1ª PROVA DE CÁLCULO

Prof. Viviane Ribeiro Tomaz da Silva

Parte I

Enunciados

1. (9,0 pontos) Determine:

   (a) $\lim_{x\to 0}(e^x - 1)\sin(e^{\frac{1}{x}})$

   (b) $\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2 - 5x} - \sqrt{x^2 - 3}$

   (c) as assíntotas verticais de $f(x) = \dfrac{3x^2 + 4}{x^2 - 1}$, calculando os limites correspondentes.

2. (4,0 pontos) Determine o valor de c que torna contínua a função
$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\sin(cx)}{2x}, \text{ se } x \neq 0 \\ 3, \text{ se } x = 0 \end{array} \right\}.$$

3. (9,0 pontos) Encontre a derivada de $f(x) = \dfrac{e^x x^4}{\cos x} + \ln(8 + \tan x)$.

4. (7,0 pontos) Considere a função $f(x) = \sqrt[7]{x^3 - 12x}$.

   (a) Determine todos os pontos do gráfico de f nos quais a reta tangente ao gráfico é horizontal.

   (b) Em que pontos a função f é derivável?

5. (4,0 pontos) Considere a função $f(x) = x^2 - x - 2$. Mostre que $f(x)$ possui pelo menos duas raízes reais distintas.

Parte II
Resolução

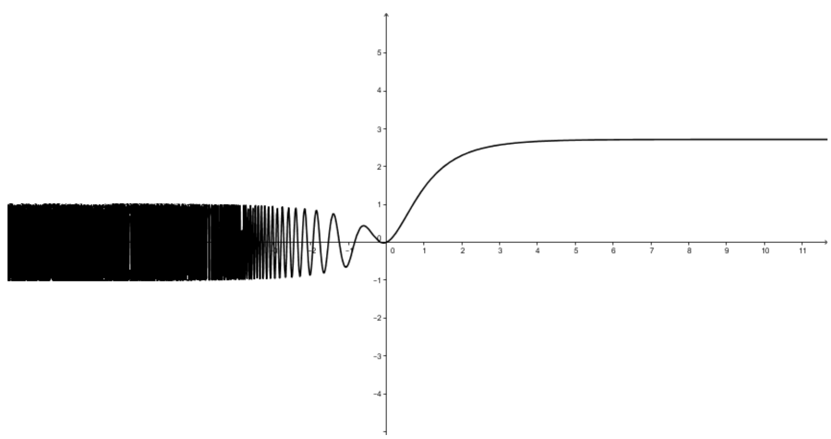
1. (9,0 pontos) Determine:

   (a) $\lim_{x\to 0}(e^x - 1)\sin(e^{\frac{1}{x}})$

   Sabemos que a função $\sin(e^{\frac{1}{x}})$ se comportará oscilando no intervalo $[-1, 1]$, mesmo que o expoente de e tenda ao infinito quando $x \to 0$ a função continuará limitada no intervalo.

   Analisando agora o trecho $(e^x - 1)$ temos que e^x é contínuo no seu domínio nos reais, e $e^0 = 1$, com isso podemos inferir que:

$$\lim_{x\to 0}(e^x - 1)(-1) \le \lim_{x\to 0}(e^x - 1)\sin(e^{\frac{1}{x}}) \le \lim_{x\to 0}(e^x - 1)(1)$$
$$0 \le \lim_{x\to 0}(e^x - 1)\sin(e^{\frac{1}{x}}) \le 0$$
$$\lim_{x\to 0}(e^x - 1)\sin(e^{\frac{1}{x}}) = 0$$



   (b) $\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2 - 5x} - \sqrt{x^2 - 3}$

   Primeiramente, vamos observar se não existem problemas no domínio da função ao tender a infinito, note que:

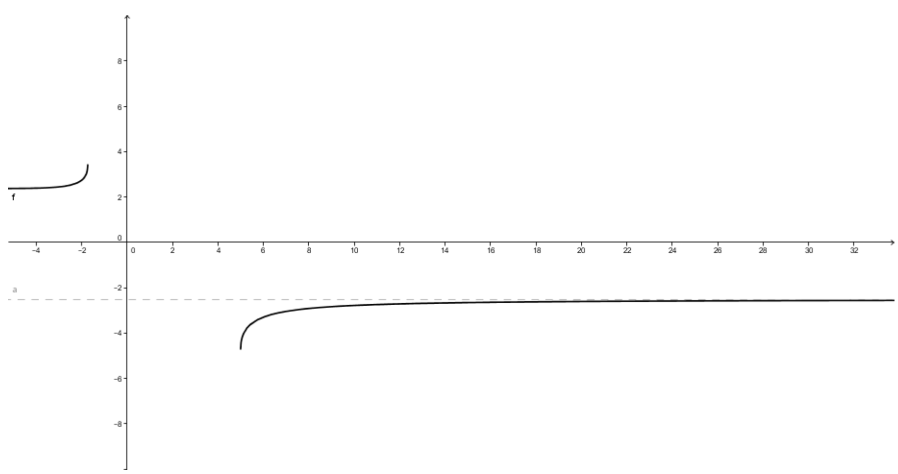
$$x^2 - 5x \geq 0 \to x \geq 5$$
$$x^2 - 3 \geq 0 \to x \geq \sqrt{3}$$

Como não infinito está além dessas restrições seguimos tentando desenvolver a expressão multiplicando pelo conjugado:

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2 - 5x} - \sqrt{x^2 - 3} =$$
$$\lim_{x\to\infty} \frac{-5x + 3}{\sqrt{x^2 - 5x} + \sqrt{x^2 - 3}} =$$
$$\lim_{x\to\infty} \frac{x\left(-5 + \frac{3}{x}\right)}{x\left(\sqrt{1 - \frac{5}{x^2}}\right) + x\left(\sqrt{1 - \frac{3}{x^2}}\right)} =$$

O x em evidência pode ser cortado, os termos múltiplos que possuem x no denominador e uma constante no numerador vão tender a zero, então temos:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(-5 + 0)}{\left(\sqrt{1 - 0}\right) + \left(\sqrt{1 - 0}\right)} = \frac{-5}{2}$$

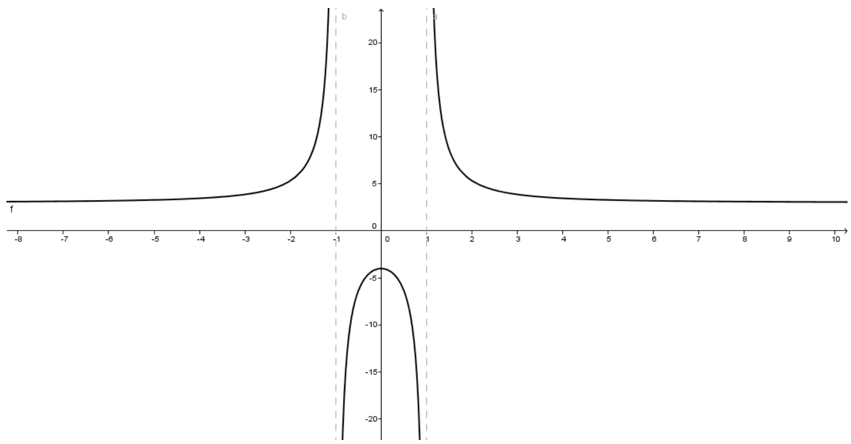


(c) as assíntotas verticais de $f(x) = \dfrac{3x^2 + 4}{x^2 - 1}$, calculando os limites correspondentes.

Assíntotas verticais surgem de divisões por zero em pontos (a) indeterminados e possuem equação na forma $x = a$. A função dada é indeterminada quando o denominador é zero, logo:

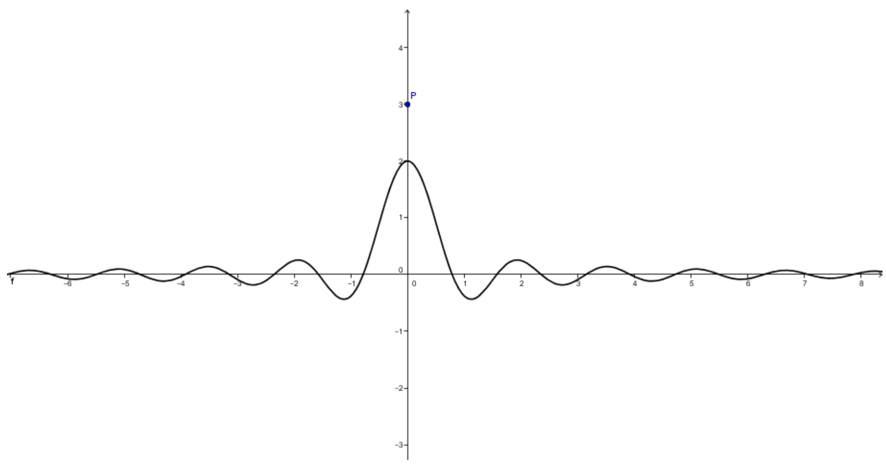
$$x^2 - 1 = 0 \rightarrow x = \pm 1$$

Vamos verificar os limites laterais (para entender o sinal basta fazer um estudo do sinal com a função do numerador e do denominador para entender o comportamento da divisão):



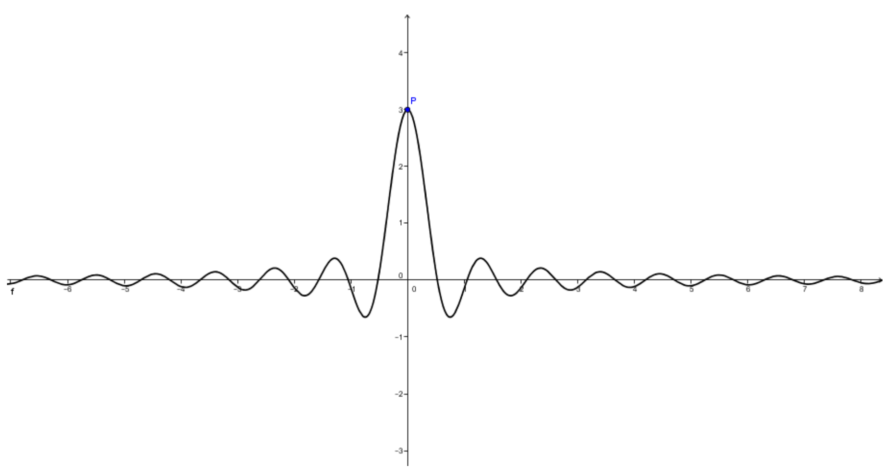
$$\lim_{x \to 1^+} \frac{3x^2+4}{x^2-1} = +\infty$$
$$\lim_{x \to 1^-} \frac{3x^2+4}{x^2-1} = -\infty$$
$$\lim_{x \to -1^+} \frac{3x^2+4}{x^2-1} = -\infty$$
$$\lim_{x \to -1^-} \frac{3x^2+4}{x^2-1} = +\infty$$

2. (4,0 pontos) Determine o valor de c que torna contínua a função
$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\sin(cx)}{2x}, \text{ se } x \neq 0 \\ 3, \text{ se } x = 0 \end{array} \right\}.$$



O objetivo desse exercício é encontrar o valor de c que faz com que a função dada "passe"pelo ponto fixo $(0, 3)$ tornando a função contínua. Logo:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(cx)}{2x} = 3$$
$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(cx)}{6x} = 1$$



Sabemos que:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

Então $c = 6$.

3. (9,0 pontos) Encontre a derivada de $f(x) = \dfrac{e^x x^4}{\cos x} + \ln(8 + \tan x)$.

   Enumerando as regras utilizadas:

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$$
$$[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$
$$[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x)$$
$$[fog]' = f'(g(x))g'(x)$$

$$\left[\frac{e^x x^4}{\cos x}\right]' = \frac{(e^x x^4 + 4e^x x^3)\cos x + (\sin x)(e^x x^4)}{\cos^2 x}$$
$$[ln(8 + \tan x)]' = \frac{\sec^2 x}{8 + \tan x}$$

$$f'(x) = \frac{(e^x x^4 + 4e^x x^3)\cos x + (\sin x)(e^x x^4)}{\cos^2 x} + \frac{\sec^2 x}{8 + \tan x}$$

4. (7,0 pontos) Considere a função $f(x) = \sqrt[7]{x^3 - 12x}$.

