Lista 4

Introdução à Análise Numérica
Solução numérica de EDOs

Lucas Emanuel Resck Domingues

12 de novembro de 2020

4. (a) A função que constrói uma aproximação da solução utilizando do método Forward Euler foi implementada e pode ser vista no Apêndice A.

   O intervalo de integração é particionado em N intervalos de comprimento igual a h, e o método é calculado em cada ponto da partição utilizando o método Forward Euler. Ao final, um gráfico do valor exato e do valor aproximado da função no intervalo especificado é exibido.

   O cálculo do valor exato é obtido resolvendo a EDO de forma analítica: podemos ver que a solução será a exponencial de uma matriz, que pode ser facilmente calculada com o uso da diagonalização. De forma bastante resumida, se $x_0 = \{c_1, c_2\}$ e A é tal que $x'(t) = Ax(t)$, então

$$
\begin{aligned}
x(t) &= e^{At}x(0) \\
&= Pe^{Dt}P^{-1}x(0) \\
&= \begin{pmatrix} c_1 e^{-1000*t} + \dfrac{c_2}{1000}\left(e^{-t/10} - e^{-1000*t}\right) \\ c_2 e{-}t/10 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

   (b) As Figuras 1, 2 e 3 exibem os resultados da aproximação para diferentes valores de h, com intervalo de integração $[0, 1]$ e condição inicial $x(0) = \{1, 1\}$. Nas Figuras, também vamos os erros na norma infinito, entre aproximação e valor exato, além de uma comparação no gráfico. Observamos que a solução para a segunda coordenada, x_2, sempre fica boa, enquanto a solução para x_1 só fica boa para $h < 0.002$.

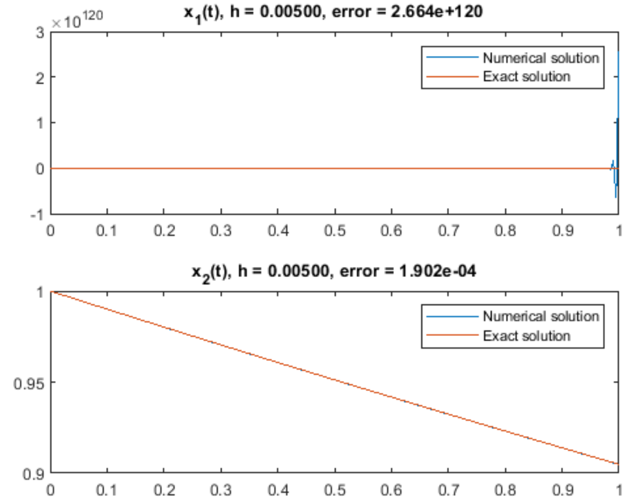

Figura 1: Aproximação pelo método Forward Euler (em azul) e solução exata (em laranja), para $h = 0.005$, no intervalo $[0, 1]$, com $x(0) = \{1, 1\}$. O erro calculado é a norma infinito entre as soluções.

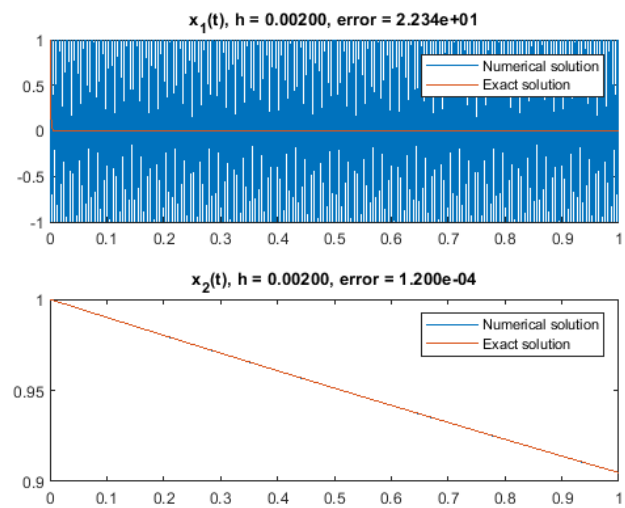

Figura 2: Aproximação pelo método Forward Euler (em azul) e solução exata (em laranja), para $h = 0.002$, no intervalo $[0, 1]$, com $x(0) = \{1, 1\}$.

