Números naturais, racionais, e reais

Sebastián Urrutia, Mário S. Alvim
(Jeroen van de Graaf)

DCC - UFMG

2015/01

Definição dos números naturais

- O conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$ é $\{1, 2, 3 \ldots\}$.
- $\mathbb{N}$ pode ser definido através de dois axiomas:

  $N1$ 1 é um número natural.
  $N2$ Cada número natural tem um sucessor.

- Reescrevendo de maneira mais formal:

  $N1'$ $1 \in \mathbb{N}$
  $N2'$ $k \in \mathbb{N} \implies s(k) \in \mathbb{N}$, onde $s(\cdot)$ é a função sucessor.

- Exemplos:
  - $1 \in \mathbb{N}$, por causa de $N1$'.
  - $s(0) \in \mathbb{N}$, por causa de $N2'$. Notação: $s(1) = 2$.
  - $s(s(s(s(s(1))))) = 6 \in \mathbb{N}$.
  - Para obter-se o número natural n, aplica-se $N2'$ $n - 1$ vezes.

Números naturais na representação decimal

- $\mathit{723} = 7 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0 = 700 + 20 + 3 = 723$
- $\mathit{8007} = 8 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0$

- Exemplos:
  - $\mathit{1010} = 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 8 + 2 = 10$
  - $\mathit{110111} = 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$
  - Método rápido:

dígito binário	1	1	0	1	1	1	
equivalente decimal	32	16	8	4	2	1	
contribuição de cada dígito	32	16	0	4	2	1	55

- Operação inversa:

$$77 \xrightarrow[\mathit{resto}=1]{\mathit{div2}} 38 \xrightarrow[\mathit{resto}=0]{\mathit{div2}} 19 \xrightarrow[\mathit{resto}=1]{\mathit{div2}} 9 \xrightarrow[\mathit{resto}=1]{\mathit{div2}} 4 \xrightarrow[\mathit{resto}=0]{\mathit{div2}} 2 \xrightarrow[\mathit{resto}=0]{\mathit{div2}} 1 \xrightarrow[\mathit{resto}=1]{\mathit{div2}} 0$$

Os bits são produzidos do menos significativo para o mais significativo, portanto a representação binária é obtida invertendo-se a ordem dos bits produzidos:

$$77 = \mathit{1001101}$$

Definição de número real

- Exemplos:
  - $\pi = 3.14159265359\ldots$
  - $e = 2.71828182846\ldots$
  - $\sqrt{2} = 1.41421356237\ldots$
  - $\ln 2 = 0.6931471805\ldots$
- **Definição:** Um número **real** é uma soma infinita:

$$d_k d_{k-1} \ldots d_1 d_0 \,.\, d_{-1} d_{-2} d_{-3} \ldots = \sum_{i=-\infty}^{k} d_i 10^i$$

- Se um número real termina numa sequência infinita de 9s, substituem-se todos os 9s por 0 e incrementa-se o decimal antes do primeiro 9.
- Não se escreve uma sequência infinita de 0s:

$$0.99999999\cdots = 1.00000000\cdots = 1.$$

Esta regra faz sentido porque:

$$1 = 3 * \frac{1}{3} = 3 * 0.3333333\ldots = 0.9999999\ldots$$

- **Definição:** Um número **racional** é um numero real x tal que existam $p, q \in \mathbb{Z}$, com $q \neq 0$, tais que

$$x = \frac{p}{q}$$

- Exemplos:
  - $\frac{1}{2}$
  - $\frac{-1}{2} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$
  - $\frac{5677327569219559}{676576576329756}$

- $10/3$ é racional?
  Sim. Quociente de inteiros.
- 0.281 é racional?
  Sim. Número na notação decimal que representa $281/1000$.
- Qualquer número representado numa calculadora tradicional é racional?
  Sim. O "display" da calculadora é finito e por essa razão todos os números representados são racionais.
- $0.121212\ldots$ é racional? Sim:
  Seja $x = 0.121212\ldots$ e $100x = 12.121212\ldots$.

