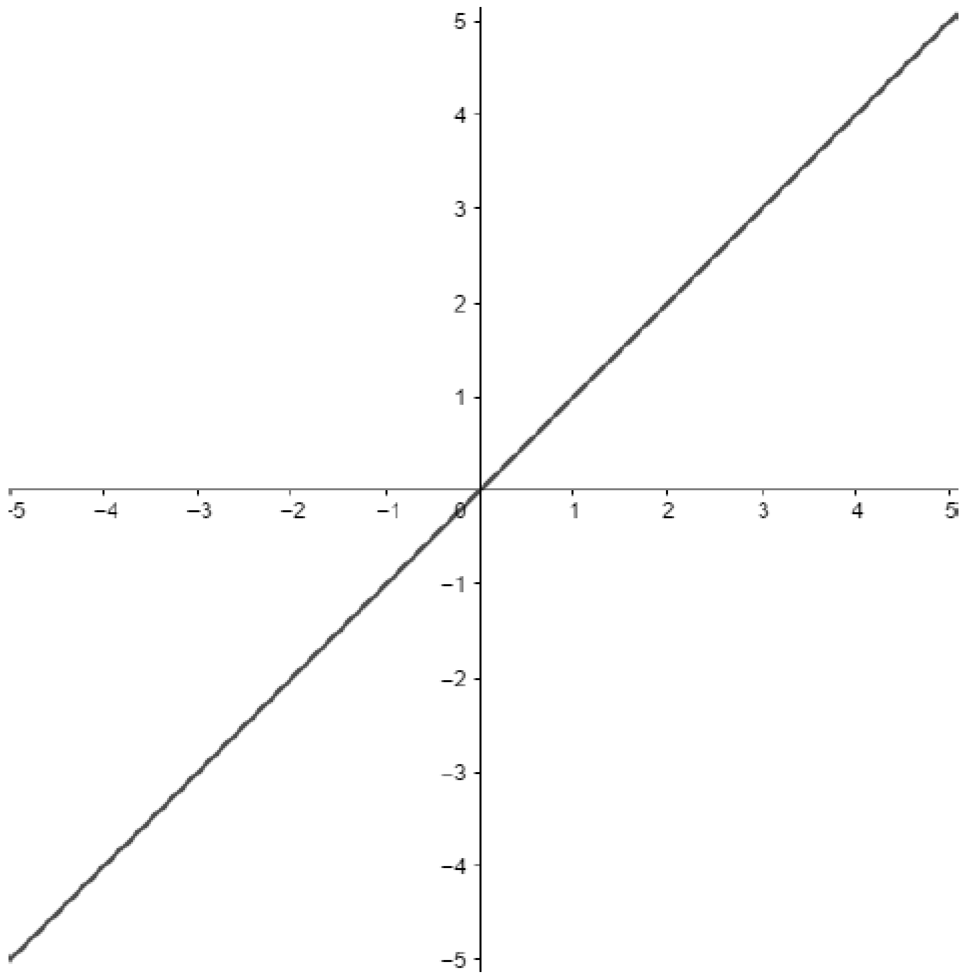
Agora, definimos uma função modular como:

Seja uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e dada por $f(x) = |x|$ então:

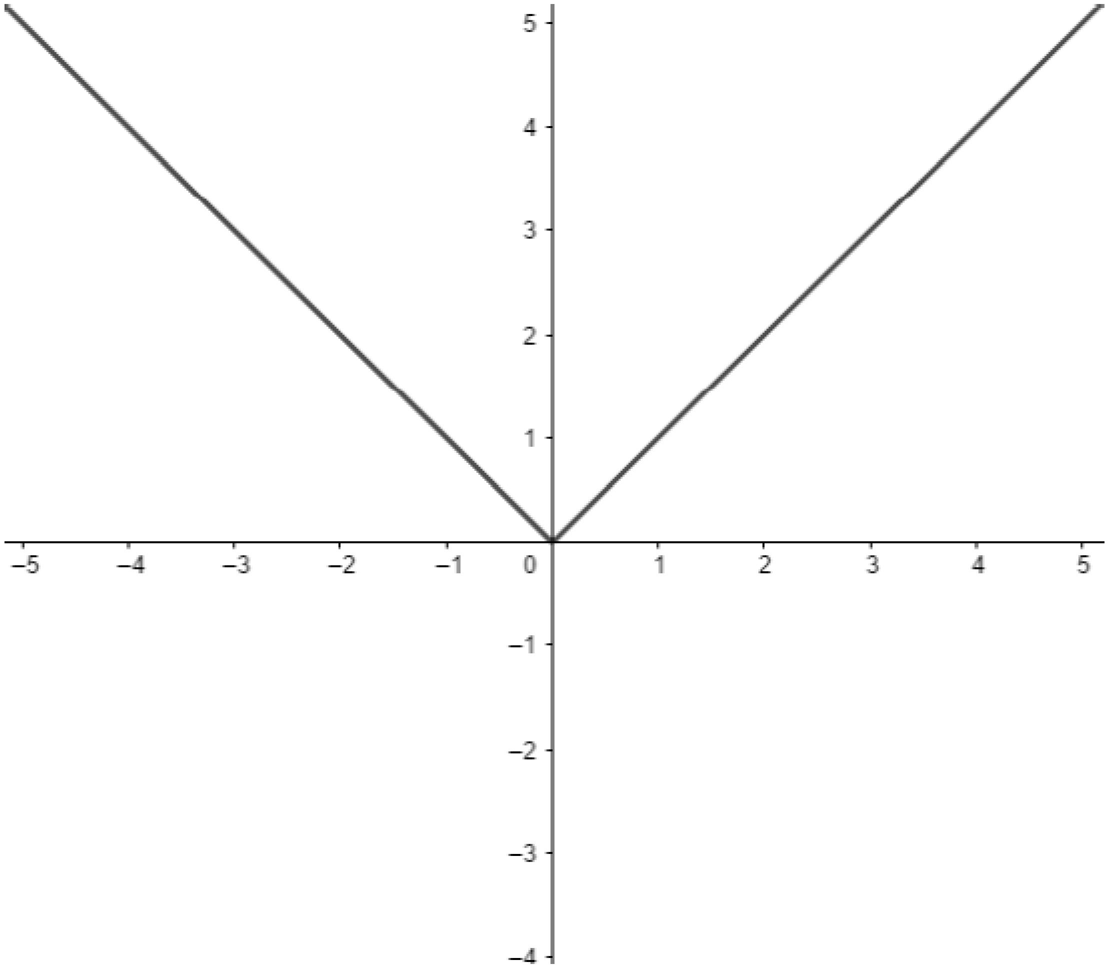
$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Uma alusão interessante para as funções modulares é que podemos imaginar que o eixo *x* é um espelho para o gráfico das funções. Tudo que está abaixo da origem do plano cartesiano no eixo *y*, ou seja, valores negativos de *y*, não assumirá valores. Vejamos abaixo o exemplo de duas funções:

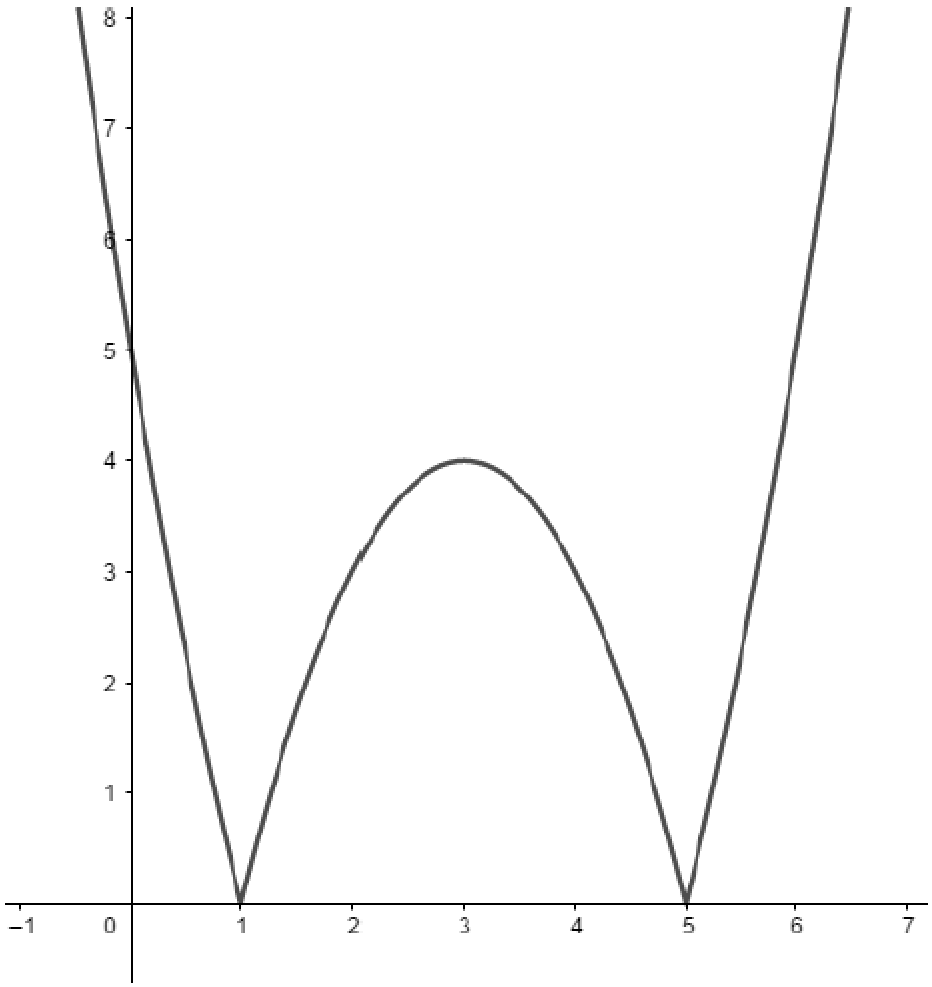
$$f(x) = x$$



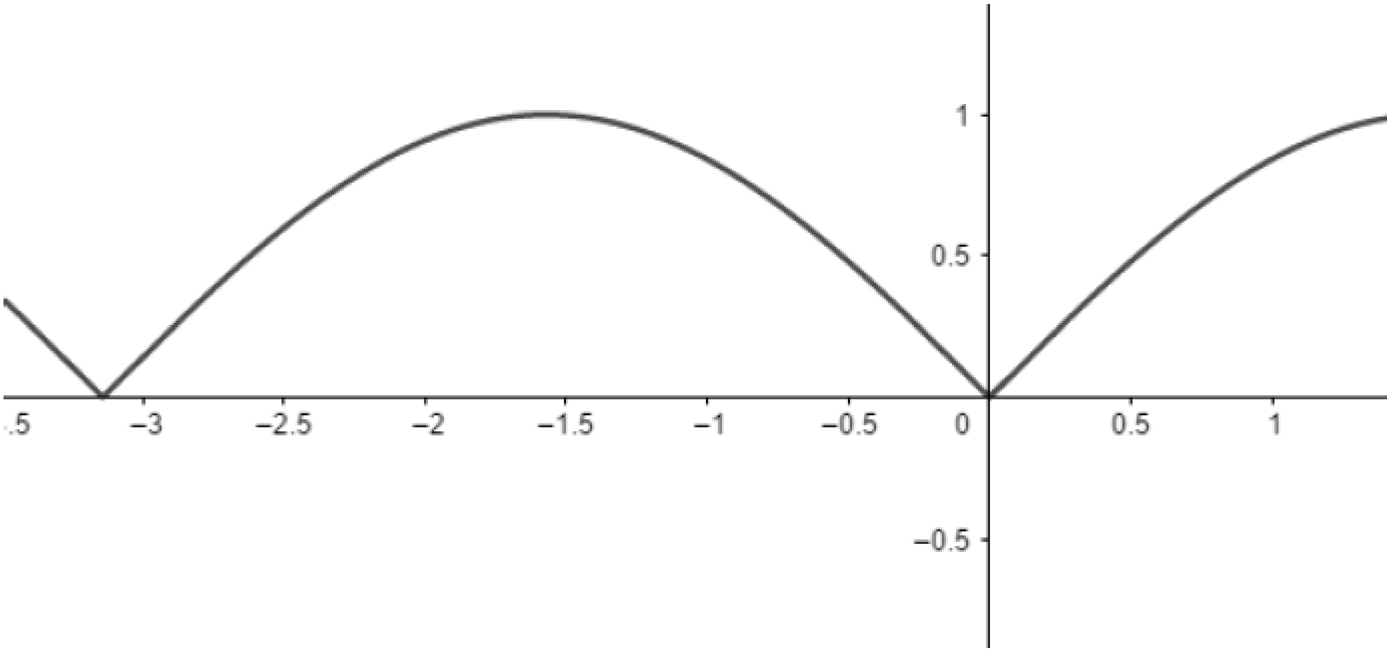
$$f(x) = |x|$$



Exemplo 1) Seja a função $f:R \rightarrow R$ definida por $f(x)=|x^2-6x+5|$, o seu gráfico é dado por:



Exemplo 2) Seja a função $f:R \to R$ definida por $f(x)=|\text{sen}x|$, o seu gráfico é dado por:



Exemplo 3) Agora a função $f:R\to R$ definida por $f(x)=|x-1|+|x-3|$. Para construir este gráfico devemos considerar primeiro a solução da equação modular na qual ela é definida. Para isso é necessário atribuir algumas condições eliminando os módulos das funções segundo as propriedades apresentadas. Veja abaixo:

1) Se $x\geq 3=\{|x-1|=x-1|x-3|=x-3$

Então podemos dizer que:

$$f(x) = (x-1) + (x-3) = x-1 + x - 3 = 2x-4$$

2) Se $1\leq x<3=\{|x-1|=x-1|x-3|=-(x-3)=-x+3$

Logo:

$$f(x) = (x-1) + (-x+3) = x-1-x+3 = 2$$

3) Se $x<1=\{|x-1|=-(x-1)=-x+1|x-3|=-(x-3)=-x+3$

Então:

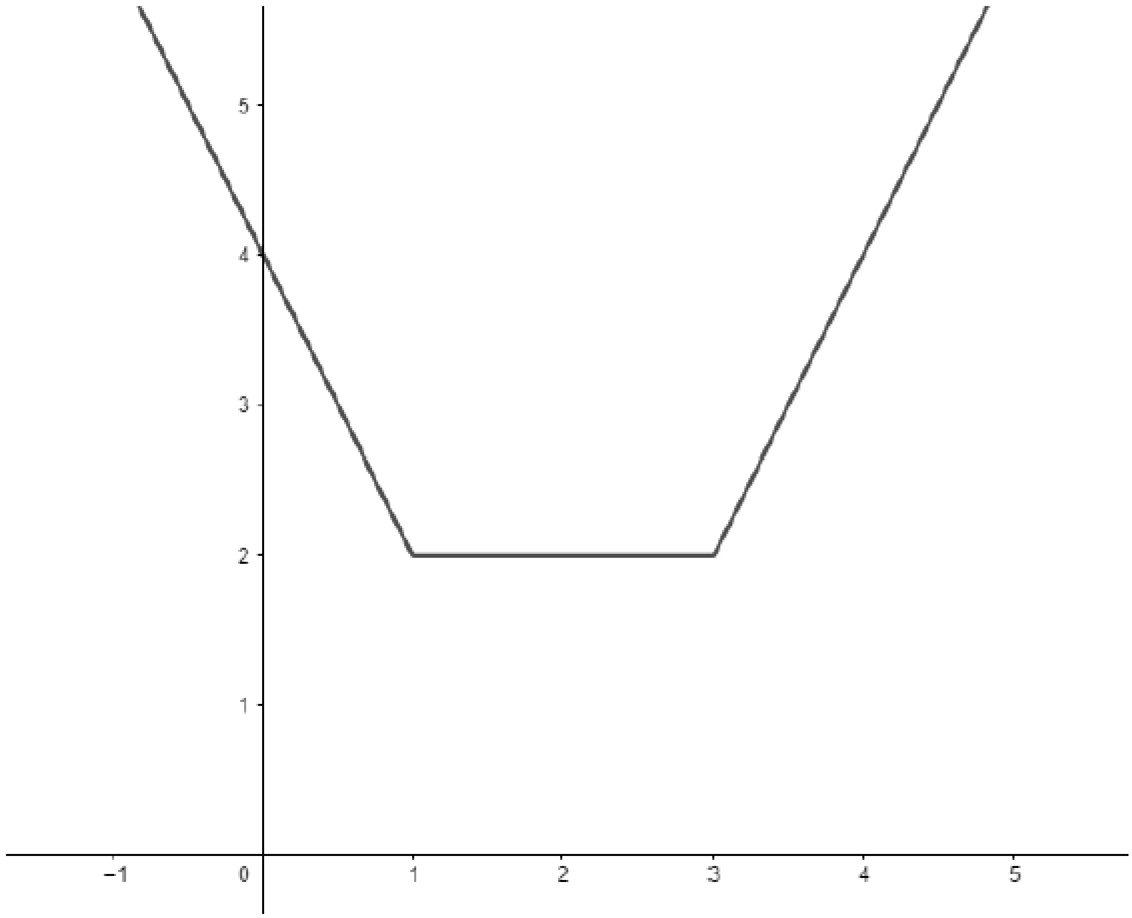
$$f(x) = (-x+1) + (-x+3) = -x+1-x+3 = -2x+4$$

4) Concluindo que a nossa função terá como condições:

$f(x) = \{ 2x-4, 2, -2x+4,$ se $x \geq 3$ se $1 \leq x < 3$ se $x <$

1

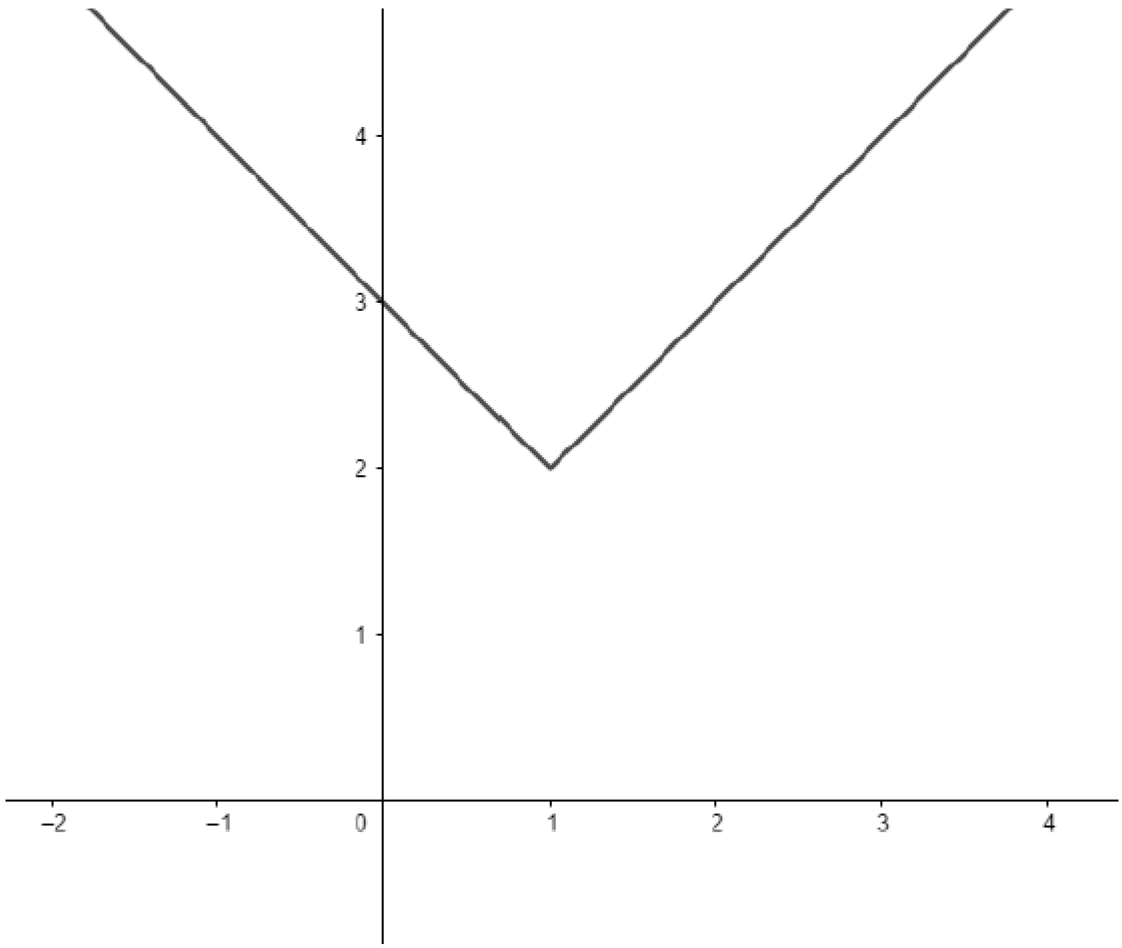
O seu gráfico então será dado por:



Exemplo 4) Vamos determinar o gráfico de $f(x)=|x-1|+2$. Eliminando os módulos segundo as propriedades, temos que:

$$f(x)=\begin{cases} x+1, & \text{se } x\geq 1 \\ -x+3, & \text{se } x<1 \end{cases}$$

O seu gráfico será dado por:



4
3
2
1
−2
−1
0
1
2
3
4

UNIDADE DE MEDIDA

A conversão de medidas é importante para resolver questões de matemática, assim como de física. Quando um problema apresenta diferentes unidades de medida, a conversão é necessária para solucionar a questão. As unidades de medidas estão presentes no nosso cotidiano. Repare que muitas vezes vemos escrito nas caçambas espalhadas pelas ruas "5 m³" ou, no final dos rótulos de xampus, "100 ml". E até mesmo o bonito piso que gostaríamos de ter em nossas casas é vendido pelo "metro quadrado". Mas, afinal, o que significam essas medidas? Para facilitar, iremos tomar como base a unidade de comprimento: metro. Depois, veremos os demais casos que completam o sistema métrico.

UNIDADES DE COMPRIMENTO

Ao medirmos a altura de uma pessoa, usamos a unidade conhecida como "metro": 1,60**m**, 1,83**m** etc. Mas seria muito difícil se usássemos a mesma unidade para calcular a distância entre cidades ou países, pois são longas distâncias, ou seja, números que podem ser muito grandes. Teríamos dificuldade também ao escrever a espessura de um fio de cabelo ou a tampa de uma caneta: pequenas distâncias, pequenos números. Logo, para resolver esse problema, criou-se uma convenção para as unidades de comprimento. Do maior ao menor: quilômetro, hectômetro, decâmetro, metro, decímetro, centímetro e milímetro. Seus símbolos são respectivamente: **km, hm, dam, dam, m, dm, cm, mm**.

