2^{a} PROVA DE CÁLCULO

Prof. Renato Vidal da Silva Martins

Parte I

Enunciados

1. Calcule os limites:

   (a) (4 pontos) $\lim_{x \to 0} x^2 cossec(3x)$

   (b) (4 pontos) $\lim_{x \to 0^+} (\sin(x))^x$

2. (8 pontos) Um cone de $1cm$ de raio, $2cm$ de altura está cheio de água. Fazendo um furo no bico, começa a vazar a uma taxa de $\pi/4\ cm^3/s$. Calcule a taxa de variação do nível de água no instante em que $7/8$ do volume já vazou.
   Volume do cone: $\dfrac{\pi r^2 h}{3}$

3. (9 pontos) Esboce o gráfico da função

$$f(x) = -xe^x$$

   determinando: domínio, interceptos com os eixos coordenados, análise de sinal da função, limites pertinentes, crescimento e decrescimento, concavidade.

4. (8 pontos) As margens superior e inferior de um cartaz retangular devem medir $6cm$ cada e as margens esquerda e direita devem pedir $4cm$ cada. O texto deve ocupar uma área de $384cm^2$. Encontre as dimensões do cartaz de menor área que satisfaça os requisitos acima.

Parte II

Resolução

1. Calcule os limites:

   (a) (4 pontos) $\lim\limits_{x\to 0} x^2 cossec(3x)$
   Notamos uma indeterminação do tipo $0.\infty$, então prosseguimos tentando melhorar a expressão:

$$\lim_{x\to 0} x^2 cossec(3x) =$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\sin(3x)} =$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{3}{3}.\frac{x^2}{\sin(3x)} =$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{3x^2}{3\sin(3x)} =$$
$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{3\sin(3x)}{3x^2}\right)^{-1} =$$
$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{3}{x}\right)^{-1} =$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{3} = 0$$

   (b) (4 pontos) $\lim\limits_{x\to 0^+} (\sin(x))^x$
   Como sabemos que estamos tentando a zero pelo lado positivo podemos dizer que k^x tende a 1, como o seno é uma função limitada entre -1 e 1 podemos dizer que:

$$\lim_{x\to 0^+} (-1)^x \leq \lim_{x\to 0^+} (\sin(x))^x \leq \lim_{x\to 0^+} (1)^x$$
$$1 \leq \lim_{x\to 0^+} (\sin(x))^x \leq 1$$
$$\lim_{x\to 0^+} (\sin(x))^x = 1$$

2. (8 pontos) Um cone de $1cm$ de raio, $2cm$ de altura está cheio de água. Fazendo um furo no bico, começa a vazar a uma taxa de $\pi/4\ cm^3/s$. Calcule a taxa de variação do nível de água no instante em que $7/8$ do volume já vazou.

Volume do cone: $\dfrac{\pi r^2 h}{3}$

O exercício pede a taxa de variação do nível da água no instante em que restam $1/8$ do conteúdo original, para tanto é preciso escrever a função que fornece a altura em função do volume dado.
Observando a formula do volume e tendo em mente semelhança de triângulos podemos notar que quando a altura é reduzida a uma porcentagem x o volume todo é reduzido a uma porcentagem x^3 do original. Ou seja:

$$Volume_{atual} = \left(\frac{Altura_{atual}}{Altura_{inicial}}\right)^3 \times Volume_{inicial}$$
$$Volume_{atual} = Volume_{inicial} - \frac{\pi t}{4} = \frac{8\pi - 3\pi t}{12}$$
$$Altura_{atual} = Altura_{inicial}\sqrt[3]{\frac{Volume_{atual}}{Volume_{inicial}}}$$
$$h(V) = h_0\sqrt[3]{\frac{V}{V_0}} = 2\sqrt[3]{\frac{3V}{2\pi}}$$
$$h(t) = 2\sqrt[3]{\frac{8-3t}{8}}$$

Para calcular o volume inicial basta tomar a fórmula:

$$\frac{\pi r^2 h}{3} = \frac{\pi 1^2.2}{3} = \frac{2\pi}{3}$$

O volume que queremos localizar é:

$$\frac{1}{8}.\frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{12}$$

A taxa de variação da altura em um momento é a sua derivada, então:

$$\left[2\sqrt[3]{\frac{8-3t}{8}}\right]' = -\frac{1}{4}\left(\frac{8}{8-3t}\right)^{\frac{2}{3}}$$

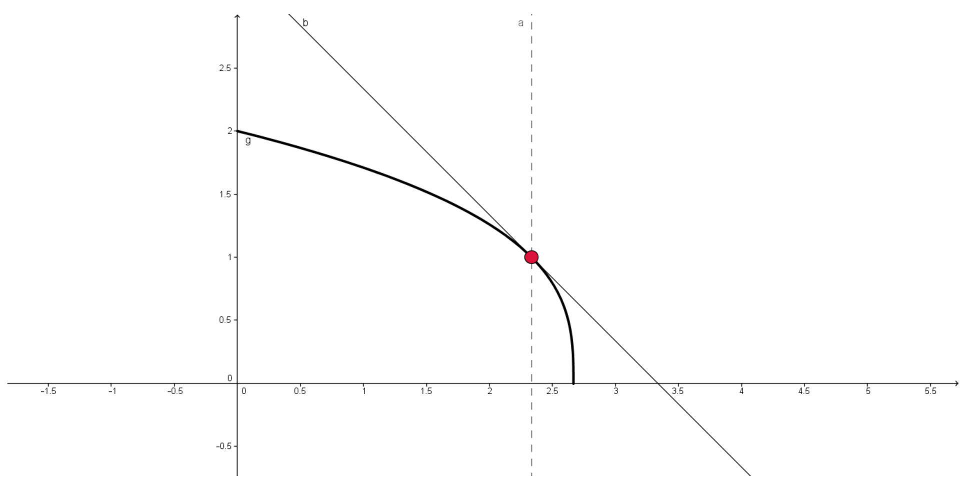
Vamos descobrir o tempo igualando na equação do volume em função do tempo:

$$\frac{\pi}{12} = \frac{8\pi - 3\pi t}{12}$$
$$t = \frac{7}{3}$$

Substituindo no ponto teremos:

$$-\frac{1}{4}\left(\frac{8}{8 - 3 \times \frac{7}{3}}\right)^{\frac{2}{3}} = -1$$

Então a taxa de variação no instante requerido é de $-1cm/s$.



Observe que a variação é negativa, confirmando a ideia de que o nível da água reduz quando ela vai esvaziando. E observando o gráfico podemos observar ainda que ele reduz mais rapidamente quanto menor o volume restante.

3. (9 pontos) Esboce o gráfico da função

$$f(x) = -xe^x$$

determinando: domínio, interceptos com os eixos coordenados, análise de sinal da função, limites pertinentes, crescimento e decrescimento, concavidade.

Analisando o domínio das duas funções separadamente percebemos que ambas são válidas no domínio dos reais, já que $-x$ e e^x são válidos para qualquer x.
Os interceptos com os eixos acontecem quando $x = 0$ ou $y = 0$, então basta calcular:

$$y = -xe^x$$
$$0 = -xe^x \rightarrow x = 0 \rightarrow P_1(0,0)$$
$$y = -0.e^0 \rightarrow y = 0 \rightarrow P_2(0,0)$$

Notamos que só existem interceptos com os eixos na origem.
Analisando o sinal de e^x percebemos que ele sempre será positivo, logo o sinal da função $-xe^x$ é determinado pelo valor de x. Quando x é positivo então a função tem sinal negativo e quando x é negativo a função tem sinal positivo.
Vamos analisar $-xe^x$ para $x < 0$. Tomando x = |x|, podemos escrever $\frac{x}{e^x}$, já para $x > 0$ a tomando x = |x| temos $-xe^x$. Note que no $x < 0$ a função possui um limite que é zero, já com $x > 0$ não existem limites pertinentes.
Para encontrar os pontos de crescimento e decrescimento precisamos encontrar a primeira derivada:

$$[-xe^x]' = -e^x - xe^x$$

Quando ela for maior que zero haverá crescimento, quando for menor que zero decrescimento, então:

$$-e^x - xe^x > 0 \rightarrow x < -1$$
$$-e^x - xe^x > 0 \rightarrow x > -1$$

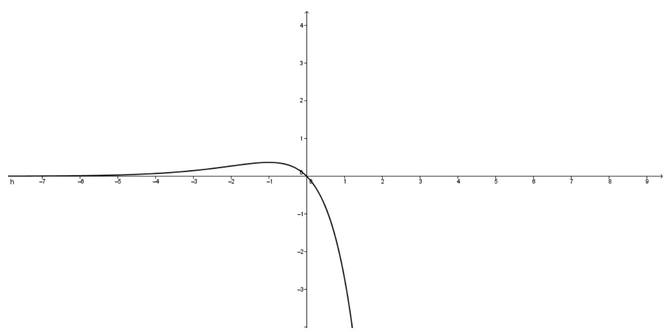
Ou seja, ela é crescente para $x < -1$, decrescente para $x > -1$, e seu ponto de inflexão está localizado em $x = -1$.
Para obter a concavidade precisamos da segunda derivada:

$$[-xe^x]'' = [-e^x - xe^x]' = -2e^x - xe^x$$

Quando a segunda derivada é positiva a concavidade é para cima, quando é negativa a concavidade é para baixo, logo:

$$\begin{gathered} -2e^x - xe^x > 0 \rightarrow x < -2 \\ -2e^x - xe^x > 0 \rightarrow x > -2 \end{gathered}$$

A função é concava para cima com $x < -2$ e para baixo com $x > -2$. Com esses dados podemos finalmente desenhar o gráfico da função como abaixo.



4. (8 pontos) As margens superior e inferior de um cartaz retangular devem medir $6cm$ cada e as margens esquerda e direita devem pedir $4cm$ cada. O texto deve ocupar uma área de $384cm^2$. Encontre as dimensões do cartaz de menor área que satisfaça os requisitos acima.

   Vamos considerar que a área total é xy, então $(x - 12)(y - 8) = 384$, desenvolvendo:

$$\begin{gathered} (x-12)(y-8) = 384 \\ y = \frac{8x + 288}{x - 12} \end{gathered}$$

   A área é, portanto:

$$A(x) = x\frac{8x + 288}{x - 12}$$

Para obter a menor área temos que encontrar os pontos de máximo e mínimo, ou seja, quando a primeira derivada se iguala a zero:

$$\left[x\frac{8x+288}{x-12}\right]' = \frac{(16x+288)(x-12)-(1)(8x^2+288x)}{(x-12)^2}$$
$$\frac{(16x+288)(x-12)-(1)(8x^2+288x)}{(x-12)^2} = 0 \rightarrow x = 36 \text{ ou } x = -12$$

Como -12 não é um valor válido para comprimento vamos considerar $x = 36$, calculando temos $y = 24$, então o cartaz possui dimensões $24x36$.