



UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
ESCOLA DE ENGENHARIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA

TRABALHO COMPUTACIONAL 3: MÉTODOS DE ELEMENTOS E DIFERENÇAS

André Prado Procópio

Lucas Ribeiro da Silva

Milena Terra Lopes

Belo Horizonte - Minas Gerais - Brasil
2025

Resumo

Este trabalho tem como objetivo explorar a solução numérica de problemas unidimensionais governados por equações diferenciais de segunda ordem, utilizando o Método dos Elementos Finitos (FEM) e o Método das Diferenças Finitas (FDM). Foram implementadas duas aplicações específicas: uma solução manufaturada para validação dos métodos e um problema físico de um capacitor composto por dois meios dielétricos diferentes. Os resultados obtidos permitiram a comparação quantitativa entre FEM e FDM, através da análise dos erros numéricos e taxas de convergência para diferentes níveis de refinamento da malha. Observou-se também como os métodos capturam adequadamente o comportamento físico na interface entre diferentes meios materiais, especialmente a descontinuidade na derivada da solução. As simulações demonstraram que ambos os métodos convergem para as soluções esperadas, com características particulares quanto à precisão e eficiência computacional.

Palavras-chave: Método dos Elementos Finitos, Método das Diferenças Finitas, Convergência, Meios Materiais.

Metodologia

Atividade 1 - Solução Manufaturada

Para avaliação dos métodos numéricos, foi desenvolvida uma solução manufaturada que atende aos requisitos de continuidade $C^2([0,1])$. Esta função combina elementos polinomiais, trigonométricos e exponenciais, sendo definida como:

$$u(x) = xe^x \sin(4\pi x) + x^5/5 - 6x^3 + 3x^2 - e^{-x} + \cos(\pi x)$$

A partir desta solução, calculou-se sua segunda derivada, que representa o termo fonte $f(x)$ da equação diferencial:

$$u_{xx}(x) = (-16\pi^2 x + x + 2)e^x \sin(4\pi x) + (1 + x)8e^x \cos(4\pi x) + 4x^3 - 36x + 6 - e^{-x} - \pi^2 \cos(\pi x)$$

O problema de valor de contorno foi então definido como: encontrar $u(x)$ tal que $u_{xx}(x) = f(x)$ para $x \in (0,1)$, com condições de contorno $u(0) = u_e(0)$ e $u(1) = u_e(1)$.

A primeira abordagem utilizada foi o Método de Elementos Finitos (FEM). Partindo da forma fraca do problema, obtida multiplicando-se a equação diferencial por uma função de teste $w(x)$ e integrando por partes, chegou-se à formulação:

$$\int_0^1 w_x \cdot u_x \, dx = \int_0^1 w \cdot f \, dx$$

O domínio $[0,1]$ foi discretizado em n elementos com $n + 1$ nós igualmente espaçados. Utilizaram-se funções de forma lineares por partes, caracterizadas pela

propriedade $N_i(x_j) = \delta_{ij}$ (delta de Kronecker). Para cada elemento, a matriz de rigidez local foi construída como:

$$K_e = (1/h_e) \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

onde h_e representa o comprimento do elemento. O vetor de força elementar foi calculado através da integração numérica utilizando o método quad da biblioteca SciPy:

$$F_e = \left\{ \int f(x) \cdot N_1(x) dx, \int f(x) \cdot N_2(x) dx \right\}$$

A matriz global e o vetor de força foram montados somando-se as contribuições de cada elemento nas posições correspondentes aos graus de liberdade globais. As condições de contorno de Dirichlet foram impostas modificando-se diretamente as linhas correspondentes na matriz global e no vetor de força.

Em paralelo, implementou-se o Método de Diferenças Finitas (FDM), aproximando a derivada segunda através do stencil de três pontos:

$$u_{xx}(x_i) \approx [u(x_{i-1}) - 2u(x_i) + u(x_{i+1}))]/h^2$$

Esta aproximação resultou em um sistema tridiagonal para os pontos internos do domínio, enquanto as condições de contorno foram incorporadas ao lado direito da equação para os pontos adjacentes às fronteiras.

