CVaR

Guilherme Machado

Janeiro 2019

1 Definição

1.1 VaR

Com respeito a um determinado nível de probabilidade θ, o VaR_θ de uma variável aleatória x é o menor valor de x tal que, com probabilidade θ, x não excede o VaR.

Ele é calculado da seguinte maneira:

$$VaR_\theta(x) = \begin{array}{ll} \min\limits_z & z \\ \text{s.a.} & F_x(z) \geq \theta \end{array} = F_x^{-1}(1-\theta)$$

1.1.1 $CVaR_\theta$

O $CVaR_\theta$ é o valor esperado condicional de x acima de VaR_θ. No caso contínuo, ele é o valor médio dos θ (onde θ é uma porcentagem) piores cenários que pode ser escrito como:

$$CVaR_\theta(x) = \mathbb{E}[X|X \geq VaR_\alpha(x)]$$

De modo que:

$$CVaR_\theta(x) = \frac{1}{1-\theta}\int_{x \geq VaR_\theta} xp(x)dx$$

1.1.2 Formulação do CVaR como um problema de otimização

Primeiro, definiremos uma função $G(x,\alpha)$ tal que:

$$G_\theta(x,\alpha) = \alpha + \frac{1}{1-\theta}\int_{-\infty}^{\infty}[x-\alpha]^+ p(x)dx$$

Onde $[x-\alpha]^+$ possui o valor de $x-\alpha$ quando $x-\alpha > 0$ e 0 caso contrário. O mínimo dessa função esta no ponto:

$$\frac{\partial G_\theta(x,\alpha)}{\partial \alpha} = 0$$

Mas,

$$\frac{\partial G_\theta(x,\alpha)}{\partial \alpha} = 1 + \frac{1}{1-\theta}[F_x(\alpha) - 1]$$

$$\frac{\partial G_\theta(x,\alpha)}{\partial \alpha} = \frac{1}{1-\theta}[F_x(\alpha) - \theta]$$

E o valor mínimo dessa função sera em:

$$F_x(\alpha) = \theta$$

O que equivale a dizer que:

$$\alpha = F_x^{-1}(\theta)$$

Que e a definição de VaR_θ. Portanto, temos que:

$$\min_\alpha G_\theta(x,\alpha) = VaR_\theta + \frac{1}{1-\theta}\int_{-\infty}^{\infty}[x - VaR_\theta]^+ p(x)dx$$

$$\min_\alpha G_\theta(x,\alpha) = VaR_\theta + \frac{1}{1-\theta}\int_{x \geq VaR_\theta}[x - VaR_\theta]p(x)dx$$

$$\min_\alpha G_\theta(x,\alpha) = VaR_\theta + \frac{1}{1-\theta}\int_{x \geq VaR_\theta} xp(x)dx - \frac{1}{1-\theta}VaR_\theta \int_{x \geq VaR_\theta} p(x)dx$$

$$\min_\alpha G_\theta(x,\alpha) = VaR_\theta + \frac{1}{1-\theta}\int_{x \geq VaR_\theta} xp(x)dx - \frac{1}{1-\theta}VaR_\theta(1-\theta)$$

$$\min_\alpha G_\theta(x,\alpha) = \frac{1}{1-\theta}\int_{x \geq VaR_\theta} xp(x)dx$$

$$\min_\alpha G_\theta(x,\alpha) = CVaR_\theta$$

Logo, obtemos o $CVaR_\theta$ ao resolver o seguinte problema de otimização(e discretizarmos o valor esperado):

$$CVaR_\theta(x) = \begin{array}{ll} \displaystyle\min_{\alpha,\delta_s} & \displaystyle\alpha + \sum_s p_s \frac{\delta_s}{1-\theta} \\ \text{s.a.} & \delta_s \geq x_s - \alpha \\ & \delta_s \geq 0 \end{array}$$