Introdução

Nesse capítulo introduzimos as noções de vetor e de matriz, discutimos um pouco as relações entre esses objetos. Introduzimos sistemas lineares, espaço linha e espaço coluna. Finalizamos com um problema interessante. Como esse é um capítulo introdutório e um pouco motivacional nem tudo precisa ser plenamente entendido. Algumas coisas são ditas aqui apenas para motivar sua curiosidade.

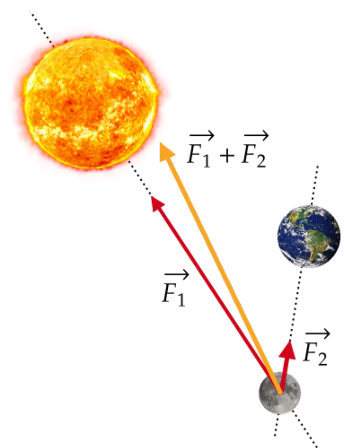

Figura 1: Forças agindo sobre a Lua num sistema com Terra, Sol e Lua.

Vetores

É provável que um físico, uma cientista da computação e um matemático discordem sobre o que é um *vetor*.

Na física, em especial na mecânica clássica, vetores são usados para caracterizar grandezas como força, velocidade, aceleração e distância. Essas grandezas dependem não apenas de um valor numérico associado, mas também de sentido e direção. Como exemplo, considere o sistema com Terra, Sol e Lua representado (em duas dimensões e sem escala) na Figura 1. A força $\overrightarrow{F_1}$ entre a Lua e o Sol é maior que a força $\overrightarrow{F_2}$ entre Lua e Terra (e por isso a flecha tem maior comprimento), além disso, a orientação também importa. Também é comum operar somando as várias forças que agem sobre um mesmo corpo.

Na computação vetores são simples listas ordenadas de números. Por exemplo,

$$v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} \text{ e } w = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

É comum querer somar vetores ou multiplicar vetores por escalares, por exemplo

$$5v - w = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 11 \\ 17 \end{bmatrix}.$$

Além disso, ao contrário dos vetores que encontramos na física, que normalmente tem 3 ou 4 coordenadas, é comum encontrar, na computação, vetores com milhões e até bilhões de entradas[1].

[1] O que existe em comum entre as noções de "coordenadas"e de "entrada"?

Já na matemática, um vetor é um elemento de um espaço vetorial V. Eu não espero que essa frase faça sentido nesse momento e também não pretendo elaborar sobre a definição formal de espaço vetorial por enquanto. Pelo contrário, vou ser evasivo e contar uma história.

No livro *Os elementos*, Euclides começa com as seguintes definições (a tradução é livre):

(i) Ponto é o que não tem partes, ou o que não tem grandeza alguma.

(ii) Linha é o que tem comprimento sem largura. As extremidades da linha são pontos.

(iii) Linha reta é aquela que está posta egualmente entre as suas extremidades.

(iv) Superfície é o que tem comprimento e largura.

E continua definindo extremidade, superfície plana, ângulo, etc. Algumas páginas depois Euclides enuncia seus famosos postulados:

(i) Pode-se traçar uma única reta ligando quaisquer dois pontos.

(ii) Pode-se continuar (de uma maneira única) qualquer reta finita continuamente em uma reta.

(iii) Pode-se traçar um círculo com qualquer centro e com qualquer raio.

(iv) Todos os ângulos retos são iguais.

(v) Se uma reta, ao cortar outras duas, forma ângulos internos, no mesmo lado, cuja soma é menor do que dois ângulos retos, então estas duas retas encontrar-se-ão no lado onde estão os ângulos cuja soma é menor do que dois ângulos retos.

Figura 2: Circle Limit III, Escher, 1959. Uma representação artística do modelo do disco de Poincaré.

O quinto postulado de Euclides, conhecido como o *postulado das paralelas*, foi motivo de polêmica durante toda história da geometria, atravessando dois mil anos: alguns achavam que seria possível provar o postulado partindo dos outros quatro, outros que ele era independente. Essa longa discussão motivou a descoberta de geometrias alternativas onde o quinto postulado é substituído por outros. Dessa forma, até mesmo na matemática moderna, os postulados de Euclides (e suas alternativas) ainda sobrevivem.

