Finanças Quantitativas

Lista de exercícios 2

Lucas Emanuel Resck Domingues

Abril de 2020

Referência: Carmona, René. Statistical analysis of financial data in R, 2013.

Mean excess function como função linear em ℓ

Conhecemos a expressão para a distribuição dos excessos, que sabemos ser uma GPD.

$$F_\ell(x) = 1 - \left[\frac{1 + \xi(x + \ell - m)/\lambda}{1 + \xi(\ell - m)/\lambda}\right]^{-1/\xi}$$

Então podemos calcular sua média:

$$\begin{aligned} E(X - \ell \mid X > \ell) &= \int_0^\infty (1 - F_\ell(x))dx \\ &= \int_0^\infty \left[\frac{1 + \xi(x + \ell - m)/\lambda}{1 + \xi(\ell - m)/\lambda}\right]^{-1/\xi} dx \\ &= \frac{\xi}{1-\xi}\ell + \frac{\lambda}{1-\xi} \end{aligned}$$

A *mean excess function* é linear em ℓ.

Problema 2.2

1. (a) Sabemos a fórmula para uma GPD, que segue com $m = 0$ e $\lambda = 1$:

$$F_{0,1,\xi}(x) = \begin{cases} 1 - (1 + \xi x)^{-1/\xi}, & \xi \neq 0 \\ 1 - \exp(-x), & \xi = 0 \end{cases}$$

   (b) Ora, se $F_{0,1,\xi}(\pi_p) = p$, então:

$$\pi_p = \begin{cases} \dfrac{(1-p)^{-\xi} - 1}{\xi}, & \xi \neq 0 \\ -\log(1-p), & \xi = 0 \end{cases}$$

(c) Seja $U \sim \text{u}[0,1]$. Sabemos que $U = F_{0,1,\xi}(X)$, logo $X = F^{-1}_{0,1,\xi}(U)$. Podemos gerar U e sabemos $F^{-1}_{0,1,\xi}$, então podemos gerar X.

2. Sejam $X \sim \text{Exp}(1/2)$, $W \sim \text{Pareto}(\xi = 1/2, m = 0, \lambda = 1)$, $Z = \text{Be}(1/3)$. Então $Y = XZ + (1-Z)(-W)$. Podemos calcular sua c.d.f.:

$$\begin{aligned} P(Y \leq y) &= P(XZ + (1-Z)(-W) \leq y) \\ &= P(XZ + (1-Z)(-W) \leq y \mid Z = 1) \cdot P(Z = 1) \\ &+ P(XZ + (1-Z)(-W) \leq y \mid Z = 0) \cdot P(Z = 0) \\ &= P(X \leq y) \cdot P(Z = 1) + P(-W \leq y) \cdot P(Z = 0) \\ &= P(X \leq y)\frac{1}{3} + (1 - P(W \leq -y))\frac{2}{3} \\ &= \frac{1}{6}e^{-\frac{1}{2}x} + \frac{2}{3}\left(1 + \frac{1}{2}x\right)^{-2} \end{aligned}$$

Deriva-se:

$$f_Y(y) = -\frac{1}{12}e^{-\frac{1}{2}y} - \frac{2}{3}\left(1 + \frac{1}{2}y\right)^{-3}$$

3. Observe que eu já possuo a c.d.f. de Y no exercício anterior. Essa função não é trivialmente invertível. Porém, é possível calcular numericamente F_Y^{-1} e, em posse de $U \sim \text{u}[0,1]$, $Y = F_Y^{-1}(U)$ está dado.

Problema 2.3

1. (a) L tem distribuição exponencial com taxa r. Sua c.d.f.:

$$F_L(t) = 1 - e^{-rt}$$

(b) Invertendo F_L, obtemos:

$$F_L^{-1}(p) = -\frac{\log(1-p)}{r}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} VaR_\alpha &= F_L^{-1}(1-\alpha) \\ &= -\frac{\log(\alpha)}{r} \end{aligned}$$