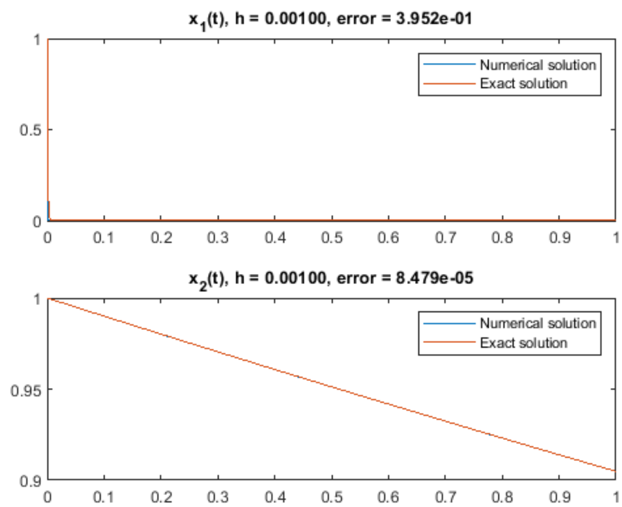

Figura 3: Aproximação pelo método Forward Euler (em azul) e solução exata (em laranja), para $h = 0.001$, no intervalo $[0, 1]$, com $x(0) = \{1, 1\}$.

No nosso problema, temos $x' = Ax$, com $\text{Re}(\lambda) < 0$, sendo λ autovalor de A. De fato, $\lambda_1 = -1000 < 0, \lambda_2 = -1/10 < 0$. Sabemos que o domínio de estabilidade do método Forward Euler é dado por $\{z \in \mathbb{C} : |r(z)| = |1+z| < 1\}$. Para que o método numérico reproduza a dinâmica da solução, devemos ter

$$\begin{aligned}
&|r(\lambda h)| < 1 \\
\Rightarrow &|1 + \lambda h| < 1 \\
\Rightarrow &\begin{cases} |1 - 1000h| < 1 \\ \left|1 - \dfrac{1}{10}h\right| < 1 \end{cases} \\
\Rightarrow &0 < h < 0.002
\end{aligned}$$

Conclusão: o método só reproduz a dinâmica da solução exata quando $h < 0.002$, o que pode ser verificado nos resultados numéricos.

(c) O método Backward Euler foi implementado e seu código pode ser visualizado no Apêndice B.

O algoritmo é muito semelhante àquele do método Forward Euler. A principal diferença é o cálculo de x_{k+1} a partir de x_k. No método Foward Euler, isso é direto. Porém, agora, com o Backward Euler, temos:

$$\begin{aligned}
&x_{k+1} = x_k + f(t_{k+1}, x_{k+1})h \\
\Rightarrow &x_{k+1} = x_k + Ax_{k+1}h \\
\Rightarrow &(I - Ah)x_{k+1} = x_k \\
\Rightarrow &Mx_{k+1} = x_k
\end{aligned}$$

Isso é um sistema linear 2×2 a ser resolvido. Acredite, a matriz é diagonalmente dominante, e isso é fácil de ser verificado. O algoritmo do Apêndice B implementa o método de Seidel para sua resolução.

As Figuras 4, 5, 6 e 7 exibem os resultados da aproximação para diferentes valores de h, com intervalo de integração $[0, 1]$ e condição inicial $x(0) = \{1, 1\}$. Nas Figuras, também vamos os erros na norma infinito, entre aproximação e valor exato, além de uma comparação no gráfico. Observamos que a solução para as duas coordenadas, x_1 e x_2, ficam boas, para qualquer valor de h.

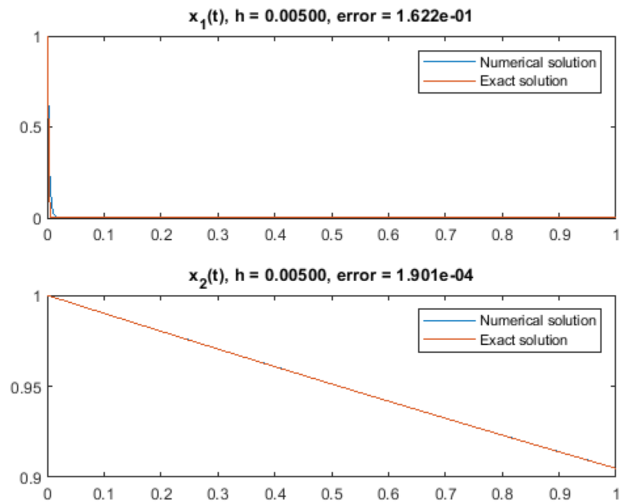

Figura 4: Aproximação pelo método Backward Euler (em azul) e solução exata (em laranja), para $h = 0.005$.

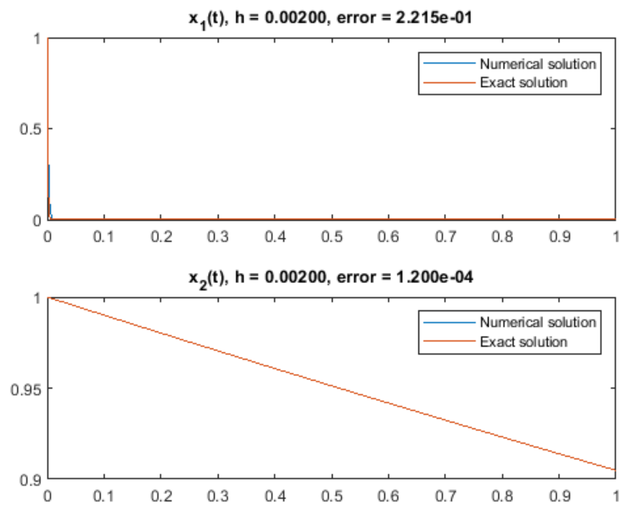

Figura 5: Aproximação pelo método Backward Euler (em azul) e solução exata (em laranja), para $h = 0.002$.

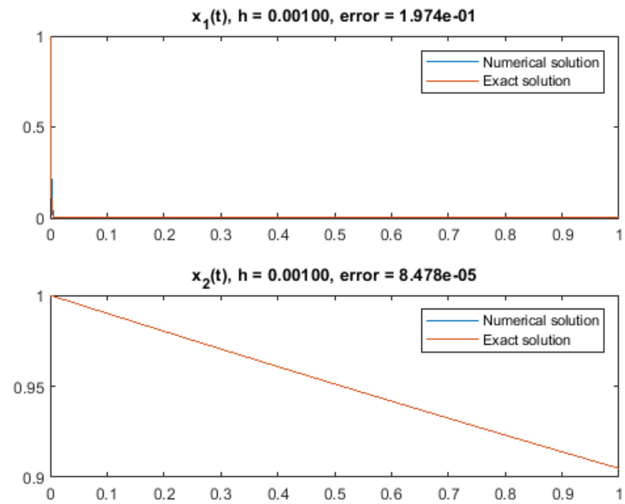

Figura 6: Aproximação pelo método Backward Euler (em azul) e solução exata (em laranja), para $h = 0.001$.

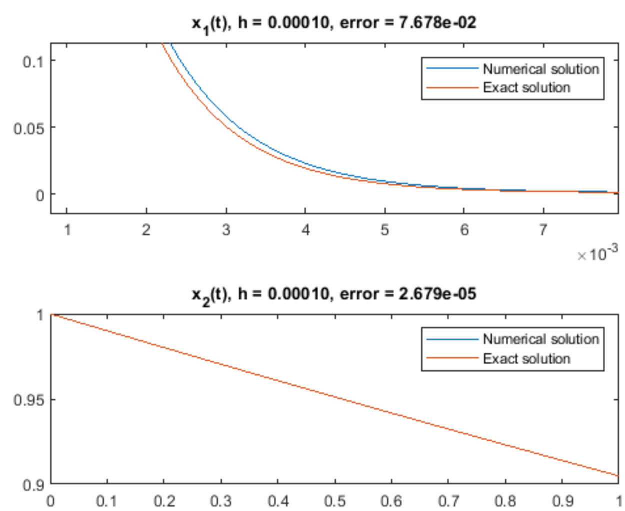

Figura 7: Aproximação pelo método Backward Euler (em azul) e solução exata (em laranja), para $h = 0.0001$.

Verificamos que o desempenho do método Backward Euler é bem melhor. Isso se dá, entre outras coisas, pelo fato de que o domínio de estabilidade desse método é (infinitamente) melhor. Ele é:

$$
\begin{aligned}
&|r(\lambda h)| < 1 \\
\Rightarrow &\left|\frac{1}{1-\lambda h}\right| < 1 \\
\Rightarrow &\begin{cases} \left|\dfrac{1}{1+1000h}\right| < 1 \\ \left|\dfrac{1}{1+\frac{1}{10}h}\right| < 1 \end{cases} \\
\Rightarrow &h > 0
\end{aligned}
$$

Ou seja, qualquer que seja h, temos um método A-estável.

6. (a) A função que implementa o método RK4 clássico para aproximar a solução da EDO pode ser conferida no Apêndice C.

   O método de Runge-Kutta foi implementado de forma semelhante aos método anteriores, no que diz respeito ao cálculo do número de iterações e da atualização da solução numérica. A diferença é a função que é utilizada para a aproximação numérica, própria deste método.

   A função também compara as soluções exata e aproximada em um gráfico, além de exibir o erro (na norma infinito) entre as soluções. O resultado da execução da função para $h = 0.5$, $T = 20$, $k = 0.01$, $a = 70$, $b = 50$ pode ser conferido na Figura 8.

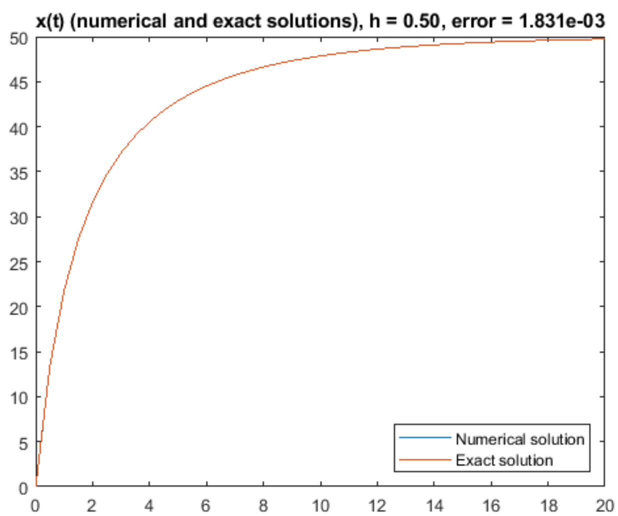

Figura 8: Soluções exata e numérica (RK4 clássico) da função x.

   (b) O programa foi testado para diferentes valores de T, e as comparações entre os valores exato e numérico podem ser conferidas nas Figuras 9, 10 e 11.