   (a) Determine todos os pontos do gráfico de f nos quais a reta tangente ao gráfico é horizontal.

   Uma reta é horizontal quando seu coeficiente angular é nulo, como a derivada é o coeficiente angular da reta em um ponto temos que derivar e igualar a zero:

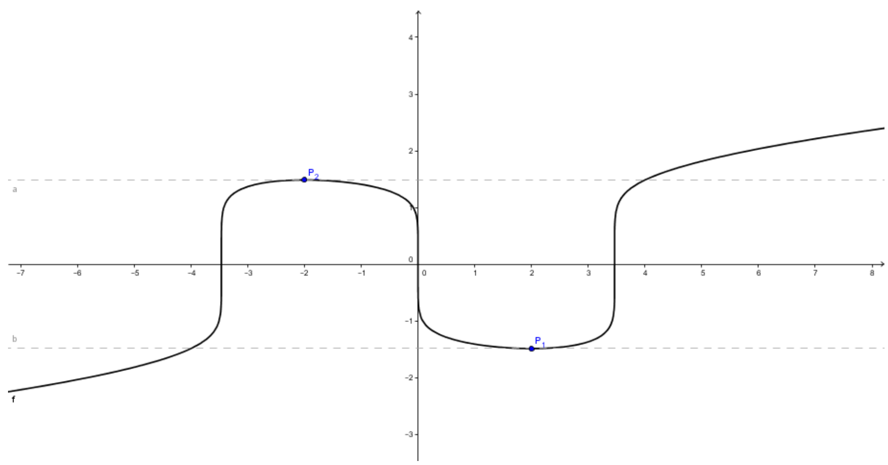
$$f(x) = \left[\sqrt[7]{x}\right]' = \frac{1}{7}x^{\frac{-6}{7}}$$
$$g(x) = \left[x^3 - 12x\right]' = 3x^2 - 12$$
$$[fog]' = f'(g(x))g'(x)$$
$$\left[\sqrt[7]{x^3 - 12x}\right]' = \frac{1}{7}(x^3 - 12x)^{\frac{-6}{7}}(3x^2 - 12)$$

$$\frac{3x^2 - 12}{7(x^3 - 12x)^{\frac{6}{7}}} = 0$$
$$3x^2 - 12 = 0$$
$$x = \pm 2$$

É importante, também, que o denominador não seja zerado pelos valores obtidos, observe:

$$7((2)^3 - 12(2))^{\frac{6}{7}} \neq 0$$
$$7((-2)^3 - 12(-2))^{\frac{6}{7}} \neq 0$$

Note que $x^3 - 12x$ pode ser menor que zero, já que zerá elevado a $\frac{6}{7}$ que admite valores positivos ou negativos. Para obter os pontos basta substituir ± 2 para obter:



$$P_1 = (2, \sqrt[7]{-16})$$
$$P_2 = (-2, \sqrt[7]{16})$$

(b) Em que pontos a função f é derivável?

A função f só não é derivável nos pontos onde o denominador é zero, ou seja:

$$7(x^3 - 12x)^{\frac{6}{7}} = 0$$
$$x^3 - 12x = 0$$
$$x = 0, x = \sqrt{12}, x = -\sqrt{12}$$

Logo f é derivável em $\mathbb{R}/x \neq 0, x \neq \sqrt{12}, x \neq -\sqrt{12}$

5. (4,0 pontos) Considere a função $f(x) = x^2 - x - 2$. Mostre que $f(x)$ possui pelo menos duas raízes reais distintas.

   Como f é uma função polinomial é contínua.

   Basta tomar $f(-2) = 4$, $f(0) = -2$ e $f(3) = 4$, pelo teorema do valor intermediário podemos dizer que entre $f(-2)$ e $f(0)$ há uma raiz, pois entre dois pontos de sinais opostos na imagem, sendo a função f contínua deve haver uma raiz no intervalo. Da mesma forma afirmamos que há uma raiz entre $f(0)$ e $f(3)$. Logo $f(x) = x^2 - x - 2$ possui duas raízes reais distintas, já que os intervalos $(-2, 0)$ e $(0, 3)$ não se interceptam.