Tomando o metro como referência, temos:

Quilômetro	**Hectômetro**	**Decâmetro**	Metro	**Decímetro**	**Centímetro**	**Milímetro**
km	hm	dam	**m**	dm	cm	mm
1000m	100m	10m	**1m**	0,1m	0,01m	0,001m

Exemplos: Helena quis usar uma fita em seu embrulho de Natal. Após uma rápida medição notou que bastavam 45cm (quarenta e cinto centímetros). No entanto, a papelaria aonde foi só vendia a fita por 3,50 reais a cada metro. Quanto Helena teve que pagar para comprar o tamanho necessário de fita?
Assim, com a ajuda da tabela acima, temos que: 1cm = 0,01m, portanto 45cm = 0,45m. Daí, Helena necessita de 0,45m, mas se a cada metro temos 4,00 reais, basta multiplicar 3,50 por 0,45 e temos 1,80 real.

Conversão: 57,83 hectômetros em centímetros:

km	**hm**	**dam**	**m**	**dm**	cm	**mm**
5	7,	8	3	0	**0**	

Veja, deixamos a vírgula no hm, completamos o número normalmente e acrescentamos zeros até chegar à unidade desejada. Então 57,83hm = 578300cm.

UNIDADES DE ÁREA

Mas e para medir o piso que gostaria de colocar na minha casa? Ou o terreno da minha casa? Lembre-se de que para calcular a área de um quadrado, basta multiplicar comprimento de seu lado duas vezes (o que chamamos de elevar ao quadrado). Então a unidade de área é basicamente elevar ao quadrado a unidade de comprimento. Portanto temos:

Quilômetro Quadrado	**Hectômetro Quadrado**	**Decâmetro Quadrado**	Metro Quadrado	**Decímetro Quadrado**	**Centímetro Quadrado**	**Milímetro Quadrado**
km²	hm²	dam²	**m²**	dm²	cm²	mm²
1000m x 1000m = 1.000.000m²	100m x 100m =10.000m²	10m x 10m = 100m²	**1m x 1m = 1m²**	0,1m x 0,1m = 0,01m²	0,01m x 0,01m = 0,0001m²	0,001m x 0,001m =0,000001m²

Exemplos: Uma loja de construção vende um determinado tipo de ladrilho por 0,04 reais o cm². Roberto mediu os lados da parede de seu banheiro - de forma retangular - e achou comprimento 2m por 3m. Quanto Roberto deverá desembolsar para comprar o ladrilho? Se a parede tem forma retangular, basta multiplicar os lados para descobrir sua área, portanto 6m². Temos que transformar 6m² em cm². Se, pela tabela, 0,00001m² = 1cm² então 1m² = 10.000cm² , portanto, 6m² = 60.000cm². Como cada cm² custa 0,04 reais, então 0,04 x 60.000 = 2.400. Ou seja, Pedro irá gastar 2400,00 reais.

km²		hm²		dam²		m²		dm²		cm²		mm²
	0	0	0	0	7	8	4	5	6,	3		

Note que nesse caso dividimos as casas em duas, pois temos a unidade ao quadrado. Repare também que o caso é bem parecido com a unidade de comprimento. Portanto, 78456,3dm² = 0,000784563km².

UNIDADES DE VOLUME

Repare que, para descrever as unidades de área, multiplicamos as unidades duas vezes. O caso do volume será muito parecido. Basta lembrar que para calcular o volume de um cubo, devemos fazer a multiplicação do comprimento de suas arestas três vezes (elevar ao cubo), portanto, basta multiplicar essa quantidade de vezes a unidade de comprimento.

Quilômetro Cúbico	**Hectômetro Cúbico**	**Decâmetro Cúbico**	Metro Cúbico	**Decímetro Cúbico**	**Centímetro Cúbico**	**Milímetro Cúbico**
km³	hm³	dam³	**m³**	dm³	cm³	mm³
1000m x 1000m x 1000m = 1.000.000.000m³	100m x 100m x 100 =1.000.000m³	10m x 10m x 10m = 1000m³	**1m x 1m x 1m = 1m³**	0,1m x 0,1m x 0,1m = 0,001m³	0,01m x 0,01m x 0,01m =	0,001m x 0,001m x 0,001m = 0,000000001m³

0,000001m³

Exemplos: Uma viagem de caminhão recolhe uma caçamba de lixo de 5m³ por vez. Se após a obra de um edifício o entulho foi calculado em 0,015hm³, quantas viagens serão necessárias para remover o lixo?

Com auxílio da tabela, temos 1hm³ = 1.000.000m³, daí temos um entulho de 0,0152 x 1.000.000 = 15200m³. Se uma viagem retira 5m³, obtemos 15200 ÷ 5 = 3040 viagens.

Conversão: 89.123.539mm³ em dam³

km³	**hm³**	dam³		**m³**			**dm³**			**cm³**			**mm³**		
			0	0	0	0	0	8	9	1	2	3	5	3	9,

Mais uma vez, tomemos de exemplo a unidade de comprimento. Lembrando que dessa vez dividimos cada casa em três, pois elevamos ao cubo. Daí, 89.123.539mm³ = 0,000089123539dam³.

MEDIDA DE ENERGIA

Conforme o SI (Sistema Internacional) a energia é medida em J (joule), já o intervalo de tempo é medido em s (segundo).

Portanto, a potência elétrica é medida por $\frac{joule}{segundo}$.

Como toda grandeza física, a potência elétrica tem a sua unidade que, no SI, é o watt (W).

Portanto:

$$1W = 1\ \frac{J}{s}$$

A unidade de energia mais utilizada é o quilowatt-hora (kWh). Um kWh é a quantidade de energia com potência de 1kW que é transformada, no intervalo de 1h.

E_{el}	P	Δt
J	W	s
kWh	kW	h

Relação entre o kWh e o J:

1 kWh = 1000W . 3600s = 3,6 . 106J

MEDIDAS DE INFORMÁTICA

Um byte, frequentemente confundido com bit, é um dos tipos de dados integrais em computação. É usado com frequência para especificar o tamanho ou quantidade da memória ou da capacidade de armazenamento de um computador, independentemente do tipo de dados armazenados.A codificação padronizada de byte foi definida como sendo de 8 bits. O byte de 8 bits é, por vezes, também chamado de octeto, nomeadamente no contexto de redes de computadores e telecomunicações.

"A uma metade de um byte, dá-se o nome de nibble ou semioctecto. "

Para os computadores, representar 256 números binários é suficiente. Por isso, os bytes possuem 8 bits. Basta fazer os cálculos. Como um bit representa dois valores (1 ou 0) e um byte representa 8 bits, basta fazer 2 (do bit) elevado a 8 (do byte) que é igual a 256.

Note que um byte nada tem de especial, é apenas um número binário de oito algarismos. Sua importância na informática deriva apenas do fato do código ASCII haver adotado números de oito bits, além de razões meramente construtivas ou operacionais. Por exemplo: os códigos enviados a impressoras para controlar a impressão têm oito bits, os valores trocados pelos modems entre computadores também, assim como diversas outras operações elementares de intercâmbio de informações. Além disso, memórias costumam ser organizadas de tal forma que as operações de leitura e escrita são feitas com quantidades de um byte ou de um múltiplo de bytes (oito, dezesseis, trinta e dois, sessenta e quatro ou cento e vinte e oito bits – o que corresponde a um, dois, quatro, oito e dezesseis bytes, respectivamente).

Segundo norma da IEC, lançada em 2000, foi definida uma nova nomenclatura para dados de base dois em substituição a nomenclatura usada erroneamente de base dez separando a confusão causada entre proporção 1:1000 ou 1:1024, veja mais em Prefixos Binários.

Quantidades

Neste artigo exprimem-se as quantidades em prefixo binário (e não no Sistema Internacional de Unidades), que é uma forma de quantificação utilizada em Informática onde se torna mais útil utilizar potências de dois do que potências de dez. Têm o mesmo nome das unidades do SI, embora sejam múltiplos de 1024 (210) no lugar de 1000 (10^3).

Byte (B)

- 1 Byte = 8 bits (2^3 bits).

Quilobyte (KB)

- 1 024 Bytes
  8 192 Bits

Megabyte (MB)

- 1 024 KB
- 1 048 576 (220) Bytes
- 8 388 608 Bits

Gigabyte (GB)

- 1 024 MB
- 1 048 576 KB
- 1 073 741 824 (230) Bytes
- 8 589 934 592 Bits

Terabyte (TB)

- 1 024 GB
- 1 048 576 MB
- 1 073 741 824 KB
- 1 099 511 627 776 (240) Bytes
- 8 796 093 022 208 Bits

Petabyte (PB)

- 1 024 TB
- 1 048 576 GB
- 1 073 741 824 MB
- 1 099 511 627 776 KB
- 1 125 899 906 842 624 (250) Bytes
- 9 007 199 254 740 992 Bits

Exabyte (EB)

- 1 024 PB
- 1 048 576 TB
- 1 073 741 824 GB
- 1 099 511 627 776 MB
- 1 125 899 906 842 624 KB

- 1 152 921 504 606 846 976 (260) Bytes
- 9 223 372 036 854 775 808 Bits

Zettabyte (ZB)

- 1 024 EB
- 1 048 576 PB
- 1 073 741 824 TB
- 1 099 511 627 776 GB
- 1 125 899 906 842 624 MB
- 1 152 921 504 606 846 976 KB
- 1 180 591 620 717 411 303 424 (270) Bytes
- 9 444 732 965 739 290 427 392 Bits

Yottabyte (YB)

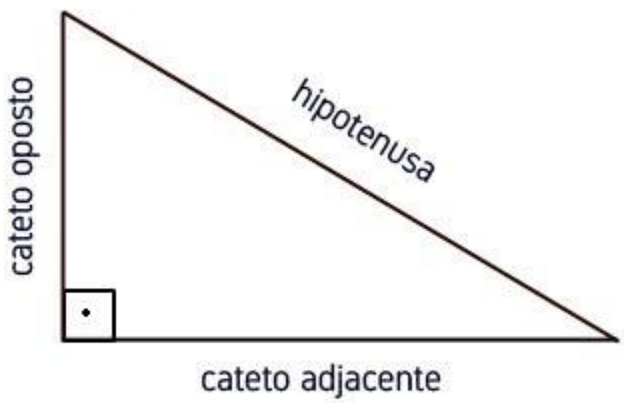
- 1 024 ZB
- 1 048 576 EB
- 1 073 741 824 PB
- 1 099 511 627 776 TB
- 1 125 899 906 842 624 GB
- 1 152 921 504 606 846 976 MB
- 1 180 591 620 717 411 303 424 KB
- 1 208 925 819 614 629 174 706 176 (280) Bytes
- 9 671 406 556 917 033 397 649 408 Bits

TRIGONOMETRIA

A **trigonometria** é a parte da matemática que estuda as relações existentes entre os lados e os ângulos dos triângulos.
Ela é utilizada também em outras áreas de estudo como física, química, biologia, geografia, astronomia, medicina, engenharia, dentre outras.

Funções Trigonométricas

As funções trigonométricas são as funções relacionadas aos triângulos retângulos, que possuem um ângulo de 90°. São elas: seno, cosseno e tangente.



