Predicados e quantificadores

Mário S. Alvim e Sebastián Urrutia
(Jeroen van de Graaf)

DCC - UFMG

2014/02

Cálculo proposicional vs. cálculo de predicados

- Já estudamos análise de proposições compostas, i.e., proposições simples ligadas por conectivos $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$.
  - Esta área é chamada **cálculo de proposições** ou **cálculo proposicional**.

- **Cálculo de predicados**: área que trata da análise simbólica de predicados e proposições quantificadas.
  - permite tratamento de proposições relacionados a classes de objetos e propriedades de cada objeto.
  - Exemplos:

    1. *Nenhum* computador do laboratório L está ligado.
    2. *Todas* as impressoras dos laboratórios estão funcionando.
    3. *Algum* laboratório está aberto.

Definição de predicado

- **Definição**: Um **predicado** é uma sentença que contém um número finito de variáveis e que se torna uma proposição quando as variáveis são substituídas por valores específicos.
  - Intuitivamente, predicados dão qualidades a sujeitos; relacionam sujeitos entre si; ou relacionam sujeitos a objetos.
- Exemplos:
  1. **Predicado:** $P(x)$: "x é um estudante na UFMG"
     Proposição: substituindo $x = \texttt{Lula}$, obtemos $P(\texttt{Lula}) =$ F.
  2. **Predicado:** $S(x, y)$: "$x + y = 20$"
     Proposição: substituindo $x = 15; y = 5$ obtemos $S(15, 5) =$ V.
- Os valores das variáveis de predicados são definidos num determinado **domínio**. Por exemplo, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$, o todos os alunos brasileiros, as universidades brasileiras, etc.

Quantificadores $\forall$ e $\exists$

- Como transformar predicados em proposições?
  - Podemos atribuir valores específicos para todas variáveis (como feito na página anterior); ou
  - podemos usar **quantificadores.**

- **Quantificador universal**: $\forall$

$$\forall x : P(x)$$

  significa o mesmo que

  "Para todos os valores x no domínio D, $P(x)$ é verdadeiro."

- **Quantificador existencial**: $\exists$

$$\exists x : P(x)$$

  significa o mesmo que

  "Existe (pelo menos) um valor x no domínio D tal que $P(x)$ é verdadeiro."

- **Definição**: Seja $P(x)$ um predicado e D o domínio de x.

  Uma **proposição universal** é uma proposição da forma

  $$\forall x : P(x)$$

- A proposição universal é verdadeira sse $P(x)$ é verdadeiro para todo x em D:

  $$\begin{aligned} \forall x : P(x) &\equiv P(x_1) \land P(x_2) \cdots \land P(x_n) \\ &\equiv \bigwedge_{x \in D} P(x) \end{aligned}$$

- A proposição universal é falsa sse $P(x)$ é falso para pelo menos um x em D.
  - O valor de x para o qual $P(x)$ é falso é chamado de **contra-exemplo** para a proposição universal.

Proposição universal - Exemplos

1. Seja $D = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. A proposição

   $$\forall x \in D : x^2 \geq x$$

   é verdadeira ou falsa?

   Temos que

   $$1^2 \geq 1, \quad 2^2 \geq 2, \quad 3^2 \geq 3, \quad 4^2 \geq 4, \text{ e } \quad 5^2 \geq 5.$$

   Portanto a proposição $\forall x \in D : x^2 \geq x$ é verdadeira.

2. A proposição

   $$\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \geq x$$

   é verdadeira ou falsa?

   Temos o contra-exemplo

   $$(1/2)^2 = 1/4 \not\geq 1/2,$$

   e portanto a proposição é falsa.

- **Definição**: Seja $P(x)$ um predicado e D o domínio de x.

  Uma **proposição existencial** é uma proposição da forma

  $$\exists x : P(x)$$

- A proposição existencial é verdadeira sse $P(x)$ é verdadeiro para pelo menos um x em D:

  $$\begin{aligned} \exists x \in D : P(x) &\equiv P(x_1) \vee P(x_2) \cdots \vee P(x_n) \\ &\equiv \bigvee_{x \in D} P(x) \end{aligned}$$

- A proposição existencial é falsa sse $P(x)$ é falso para todo x em D.

