1ª PROVA DE CÁLCULO

Prof. Renato Vidal da Silva Martins

Parte I

Enunciados

1. Calcule os limites abaixo, explicando seu raciocínio:

   (a) $\lim_{x\to 4} \dfrac{x^2-16}{\sqrt{x}-2}$

   (b) $\lim_{x\to \infty} \dfrac{x^5+x^3+1}{-x^4+x^2+3}$

   (c) $\lim_{x\to 2} \dfrac{\sin(x-2)}{x^2-6x+8}$

2. Um cone de $1cm$ de raio, $2cm$ de altura está cheio de água. Fazendo um furo no bico, começa a vazar a uma taxa de $\pi/4\ cm^3/s$. Calcule a taxa de variação do nível de água no instante em que $7/8$ do volume já vazou.

3. Calcule a derivada dy/dx, onde:

   (a) $y = \dfrac{x^5+x^3+1}{-x^4+x^2+3}$

   (b) $y = \tan(\sqrt{x^3+1})$

   (c) $y = x^9 \cos^5(x)$

4. Equacione a reta tangente á curva abaixo no ponto $(0,1)$:

$$(x+y)^4 - 7x^2 + y = 2$$

Parte II
Resolução

1. Calcule os limites abaixo, explicando seu raciocínio:

   (a) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x^2-16}{\sqrt{x}-2}$

   Começamos desenvolvendo os termos para sair da indeterminação 0/0:

   $$\lim_{x\to 4} \frac{x^2-16}{\sqrt{x}-2}.\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2}$$
   $$\lim_{x\to 4} \frac{(x-4)(x+4)(\sqrt{x}+2)}{x-4}$$
   $$\lim_{x\to 4}(x+4)(\sqrt{x}+2) = 32$$

   Logo:

   $$\lim_{x\to 4} \frac{x^2-16}{\sqrt{x}-2} = 32$$

   (b) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x^5+x^3+1}{-x^4+x^2+3}$

   Basta colocar x^4 em evidência, temos:

   $$\lim_{x\to\infty} \frac{x^4\left(x+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^4}\right)}{x^4\left(-1+\frac{1}{x^2}+\frac{3}{x^4}\right)}$$
   $$\lim_{x\to\infty} \frac{\left(x+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^4}\right)}{\left(-1+\frac{1}{x^2}+\frac{3}{x^4}\right)}$$

   Como os termos com x no denominador tendem a zero quando $x\to\infty$:

   $$\lim_{x\to\infty} \frac{(x+0+0)}{(-1+0+0)} = -x = -\infty$$

   Logo:

   $$\lim_{x\to\infty} \frac{x^5+x^3+1}{-x^4+x^2+3} = -\infty$$

(c) $\lim_{x \to 2} \frac{\sin(x-2)}{x^2-6x+8}$

Vamos desenvolver a equação de segundo grau:

$$\lim_{x \to 2} \frac{\sin(x-2)}{(x-2)(x-4)}$$

Pelo limite do seno:

$$\lim_{x \to 2} \frac{1}{x-4} = -\frac{1}{2}$$

Seguindo:

$$\lim_{x \to 2} \frac{\sin(x-2)}{(x-2)(x-4)} = -\frac{1}{2}$$

2. Um cone de $1cm$ de raio, $2cm$ de altura está cheio de água. Fazendo um furo no bico, começa a vazar a uma taxa de $\pi/4\ cm^3/s$. Calcule a taxa de variação do nível de água no instante em que $7/8$ do volume já vazou.

   O exercício pede a taxa de variação do nível da água no instante em que restam $1/8$ do conteúdo original, para tanto é preciso escrever a função que fornece a altura em função do volume dado.
   Observando a formula do volume e tendo em mente semelhança de triângulos podemos notar que quando a altura é reduzida a uma porcentagem x o volume todo é reduzido a uma porcentagem x^3 do original. Ou seja:

$$Volume_{atual} = \left(\frac{Altura_{atual}}{Altura_{inicial}}\right)^3 \times Volume_{inicial}$$
$$Volume_{atual} = Volume_{inicial} - \frac{\pi t}{4} = \frac{8\pi - 3\pi t}{12}$$
$$Altura_{atual} = Altura_{inicial} \sqrt[3]{\frac{Volume_{atual}}{Volume_{inicial}}}$$
$$h(V) = h_0 \sqrt[3]{\frac{V}{V_0}} = 2\sqrt[3]{\frac{3V}{2\pi}}$$
$$h(t) = 2\sqrt[3]{\frac{8-3t}{8}}$$

