LISTA 4 Solução numérica de EDOs

*(As questões sinalizadas com **(**)** deverão ser entregues até o dia 13 de Novembro)*

1. Considere a EDO

$$y'(t) = 10y^3(t) - 10y^4(t)$$
$$y(0) = \frac{1}{2}.$$

Aplique o método Euler implícito (Backward Euler) para aproximar a curva solução dessa equação no intervalo $[0 \ \ 20]$. Pare isso use o método de Newton para resolver as equações não lineares necessárias para implementar o método.

2. Considere a equação differencial

$$x'(t) = t^2 x(t) + x(t)(1 - x(t))$$
$$x(0) = 1$$

   (a) Construia os métodos de Taylor até ordem 3 para resolver essa equação.

   (b) Compare a região de estabilidade do método de Taylor ordem 3, Euler implícito (Backward Euler) e Euler explicito (Forward Euler)

   (c) Pode o método de Taylor de ordem m ser A-estavel para algum valor de m?. Explique.

3. Considere a EDO

$$x''(t) + x(t)\sin(t) - x'(t)\cos(t) = 0$$
$$x(0) = 1$$
$$x'(0) = 1$$

   (a) Escreva um programa que implemente o método de Heun para aproximar a solução dessa EDO em $[0 \ \ 4]$

   (b) Faça um plot, em $[0 \ \ 4]$, da curva que aproxima a solução $x(t)$ usando o método de Heun e os tamanhos de passo $h = \frac{1}{2}$, $h = \frac{1}{8}$, $h = \frac{1}{16}$. Compare com a solução exata $x(t) = \exp(\sin(t))$.

4. **(**)** Considere a equação diferencial

$$x'(t) = \begin{pmatrix} -1000 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{10} \end{pmatrix} x(t)$$

   (a) Implemente uma função em Matlab que construa uma aproximação da solução usando o método de Euler explícito (Forward Euler). Considere como parâmetros de entradas o tamanho de paso h, o intervalo de integração e as condições iniciais.

   (b) Teste seu programa para diferentes valores de h (para valores $h > 0.002$ e valores $h < 0.002$) e compare com a solução exata do sistema (para obter a solução exata, note que a matriz da EDO é diagonalizável. Explique os resultados computacionais obtidos, com base em seus conhecimentos de estabilidade absoluta (A-stability).

   (c) Implemente o método de Euler implícito (Backward Euler) para este sistema e compare com os resultados obtidos com o Euler explicito (Forward Euler). O desempenho do Backward Euler é bem melhor? Justifique.

5. Considere a EDO

$$x'(t) = Ax(t), \tag{1}$$

onde A é uma matriz $d \times d$ (*não necessáriamente diagonalizável!*). Seja $\{x_n\}$ um método numérico tal que, quando aplicado a (1) satisfaz $x_{n+1} = R(Ah)x_n$, onde h é o tamanho de passo e R é uma função analítica.

(a) Prove que $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0 \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = 0$ se e somente se $h\lambda_i \in D = \{z \in \mathbb{C} : |R(z)| < 1\}$. Onde λ_i são os autovalores de A.

(b) Suponha que o Método é A-estável (i.e, $\mathbb{C}^- \subset D$). Podemos afirmar que $\lim_{n\to\infty} x_n = 0 \Longrightarrow \lim_{t\to\infty} x(t) = 0$?. Justifique.

(c) Prove que o método de Euler Implícito e que o método do Trapézio são A-estáveis. Qual desses métodos satisfaz $\lim_{n\to\infty} x_n = 0 \Longrightarrow \lim_{t\to\infty} x(t) = 0$?. Justifique.

(d) Escreva um programa que permita aproximar a solução de (1) usando o método de Euler Explicito, Implícito e o método do Trapézio. Teste seu programa para $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, e $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, com diferentes valores de h para "verificar" computacionalmente a estabilidade e instabilidade numérica dos métodos segundo o valor de h usado. Compare com a solução exata em cada experimento numérico. Por que o método de Euler Implícito não pode reproduzir, independentemente do valor de h, o comportamento oscilatório de (1) para $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$?. Justifique.

6. **(**)** Considere a EDO

$$\begin{aligned} x'(t) &= k(a - x(t))(b - x(t)), \quad (k, a, b \in \mathbb{R}) \\ x(0) &= 0 \end{aligned}$$

(a) Escreva um programa que implemente o método RK4 clásico para aproximar a solução dessa EDO. Use como parâmetros de entrada do seu programa: o tamanho de passo h, o tempo de integração T, e os valores de k, a, b. Para $k = 0.01$, $a = 70$, $b = 50$, use seu programa, com $h = 0.5$, para achar numéricamente a solução da EDO no intervalo [0 20]

(b) Compare a solução dada pelo computador com a solução exata

$$x(t) = 350(1 - e^{-0.2t})/(7 - 5e^{-0.2t}).$$

Teste seu programa para diferentes valores de T (tome estes valores de T em ordem crescente) disminuindo suficientemente o valor de h em cada caso, de modo que a solução numérica aproxime bem a solução exata.

(c) Observe que $\lim_{t\to\infty} x(t) = 50$. Existe algum valor fixo de h (mesmo muito pequenho), de modo que o método RK4 seja capaz de reproduzir esse comportamento assintótico da solução exata?. Justifique.

7. Seja $x(t) \in \mathbb{R}^d$ a solução de certa EDO no intervalo $[t_0\ T]$, com condição inicial $x(t_0) = x_0$. Considere a partição $\{t_0, t_1, \ldots, t_N = T\}$ do intervalo $[t_0\ T]$, tal que $h = t_{k+1} - t_k$ $(k = 0, \ldots, N-1)$ é constante. E seja o método numérico

$$x_{k+1} = x_k + h\varphi(t_k, x_k, h)$$

com x_k aproximação da solução exata $x(t_k)$. Demonstre que se

$$i)\ \exists C > 0 : \|x(t_{k+1}) - (x(t_k) + h\varphi(t_k, x(t_k), h))\| \leq Ch^{p+1},$$

e se φ é Lipschitz na segunda variável, i.e.,

$$ii) \exists L > 0 : \|\varphi(t_k, y_1, h)) - \varphi(t_k, y_2, h))\| \leq L \|y_1 - y_2\|, \quad (\forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}^d)$$

Então

$$\max_{0\leq k\leq N} \|x(t_{k+1}) - x_k\| \leq \frac{C}{L} \exp(L(t - t_0))h^p$$

Isto é, o método tem ordem de convergência p.

8. Utilize o teorema acima para provar que o seguinte método de Runge-Kutta tem ordem de convergência 3:

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & \\ 1 & -1 & 2 & \\ \hline & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \end{array}$$