1. A proposição $\exists m \in \mathbb{Z} : m^2 = m$ é verdadeira ou falsa?

   Temos que $1^2 = 1$, portanto $m^2 = m$ para pelo menos um inteiro m.
   Logo a proposição $\exists m \in \mathbb{Z} : m^2 = m$ é verdadeira.

2. Seja $E = \{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. A proposição $\exists m \in E : m^2 = m$ é verdadeira ou falsa?

   Analisando todos os casos, obtemos

$$\begin{array}{lll} 5^2 = 25 \neq 5, & 6^2 = 36 \neq 6, & 7^2 = 49 \neq 7, \\ 8^2 = 64 \neq 8, & 9^2 = 81 \neq 9, \text{ e} & 10^2 = 100 \neq 10. \end{array}$$

   Portanto a proposição $\exists m \in E : m^2 = m$ é falsa.

Tradução de linguagem informal para formal

- Sejam os seguintes predicados:

$$\begin{aligned} A(x): &\quad x \text{ é uma arara.} \\ M(x): &\quad x \text{ é multicor.} \\ P(x): &\quad x \text{ é pequeno.} \end{aligned}$$

- Traduzindo para linguagem formal:

  1. Nenhuma arara é pequena.
  2. Araras são multicores e grandes.
  3. Existe uma arara que não é multicolor, nem pequena.

Tradução de linguagem informal para formal

- Sejam os seguintes predicados:

$$\begin{array}{rl} A(x): & x \text{ é uma arara.} \\ M(x): & x \text{ é multicor.} \\ P(x): & x \text{ é pequeno.} \end{array}$$

- Traduzindo para linguagem formal:

  1. Nenhuma arara é pequena: $\neg\exists x : A(x) \wedge P(x)$
  2. Araras são multicores e grandes: $\forall x : A(x) \rightarrow (M(x) \wedge \neg P(x))$
  3. Existe uma arara que não é multicolor, nem pequena: $\exists x : A(x) \wedge \neg M(x) \wedge \neg P(x)$

Negação de proposições universais

- $\boxed{\text{Exemplo 1:}}$

$$\begin{array}{rl} P: & \forall \text{ primos } p : p \text{ é ímpar.} \\ \neg P: & \exists \text{ um primo } p : p \text{ não é ímpar.} \end{array}$$

- $\boxed{\text{Exemplo 2:}}$

$$\begin{array}{rl} P: & \text{Todos os programas de computador são finitos.} \\ \neg P: & \text{Alguns programas de computador não são finitos.} \end{array}$$

- $\boxed{\text{Exemplo 3:}}$

$$\begin{array}{rl} P: & \forall \text{ políticos } x : x \text{ não é honesto.} \\ \neg P: & \text{Alguns políticos são honestos.} \end{array}$$

- Exemplo 4:

P : Alguns peixes respiram ar.
$\neg P$: Nenhum peixe respira ar.

- Exemplo 5:

P : $\exists$ um triângulo T tal que a soma dos ângulos de T é igual a 200 graus.
$\neg P$: $\forall$ triângulos T, a soma dos ângulos de T não é igual a 200 graus.

- Exemplo 6:

P : Alguns hackers de computador têm mais de 40 anos.
$\neg P$: Todos os hackers de computador têm 40 anos ou menos.

Equivalências lógicas

$$\begin{aligned}
\neg\forall x : P(x) &\equiv \exists x : \neg P(x)\\
\neg\exists x : P(x) &\equiv \forall x : \neg P(x)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\forall x : P(x) &\equiv \neg\exists x : \neg P(x)\\
\exists x : P(x) &\equiv \neg\forall x : \neg P(x)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\forall x : (P(x) \wedge Q(x)) &\equiv \forall x : P(x) \wedge \forall x : Q(x))\\
\exists x : (P(x) \vee Q(x)) &\equiv \exists x : P(x) \vee \exists x : Q(x))
\end{aligned}$$

Proposição condicional universal

- Forma geral: $\forall x : P(x) \to Q(x)$
- Exemplos:
  1. $\forall x \in \mathbb{R},$ se $x > 2$ então $x^2 > 4$.
     Se um número real é maior que 2 então seu quadrado é maior que 4.
  2. Todos bytes têm oito bits.
     $\forall x$, se x é um byte, então x tem oito bits.
- As duas proposições seguintes são equivalentes.

$$\forall x : (x \in D \to P(x)) \quad \equiv \quad \forall x \in D : P(x)$$

No geral prefere-se a segunda forma.