$$\begin{aligned} 100x - x &= 12.121212\ldots - 0.121212\ldots \\ 99x &= 12 \\ x &= 12/99 \end{aligned}$$

- **Teorema**
  Um número real x é racional sse (se, e somente se,) há periodicidade na sua representação decimal: $\exists j, k : \forall i > j : d_i = d_{i+k}$
- Exemplo: $1/5 = 0.2000000000\ldots; 1/7 = 0.142857142857\ldots$

- Exemplos:
  - $\mathit{1010} = 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 8 + 2 = 10$
  - $\mathit{0.1} = 1 \cdot 2^{-1} = 1/2$
  - $\mathit{0.01} = 1 \cdot 2^{-2} = 1/4$
  - $\mathit{0.11} = 1 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^{-2} = 3/4$
- **Definição** Um número real é uma soma infinita:

$$b_k b_{k-1} \ldots b_1 b_0 \,.\, b_{-1} b_{-2} b_{-3} \ldots = \sum_{i=-\infty}^{k} b_i 2^i$$

- **Aviso:**
  Se um real termina numa sequência infinita de 1s, substituem-se todos os *1*s por *0*s, e incrementa-se o bit antes do primeiro *1*, de *0* para *1*.
  $\mathit{0.11111111} \cdots = \mathit{1.00000000} \cdots = 1$

Definição de número racional

- **Definição:** Um número **racional** é um numero real x tal que existam $p, q \in \mathbb{Z}$, com $q \neq 0$, tais que
$$x = \frac{p}{q}$$
- **Equivalência:**
$$\frac{p}{q} \equiv \frac{r}{s} \iff ps = qr.$$
- **Representação única:**

Uma fração simplificada em que o $\mathrm{mdc}(p, q) = 1$.

- **Teorema**
  O $\sqrt{2}$ não é racional.

  Prova. Por contradição.

  Suponha o contrário do que queremos provar, ou seja, que $\sqrt{2}$ é racional. Neste caso, existem $p, q \in \mathbb{Z}$, com $mdc(p, q) = 1$, tais que $\sqrt{2} = p/q$.

  Elevando os dois lados ao quadrado, obtemos $2 = p^2/q^2$, ou seja, $p^2 = 2q^2$. Note que $2q^2$ é par, portanto pela igualdade acima p^2 também tem que ser par. Isto implica que p deve ser par.

  Agora, já que p é par, existe algum $s \in \mathbb{Z}$ tal que $p = 2s$. Isso implica que $2q^2 = p^2 = (2s)^2 = 4s^2$, o que resulta em $q^2 = 2s^2$. Note que então q^2 é par, portanto q deve ser par.

  Mas se ambos p e q são pares, isto contradiz a suposição de que o $mdc(p, q) = 1$: **encontramos uma contradição.**

  Conclusão: não existem $p, q \in \mathbb{Z}$, com $q \neq 0$ e $mdc(p, q) = 1$, tais que $\sqrt{2} = p/q$, portanto $\sqrt{2}$ não é racional.

Racionais *versus* irracionais

- Existem números irracionais, por exemplo $\sqrt{2}$.
- A soma de dois números racionais é racional (Rosen 1.6 Exemplo 7).
- A soma de um racional e um irracional é irracional (Rosen 1.6 Exercício 9).
- A soma de dois irracionais: não se sabe se $\pi + e \in \mathbb{Q}$ ou se $\pi + e \notin \mathbb{Q}$.
- Existem números irracionais x e y tal que x^y é racional (Rosen 1.7 Exemplo 11).
- Entre dois números racionais sempre existe um número irracional.
- Entre dois números irracionais sempre existe um número racional.
- *Spoiler alert!* A cardinalidade dos naturais e dos racionais é a mesma, mas a dos reais é maior. (Vamos aprofundar nisto posteriormente neste curso!)