Finanças Quantitativas

Lista de exercícios 3

Lucas Emanuel Resck Domingues

Maio de 2020

Problema 3.11 [1]

1. Valor esperado de $|X|$:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[|X|\right] &= \int_{-\infty}^{\infty} |x| f_X(x) dx \\
&= \int_{-\infty}^{0} |x| f_X(x) dx + \int_{0}^{\infty} |x| f_X(x) dx \\
&= \int_{-\infty}^{0} -x f_X(x) dx + \int_{0}^{\infty} x f_X(x) dx \\
&= \int_{\infty}^{0} -x f_X(-x) dx + \int_{0}^{\infty} x f_X(x) dx \quad \text{(troca de variável)} \\
&= 2 \int_{0}^{\infty} x f_X(x) dx \\
&= 2 \int_{0}^{\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{1}{2}x^2} dx \\
&= \frac{2}{\sqrt{2\pi}}
\end{aligned}
$$

2. Calculemos o valor esperado de Y:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[Y] &= \frac{1}{\sqrt{1 - 2/\pi}} \left(\mathbb{E}\left[|X|\right] - \sqrt{2/\pi} \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{1 - 2/\pi}} \left(\frac{2}{\sqrt{2\pi}} - \sqrt{2/\pi} \right) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Calculemos agora a variância de Y:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Var}[Y] &= \frac{1}{1-2/\pi}\mathrm{Var}[|X|] \\
&= \frac{1}{1-2/\pi}\left\{\mathbb{E}\left[|X|^2\right] - \mathbb{E}\left[|X|\right]^2\right\} \\
&= \frac{1}{1-2/\pi}\left\{\mathbb{E}\left[X^2\right] - \frac{2}{\pi}\right\} \\
&= \frac{1}{1-2/\pi}\left\{\mathrm{Var}[X] + \mathbb{E}[X]^2 - \frac{2}{\pi}\right\} \\
&= \frac{1}{1-2/\pi}\left(1 - \frac{2}{\pi}\right) \\
&= 1
\end{aligned}
$$

Calculemos agora a correlação entre X e Y:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Corr}[X,Y] &= \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] \\
&= \mathbb{E}[XY] \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-2/\pi}}\mathbb{E}\left[X|X|\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-2/\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} x|x| f_X(x)dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-2/\pi}}\left(\int_0^{\infty} x^2 f_X(x) - \int_0^{\infty} x^2 f_X(x)dx\right) \qquad \text{(como no exercício anterior)} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Portanto X e Y são não correlacionadas.

Problema 3.12 [1]

1. Sabemos que X e Y são contínuas. Seja $\mathbf{Z} = (X,Y)$. Portanto, vale

$$
C(u_1,u_2) = F_{\mathbf{Z}}\left(F_X^{-1}(u_1), F_Y^{-1}(u_2)\right)
$$

pela definição de cópula. Segue que:

$$
\begin{aligned}
C(F_X(t),F_Y(t)) &= F_{\mathbf{Z}}\left(F_X^{-1}(F_X(t)), F_Y^{-1}(F_Y(t))\right) \\
&= F_{\mathbf{Z}}(t,t) \\
&= \mathbb{P}\{X \le t, Y \le t\} \\
&= \mathbb{P}\{\max(X,Y) \le t\}
\end{aligned}
$$

2.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{\min(X,Y) \leq t\} &= \mathbb{P}\{(X \leq t) \vee (Y \leq t)\} \\ &= \mathbb{P}\{X \leq t\} + \mathbb{P}\{Y \leq t\} - \mathbb{P}\{X \leq t, Y \leq t\} \\ &= F_X(t) + F_Y(t) - C(F_X(t), F_Y(t))\end{aligned}$$

Problema 1

(a) Sabemos que $X = (X_1, X_2) \sim N_d(\mu, \Sigma)$, ou seja,

$$(X_{1,1}, \cdots, X_{1,p}, X_{2,1}, \cdots, X_{2,q}) \sim N_d\left((\mu_{1,1}, \cdots, \mu_{2,q}), \begin{bmatrix}\Sigma_{1,1} & \Sigma_{1,2} \\ \Sigma_{2,1} & \Sigma_{2,2}\end{bmatrix}\right)$$

Então cada $X_{1,i}$, pela definição de normal multivariada, é uma normal univariada $N(\mu_i, \Sigma_{i,i})$, sendo $\Sigma_{i,i}$ o elemento i, i da matriz Σ. Ora, então $X_1 = (X_{1,1}, \cdots, X_{1,p})$ é uma normal multivariada com vetor de médias μ_1 e matriz de covariâncias dada por $\Sigma_{1,1}$, como queríamos mostrar.