As funções trigonométricas estão baseadas nas razões existentes entre dois lados do triângulo em função de um ângulo.
Ela são formadas por dois catetos (oposto e adjacente) e a hipotenusa:

$$\text{Seno} = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}}$$

Lê-se cateto oposto sobre a hipotenusa.

$$\text{Cosseno} = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}}$$

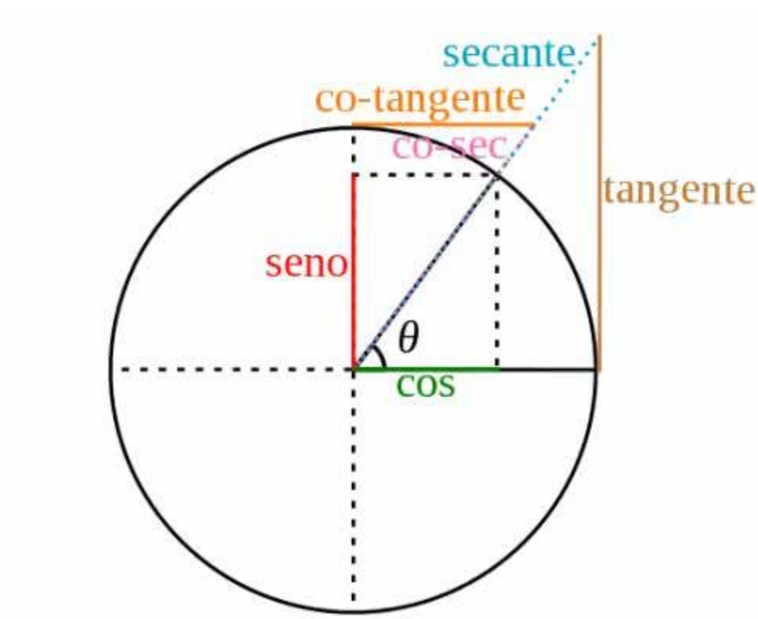
Lê-se cateto adjacente sobre a hipotenusa.

$$\text{Tangente} = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}}$$

Lê-se cateto oposto sobre cateto adjacente.

Círculo Trigonométrico

O círculo trigonométrico ou círculo unitário é usado no estudo das funções trigonométricas: seno, cosseno e tangente.

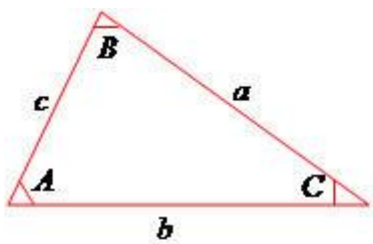


Teoria Euclidiana

Alguns conceitos importantes da geometria euclidiana nos estudos da trigonometria são:

Lei dos Senos

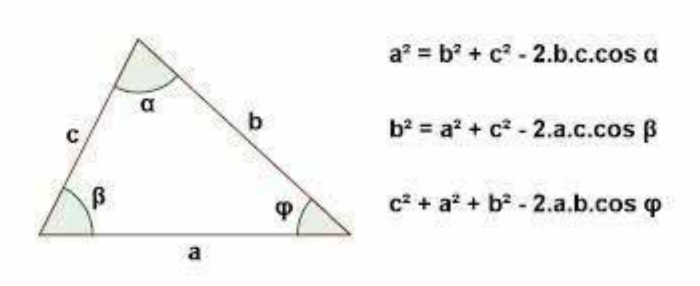
A Lei dos Senos estabelece que num determinado triângulo, a razão entre o valor de um lado e o seno de seu ângulo oposto, será sempre constante.
Dessa forma, para um triângulo ABC de lados a, b, c, a Lei dos Senos é representada pela seguinte fórmula:



$$\frac{a}{senA} = \frac{b}{senB} = \frac{c}{senC}$$

Lei dos Cossenos

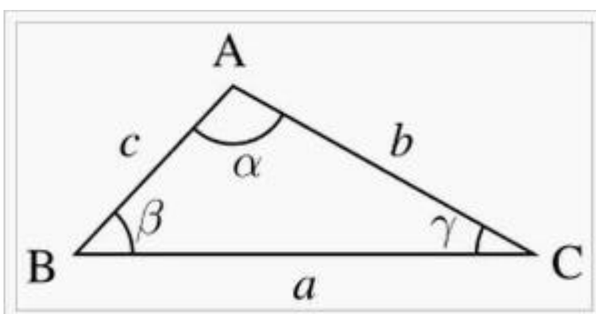
A Lei dos Cossenos estabelece que em qualquer triângulo, o quadrado de um dos lados, corresponde à soma dos quadrados dos outros dois lados, menos o dobro do produto desses dois lados pelo cosseno do ângulo entre eles.
Dessa maneira, sua fórmula é representada da seguinte maneira:



Lei das Tangentes

A **Lei das Tangentes** estabelece a relação entre as tangentes de dois ângulos de um triângulo e os comprimentos de seus lados opostos.

Dessa forma, para um triângulo ABC, de lados a, b, c, e ângulos α, β e γ, opostos a estes três lados, têm-se a expressão:



$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\tan\left[\frac{1}{2}(A+B)\right]}{\tan\left[\frac{1}{2}(A-B)\right]}$$

Teorema de Pitágoras

O Teorema de Pitágoras, criado pelo filósofo e matemático grego, Pitágoras de Samos, (570 a.C. - 495 a.C.), é muito utilizado nos estudos trigonométricos.

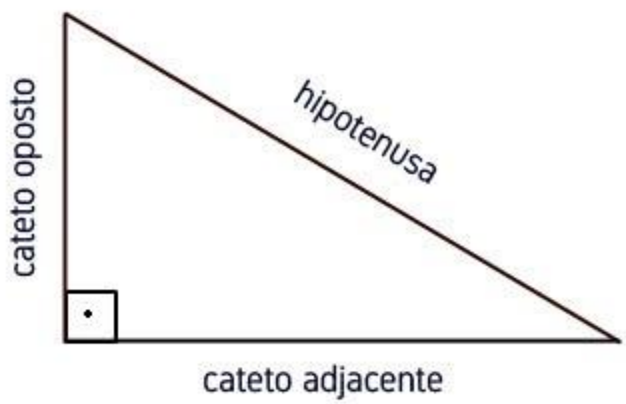
Ele prova que no triângulo retângulo, composto por um ângulo interno de 90° (ângulo reto), a soma dos quadrados de seus catetos corresponde ao quadrado de sua hipotenusa:

$\mathbf{a^2 = c^2 + b^2}$

Sendo,

a: hipotenusa

c e **b**: catetos



Geometria Plana

Também chamada de Geometria Euclidiana, ou ainda de Geometria Elementar, estuda o plano e o espaço baseando-se nos postulados de Euclides (axiomas). Axiomas são as hipóteses iniciais a partir das quais derivam diversos outros enunciados, por meio de inferência lógica. Assim sendo, axiomas não são derivados por princípios de dedução e nem são demonstráveis.

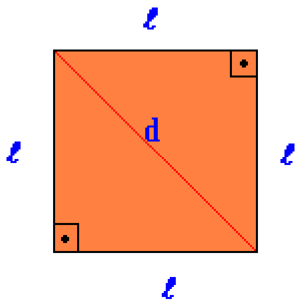
A Geometria Plana é fundamentada em três elementos geométricos: ponto, reta e plano. O ponto é o conceito principal a partir do qual se formam as retas e os planos. Portanto, a geometria plana contempla o estudo das formas geométricas planas (quadrado, triângulo, retângulo, losango, círculo, trapézio), suas propriedades e todas as relações entre elas.

Cálculo de Áreas

A área de uma figura geométrica expressa o tamanho de sua superfície, sendo assim quanto maior a superfície da figura, maior será sua área. Já o perímetro corresponde à somatória dos lados de uma figura geométrica.

Quadrado

Figura geométrica plana regular, na qual todos os seus lados e ângulos são iguais.



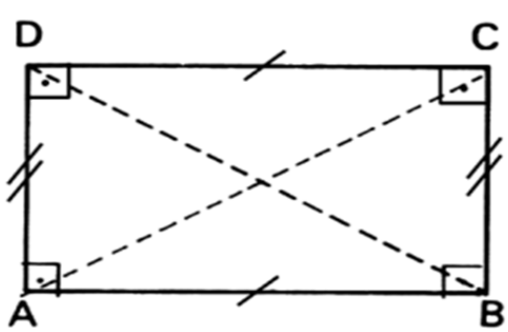
Quadrado. Imagem: Wikimedia commons.

Área $_{\text{Quadrado}} = l^2$

Retângulo

Figura geométrica plana cujos lados opostos são paralelos e iguais e todos os ângulos medem 90º.

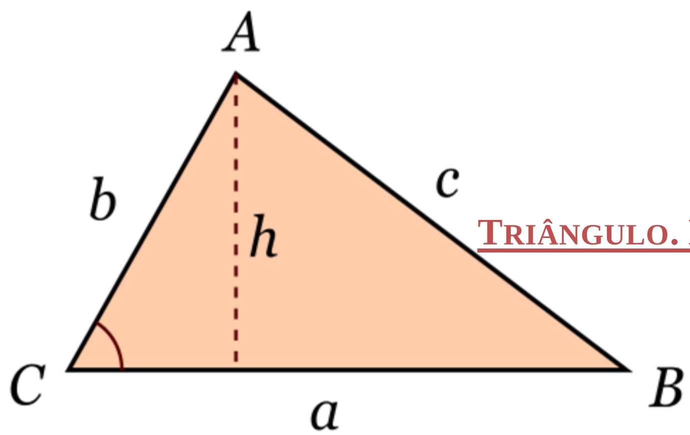
Área $_{\text{Retângulo}}$ = *base X altura*



Retângulo. Imagem: Wikimedia commons.

Triângulo

Figura geométrica plana formada por três lados e três ângulos. A soma dos seus ângulos internos é igual 180º.

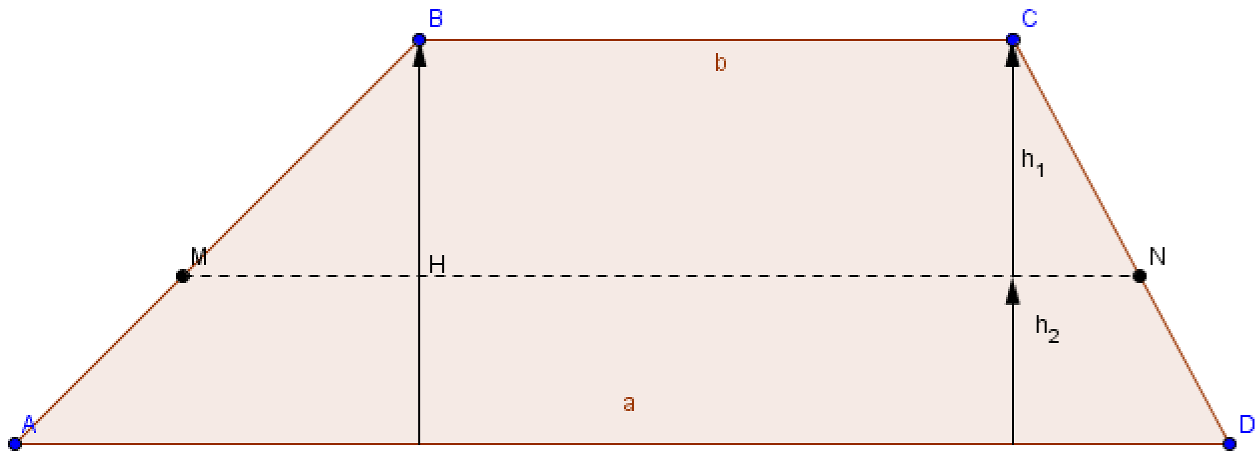


TRIÂNGULO. IMAGEM: WIKIMEDIA COMMONS.

Área $_{\text{triângulo}}$ **= *(base X altura)/2***

Trapézio

Figura plana com um par de lados paralelos (bases) e um par de lados concorrentes.



Trapézio. Imagem: Wikimedia commons.

Para calcular a área do trapézio adiciona-se a base maior *c* à base menor *a*, ao resultado da soma multiplica-se a altura, e por fim, divide-se o resultado final por 2.

$$\text{Área}_{\text{trapézio}} = [(\textit{base maior} + \textit{base menor}) \times \textit{altura})]/2$$

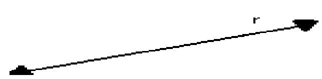
Geometria espacial

Pontos, retas e planos

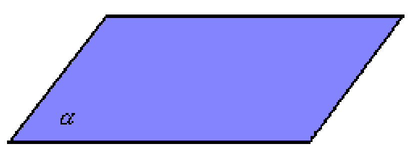
Na geometria espacial, são conceitos primitivos (e, portanto, aceitos sem definição) os conceitos de ponto, reta e plano. Habitualmente, usamos a seguinte notação:

- **pontos**: letras maiúsculas do nosso alfabeto

- **retas**: letras minúsculas do nosso alfabeto

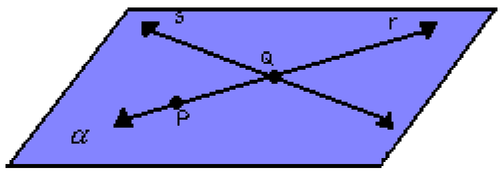


- **planos**: letras minúsculas do alfabeto grego



Observação: Espaço é o conjunto de todos os pontos.

Por exemplo, da figura a seguir, podemos escrever:



$P \in r$

$Q \in s \cap r$

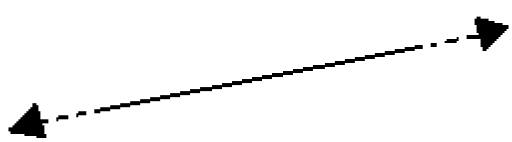
$s \subset \alpha$ e $r \subset \alpha$

Axiomas

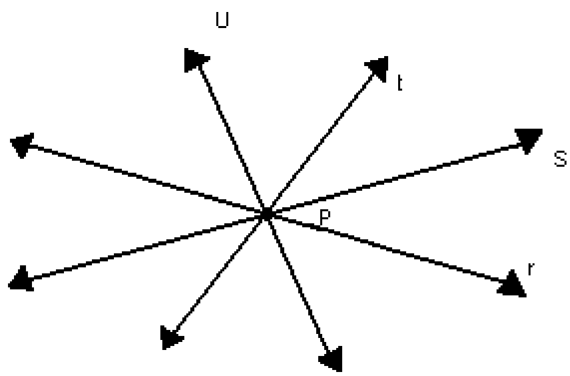
Axiomas, ou postulados (**P**), são proposições aceitas como verdadeiras sem demonstração e que servem de base para o desenvolvimento de uma teoria. Temos como axioma fundamental: *existem infinitos pontos, retas e planos.*

Postulados sobre pontos e retas

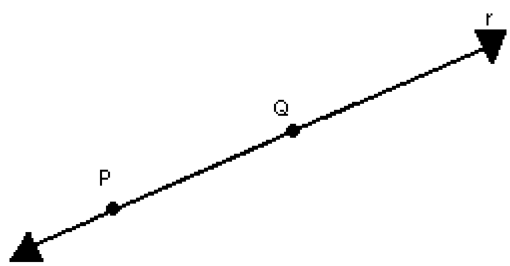
P_1) A reta é infinita, ou seja, contém infinitos pontos.



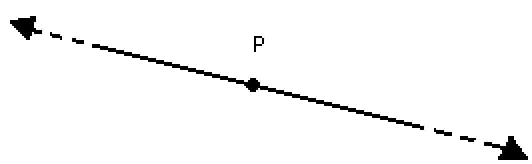
P_2) Por um ponto podem ser traçadas infinitas retas.



P_3) Por dois pontos distintos passa uma única reta.

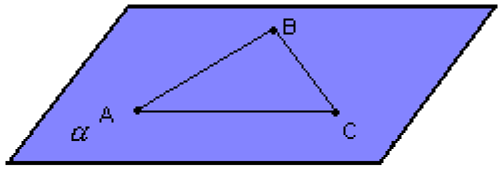


P_4) Um ponto qualquer de uma reta divide-a em duas semirretas.



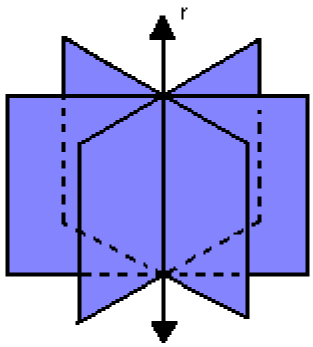
Postulados sobre o plano e o espaço

P_5) Por três pontos não-colineares passa um único plano.



P_6) O plano é infinito, isto é, ilimitado.

P_7) Por uma reta pode ser traçada uma infinidade de planos.

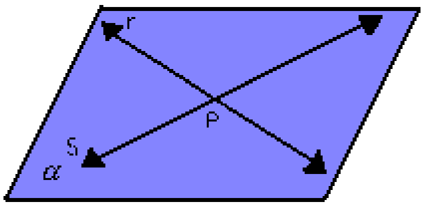


P_8) Toda reta pertencente a um plano divide-o em duas regiões chamadas *semiplanos.*

P_9) Qualquer plano divide o espaço em duas regiões chamadas semiespaços.

Posições relativas de duas retas

No espaço, duas retas distintas podem ser c*oncorrentes, paralelas ou reversas:*

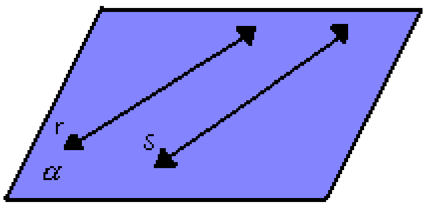


Concorrentes

$r \cap s = \{P\}$

$r \subset \alpha$

$s \subset \alpha$

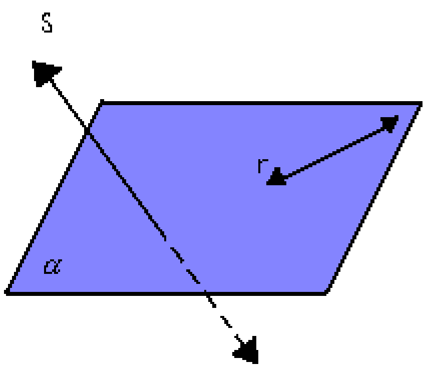


Paralelas

$r \cap s = \{\ \}$

$r \subset \alpha$

$s \subset \alpha$



Reversas

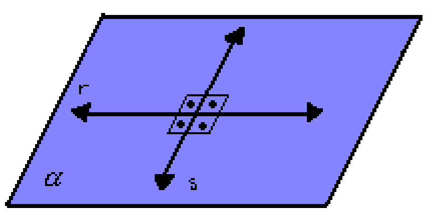
$r \cap s = \{\ \}$

não existe plano que contenha

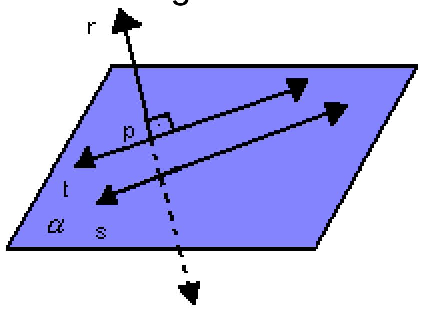
r e s simultaneamente

Temos que considerar dois casos particulares:

- retas perpendiculares: $r \perp s$



- retas ortogonais: $r \perp s$



$r \perp t$ e $r \perp s \Rightarrow t \,//\, s$

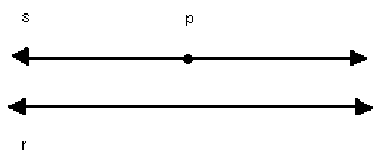
$t \subset \alpha$

$s \subset \alpha$

Postulado de Euclides ou das retas paralelas

P_{10}) Dados uma reta **r** e um ponto P $\notin$ r, existe uma única reta **s**, traçada por **P**, tal que r // s:

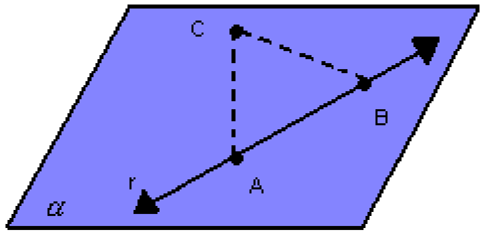
$$\left.\begin{array}{l} P \notin r \\ P \in s \end{array}\right\} \exists |\, s // r$$



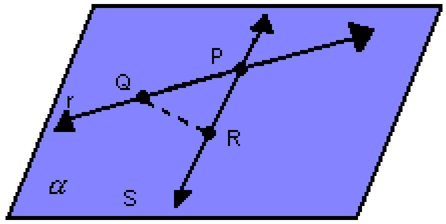
Determinação de um plano

Lembrando que, pelo postulado 5, um único plano passa por três pontos não-colineares. Um plano também pode ser determinado por:

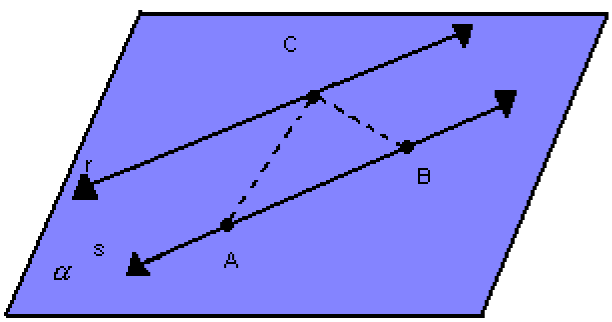
- uma reta e um ponto não-pertencente a essa reta:



- duas retas distintas concorrentes:



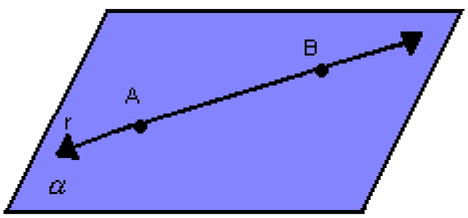
- duas retas paralelas distintas:



Posições relativas de reta e plano

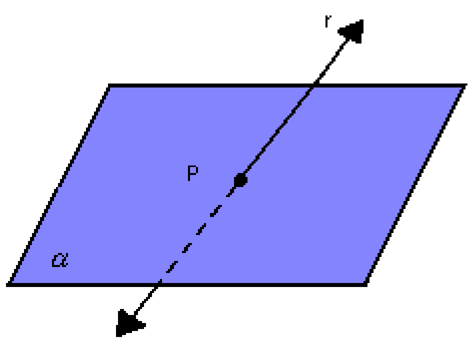
Vamos considerar as seguintes situações:

a) reta contida no plano: se uma reta **r** tem dois pontos distintos num plano α, então **r** está contida nesse plano:



$$\left.\begin{array}{l} A \in \alpha \text{ e } B \in \alpha \\ A \in r \text{ e } B \in r \end{array}\right\} \Rightarrow r \subset \alpha$$

b) reta concorrente ou incidente ao plano: dizemos que a reta **r** "fura" o plano α ou que **r** e α são concorrentes em **P** quando $r \cap \alpha = \{P\}$.