Negação de proposições condicionais universais

- Pela definição da negação de uma proposição universal, temos:

$$\neg(\forall x : P(x) \rightarrow Q(x)) \equiv \exists x : \neg(P(x) \rightarrow Q(x))$$

Sabe-se também que a negação de uma sentença condicional pode ser decomposta numa sentença conjuntiva:

$$\neg(P(x) \rightarrow Q(x)) \equiv P(x) \wedge \neg Q(x)$$

Fazendo a substituição temos:

$$\neg(\forall x : P(x) \rightarrow Q(x)) \equiv \exists x : (P(x) \wedge \neg Q(x))$$

Negação de proposições condicionais universais

- $\boxed{\text{Exemplo 7:}}$

$P:$ $\forall$ pessoas p, se p é loura então p tem olhos azuis.

$\neg P:$ $\exists$ uma pessoa p tal que p é loura e p não tem olhos azuis.

- $\boxed{\text{Exemplo 8:}}$

$P:$ Se um programa de computador tem mais de 100.000 linhas então o programa contém um erro.

$\neg P:$ Existe pelo menos um programa de computador que tem mais de 100.000 linhas e o programa não contém um erro.

Verdade por *default* de proposições universais

- Se $P(x)$ é falso para cada x em D, então uma proposição da forma

$$\forall x \in D : P(x) \to Q(x)$$

  é verdadeira.

- Explicação: se a premisa p é falsa, a implicação $p \to q$ é verdadeira, independente de q.

  Portanto, se $P(x)$ é falsa, a implicação $P(x) \to Q(x)$ é verdadeira para todo x.

  Logo

$$\begin{aligned} \forall x \in D : (P(x) \to Q(x)) &\equiv \forall x \in D : \mathrm{V} \\ &\equiv \mathrm{V} \end{aligned}$$

- $\boxed{\text{Exemplo 9:}}$ Sejam cinco bolas azuis, cinco brancas e um prato.

Cenário 1: três bolas azuis e uma branca são colocadas no prato.

- P: Todas as bolas no prato são azuis.
- P é falso, já que é possível identificar uma bola branca no prato.

Cenário 2: nenhuma bola é colocada no prato.

- P: Todas as bolas no prato são azuis.
- P é verdadeiro ou falso?

A proposição é falsa sse sua negação for verdadeira. A negação é:

-

$\neg P$: Existe pelo menos uma bola no prato que não é azul.

- Como não existe, a negação também é falsa e, assim, a proposição é verdadeira por "default."

Proposições contendo múltiplos quantificadores

- Sejam o seguinte predicado sobre o domínio de todas as pessoas:

$$A(x, y) : \quad \text{A pessoa } x \text{ ama a pessoa } y$$

- Reescreva as sentenças abaixo formalmente usando quantificadores e variáveis:

  1. Todo mundo ama alguém: $\forall x : \exists y : A(x, y)$
  2. Alguém ama todo mundo: $\exists x : \forall y : A(x, y)$

- As sentenças acima não são equivalentes logicamente.

  Em geral, ao se trocar a ordem de quantificadores de tipo diferente, o sentido da proposição se altera!

- Sejam os seguintes predicados sobre o domínio de estudantes:

$$\begin{aligned} D(x): &\quad x \text{ sabe dirigir} \\ A(x,y): &\quad x \text{ e } y \text{ são amigos} \end{aligned}$$

- Traduzindo para linguagem formal:

  1. Todo estudante tem um amigo que não sabe dirigir:

  2. Há um estudante que não sabe dirigir e que não tem nenhum amigo que saiba:

  3. **[Difícil!]** Cada estudante tem exatamente um amigo que não sabe dirigir:

Proposições contendo múltiplos quantificadores - Exemplos

- Sejam os seguintes predicados sobre o domínio de estudantes:

$$\begin{aligned} D(x): &\quad x \text{ sabe dirigir} \\ A(x,y): &\quad x \text{ e } y \text{ são amigos} \end{aligned}$$

- Traduzindo para linguagem formal:

1. Todo estudante tem um amigo que não sabe dirigir:
   $\forall x : \exists y : (A(x,y) \land \neg D(y))$
2. Há um estudante que não sabe dirigir e que não tem nenhum amigo que saiba:
   $\exists x : (\neg D(x) \land \forall y : (A(x,y) \to \neg D(y)))$
3. **[Difícil!]** Cada estudante tem exatamente um amigo que não sabe dirigir:
   $\forall x : \exists y : (A(x,y) \land \neg D(y) \land (\forall z : A(x,z) \land \neg D(z) \to y = z))$

Negação de proposições contendo múltiplos quantificadores

- Regra geral para obter a negação: inverter os quantificadores e negar as proposições (análogo a De Morgan):

original	negação
$\forall x : P(x)$	$\exists x : \neg P(x)$
$\exists x : P(x)$	$\forall x : \neg P(x)$

onde $P(x)$ pode ser ela mesma uma proposição quantificada.

Nos exemplos abaixo, considere que $A(x, y)$ significa "A pessoa x ama a pessoa y".

- Exemplo 10:

$$\begin{array}{rll} P: & \forall x : \exists y : A(x, y) & \text{(Todo mundo ama alguém.)} \\ \neg P: & \exists x : \forall y : \neg A(x, y) & \text{(Existe alguém que não ama ninguém.)} \end{array}$$

- Exemplo 11:

$$\begin{array}{rll} P: & \exists x : \forall y : A(x, y) & \text{(Alguém ama todo mundo.)} \\ \neg P: & \forall x : \exists y : \neg A(x, y) & \text{(Ninguém ama todo mundo.)} \end{array}$$

Negação de proposições contendo múltiplos quantificadores - Exemplos

- Sejam os seguintes predicados sobre o domínio de estudantes:

$$\begin{aligned} D(x): &\quad x \text{ sabe dirigir} \\ A(x,y): &\quad x \text{ e } y \text{ são amigos} \end{aligned}$$

- Negação das proposições dos exemplos anteriores:

1. **P** : $\forall x : \exists y : (A(x,y) \land \neg D(y))$
   Afirmativa: Todo estudante tem um amigo que não sabe dirigir.
   ¬P :
   Negação:

2. **P** : $\exists x : (\neg D(x) \land \forall y : (A(x,y) \rightarrow \neg D(y)))$
   Afirmativa: Há um estudante que não sabe dirigir e que não tem nenhum amigo que saiba.
   ¬P :
   Negação:

3. **P** : $\forall x : \exists y : (A(x,y) \land \neg D(y) \land (\forall z : A(x,z) \land \neg D(z) \rightarrow y = z))$
   Afirmativa: Cada estudante tem exatamente um amigo que não sabe dirigir.
   ¬P :
   Negação:

- Sejam os seguintes predicados sobre o domínio de estudantes:

$$\begin{aligned} D(x) &: \quad x \text{ sabe dirigir} \\ A(x,y) &: \quad x \text{ e } y \text{ são amigos} \end{aligned}$$

- Negação das proposições dos exemplos anteriores:

1. **P** : $\forall x : \exists y : (A(x,y) \land \neg D(y))$
   Afirmativa: Todo estudante tem um amigo que não sabe dirigir.
   $\neg$**P** : $\exists x : \forall y : (A(x,y) \rightarrow D(y))$
   Negação: Existe um estudante cujos amigos todos sabem dirigir.

2. **P** : $\exists x : (\neg D(x) \land \forall y : (A(x,y) \rightarrow \neg D(y)))$
   Afirmativa: Há um estudante que não sabe dirigir e que não tem nenhum amigo que saiba.
   $\neg$**P** : $\forall x : (D(x) \lor \exists y : (A(x,y) \land D(y)))$
   Negação: Todo estudante sabe dirigir, ou tem um amigo que sabe.

3. **P** : $\forall x : \exists y : (A(x,y) \land \neg D(y) \land (\forall z : A(x,z) \land \neg D(z) \rightarrow y = z))$
   Afirmativa: Cada estudante tem exatamente um amigo que não sabe dirigir.
   $\neg$**P** : $\exists x : \forall y : ((A(x,y) \rightarrow D(y)) \lor (\exists z : A(x,z) \land \neg D(z) \land y \neq z))$
   Negação: Existe um estudante que não possui amigos que não dirijam ou que possui ao menos dois amigos que não dirijam.