(c) Como $L \sim \text{Exp}(r)$, $f_L(t) = re^{-rt}$. Então:

$$
\begin{aligned}
E(X \mid X \geq VaR_\alpha) &= \frac{1}{P(L \geq VaR_\alpha)} \int_{VaR_\alpha}^{\infty} rte^{-rt} dt \\
&= \frac{1}{1 - F_L(VaR_\alpha)} \left(VaR_\alpha e^{-rVaR_\alpha} + \frac{e^{-rVaR_\alpha}}{r} \right) \\
&= \frac{1}{\alpha} \left(VaR_\alpha \cdot \alpha + \frac{\alpha}{r} \right) \\
&= \frac{1 - \log \alpha}{r}
\end{aligned}
$$

2. (a) Substituindo os parâmetros dados na expressão da c.d.f. da Pareto:

$$
F_{0,1,\xi}(t) = \begin{cases} 1 - (1 + \xi t)^{-1/\xi}, & \xi \neq 0 \\ 1 - \exp(-t), & \xi = 0 \end{cases}
$$

(b) Conhecemos a inversa da GPD com esses parâmetros pelo exercício 1.2 do problema 2.2. Segue que:

$$
VaR_\alpha = \begin{cases} \dfrac{\alpha^{-\xi} - 1}{\xi}, & \xi \neq 0 \\ -\log(\alpha), & \xi = 0 \end{cases}
$$

(c)

$$
\begin{aligned}
E(L \mid L \geq VaR_\alpha) &= \frac{1}{1 - P(L < VaR_\alpha)} \int_{VaR_\alpha}^{\infty} t f_L(t) dt \\
&= \frac{1}{1 - F_L(VaR_\alpha)} \int_{VaR_\alpha}^{\infty} t f_L(t) dt \\
&= \frac{1}{\alpha} \int_{VaR_\alpha}^{\infty} t f_L(t) dt
\end{aligned}
$$

- Para $\xi = 0$:

$$
\begin{aligned}
E(L \mid L \geq VaR_\alpha) &= \frac{1}{\alpha} \int_{VaR_\alpha}^{\infty} t \frac{d}{dt}(1 - e^{-t}) dt \quad \text{(achamos a p.d.f. a partir da c.d.f.)} \\
&= \frac{1}{\alpha} \int_{VaR_\alpha}^{\infty} te^{-t} dt \\
&= \frac{1}{\alpha} (VaR_\alpha e^{-VaR_\alpha} + e^{-VaR_\alpha}) \\
&= 1 - \log(\alpha)
\end{aligned}
$$

- Para $\xi \neq 0$:

$$
\begin{aligned}
E(L \mid L \geq VaR_\alpha) &= \frac{1}{\alpha}\int_{VaR_\alpha}^{\infty} t(1+\xi t)^{-(1+1/\xi)} \\
&= \frac{1}{\alpha}\left(VaR_\alpha(1+\xi VaR_\alpha)^{-1/\xi} - \frac{(1+\xi VaR_\alpha)^{-1/\xi+1}}{\xi-1}\right)
\end{aligned}
$$

Como $(1+\xi VaR_\alpha)^{-1/\xi} = 1 - F_L(VaR_\alpha) = \alpha$, pela def. de VaR_α:

$$
\begin{aligned}
E(L \mid L \geq VaR_\alpha) &= \frac{1}{\alpha}\left(\frac{\alpha^{-\xi+1}-\alpha}{\xi} - \frac{\alpha^{-\xi+1}}{\xi-1}\right) \\
&= \frac{\alpha^{-\xi}-1}{\xi} - \frac{\alpha^{-\xi}}{\xi-1}
\end{aligned}
$$

3. (a)
   - Se $\xi = 0$:
   $$-\frac{\log\alpha}{r} = -\log\alpha \Rightarrow r = 1$$
   - Se $\xi \neq 0$:
   $$-\frac{\log\alpha}{r} = \frac{\alpha^{-\xi}-1}{\xi}$$