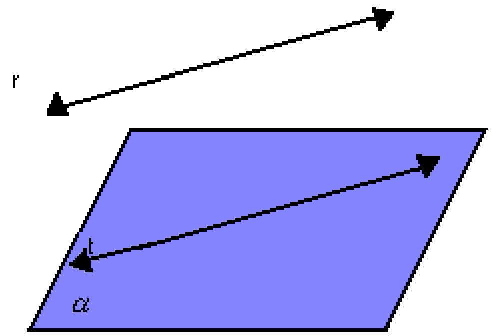


Observação: a reta **r** é reversa a todas as retas do plano que não passam pelo ponto **P**.

c) reta paralela ao plano: se uma reta **r** e um plano α não têm ponto em comum, então a reta **r** é paralela a uma reta **t** contida no plano α; portanto, r // α.

$$r \; // \; t \text{ e } t \subset \alpha \Rightarrow r \; // \; \alpha$$

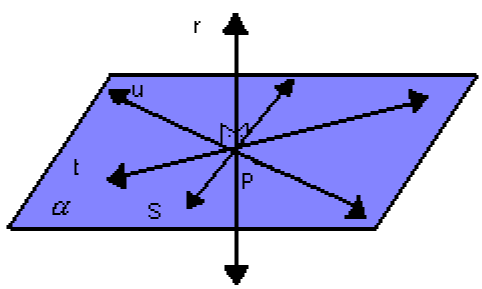
Em α existem infinitas retas paralelas, reversas ou ortogonais a **r**.



P_{11}) Se dois planos distintos têm um ponto em comum, então a sua intersecção é dada por uma única reta que passa por esse ponto.

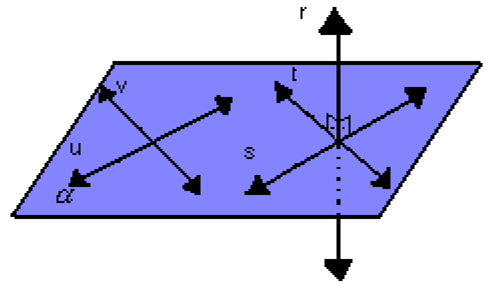
Perpendicularismo entre reta e plano

Uma reta **r** é perpendicular a um plano α se, e somente se, **r** é perpendicular a todas as retas de α que passam pelo ponto de intersecção de **r** e α.



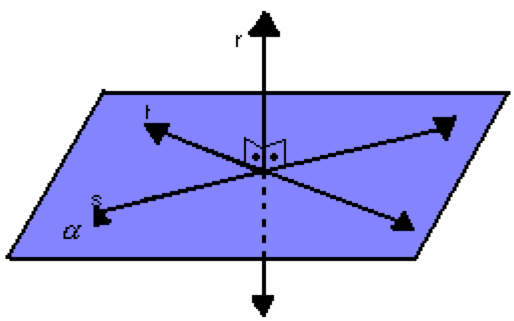
Note que:

- se uma reta **r** é perpendicular a um plano α, então ela é perpendicular ou ortogonal a toda reta de α:



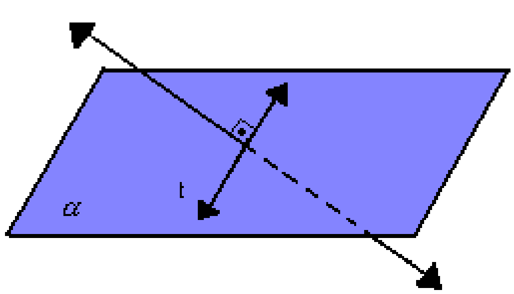
$$\left.\begin{array}{l} r \perp \alpha \\ s \subset \alpha, t \subset \alpha, u \subset \alpha, v \subset \alpha \end{array}\right\} \Rightarrow r \perp s, r \perp t, r \perp u \text{ e } r \perp v$$

- para que uma reta **r** seja perpendicular a um plano α, basta ser perpendicular a duas retas concorrentes, contidas em α:



$$\left.\begin{array}{l} r \perp s \text{ e } r \perp t \\ s \subset \alpha \text{ e } t \subset \alpha \end{array}\right\} \Rightarrow r \perp \alpha$$

Observe, na figura abaixo, por que não basta que **r** seja perpendicular a uma única reta **t** de α para que seja perpendicular ao plano:

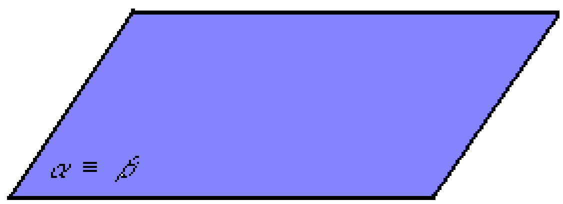


$$\left\{\begin{array}{l} r \perp t (t \subset \alpha) \\ r \text{ não é perpendicular a } \alpha \end{array}\right.$$

Posições relativas de dois planos

Consideramos as seguintes situações:

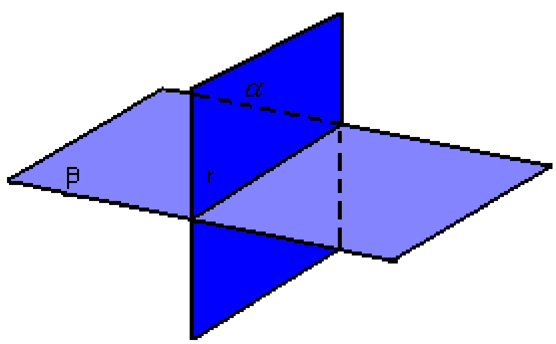
a) planos coincidentes ou iguais



b) planos concorrentes ou secantes

Dois planos, α e β, são concorrentes quando sua intersecção é uma única reta:

$\alpha \cap \beta = r$



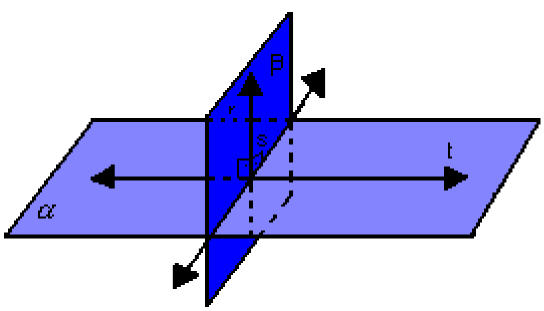
c) planos paralelos

Dois planos, α e β, são paralelos quando sua intersecção é vazia:

$$\alpha // \beta \Rightarrow \alpha \cap \beta = \{\ \}$$

Perpendicularismo entre planos

Dois planos, α e β, são perpendiculares se, e somente se, existe uma reta de um deles que é perpendicular ao outro:



$$\alpha \perp \beta \Rightarrow \exists r \subset \beta \text{ e } r \perp \alpha$$

Observação: Existem infinitos planos perpendiculares a um plano dado; esses planos podem ser paralelos entre si ou secantes.

Análise combinatória

Podemos determinar a **análise combinatória** como sendo um conjunto de possibilidade constituído por elementos finitos, a mesma baseia-se em critérios que possibilitam a contagem. Realizamos o seu estudo na lógica matemática, analisando possibilidades e combinações. Acompanhe o exemplo a seguir, para poder compreender melhor o que vêm a ser a análise combinatória.

Exemplo: Descubra quantos números com 3 algarismos conseguimos formar com o conjunto numérico {1, 2, 3}.

Conjunto de elementos finito: {1, 2, 3}

Conjunto de possibilidades de números com 3 algarismos: {123, 132, 213, 231, 312, 321}

Resposta Final: Com o conjunto numérico {1, 2, 3}, é possível formar 6 números.

A análise combinatória estuda os seguintes conteúdos:

- **Princípio fundamental da contagem**
- **Fatorial**
- **Permutação simples**
- **Permutação com repetição**
- **Arranjo simples**
- **Combinação simples**

Confira a seguir uma definição resumida de cada tópico estudo pela análise combinatória.

Princípio fundamental da contagem

Determina o número total de possibilidade de um evento ocorrer, pelo produto de m *x* n. Sendo n e m resultados distintos de um evento experimental.

<u>Exemplo</u>: Jeniffer precisa comprar uma saia, a loja em que está possui 3 modelos de saia diferente nas cores: preto, rosa, azul e amarelo. Quantas opções de escolha Jeniffer possuí.

Para solucionar essa questão utilizamos o principio fundamental da contagem.

m = 3 (Modelos diferentes de saia), n = 4 (Cores que a saia possui)

m x n = 3 x 4 = 12

Jeniffer possui 12 possibilidades de escolha.

Fatorial

O fatorial de um número qualquer, e representado pelo produto:

n! = n . (n - 1) . (n - 2) . (n - 3) . ... . 1!

Exemplo: Calcule 4!

n! = n . (n - 1) . (n - 2) . (n - 3) . ... . 1!

4! = 4 . (4 – 1) . (4 – 2) . (4 – 3)

$4! = 4 . 3. 2 . 1$

$4! = 24$

Permutação simples

Na permutação os elementos que compõem o agrupamento mudam de ordem, ou seja, de posição. Determinamos a quantidade possível de permutação dos elementos de um conjunto, com a seguinte expressão:

$P_n =$ $n!$

$P_n = n . (n-1) . (n-2) . (n-3).....1!$

Exemplo: Em uma eleição para representante de sala de aula, 3 alunos candidataram-se: Vanessa, Caio e Flávia. Quais são os possíveis resultados dessa eleição?

Vanessa (V), Caio (C), Flávia (F)

Os possíveis resultados dessa eleição podem ser dados com uma permutação simples, acompanhe:

n = 3 (Quantidade de candidatos concorrendo a representante)

$P_n = n!$

$P_n = 3 . 2 . 1!$

$P_n = 6$

Para a eleição de representante, temos 6 possibilidades de resultado, em relação a posição dos candidatos, ou seja, 1º, 2º e 3º lugar. Veja a seguir os possíveis resultados dessa eleição.

Resultado 1	**Resultado 2**	**Resultado 3**	**Resultado 4**	**Resultado 5**	**Resultado 6**
VCF	VFC	CVF	CFV	FCV	FVC

Permutação com repetição

Nessa permutação alguns elementos que compõem o evento experimental são repetidos, quando isso ocorrer devemos aplicar a seguinte fórmula:

$$P_n(n_1,n_2,n_3\ldots n_k)=\frac{n!}{n_1!\cdot n_2!\cdot n_3!\ldots n_k!}$$

- $P_n(n_1,n_2,n_3\ldots n_k)$ = permutação com repetição
- $n!$ = total de elemetos do evento
- $n_1!\cdot n_2!\cdot n_3!\ldots n_k!$ = Elementos repetidos do evento

<u>Exemplo</u>: Quantos anagramas são possíveis formar com a palavra CASA.

A palavra CASA possui: 4 letras (n) e duas vogais que se repetem (n_1).