Por outro lado, as definições feitas por Euclides não fazem parte da formulação moderna da geometria: são recursivas, confusas e até vagas. O que seria uma parte de um ponto? O que seria ter grandeza? O que é uma extremidade? O que é ter comprimento e largura? E comprimento, mas não largura?

Para evitar definições recursivas ou vagas, e também para construir uma teoria tão generalista e abstrata quanto possível, *no lugar de explicar o que é um vetor vamos dizer o que esperamos de um vetor*. Levando em consideração as noções de vetor da física e da computação parece natural dizer que vetores são objetos que podemos somar e multiplicar por escalares. Ou seja, se v, w são vetores e α, β são números reais, gostaríamos que

$$\alpha v + \beta w$$

também seja um vetor. De fato, vamos exigir mais algumas propriedades, como comutatividade da soma, existência de um elemento neutro para a soma, etc. Veremos isso mais detalhadamente nas próximas páginas. Veremos também que para uma matemática, não só os vetores da física e da computação são exemplos de vetores, mas também é possível enxergar funções ou mesmo sequências de Fibonacci como vetores.

Matrizes e sistemas lineares

Claramente, matrizes são arranjos retangulares de números, por exemplo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 11 & 40 \\ 6 & -1 & 8 & \frac{4}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{bmatrix}.$$

Mais do que isso, matrizes estão normalmente associadas à sistemas lineares. Por exemplo, podemos representar o sistema de equações lineares

$$\begin{cases} x + 7y + 11z + 40w = 1 \\ 6x - y + 8z + \frac{4}{5}w = 8 \\ z + 7w = 0 \end{cases}$$

como

$$\begin{bmatrix} 1 & 7 & 11 & 40 \\ 6 & -1 & 8 & \frac{4}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40 \\ 8 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Muitas coisas aconteceram nessa última passagem. Primeiro recordamos que para multiplicar uma matriz de l linhas e c colunas por um vetor é necessário que o vetor tenha c entradas. Depois que a multiplicação é feita pegando cada linha da matriz, pareando com o vetor, multiplicando coordenada a coordenada e somando. Por fim, usamos também que dois vetores são iguais quando suas entradas são iguais.

É muito comum representar um sistema linear de maneira compacta simplesmente escrevendo

$$A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b} \tag{1}$$

onde A é como antes,

Tome cuidado para não confundir $\overrightarrow{x}$ com x.

$$\overrightarrow{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} \text{ e } \overrightarrow{b} = \begin{bmatrix} 40 \\ 8 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Olhando com atenção para a equação (1), em especial para o lado esquerdo da igualdade, percebemos que matrizes são, na verdade, *maneiras de mapear vetores em outros vetores*. Basta substituir valores diferentes de $\overrightarrow{x}$ e perceber que acharemos diferentes valores para $A\overrightarrow{x}$. Como veremos a seguir, matrizes não apenas mapeiam vetores em outros vetores, mas fazem isso de maneira linear. Ou seja, dados dois vetores $\overrightarrow{x}$, $\overrightarrow{y}$ e um escalar α, vale que

$$A\left(\alpha\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}\right) = \alpha A\overrightarrow{x} + A\overrightarrow{y}.$$

Num segundo momento, veremos que matrizes são formas de representar *transformações lineares*, que são simplesmente funções capazes de mapear vetores em outros vetores preservando as propriedades de soma e multiplicação por escalar. Veremos, por exemplo, que a derivada é um exemplo de transformação linear.

Interpretação geométrica de sistemas lineares

Tome o seguinte sistema linear

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ 2x - y = -1 \end{cases},$$

cuja solução é $x = 1$ e $y = 3$.

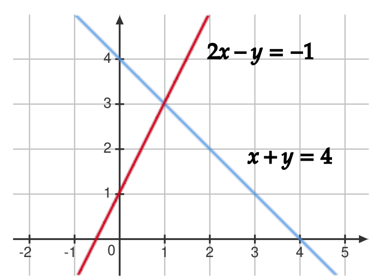

Figura 3: Representação geométrica das linhas de um sistema linear.

