Lista 4

Equações Diferenciais Parciais

Lucas Emanuel Resck Domingues

Outubro de 2020

Exercícios teóricos

1. (a) Essa função é especial: ela é seno. Sendo assim, podemos escolher os coeficientes a_n e b_n tais que encontremos o seno de $5x$. Da expressão da série de Fourier, basta que escolhamos todos os coeficientes iguais a zero, com exceção de $b_5 = 1$. Então:

$$\begin{aligned} a(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \left(a_m \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) + b_m \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\right) \\ &= \sin\left(\frac{5\pi x}{L}\right) \\ &= \sin(5x) \end{aligned}$$

(b) Calculemos os coeficientes:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(5x+\alpha)dx = 0$$

Se $n \neq 0$:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(5x+\alpha)\cos(nx)dx \\ &= \begin{cases} -\dfrac{2n\sin(\alpha)\sin(\pi n)}{\pi(n^2-25)}, & n \neq 5 \\ \sin(\alpha), & n = 5 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0, & n \neq 5 \\ \sin(\alpha), & n = 5 \end{cases} \end{aligned}$$

Agora para b_n:

$$
\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(5x+\alpha)\sin(nx)dx \\
&= \begin{cases} -\dfrac{10\cos(\alpha)\sin(\pi n)}{\pi(n^2-25)}, & n \neq 5 \\ \cos(\alpha), & n = 5 \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0, & n \neq 5 \\ \cos(\alpha), & n = 5 \end{cases}
\end{aligned}
$$

Então:

$$
\begin{aligned}
b(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty}\left(a_m \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) + b_m \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\right) \\
&= a_5\cos(5x) + b_5\sin(5x) \\
&= \sin(\alpha)\cos(5x) + \cos(\alpha)\sin(5x)
\end{aligned}
$$

(c)

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} c(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} 1dx = 1$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(nx)dx = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(nx)dx = \frac{-\cos(n\pi)+1}{n\pi} = \begin{cases} 0, & n \text{ par} \\ \dfrac{2}{n\pi}, & n \text{ ímpar} \end{cases}$$

$$c(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\sin(nx)}{n\pi} = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\sin((2m+1)x)}{(2m+1)}$$

(d)

$$a_0 = \int_{-1}^{1} xdx = 0$$

$$a_n = \int_{-1}^{1} x\cos(n\pi x)dx = 0$$

afinal o integrando é uma função ímpar.

$$b_n = \int_{-1}^{1} x\sin(n\pi x)dx = \frac{2\sin(\pi n) - 2\pi n\cos(\pi n)}{\pi^2 n^2}$$

$$c(x) = \frac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(\pi n) - \pi n\cos(\pi n)}{n^2}\sin(n\pi x)$$

2. Veremos que a equação de diferenças parcial pode ser formulada como uma equação diferencial matricial. Vamos resolvê-la e verificar que a base de Fourier nos ajuda a encontrar os coeficientes da solução da equação diferencial matricial.

   Temos um polígono com n lados e n vértices Sejam os vértices $x_1, \cdots, x_n$. Veja que a matriz de adjacência é dada:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

   Então a matriz do laplaciano L é dada por

$$L = D - A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

   sendo D a matriz diagonal com os graus de cada vértice.

   Nosso polígono regular tem n lados. Considere o vetor

$$w(t) = (u(x_1, t), u(x_2, t), \cdots, u(x_n, t))$$

   Ele descreve a temperatura em todos os vértices do polígono no tempo t. Porém, sabemos que

$$w'(t) = -Lw(t)$$

   (a simples multiplicação de $-L$ por w resulta na equação de diferenças parcial do enunciado, porém para todos os valores de x de uma vez só). Sendo assim, temos uma equação diferencial matricial. Observe que L é uma matriz de convolução.

   Vamos considerar agora a base de Fourier $\{f_1, \cdots, f_n\}$, sendo

$$f_i = \frac{1}{\sqrt{n}} \left((w^i)^0, (w^i)^1, \cdots, (w^i)^{n-1}\right)$$

   Nós sabemos que a base de Fourier é um conjunto ortonormal de cardinalidade n, então é uma base para o espaço $\mathbb{C}^n$. Ora, então existem $c_1(t), \cdots, c_n(t)$ tais que

$$w(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i(t) f_i$$

Segue que

$$w'(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i'(t) f_i$$

Porém, também sabemos que a base de Fourier diagonaliza matrizes de convolução. Portanto:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\mathrm{d}c_i}{\mathrm{d}t}(t) f_i = -L \sum_{i=1}^{n} c_i(t) f_i = -\sum_{i-1}^{n} c_i(t) \lambda_i f_i$$

sendo λ_i autovalor associado ao autovetor f_i. O fato dos autovetores serem ortonormais nos leva a

$$\frac{\mathrm{d}c_i}{\mathrm{d}t}(t) = -c_i(t)\lambda_i$$

cuja solução conhecemos:

$$c_i(t) = c_i(0) e^{-\lambda_i t}$$

Para obtermos $c_i(0)$, fazemos

$$\langle u(.,0), f_i \rangle = \langle w(0), f_i \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} c_i(0) f_i, f_i \right\rangle = c_i(0)$$

Para obtermos λ_i, já sabemos que basta $\lambda_i = \langle h, f_i \rangle$, sendo h o vetor que gera a matriz de convolução. Por exemplo, no nosso caso,

$$h = (2, -1, 0, 0, \cdots, 0, -1)$$

Resumindo: obtemos λ_i, $c_i(0)$, $c_i(t)$ e, finalmente, $w(t)$.

3. Vamos resolver a seguinte EDP utilizando a transformada de Fourier:

$$\begin{cases} u_t + cu_x = 0, & (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \qquad (1) \\ u(x,0) = f(x), & x \in \mathbb{R} \qquad (2) \end{cases}$$

f periódica com período 2π.

A partir da Equação 1, podemos aplicar a transformada de Fourier, considerando algumas propriedades. A derivada parcial em relação a t não importa, então podemos transformar dentro dessa derivada. Além disso, a transformação da derivada parcial de u em relação a x é igual a $ik \cdot \hat{u}$. Sendo assim:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}u(x,t) &= -c\frac{\partial}{\partial x}u(x,t)\\ \frac{\partial}{\partial t}\hat{u}(k,t) &= -cik \cdot \hat{u}(k,t)\end{aligned}$$

Temos agora uma EDO (em t) cuja solução é conhecida:

$$\hat{u}(k,t) = \hat{u}(k,0)e^{-cikt}$$

Como $u(x,0) = f(x)$, vale que $\hat{u}(k,0) = \hat{f}(k)$. Então:

$$\hat{u}(k,t) = \hat{f}(k)e^{-cikt}$$

Vamos montar agora a série de Fourier de u:

$$\begin{aligned}u(x,t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{u}(k,t)e^{ikx}\\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k)e^{-cikt}e^{ikx}\\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k)e^{ik(x-tc)}\end{aligned}$$

Apenas por organização, vamos criar uma função g tal que $g(y,t) = u(y + tc, t)$. Então:

$$\begin{aligned}g(y,t) &= u(y+tc,t)\\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k)e^{iky}\\ &= f(y)\end{aligned}$$

afinal f é periódica com periódo 2π.

Concluímos que $u(y + tc, t) = f(y)$, ou melhor,

$$u(x, t) = f(x - tc)$$

Veja que essa função satisfaz as condições iniciais:

- $u_t(x, t) + cu_x(x, t) = f'(x - tc)(-c) + cf'(x - tc) = 0$
- $u(x, 0) = f(x)$

4. Vamos resolver a seguinte EDP pelo método de separação de variáveis:

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, & (x,t) \in (0, L) \times \mathbb{R}_+^* \quad (3) \\ u(x, 0) = \sin(5x), & x \in (0, L) \quad (4) \\ u_t(x, 0) = 0, & x \in (0, L) \quad (5) \end{cases}$$

Iniciamos supondo $u(x, t) = X(x)T(t)$. Observe a equação 4. Dela, concluímos que

$$X(x)T(0) = \sin(5x) \Rightarrow X(x) = \frac{\sin(5x)}{T(0)}$$

Observe que não vale que $T(0) = 0$, pois senão $\sin(5x) = 0$ sempre. Por isso vale a divisão.

Pela equação 3:

$$\begin{aligned} u_{tt} = u_{xx} &\Rightarrow X(x)T''(t) = X''(x)T(t) \\ &\Rightarrow \frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} \end{aligned}$$

Fixe x, varie t. Então $\dfrac{T''(t)}{T(t)}$ é constante. Análogo para X. Chamemos essa constante de λ. Pelo fato de que $X''(x) = \lambda X(t)$, além de que sabemos a expressão de $X(t)$, temos que $\lambda = -25$.

Vamos desenvolver agora $T''(t) = \lambda T(t) = -25T(t)$. Estamos resolvendo uma EDO de 2ª ordem homogênea. Busquemos as raízes de

$$y^2 + 25 = 0$$

Então as raízes são $\pm 5i$, de modo que a solução geral dessa EDO é

$$\begin{aligned} T(t) &= e^{0t}(A\cos(5t) + B\sin(5t)) \\ &= A\cos(5t) + B\sin(5t) \end{aligned}$$

Vamos utilizar a equação 5 para nos ajudar a determinar o coeficiente B.

$$\begin{aligned} u_t(x,0) = 0 &\Rightarrow X(x)T'(0) = 0 \\ &\Rightarrow T'(0) = 0 \end{aligned}$$

Ora, se não fosse isso, então $X(x) = 0$, o que não faz sentido.

$$\begin{aligned} T'(0) = 0 &\Rightarrow -5A\sin(0) + 5B\cos(0) = 0 \\ &\Rightarrow B = 0 \\ &\Rightarrow T(t) = A\cos(5t) \end{aligned}$$

Concluímos, portanto, que

$$u(x,t) = X(x)T(t) = \frac{\sin(5x)}{A\cos(0)}A\cos(5t) = \cos(5t)\sin(5x)$$

Observe que essa função satisfaz a todas as condições iniciais.

Exercícios computacionais

1. O programa para o Afinador de Fourier foi escrito em *Matlab* e pode ser conferido no Apêndice A.

   O programa toma como entrada o diretório do arquivo, lê o arquivo, calcula a transformada de Fourier do vetor, extrai a frequência com maior amplitude e calcula a frequência real com maior amplitude.

   Para o áudio *CordaViolao2.wav*, o programa detectou predominância da frequência 331 Hz, que representa uma nota E, provavelmente a corda 1 do violão.

2. (a) O gráfico dos pontos (x_i, y_i) pode ser observado na Figura 1.

   (b) Seja $x_0 = (x_1, \cdots, x_n)$. Usando da analogia de que esse vetor representa as temperaturas iniciais nos vértices de um grafo circular com n vértices, vamos utilizar a equação do calor para calcular as temperaturas para diferentes instantes de tempo, na esperança que as diferenças de temperatura sejam suavizadas, ou seja, o gráfico dos pontos seja suavizado.

   Vamos utilizar a solução para a equação do calor, $x(t) = e^{-ctL}x_0$, para calcular as temperaturas e suavizar o gráfico. Segue:

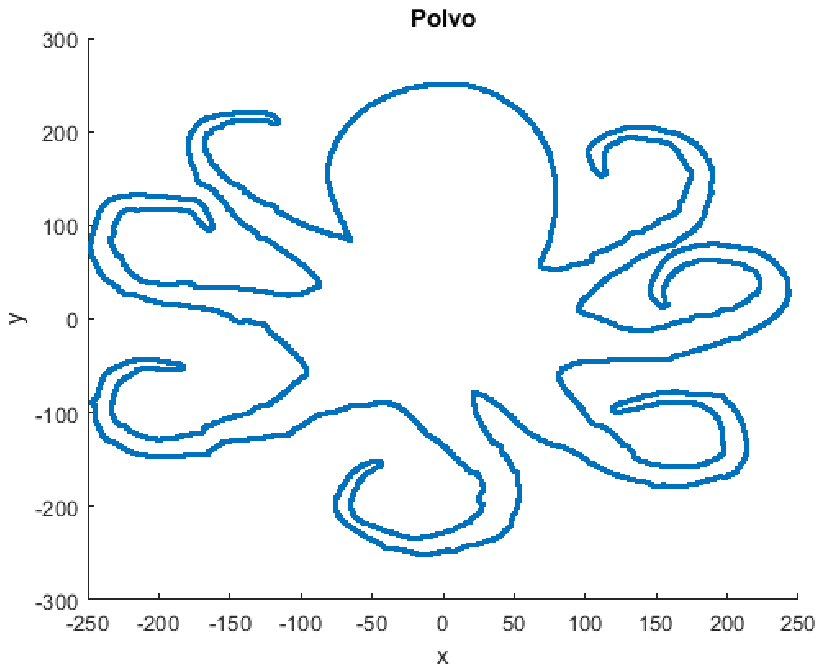

Figura 1: Pontos (x_i, y_i).

$$
\begin{aligned}
x(t) &= e^{-ctL}x_0 \\
&= Fe^{D}F^{-1}x_0 \\
&= Fe^{D}\text{fft}(x_0)
\end{aligned}
$$

sendo fft a transformada discreta de Fourier, F a matriz com as colunas sendo a base de Fourier e D uma matriz diagonal com os autovalores de $-ctL$.

É conhecido que os autovalores de $-ctL$ são fft$(-cth)$, sendo h a primeira linha de L.

Considere que $x_{0,F}$ representa x_0 na base de Fourier. Veja que a multiplicação $e^D \cdot x_{0,F}$ é fácil de ser calculada: basta realizar a multiplicação elemento a elemento de

$$\exp(\lambda) = \exp((\lambda_1, \cdots, \lambda_n)) = \left(e^{\lambda_1}, \cdots, e^{\lambda_n}\right)$$

ou seja, o vetor com a exponencial de cada autovalor de $-ctL$, e

$$x_{0,F}$$

nosso vetor x_0 na base de Fourier. É o que será feito.

Sendo assim, ao final, basta aplicar ifft para voltarmos à base canônica:

$$\begin{aligned} x(t) &= Fe^{D}\text{fft}(x_0) \\ &= \text{ifft}\left(e^{D}\text{fft}(x_0)\right) \end{aligned}$$

Foram implementadas funções em *Matlab* que fazem esse cálculo e constroem o gráfico. O código pode ser conferido no Apêndice B. Nas Figuras 2, 3 e 4, podemos ver a suavização dos pontos para diferentes valores de t.

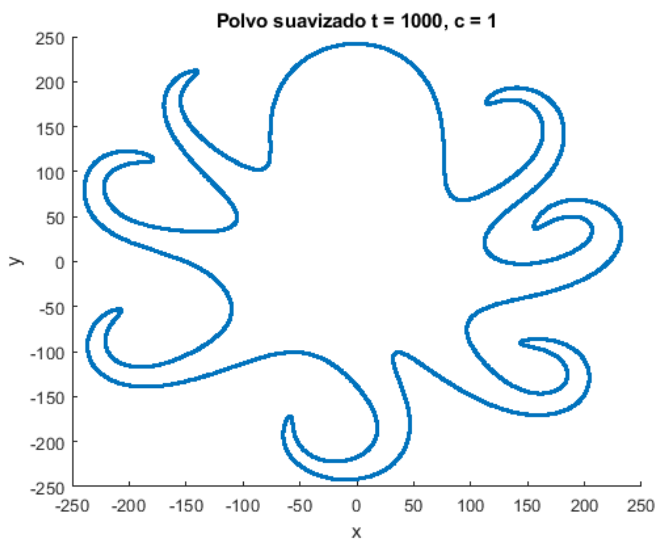

Figura 2: Pontos (x_i, y_i) suavizados para $c = 1$, $t = 1000$.

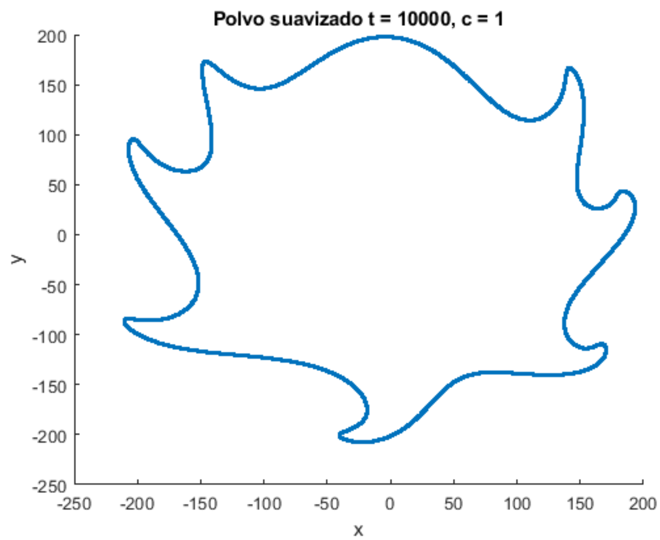

Figura 3: Pontos (x_i, y_i) suavizados para $c = 1$, $t = 10000$.

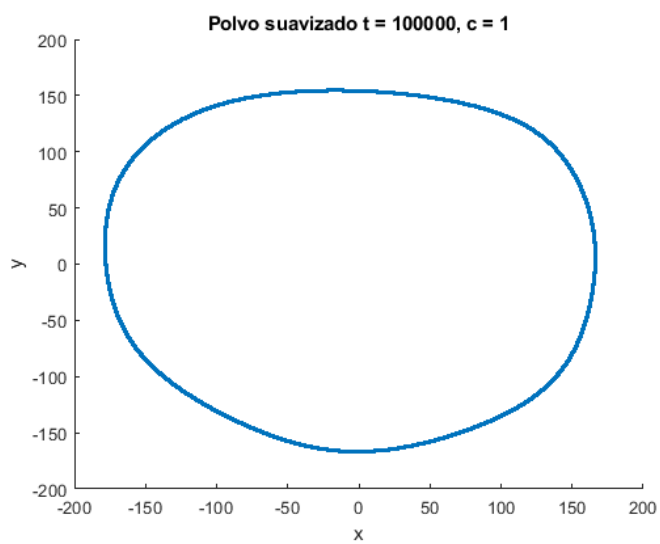

Figura 4: Pontos (x_i, y_i) suavizados para $c = 1$, $t = 100000$.

A Afinador de Fourier

```
function freq = fourier_tuner(filepath)
    [y, Fs] = audioread(filepath);
    yhat = fft(y);
    % This is because of symmetry of Fourier coefficients
    max_freq = ceil(length(yhat)/2);
    [~, cicles] = max(abs(yhat(1:max_freq)));
    freq = cicles/(length(y)/Fs);
end
```

B Suavização do polvo

```
function smooth(M, t, c, h)
   M = csvread("Polvo.csv");
    x0 = M(:, 1);
    y0 = M(:, 2);
    x = u_t(x0, h, c, t);
    y = u_t(y0, h, c, t);
    scatter(x, y, 8, "filled");
    hold on
    xlabel("x");
    ylabel("y");
    title("Polvo suavizado t = " + string(t) + ", c = " + string(c));
    hold off
end
function u = u_t(u0, h, c, t)
    lambda = fft(-c*t*h);
    exp_lambda = exp(lambda);
    u1 = fft(u0);
    u2 = exp_lambda.*u1;
    u = ifft(u2);
end
```