- $n! = 4!$
- $n_1! = 2!$

$P_n(n_1)=n!n_1!$

$P_n(n_1)=4!2!$

$P_n(n_1)=4\cdot3\cdot2\cdot1!2\cdot1!$

$P_n(n_1)=242=12$

Anagramas da palavra CASA sem repetição					
CASA	ACSA	ASCA	ASAC	SCAA	CSAA
AASC	AACS	CAAS	SAAC	SACA	ACAS

Arranjo simples

No arranjo simples a localização de cada elemento do conjunto forma diferentes agrupamentos, devemos levar em consideração, a ordem de posição do elemento e sua natureza, além disso, devemos saber que ao mudar os elementos de posição isso causa diferenciação entre os agrupamentos.

Para saber a quantidade de arranjos possíveis em p agrupamento com n elementos, devemos utilizar a fórmula a seguir:

$$A_{n,p}=\frac{n!}{(n-p)!}$$

- A = Arranjo
- n = elementos
- p = Agrupamentos

No arranjo a quantidade de agrupamento p, sempre deve ser menor que n, ou seja:

$$p \leq n$$

Exemplo: Flávia, Maria, Gustavo e Pedro estão participando de uma competição em que há premiação para os três primeiros colocados (1º, 2º e 3º). Quais são as possibilidades de premiação?

- Quantidade de participantes da competição: n = 4
- Quantidade de pessoas em cada agrupamento (premiação): p = 3

$A_{n,p}=\frac{n!}{(n-p)!}$

$A_{4,3}=\frac{4!}{(4-3)!}$

$A_{4,3}=\frac{4\cdot3\cdot2\cdot1!}{1!}$

$A_{4,3}=\frac{24}{1}=24$

Existem 24 possibilidades de premiação.

Combinação simples

Na combinação simples, em um agrupamento mudamos somente a ordem dos elementos distintos. Para que isso seja feito podemos recorrer à utilização da fórmula:

$$C_{n,p}=\frac{n!}{p!\cdot(n-p)!}$$

- C = Combinação
- n = Elementos.
- p = Agrupamento

Sendo sempre: $p\leq n$

<u>Exemplo</u>: De quantos modos diferentes posso separar 10 bolinhas de cores distintas, colocando 2 bolinhas em cada saquinhos

- Total de bolinhas: n = 10
- Quantidade de bolinhas por saquinho: p = 2

$C_{n,p}=\frac{n!}{p!\cdot(n-p)!}$

$C_{10,2}=10!2!\cdot(10-2)!$

$C_{10,2}=36288002\cdot(8)!$

$C_{10,2}=36288002\cdot(40320)$

$C_{10,2}=362880080640=45$

Com 10 bolinhas distintas colocando duas em cada saquinho, é possível fazer 45 combinações.

PROBABILIDADES

O lançamento de dados é um dos experimentos aleatórios possíveis na Probabilidade

Probabilidade é o estudo das **chances** de obtenção de cada resultado de um **experimento aleatório**. A essas **chances** são atribuídos os **números reais** do intervalo entre 0 e 1. Resultados mais próximos de 1 têm mais chances de ocorrer. Além disso, a **probabilidade** também pode ser apresentada na forma **percentual**.

Experimento aleatório e ponto amostral

Um **experimento aleatório** pode ser repetido inúmeras vezes e nas mesmas condições e, mesmo assim, apresenta resultados diferentes. Cada um desses resultados possíveis é chamado de ***ponto amostral*.** São exemplos de experimentos aleatórios:

a) Cara ou coroa

Lançar uma moeda e observar se a face voltada para cima é cara ou coroa é um exemplo de **experimento aleatório**. Se a moeda não for viciada e for lançada sempre nas mesmas condições, poderemos ter como resultado tanto cara quanto coroa.

b) Lançamento de um dado

Lançar um dado e observar qual é o número da face superior também é um **experimento aleatório**. Esse número pode ser 1, 2, 3, 4, 5 ou 6 e cada um desses resultados apresenta a mesma **chance** de ocorrer. Em cada lançamento, o resultado pode ser igual ao anterior ou diferente dele.
Observe que, no lançamento da moeda, as chances de repetir o resultado anterior são muito maiores.

c) Retirar uma carta aleatória de um baralho

Cada carta tem a mesma chance de ocorrência cada vez que o experimento é realizado, por isso, esse é também um **experimento aleatório**.

Espaço amostral

O **espaço amostral** (Ω) é o conjunto formado por todos os resultados possíveis de um **experimento aleatório**. Em outras palavras, é o conjunto formado por todos os **pontosamostrais** de um experimento. Veja exemplos:

a) O **espaço amostral** do experimento “cara ou coroa” é o conjunto S = {Cara, Coroa}. Os **pontos amostrais** desse experimento são os mesmos elementos desse conjunto.

b) O **espaço amostral** do experimento “lançamento de um dado” é o conjunto S = {1, 2, 3, 4, 5, 6}. Os **pontos amostrais** desse experimento são 1, 2, 3, 4, 5 e 6.

O **espaço amostral** também é chamado de ***Universo*** e pode ser representado pelas outras notações usadas nos **conjuntos**. Além disso, todas as **operações** entre conjuntos valem também para espaços amostrais.

O **número de elementos** do espaço amostral, número de pontos amostrais do **espaçoamostral** ou número de casos possíveis em um espaço amostral é representado da seguinte maneira: n(Ω).

Evento

Um **evento** é qualquer subconjunto de um espaço amostral. Ele pode conter nenhum elemento (conjunto vazio) ou todos os elementos de um **espaço amostral**. O número de elementos do evento é representado da seguinte maneira: n(E), sendo E o evento em questão.

São exemplos de eventos:

a) Sair cara em um lançamento de uma moeda

O **evento** é *sair cara* e possui um único elemento. A representação dos eventos também é feita com notações de conjuntos:

E = {cara}

O seu **número** de **elementos** é n(E) = 1.

b) Sair um número par no lançamento de um dado.

O **evento** é *sair um número par*:

E = {2, 4, 6}

O seu **número** de **elementos** é n(E) = 3.

Os **eventos** que possuem apenas um elemento (ponto amostral) são chamados de*simples*. Quando o evento é igual ao **espaço amostral,** ele é chamado de *evento certo*e sua **probabilidade** de ocorrência é de 100%. Quando um evento é igual ao conjunto vazio, ele é chamado de *evento impossível* e possui 0% de chances de ocorrência.

Cálculo da probabilidade

Seja E um evento qualquer no **espaço amostral** Ω.
A **probabilidade** do evento A ocorrer é a razão entre o número de resultados favoráveis e o número de resultados possíveis. Em outras palavras, é o número de elementos do **evento** dividido pelo número de elementos do espaço amostral a que ele pertence.

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(\Omega)}$$

Observações:

- O número de elementos do **evento** sempre é menor ou igual ao número de elementos do **espaço amostral** e maior ou igual a zero. Por isso, o resultado dessa divisão sempre está no intervalo $0 \leq P(A) \leq 1$;
- Quando é necessário usar porcentagem, devemos multiplicar o resultado dessa divisão por 100 ou usar regra de três;
- A **probabilidade** de um evento não acontecer é determinada por:

$$P(A^{-1}) = 1 - P(A)$$

Exemplos:

→ ***Qual é a probabilidade de, no lançamento de uma moeda, o resultado ser cara?***

Solução:
Observe que o espaço amostral só possui dois elementos e que o evento é *sair cara* e, por isso, possui apenas um elemento.

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(\Omega)}$$

$$P(E) = \frac{1}{2}$$

$$P(E) = 0,5 = 50\%$$

→ ***Qual é a probabilidade de, no lançamento de duas moedas, obtermos resultados iguais?***

Solução:
Representando cara por C e coroa por K, teremos os seguintes resultados possíveis:

(C, K); (C, C); (K, C); (K, K)

O evento *obter resultados iguais* possui os seguintes casos favoráveis:

(C, C); (K, K)

Há quatro casos possíveis (número de elementos do **espaço amostral**) e dois casos favoráveis (número de elementos do **evento**), logo:

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(\Omega)}$$

$$P(E) = \frac{2}{4}$$

$$P(E) = 0{,}5 = 50\%$$

→ ***No lançamento de um dado, qual é a probabilidade de sair um resultado menor que 3?***

Solução:

Observe que os números do dado menores do que 3 são 1 e 2, por isso, o **evento** possui apenas dois elementos. O espaço amostral possui seis elementos: 1, 2, 3, 4, 5 e 6.

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(\Omega)}$$

$$P(E) = \frac{2}{6}$$

$$P(E) = 0{,}33... = 33{,}3\%$$

→ ***Qual é a chance de não sair o número 1 no lançamento de um dado?***

Solução:

Temos duas maneiras de resolver esse problema. Note que *não sair o número 1* é o mesmo que sair qualquer outro número. Faremos o mesmo cálculo de **probabilidade**considerando que o evento possui cinco elementos.

A outra maneira é usar a fórmula para a **probabilidade** de um evento não ocorrer:

$$P(A^{-1}) = 1 - P(E)$$

O evento que não pode ocorrer possui apenas um elemento, logo:

$$P(A^{-1}) = 1 - P(E)$$
$$P(A^{-1}) = 1 - \frac{n(E)}{n(\Omega)}$$
$$P(A^{-1}) = 1 - \frac{1}{6}$$
$$P(A^{-1}) = 1 - 0{,}166..$$
$$P(A^{-1}) = 0{,}8333\ldots = 83{,}3\%$$

Estatística

Estatística é uma ciência exata que visa fornecer subsídios ao analista para coletar, organizar, resumir, analisar e apresentar dados. Trata de parâmetros extraídos da população, tais como média ou desvio padrão.

A estatística fornece-nos as técnicas para extrair informação de dados, os quais são muitas vezes incompletos, na medida em que nos dão informação útil sobre o problema em estudo, sendo assim, é objetivo da Estatística extrair informação dos dados para obter uma melhor compreensão das situações que representam.

Quando se aborda uma problemática envolvendo métodos estatísticos, estes devem ser utilizados mesmo antes de se recolher a amostra, isto é, deve-se planejar a experiência que nos vai permitir recolher os dados, de modo que, posteriormente, se possa extrair o máximo de informação relevante para o problema em estudo, ou seja para a população de onde os dados provêm.

Quando de posse dos dados, procura-se agrupá-los e reduzi-los, sob forma de amostra, deixando de lado a aleatoriedade presente.

Seguidamente o objetivo do estudo estatístico pode ser o de estimar uma quantidade ou testar uma hipótese, utilizando-se técnicas estatísticas convenientes, as quais realçam toda a potencialidade da Estatística, na medida em que vão permitir tirar conclusões acerca de uma população, baseando-se numa pequena amostra, dando-nos ainda uma medida do erro cometido.

População e amostra

Qualquer estudo científico enfrenta o dilema de estudo da população ou da amostra. Obviamente tería-se uma precisão muito superior se fosse analisado o grupo inteiro, a população, do que uma pequena parcela representativa, denominada amostra. Observa-se que é impraticável na grande maioria dos casos, estudar-se a população em virtude de distâncias, custo, tempo, logística, entre outros motivos.

A alternativa praticada nestes casos é o trabalho com uma amostra confiável. Se a amostra é confiável e proporciona inferir sobre a população, chamamos de inferência estatística. Para que a inferência seja válida, é necessária uma boa amostragem, livre de erros, tais como falta de determinação correta da população, falta de aleatoriedade e erro no dimensionamento da amostra.