Nesse caso, é fácil desenhar a reta definida por cada uma das equações no plano, como feito na Figura 3. A solução do sistema é dada pelo ponto de encontro das retas. Em especial, se as retas fossem paralelas não haveria solução. Por outro lado, se as retas estivessem sobrepostas haveria infinitas soluções. Um sistema com três variáveis poderia ser representado num espaço tridimensional[2] e

[2] O que é dimensão?

cada equação definiria um plano[3].

Uma figura mais interessante aparece quando olhamos pras colunas da matriz que representa esse sistema linear. Começamos escrevendo

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}$$

e observamos que

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Ou seja, ao escolher valores para x e y estamos combinando as colunas da matriz $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$. Resolver o sistema é achar os valores de x e y cuja combinação é $\begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}$, como ilustrado na Figura 4.

Nos próximos capítulos veremos que a ideia "combinar vetores" ou mais formalmente *combinações lineares* de vetores tem um papel crucial na teoria que vamos desenvolver.

[3] E um sistema com quatro ou mais variáveis?

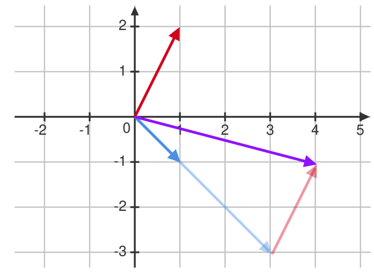

Figura 4: Representação geométrica das colunas de um sistema linear.

Dois problemas

Embora o leitor ainda não tenha as ferramentas necessárias para resolver os problemas que seguem, vale a pena pensar um pouco sobre eles e entender as dificuldades envolvidas.

Problema um: tráfego urbano

Sejam A, B, C, D junções de ruas como na Figura 5. O fluxo total de carros passando por A em uma hora é de 50 carros em sentido positivo (ou seja, entram mais carros para dentro do sistema do que saem). O fluxo total por B é de 100 carros em sentido negativo, por C de 20 carros no sentido positivo e por D de 80 carros no sentido negativo. Quantos carros passam pela estrada entre A e B por hora? E se consideramos o arranjo da Figura 6? E o da Figura 7?

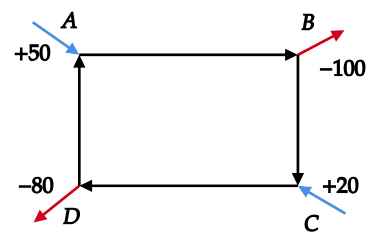

Figura 5: Possível configuração para o tráfego.

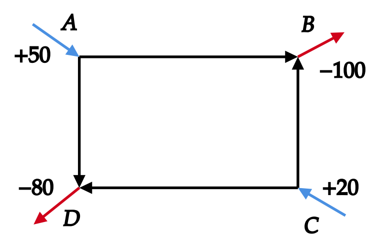

Figura 6: Outra possível configuração para o tráfego.

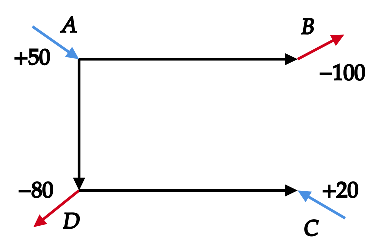

Figura 7: E mais uma possível configuração para o tráfego.

Problema dois: vírus

Um vírus surgiu na cidade do Rio de Janeiro e se espalha pelo ar. A cada hora existe uma chance de 1 em 5 de uma pessoa sadia se infectar, também existe uma chance de 1 em 10 de uma pessoa infectada conseguir se curar (mas a cura, infelizmente, não é definitiva). Se a infecção começou com 1% da população carioca infectada, o percentual de infectados na cidade vai se estabilizar eventualmente? E se a infecção começar com 5% da população infectada?

Próximos passos

Mesmo que superficialmente, nossa discussão já passou por sistemas planetários, formalismo matemático, funções, sequências de Fibonacci, sistemas lineares, derivadas, tráfego urbano e vírus. Álgebra linear é uma disciplina onipresente na matemática e em qualquer área quantitativa.

O curso tem dois objetivos principais. Na primeira parte do curso discutiremos como operar com vetores e matrizes, desenvolvendo tecnicas e algoritmos para resolver sistemas lineares e outros problemas. Na segunda parte vamos introduzir um formalismo maior e construir uma teoria sobre vetores e transformações lineares.