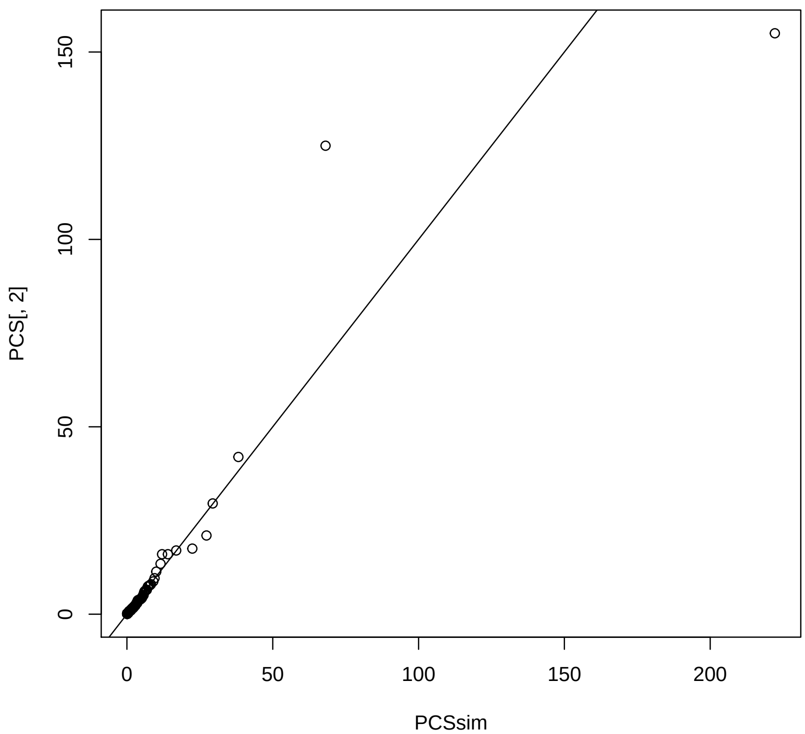
   (b)
   - Se $\xi = 0$:
   Para a dist. exponencial, $E(L \mid L \geq VaR_\alpha) = (1-\log\alpha)/r = 1-\log\alpha$. Para a dist. de Pareto, $E(L \mid L \geq VaR_\alpha) = 1-\log\alpha$. Ou seja, são iguais. Note que isso era esperado, pois tomamos $r = 1$, de modo que nossa exponencial tem taxa 1, assim como a GPD com $\xi = 0$, $m = 0$ e $\lambda = 1$.
   - Se $\xi \neq 0$:
   Para a dist. exponencial $E(L \mid L \geq VaR_\alpha) = (1-\log\alpha)/r = 1/r - \log\alpha/r$. Para a de Pareto,
   $$E(L \mid L \geq VaR_\alpha) = \frac{\alpha^{-\xi}-1}{\xi} - \frac{\alpha^{-\xi}}{\xi-1} = -\frac{\log\alpha}{r} - \frac{\alpha^{-\xi}}{\xi-1}$$
   São diferentes, com uma parcela em comum.

Problema 2.4

1.
```
suppressMessages(library(Rsafd))
data(PCS, "PCS", package = "Rsafd")
PCS.lmom = gpd.lmom(PCS[,2])
PCSsim = qgpd(runif(dim(PCS)[1] * 5),
```

```
                m = PCS.lmom$param.est["m"],
                lambda = PCS.lmom$param.est["lambda"],
                xi = PCS.lmom$param.est["xi"])
```

2.
```
qqplot(PCSsim, PCS[,2])
abline(0, 1)
```



O Q-Q plot indica que os dados do PCS possuem distribuição muito semelhante à dos dados.

3. Verificamos o *two-sample Kolmogorov-Smirnov goodness-of-fit test*:

```
suppressWarnings(ks.test(PCSsim, PCS[,2]))

##
##  Two-sample Kolmogorov-Smirnov test
##
```

```
## data:  PCSsim and PCS[, 2]
## D = 0.075066, p-value = 0.05585
## alternative hypothesis: two-sided
```