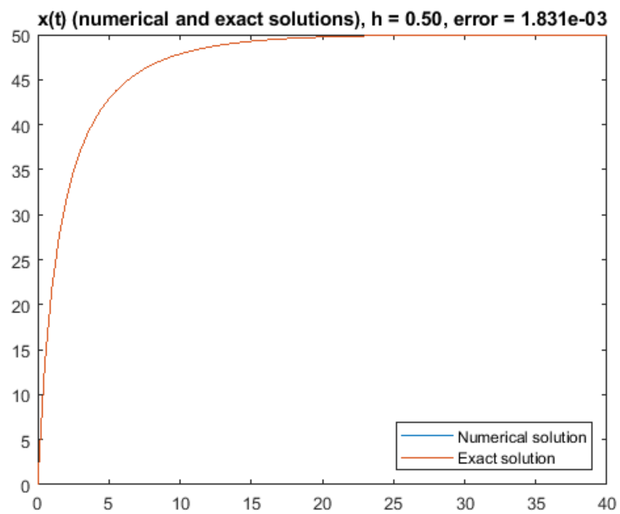

Figura 9: Soluções exata e numérica (RK4 clássico) da função x.

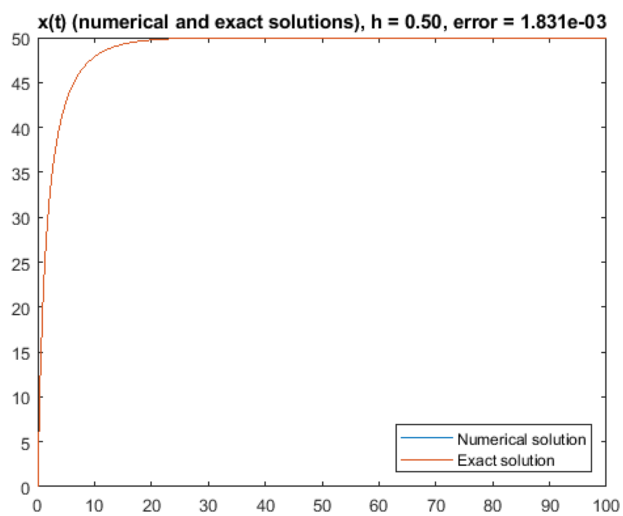

Figura 10: Soluções exata e numérica (RK4 clássico) da função x.

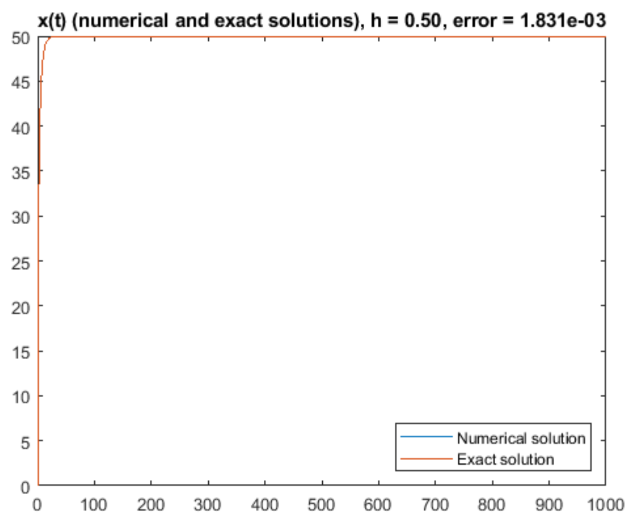

Figura 11: Soluções exata e numérica (RK4 clássico) da função x.

Observamos que não foi necessário ajustar o parâmetro h para que houvesse convergência, deixando-o como $h = 0.5$ anteriormente dado. Vemos que a solução numérica aproxima muito bem a solução real, em todos esses casos.

(c) Observamos através dos gráficos que o método RK4 reproduz o comportamento assintótico da solução exata. Portanto, concluímos que, sim, existe valor fixo de h que satisfaz isso. No nosso caso, bastou $h = 0.5$.

A Forward Euler

TO–DO

B Backward Euler

TO–DO

C Runge-Kutta 4 clássico

TO–DO