Quando não é possível estudar, exaustivamente, todos os elementos da população, estudam-se só alguns elementos, a que damos o nome de Amostra.

Quando a amostra não representa corretamente a população diz-se enviesada e a sua utilização pode dar origem a interpretações erradas.

AMOSTRAGEM

Amostragem é o processo que procura extrair da população elementos que através de cálculos probabilísticos ou não, consigam prover dados inferenciais da população-alvo.

<table>
<tr><td rowspan="6">Tipos de Amostragem</td><td>Não probabilística</td></tr>
<tr><td>Acidental ou conveniência</td></tr>
<tr><td>Intencional</td></tr>
<tr><td>Quotas ou proporcional</td></tr>
<tr><td>Desproporcional</td></tr>
<tr><td>Probabilística</td></tr>
</table>

	Aleatória Simples
	Aleatória Estratificada
	Conglomerado

Não probabilística

A escolha de um método não probabilístico, via de regra, sempre encontrará desvantagem frente ao método probabilístico. No entanto, em alguns casos, se faz necessário a opção por este método. Fonseca (1996), alerta que não há formas de se generalizar os resultados obtidos na amostra para o todo da população quando se opta por este método de amostragem.

Acidental ou conveniência

Indicada para estudos exploratórios. Frequentemente utilizados em supermercados para testar produtos.

Intencional

O entrevistador dirige-se a um grupo em específico para saber sua opinião. Por exemplo, quando de um estudo sobre automóveis, o pesquisador procura apenas oficinas.

Quotas ou proporcional

Na realidade, trata-se de uma variação da amostragem intencional. Necessita-se ter um prévio conhecimento da população e sua proporcionalidade. Por exemplo, deseja-se entrevistar apenas indivíduos da classe A, que representa 12% da população. Esta será a quota para o trabalho. Comumente também substratifica-se uma quota obedecendo a uma segunda proporcionalidade.

Desproporcional

Muito utilizada quando a escolha da amostra for desproporcional à população. Atribui-se pesos para os dados, e assim obtém-se resultados ponderados representativos para o estudo.

Probabilística

Para que se possa realizar inferências sobre a população, é necessário que se trabalhe com amostragem probabilística. É o método que garante segurança quando investiga-se alguma hipótese. Normalmente os indivíduos investigados possuem a mesma probabilidade de ser selecionado na amostra.

Aleatória Simples

É o mais utilizado processo de amostragem. Prático e eficaz, confere precisão ao processo de amostragem. Normalmente utiliza-se uma tabela de números aleatórios e nomeia-se os indivíduos, sorteando-se um por um até completar a amostra calculada.

Uma variação deste tipo de amostragem é a sistemática. Em um grande número de exemplos, o pesquisador depara-se com a população ordenada. Neste sentido, tem-se os indivíduos dispostos em sequência o que dificulta a aplicação exata desta técnica.

Quando se trabalha com sorteio de quadras de casas por exemplo, há uma regra crescente para os números das casas. Em casos como este, divide-se a população pela amostra e obtém-se um coeficiente (y). A primeira casa será a de número x, a segunda será a de número x + y; a terceira será a de número x + 3. y.

Supondo que este coeficiente seja 6. O primeiro elemento será 3. O segundo será 3 + 6. O terceiro será 3 + 2.6. O quarto será 3 + 3.6, e assim sucessivamente.

Aleatória Estratificada

Quando se deseja guardar uma proporcionalidade na população heterogênea. Estratifica-se cada subpopulação por intermédio de critérios como classe social, renda, idade, sexo, entre outros.

Conglomerado

Em corriqueiras situações, torna-se difícil coletar características da população. Nesta modalidade de amostragem, sorteia-se um conjunto e procura-se estudar todo o conjunto. É exemplo de amostragem por conglomerado, famílias, organizações e quarteirões.

Matemática Financeira

A Matemática Financeira é uma ferramenta útil na análise de algumas alternativas de investimentos ou financiamentos de bens de consumo. Consiste em empregar procedimentos matemáticos para simplificar a operação financeira a um fluxo de caixa.

Capital

O Capital é o valor aplicado através de alguma operação financeira. Também conhecido como: Principal, Valor Atual, Valor Presente ou Valor Aplicado. Em inglês usa-se Present Value (indicado pela tecla PV nas calculadoras financeiras).

Juros

Juros representam a remuneração do Capital empregado em alguma atividade produtiva. Os juros podem ser capitalizados segundo dois regimes: simples ou compostos.

Juros simples: o juro de cada intervalo de tempo sempre é calculado sobre o capital inicial emprestado ou aplicado.

Juros compostos: o juro de cada intervalo de tempo é calculado a partir do saldo no início de correspondente intervalo. Ou seja: o juro de cada intervalo de tempo é incorporado ao capital inicial e passa a render juros também.

O **juro** é a remuneração pelo empréstimo do dinheiro. Ele existe porque a maioria das pessoas prefere o consumo imediato, e está disposta a pagar um preço por isto. Por outro lado, quem for capaz de esperar até possuir a quantia suficiente para adquirir seu desejo, e neste ínterim estiver disposta a emprestar esta quantia a alguém, menos paciente, deve ser recompensado por esta abstinência na proporção do **tempo** e **risco**, que a operação envolver.

O tempo, o risco e a quantidade de dinheiro disponível no mercado para empréstimos definem qual deverá ser a remuneração, mais conhecida como **taxa de juros**.

Quando usamos juros simples e juros compostos?

A maioria das operações envolvendo dinheiro utiliza **juros compostos**. Estão incluídas: compras a médio e longo prazo, compras com cartão de crédito, empréstimos bancários, as aplicações financeiras usuais como Caderneta de Poupança e aplicações em fundos de renda fixa, etc. Raramente encontramos uso para o regime de juros simples: é o caso das operações de curtíssimo prazo, e do processo de desconto simples de duplicatas.

Taxa de juros

A taxa de juros indica qual remuneração será paga ao dinheiro emprestado, para um determinado período. Ela vem normalmente expressa da forma percentual, seguida da especificação do período de tempo a que se refere:

8 % a.a. - (a.a. significa ao ano).
10 % a.t. - (a.t. significa ao trimestre).

Outra forma de apresentação da taxa de juros é a unitária, que é igual a taxa percentual dividida por 100, sem o símbolo %:

0,15 a.m. - (a.m. significa ao mês).

0,10 a.q. - (a.q. significa ao quadrimestre)

Juros simples

O regime de juros será simples quando o percentual de juros incidir apenas sobre o valor principal. Sobre os juros gerados a cada período não incidirão novos juros. Valor principal ou simplesmente principal é o valor inicial emprestado ou aplicado, antes de somarmos os juros. Transformando em fórmula, temos:

$$\mathbf{J = P \,.\, i \,.\, n}$$

Onde:

J = juros

P = principal (capital)

i = taxa de juros

n = número de períodos

Exemplo: Temos uma dívida de R$ 1.000,00 que deve ser paga com juros de 8% a.m. pelo regime de juros simples e devemos pagá-la em 2 meses. Os juros que pagarei serão:

J = 1000 x 0.08 x 2 = **160**

Ao somarmos os juros ao valor principal, temos o **montante**.

Montante = Principal + Juros
Montante = Principal + (Principal x Taxa de juros x Número de períodos)

$$\mathbf{M = P \,.\, (\, 1 + (\, i \,.\, n\,)\,)}$$

Exemplo: Calcule o montante resultante da aplicação de R$70.000,00 à taxa de 10,5% a.a. durante 145 dias.

SOLUÇÃO:

M = P . (1 + (i.n))

M = 70000 [1 + (10,5/100).(145/360)] = R$72.960,42

Observe que expressamos a taxa **i** e o período **n** na mesma unidade de tempo, ou seja, anos. Daí ter dividido 145 dias por 360, para obter o valor equivalente em anos, já que um ano comercial possui 360 dias.

Exercícios sobre juros simples:

1) Calcular os juros simples de R$ 1.200,00 a 13 % a.t. por 4 meses e 15 dias.

Se a taxa é 13% (ou seja, 0,13) ao trimestre, vamos dividi-la por 6 para encontrar a taxa a cada 15 dias (visto que um trimestre tem 6 períodos de 15 dias):

0.13 / 6 = 0.02167

Logo, para 4 meses e 15 dias, a taxa é 0.02167 x 9 = 0.195. Portanto:

J = 1200 x 0.195 = R$ 234,00

2) Calcular os juros simples produzidos por R$ 40.000,00, aplicados à taxa de 36% a.a., durante 125 dias.

Temos: J = P.i.n

A taxa de 36% a.a. equivale a 0,36/360 dias = 0,001 a.d.

Agora, como a taxa e o período estão referidos à mesma unidade de tempo, ou seja, dias, poderemos calcular diretamente:

J = 40000.0,001.125 = R$ 5.000,00

3) Qual o capital que aplicado a juros simples de 1,2% a.m. rende R$ 3.500,00 de juros em 75 dias?

Temos imediatamente:
J = P.i.n
3500 = P.(1,2/100).(75/30)
Observe que expressamos a taxa **i** e o período **n** em relação à mesma unidade de tempo, meses. Logo,
3500 = P. 0,012 . 2,5
3500 = P . 0,030;

Daí, vem:
P = 3500 / 0,030 = R$ 116.666,67

4) Se a taxa de uma aplicação é de 150% ao ano, quantos meses serão necessários para dobrar um capital aplicado através de capitalização simples?

Objetivo: M = 2.P
Dados: i = 150/100 = 1,5
Fórmula: M = P (1 + i.n)

Desenvolvimento:
2P = P (1 + 1,5 n)
2 = 1 + 1,5 n
n = 2/3 ano = 8 meses

Juros compostos

O regime de juros compostos é o mais comum no sistema financeiro, sendo portanto o mais útil para cálculos de problemas do dia a dia. Os juros gerados a cada período são incorporados ao principal para o cálculo dos juros do período seguinte.

Chamamos de capitalização o momento em que os juros são incorporados ao principal.

Após três meses de capitalização, temos:

1º mês: **M =P.(1 + i)**
2º mês: o principal é igual ao montante do mês anterior: **M = P.(1 + i).(1 + i)**
3º mês: o principal é igual ao montante do mês anterior: **M = P.(1 + i).(1 + i).(1 + i)**

Simplificando, obtemos a fórmula:

$$M = P \cdot (1 + i)^n$$

Importante: a taxa **i** tem que ser expressa na mesma medida de tempo de **n**, ou seja, taxa de juros ao mês para n meses.

Para calcularmos apenas os juros, basta diminuir o principal do montante ao final do período:

$$J = M - P$$

Exemplo:

Calcule o montante de um capital de R$ 6.000,00, aplicado a juros compostos, durante 1 ano, à taxa de 3,5% ao mês. (use *log 1,035=0,0149* e *log 1,509=0,1788*)

Resolução:

P = R$6.000,00
t = 1 ano = 12 meses
i = 3,5 % a.m. = 0,035
M = ?

Usando a fórmula **M=P.(1+i)^n**, obtemos:

$M = 6000.(1+0,035)^{12} = 6000.(1,035)^{12} = 9066,41$

Portanto o montante é R$ 9.066,41.

Referências

https://www.somatematica.com.br
http://www.adassoft.com
https://descomplica.com.br/
https://www.pciconcursos.com.br

A persistência é o caminho do êxito.

Charles Chaplin