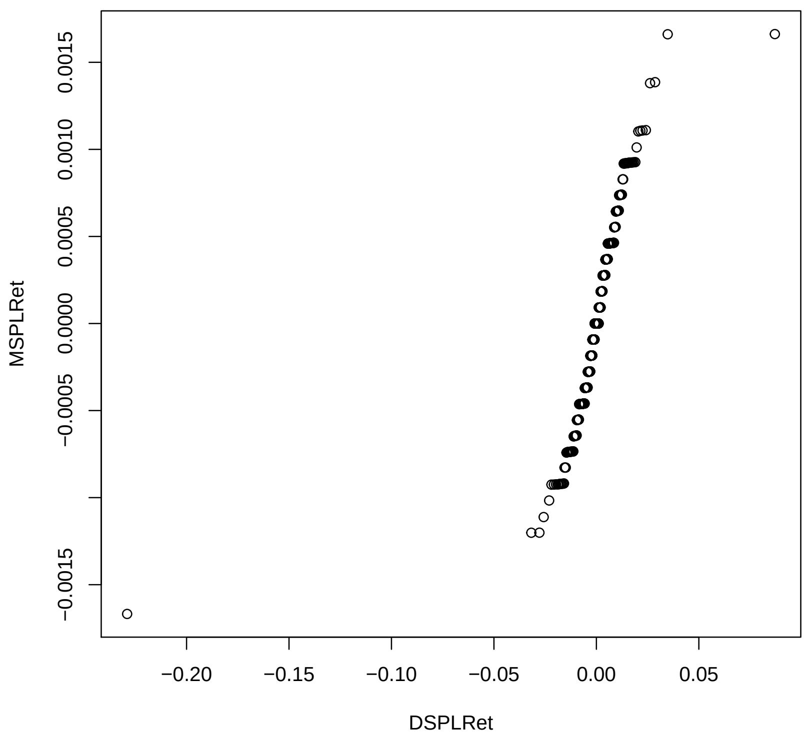
Como o p-valor é muito baixo, rejeitamos a hipótese de que os dados possuem mesma distribuição. Ou seja, de que o PCS possui distribuição GPD.

Problema 2.6

1. ```r
   data(DSP, "DSP", package = "Rsafd")
   DSPLRet = diff(log(DSP))
   ```

2. ```r
   data(MSP, "MSP", package = "Rsafd")
   MSPLRet = diff(log(MSP))
   ```

3. ```r
   qqplot(DSPLRet, MSPLRet)
   ```
   ```



A distribuição dos pontos no Q-Q plot se assemelha a uma reta. Isso indica que, apenas em uma mudança de escala, as distribuições das duas amostras possuem mesma cauda (ou próximo disso). Espera-se que as propriedades sejam semelhantes.

4.
```
print(c(mean(DSPLRet), mean(MSPLRet)))

## [1] 2.717871e-04 2.446315e-05

print(c(var(DSPLRet), var(MSPLRet)))

## [1] 8.418932e-05 2.441200e-07
```

Apenas por essas estatísticas, não diria que essas distribuições são as mesmas.

5.
```r
DSPLRet.lmom = gpd.lmom(DSPLRet)
MSPLRet.lmom = gpd.lmom(MSPLRet)
print(c(DSPLRet.lmom$param.est["xi"],
        MSPLRet.lmom$param.est["xi"]))

##         xi         xi
## -47.131076  -4.196885
```

   Os parâmetros de forma não são semelhantes, então deduzimos que as distribuições dos dados também não.

Problema 2.8

1. (a) A amostra da cauda dessa distribuição é a amostra da cauda de uma dist. f_{ξ_+,m_+,λ_+}. Ou seja, distribuição dos excessos será GPD com $\xi' = \xi_+$, de forma que esperamos $\hat{\xi}_+ \approx \xi_+$.

   (b) Análogo ao exercício anterior: $\hat{\xi}_+ \approx \xi_+$.

   (c) Nesse caso, a cauda não é mais uma GPD, de modo que o ajuste fica prejudicado. Muita massa está entre m_+ e 2, então a cauda da dist. ajustada deve ficar mais fina, com $\hat{\xi}_+$ razoavelmente menor do que ξ_+.

2. (a) Análogo ao caso em que $\ell = 2$. Ou seja, $\hat{\xi}_- \approx \xi_+$. Então esperamos algo como $\hat{\pi}_{0,01} \approx \pi_{0,01}$.

   (b) Análogo ao exercício anterior: $\hat{\xi}_- \approx \xi_+$. Então esperamos algo como $\hat{\pi}_{0,01} \approx \pi_{0,01}$.

   (c) Como no caso em que ℓ está entre 0 e 1, esperamos $\hat{\xi}_-$ razoavelmente menor do que ξ_-, então a cauda da GPD ajustada é mais fina. Ou seja, seus quantis, em módulo, são menores. Dessa forma, $\hat{\pi}_{0,01} > \pi_{0,01}$.