(b)

$$\begin{aligned}f_{X_1|X_2}(x_1 \mid X_2 = x_2) &= \frac{f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)}{f_{X_2}(x_2)} \\ &= \frac{\dfrac{\exp\left\{\begin{bmatrix}x_1-\mu_1 \\ x_2-\mu_2\end{bmatrix}^T \begin{bmatrix}\Sigma_{1,1} & \Sigma_{1,2} \\ \Sigma_{2,1} & \Sigma_{2,2}\end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix}x_1-\mu_1 \\ x_2-\mu_2\end{bmatrix}\right\}}{\sqrt{(2\pi)^d \det(\Sigma)}}}{\dfrac{\exp\left\{(x_2-\mu_2)^T \Sigma_{2,2}^{-1}(x_2-\mu_2)\right\}}{\sqrt{(2\pi)^q \det(\Sigma_{2,2})}}} \\ &\vdots \\ &= \frac{\exp\left\{(x_1-\mu_{1|2})^T \Sigma_{1|2}^{-1}(x_1-\mu_{1|2})\right\}}{\sqrt{(2\pi)^p \det(\Sigma_{1|2})}}\end{aligned}$$

Então $X_1 \mid X_2 = x_2 \sim N_p\left(\mu_{1|2}, \Sigma_{1|2}\right)$.

Problema 2

(a)

$$\begin{aligned}F_{X,Y}(x,y) &= C\left(F_X(x), F_Y(y)\right) \\ &= \exp\left\{-\left[(-\ln(1-e^{-rx}))^\theta + \left(-\ln\left(1-\left(1+\frac{y}{\alpha}\right)^{-\alpha}\right)\right)^\theta\right]^{1/\theta}\right\}\end{aligned}$$

(b) Se $\theta = 1$:

$$
\begin{aligned}
F_{X,Y}(x,y) &= \exp\left\{\ln(1-e^{-rx}) + \ln\left(1-\left(1+\frac{y}{\alpha}\right)^{-\alpha}\right)\right\} \\
&= (1-e^{-rx})\left(1-\left(1+\frac{y}{\alpha}\right)^{-\alpha}\right) \\
&= F_X(x)F_Y(y)
\end{aligned}
$$

Logo:

$$
\begin{aligned}
f_{X,Y}(x,y) &= \frac{\partial^2 F_{X,Y}(x,y)}{\partial x \partial y} \\
&= f_X(x) f_Y(y)
\end{aligned}
$$

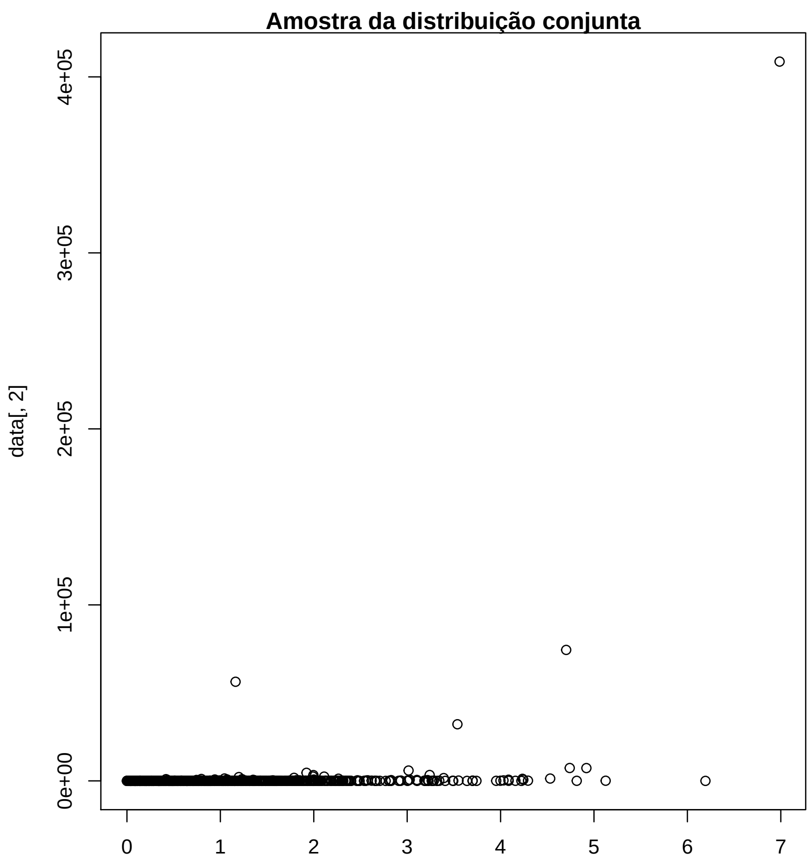
Concluímos que as duas variáveis aleatórias são independentes.
Caso $\theta \to \infty$, pela convergência de $\sqrt[\theta]{x^\theta + y^\theta}$:

$$
\begin{aligned}
F(x,y) &= \lim_{\theta \to \infty} F_{X,Y}(x,y) \\
&= \exp\left\{-\max\left\{-\ln(1-e^{-rx}), -\ln\left(1-\left(1+\frac{y}{\alpha}\right)^{-\alpha}\right)\right\}\right\} \\
&= \exp\left\{\min\left\{\ln(1-e^{-rx}), \ln\left(1-\left(1+\frac{y}{\alpha}\right)^{-\alpha}\right)\right\}\right\} \\
&= \exp\left\{\min\left\{\ln F_X(x), \ln F_Y(y)\right\}\right\}
\end{aligned}
$$

Fixado x tal que $F_X(x) \in (0,1)$. Pode-se escolher um intervalo aberto para y de forma que $F_Y(y) < F_X(x)$ nesse intervalo. Ou seja, $\ln F_Y(y) < \ln F_X(x)$ e $F(x,y) = F_Y(y)$, então $f_{X|Y}(x \mid y) = 0$. Porém, para todo $x > 0$, $f_X(x) \neq 0$, de modo que não vale $f_X(x) = f_{X|Y}(x \mid y)$ para todo $x > 0$. Ou seja, X e Y não são independentes.

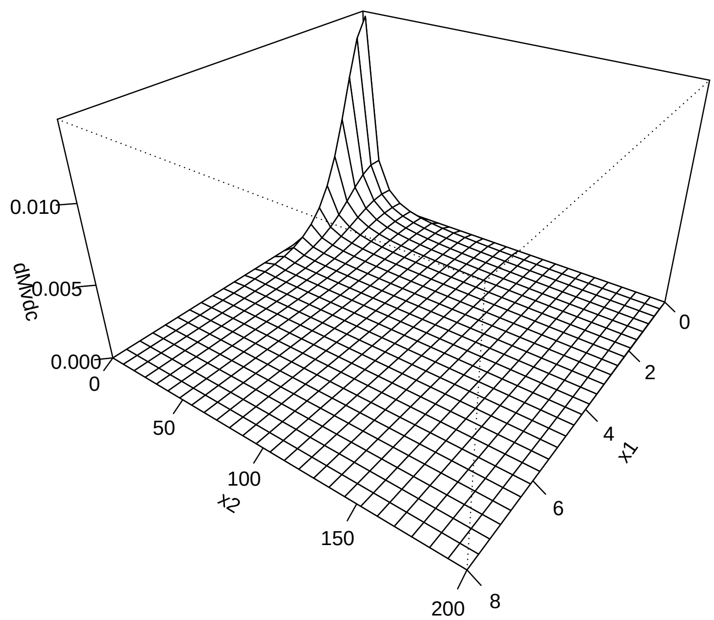
(c)
```r
suppressMessages(library(copula))

# Pacote com a dist. de Pareto
suppressMessages(if(require(EnvStats) == 0) {
  install.packages("EnvStats")
})
suppressMessages(library(EnvStats))
```

```
par(mar=c(2,4,1,2))
# Cópula com marginais exponencial e Pareto
multivar_dist = mvdc(copula = gumbelCopula(1.5),
                     margins = c("exp", "pareto"),
                     paramMargins = list(list(rate = 1),
                                         list(location = 1,
                                              shape = 0.5)))
# Geração de amostra da distribuição multivariada
data = rMvdc(n = 1000, mvdc = multivar_dist)
plot(data[, 1], data[, 2],
     main="Amostra da distribuição conjunta")
```




```
persp(multivar_dist, dMvdc, xlim=c(0,8), ylim=c(0,200),
      main="PDF conjunta", theta=40*pi)
```

PDF conjunta



Referências

[1] Carmona René. *Statistical analysis of financial data in R*. Springer, 2014.