DCC/ICEx/UFMG - 1o. semestre de 2015
Disciplina: Matemática Discreta - Turmas TZ1 e TZ2
Professores: Mário S. Alvim e Sebastián Urrutia

LISTA DE EXERCÍCIOS 02

Assunto: Lógica, equivalência proposicional, predicados.
Data de entrega: 07/abril/2015

Observação. Os exercícios estão classificados em níveis de dificuldade: fácil, médio e difícil. Esta classificação, entretanto, é apenas indicativa. Pessoas diferentes podem discordar sobre o nível de dificuldade de um mesmo exercício. Não desanime ao ver um exercício difícil, você pode descobrir que ele é fácil, encontrando uma maneira de resolvê-lo mais simples do que a do professor!

1. `[Médio]` (Rosen 1.1.10) Sejam p, q e r as seguintes proposições:

   p : Você tira A na prova final.
   q : Você faz todos exercícios do livro.
   r : Você tira A em Matemática Discreta.

   Escreva as seguintes proposições utilizando p, q, r e conectivos lógicos.

   (a) Você tira A em Mat. Discreta, mas não faz todos os exercícios do livro.
   (b) Você tira A na prova final, faz todos exercícios do livro e tira A em Mat. Discreta.
   (c) Para tirar A em Mat. Discreta, é *necessário* que você tire A na prova final.
   (d) Você tira A na prova final, mas não faz todos os exercícios do livro; mesmo assim você tira A em Mat. Discreta.
   (e) Tirar um A na prova final e fazer todos os exercícios é *suficiente* para tirar A em Mat. Discreta.
   (f) Você irá tirar A em Mat. Discreta se, e somente se, ou você fizer todos os exercícios ou tirar A na prova final.

2. `[Fácil]` (Rosen 1.2.13) Utilize tabelas verdade para verificar a lei de absorção.

   (a) $p \vee (p \wedge q) \equiv p$
   (b) $p \wedge (p \vee q) \equiv p$

3. Prove as seguintes através da manipulação de conectivos lógicos. (Ou seja, não utilize tabelas da verdade, mas sim os axiomas de equivalência dados em sala de aula.)

   (a) `[Médio]` (Rosen 1.2.20) $\neg(p \oplus q)$ e $p \leftrightarrow q$.
   (b) `[Fácil]` (Rosen 1.2.24) $(p \to q) \vee (p \to r)$ e $p \to (q \vee r)$.
   (c) `[Fácil]` (Rosen 1.2.25) $(p \to r) \vee (q \to r)$ e $(p \wedge q) \to r$.

4. `[Difícil]` (Rosen 1.2.29) Mostre que $(p \to q) \wedge (q \to r) \to (p \to r)$ é uma tautologia.
   Obs: Nesta questão, você achou mais fácil utilizar a tabela da verdade ou a manipulação de conectivos lógicos?

5. `[Difícil]` (Rosen 1.2.42) Suponha que uma tabela verdade em n variáveis proposicionais seja dada. Mostre que uma proposição composta desta tabela verdade pode ser formada tomando a disjunção das conjunções de variáveis ou suas negações, onde uma uma conjunção é incluída para cada combinação de valores para os quais a proposição composta assume o valor verdade. A proposição composta obtida é dita estar na **forma normal disjuntiva**.

6. `[Médio]` (Rosen 1.2.43) Uma coleção de operadores lógicos é chamado **funcionalmente completa** se toda proposição composta é logicamente equivalente a uma proposição composta envolvendo apenas estes operadores. Mostre que $\neg$, $\vee$ e $\wedge$ formam uma coleção de operadores funcionalmente completo. (Dica: use o fato que toda proposição composta é logicamente equivalente a uma outra proposição na forma normal disjuntiva.)