Para calcular o volume inicial basta tomar a fórmula:

$$\frac{\pi r^2 h}{3} = \frac{\pi 1^2.2}{3} = \frac{2\pi}{3}$$

O volume que queremos localizar é:

$$\frac{1}{8}.\frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{12}$$

A taxa de variação da altura em um momento é a sua derivada, então:

$$\left[2\sqrt[3]{\frac{8-3t}{8}}\right]' = -\frac{1}{4}\left(\frac{8}{8-3t}\right)^{\frac{2}{3}}$$

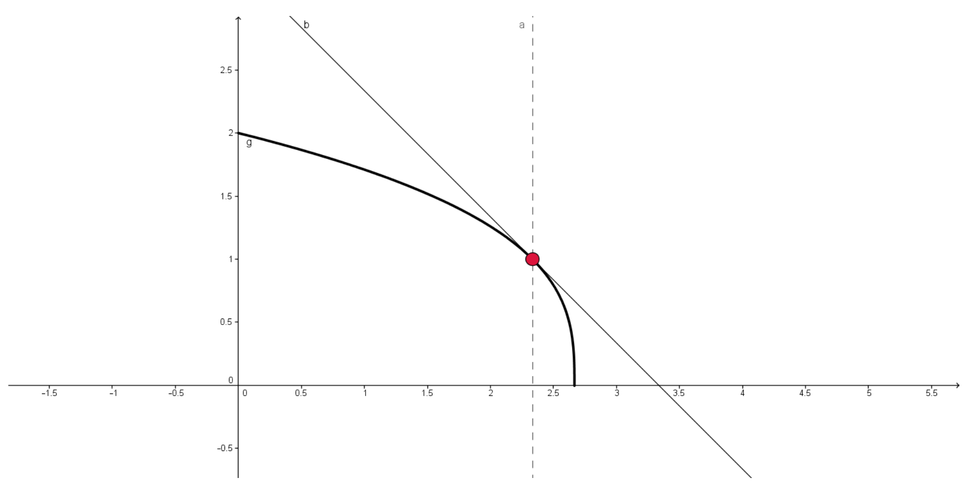
Vamos descobrir o tempo igualando na equação do volume em função do tempo:

$$\frac{\pi}{12} = \frac{8\pi - 3\pi t}{12}$$
$$t = \frac{7}{3}$$

Substituindo no ponto teremos:

$$-\frac{1}{4}\left(\frac{8}{8-3\times\frac{7}{3}}\right)^{\frac{2}{3}} = -1$$

Então a taxa de variação no instante requerido é de $-1cm/s$.



Observe que a variação é negativa, confirmando a ideia de que o nível da água reduz quando ela vai esvaziando. E observando o gráfico podemos observar ainda que ele reduz mais rapidamente quanto menor o volume restante.

3. Calcule a derivada dy/dx, onde:

(a) $y = \dfrac{x^5 + x^3 + 1}{-x^4 + x^2 + 3}$

$$\left[\frac{x^5 + x^3 + 1}{-x^4 + x^2 + 3}\right]' =$$
$$\frac{(5x^4 + 3x^2)(-x^4 + x^2 + 3) - (-4x^3 + 2x)(x^5 + x^3 + 1)}{(-x^4 + x^2 + 3)^2} =$$
$$\frac{5x^4 + 3x^2}{-x^4 + x^2 + 3} - \frac{(x^5 + x^3 + 1)(-4x^3 + 2x)}{(-x^4 + x^2 + 3)^2} =$$

(b) $y = \tan(\sqrt{x^3 + 1})$

$$\left[\tan(\sqrt{x^3 + 1})\right]' = \frac{1}{cos^2(\sqrt{x^3 + 1})} \frac{(x^3 + 1)^{-\frac{1}{2}}}{2}$$
$$\left[\tan(\sqrt{x^3 + 1})\right]' = \frac{1}{2cos^2(\sqrt{x^3 + 1})\sqrt{x^3 + 1}}$$

(c) $y = x^9 \cos^5(x)$

$$\left[x^9 \cos^5(x)\right]' = 9x^8 \cos^5(x) - 5x^9 \cos^4(x) \sin(x)$$

4. Equacione a reta tangente á curva abaixo no ponto $(0, 1)$:

$$(x + y)^4 - 7x^2 + y = 2$$

Podemos tomar y em função de x, ou seja, $y(x)$ e queremos encontrar $y(x)'$.

$$(x + y(x))^4 - 7x^2 + y(x) = 2$$
$$4\left(x + y(x)\right)^3 \left(1 + y(x)'\right) - 14x + y(x)' = 0$$
$$y(x)' = \frac{14x - 4(x + y)^3}{1 + 4(x + y)^3}$$

Substituindo no ponto $(0,1)$, onde $y(x) = 1$, temos:

$$y(x)' = -\frac{4}{5}$$

Aplicando na equação da reta e considerando que passa pelo ponto $(0,1)$:

$$y = -\frac{4}{5}x + 1$$

O problema está representado no gráfico abaixo: