

# Estimando a prevalência de uma doença a partir de um teste diagnóstico

Lucas Emanuel Resck Domingues

Lucas Machado Moschen

Vitor Bitarães

Escola de Matematica Aplicada (EMAp), Getulio Vargas Foundation.

28 de Abril de 2020

## Introdução

Suponha que desejamos estimar a proporção  $\theta \in (0, 1)$  de indivíduos infectados com um determinado patógeno em uma população. Suponha ainda que dispomos de um teste laboratorial, que produz o resultados  $r = \{-, +\}$  indicando se o indivíduo ( $y_i$ ) é livre (0) ou infectado (1). Se o teste fosse perfeito, poderíamos escrever a probabilidade de observar  $y = \sum_{i=1}^n y_i$  testes positivos em  $n$  testes realizados como<sup>1</sup>

$$\Pr(y \mid \theta, n) = \binom{n}{y} \theta^y (1 - \theta)^{n-y}. \quad (1)$$

Infelizmente, o teste não é perfeito, acertando o diagnóstico com probabilidades fixas da seguinte forma<sup>2</sup>

$$\Pr(r = + \mid y_i = 0) := 1 - u, \quad (2)$$

$$\Pr(r = - \mid y_i = 1) := 1 - v, \quad (3)$$

de modo que agora, assumindo  $u + v > 1$ , escrevemos<sup>3</sup>

$$\begin{aligned} \Pr(r = + \mid \theta, u, v) &= \Pr(r = + \mid y_i = 0) \Pr(y_i = 0) + \Pr(r = + \mid y_i = 1) \Pr(y_i = 1) \\ &= \Pr(r = + \mid y_i = 0) \Pr(y_i = 0) + (1 - \Pr(r = - \mid y_i = 1)) \Pr(y_i = 1) \\ &= (1 - u)(1 - \theta) + (1 - (1 - v))\theta \\ &= 1 - u + \theta(u + v - 1) \end{aligned} \quad (4)$$

e podemos reescrever a probabilidade em (1):

$$\Pr(y \mid \theta, n, u, v) = \binom{n}{y} [1 - u + \theta(u + v - 1)]^y [u - \theta(u + v - 1)]^{n-y}. \quad (5)$$

## Problema(s)

- Escolha e justifique uma distribuição *a priori* para  $\theta$  – lembre-se que neste exercício  $u$  e  $v$  são fixos;
- Derive  $\Pr(\theta \mid y, n, u, v)$ ;
- Suponha que  $y = 4$  e  $n = 5000$ . Qual a média *a posteriori* de  $\theta$ ? Produza intervalos de credibilidade de 80, 90 e 95% para  $\theta$ .
- Bônus.** Que melhorias você faria neste modelo? Que outras fontes de incerteza estão sendo ignoradas?

---

<sup>1</sup>Porquê?

<sup>2</sup>Naturalmente,  $u, v \in (0, 1) \times (0, 1)$ , levando em conta a restrição  $u + v > 1$ .

<sup>3</sup>Exercício bônus: mostre porquê.

## Dicas

- Lembrem-se de justificar **todas** as suas respostas, tanto matematica quanto estatisticamente. Isto inclui a escolha de métodos numéricos, se estes forem necessários;
- O tópico abordado aqui é bastante conhecido e existe farta literatura. As palavras-chave são: diagnostic tests, sensitivity, specificity, Bayesian estimation. Por enquanto, não vamos recomendar os artigos pertinentes para que o problema não perca a graça uma vez que vocês vejam a solução. Quando formos discutir as abordagens para o problema, revelaremos alguns dos artigos que podem ser consultados;
- Vocês podem consultar os capítulos 7.2 e 7.3 de [DeGroot and Schervish \(2012\)](#) para o item a) e também o capítulo 3 de [McElreath \(2020\)](#) para os outros itens.
- Procurem se divertir com os problemas nas notas de rodapé; eles valem o esforço e envolvem apenas relembrar conceitos de probabilidade.

## Referências

DeGroot, M. H. and Schervish, M. J. (2012). *Probability and statistics*. Pearson Education.

McElreath, R. (2020). *Statistical rethinking: A Bayesian course with examples in R and Stan*. CRC press.