LISTA 5 Solução numérica de EDP

(As questões sinalizadas com (**) deverão ser entregues até o 27 de Novembro, 00:00 hrs*)*

1. Determine uma aproximação para a solução da EDP seguinte utilizando o método BTCS

$$\pi^2 \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0 \qquad t>0;\quad 0 \le x \le 1$$
$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \quad t > 0$$
$$u(x,0) = \cos(\pi(x - \frac{1}{2})) \quad (0 \le x \le 1)$$

   (a) Use $\Delta t = 0.04$, $\Delta x = 0.01$ e compare os resultados obtidos em $t = 0.5$, com a solução exata $u(x,t) = e^{-t}\cos(\pi(x - \frac{1}{2}))$

   (b) Seja $\Delta t = 0.06$, quais são os valores posíveis de Δx, tal que o método FTCS não explode mesmo para valores muito grandes do tempo t?.

2. Demostre que o método de Crank-Nicolson para a EDP do calor é convergente.

3. Uma área importante onde equações parabólicas são usadas é no estudo da evolução espaço-temporal de populações biológicas. Populações tendem a comportar-se como o calor, no sentido de que elas se espalham ou propagam desde áreas com altas densidades até áreas com densidades mais baixas. Além de, obvialmente, crescer e morrer. Para modelar a densidade $u(x,t)$ da população no tempo t $(0 \le t \le L)$e na posição x $(0 \le x \le L)$, considere o seguinte modelo dado por uma EDP de reação-difusão:

$$u_t = cu_{xx} + du \quad c, d \in \mathbb{R}$$
$$u(x,0) = \sin^2(\frac{\pi}{2}x) \quad (0 \le x \le L)$$
$$u(0,t) = 0, \quad t > 0$$
$$u(L,t) = 0, \quad t > 0$$

   O termo difusivo cu_{xx} causa que a população se espalhe ao longo da direção x. O termo du (reação) contribui com o crescimento da população na razão d. As condições de fronteira representam o fato de que a população vive no espaço $0 \le x \le L$. Se a população sobrevive ou segue em direção à extinção vai depender dos valores de c, d e L.

   (a) Utilize o método de Crank-Nicolson para elaborar um programa computacional que tenha como entrada: c, d, L, T, Δt, Δx e que a saída seja o gráfico da solução $u(x,t)$ para $(x,t) \in [0 \;\; L] \times [0 \;\; T]$.

   (b) Pode-se provar que para a população sobreviver tem que ser $d > \pi^2 \frac{c}{L^2}$. Comprove computacionalmente esse resultado teórico. Para isto considere $L = 1$, $c = 1$, e confirme computacionalmente que para $d = 9.5$ a população tende à extinção com o passar do tempo, e que para $d = 10$ a população aumenta no transcorrer do tempo.

   (c) Os resultados computacionais dependem dos valores Δt, Δx utilizados? Justifique.

   (d) Ecologistas que estudam sobrevivência de espécies frequentemente estão interessados em conhecer o menor valor de L tal que a população não fique extinta. Suponha que sejam conhecidos $c = d = 1$. Determine, usando simulações no computador, esse valor mínimo de L. Compare com o resultado teórico do item b.

4. Determine todos os autovalores e autovetores da matriz tridiagonal $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{m \times m}$ dada por

$$a_{ij} = \begin{cases} \sigma & j = i-1 \text{ e } j = i+1 \\ 1 - 2\sigma & j = i \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

5. Seja a matriz tridiagonal $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{m\times m}$ dada por

$$a_{ij} = \begin{cases} -\sigma & j = i-1 \text{ e } j = i+1 \\ 1+2\sigma & j = i \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Para quais valores de σ, $\lim\limits_{k\to\infty} A^k = 0$?

6. Implemente o método numérico CTCS (também conhecido como leapfrog) para determinar uma aproximação para a solução da equação de onda

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= 0 \qquad 0 < x < 1,\ t > 0 \\ u(x,0) &= \sin(2\pi x) \quad 0 \le x \le 1 \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) &= 2\pi \sin(2\pi x) \quad 0 \le x \le 1 \\ u(0,t) &= u(1,t) = 0 \quad t > 0 \end{aligned}$$

utilizando $\Delta t = \Delta x = 0.1$.

   (a) Compare seus resultados em $t = 1$ com a solução exata $u(x,t) = \sin(2\pi x)(\sin(2\pi x) + \cos(2\pi x))$

   (b) Teste numéricamente a condição CFL, violando (e não) o limite estabelecido por essa condição.

7. ***(**)*** Considere a equação de onda

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= 0 \qquad -10 < x < 10,\ t > 0 \\ u(x,0) &= \exp(-x^2) \quad -10 \le x \le 10 \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) &= 0 \quad -10 \le x \le 10 \\ u(-10,t) &= u(10,t) = 0 \quad t > 0 \end{aligned}$$

   (a) Implemente o método CTCS e utilize este método com $\Delta x = 0.04$ e $\Delta t = 0.02$ para fazer um gráfico da solução em $[-10\ \ 10] \times [0\ \ 40]$. Comprove que a solução tem forma de "catarata" nessa região.

   (b) Comprove que a solução repete periódicamente esse padrão "catarata" no transcorrer do tempo. Para isso, façã um gráfico da solução na região $[-10\ \ 10] \times [0\ \ 80]$, e na região $[-10\ \ 10] \times [0\ \ 120]$, e analise os resultados.

   (c) Teste numéricamente a condição CFL, violando (e não) o limite estabelecido por essa condição e comprove que o padrão "catarata" da solução é perdido quando a condição CFL é violada.

8. Considere a equação de Poisson

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= e^{xy}(x^2 + y^2) \ \text{ na região } 0 < x < 2,\ 0 < y < 1 \\ u(x,0) &= 1,\ u(x,1) = e^x,\ \ 0 \le x \le 2 \\ u(0,y) &= 1,\ u(2,y) = e^{2y},\ \ 0 \le y \le 1 \end{aligned}$$

   (a) Escreva na forma matricial um método numérico para resolver essa equação.

   (b) Use $\Delta x = 0.2$ e $\Delta y = 0.1$ para fazer um gráfico da solução na região considerada e compare os resultados com a solução exata $u(x,y) = e^{xy}$.