Ambos os métodos foram aplicados com diferentes níveis de refinamento: $n = 4, 6, 8, 16$ e 32 elementos. Para avaliação quantitativa, calculou-se o erro médio quadrático (RMSE) entre as soluções numéricas e a solução exata para cada configuração. Os

resultados para $n = 6$ foram visualizados graficamente, comparando-se as soluções obtidas com a solução exata, assim como os erros pontuais ao longo do domínio.

A análise de convergência foi realizada em escala logarítmica, plotando-se o RMSE em função do número de elementos para verificar a taxa de convergência de cada método. Esta abordagem permitiu avaliar sistematicamente a precisão dos métodos FEM e FDM e sua capacidade de aproximar a solução exata com o refinamento da malha.

Atividade 2 - Um capacitor composto por dois dielétricos

A segunda atividade consistiu na resolução de um problema eletrostático unidimensional, envolvendo a distribuição do potencial elétrico $\phi(z)$ em um capacitor formado por dois meios dielétricos com propriedades distintas. O domínio foi definido no intervalo $\Omega = (0, L)$, com $L = 1$, sob as condições de contorno de Dirichlet $\phi(0) = V_a = 10V$ e $\phi(L) = V_b = 0V$.

A equação diferencial governante do problema é dada por:

$$\frac{d}{dz} (\epsilon_r(z) \frac{d\phi(z)}{dz}) = 0$$

onde $\epsilon_r(z)$ representa a permissividade relativa do meio, caracterizada por uma função descontínua:

$$\varepsilon_r(z) = 3 \quad \text{se } z < \frac{L}{2},$$

$$\varepsilon_r(z) = 1 \quad \text{se } z \geq \frac{L}{2}.$$

Para obter a forma fraca da equação, multiplicou-se a equação diferencial por uma função de teste $w(z)$ e realizou-se a integração no domínio. Devido à descontinuidade da permissividade em $z = L/2$, a integral foi separada em duas regiões:

$$\int_0^{L/2} w(z) \cdot d/dz[\varepsilon_r(z) \cdot d\phi(z)/dz] dz + \int_{L/2}^L w(z) \cdot d/dz[\varepsilon_r(z) \cdot d\phi(z)/dz] dz = 0$$

Aplicando-se integração por partes em cada região e considerando que $w(0) = w(L) = 0$ (funções de teste nulas nas fronteiras de Dirichlet), bem como a continuidade do potencial ϕ e do deslocamento elétrico $\varepsilon_r \cdot d\phi/dz$ na interface, obteve-se:

$$\int_0^{L/2} 3 \cdot w'(z) \cdot \phi'(z) dz + \int_{L/2}^L 1 \cdot w'(z) \cdot \phi'(z) dz = 0$$

Esta equação pode ser expressa de forma compacta como:

$$\int_0^L \varepsilon_r(z) \cdot w'(z) \cdot \phi'(z) dz = 0$$

A discretização do domínio foi realizada com $n = 101$ pontos (número ímpar) para garantir a presença de um nó exatamente na interface $z = L/2$, conforme requerido pelo enunciado do problema. Esta escolha é fundamental para capturar adequadamente a descontinuidade do material.

Na implementação do Método de Elementos Finitos (FEM), utilizaram-se elementos lineares por partes. A matriz de rigidez elementar foi definida como:

$$K_e = \varepsilon_{r,e}/h_e \cdot [1 \ -1; -1 \ 1]$$

onde $\varepsilon_{r,e}$ representa a permissividade no elemento e h_e seu comprimento. Para determinar a permissividade de cada elemento, adotou-se o valor correspondente ao ponto médio do elemento:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{r,e}(z) &= 3 & \text{se } z_{\text{médio}} < \frac{L}{2}, \\ \varepsilon_{r,e}(z) &= 1 & \text{se } z_{\text{médio}} \geq \frac{L}{2}. \end{aligned}$$

A matriz global foi construída pela montagem das contribuições elementares, e as condições de contorno de Dirichlet foram aplicadas diretamente no sistema resultante.

Para o Método de Diferenças Finitas (FDM), o tratamento da descontinuidade foi particularmente cuidadoso. A aproximação da equação diferencial em um ponto interno i resultou em:

$$[\varepsilon_r(z_i - 1/2) \cdot (\varphi_i - 1 - \varphi_i) - \varepsilon_r(z_i + 1/2) \cdot (\varphi_i - \varphi_i + 1)]/h^2 = 0$$

Onde $\varepsilon_r(z_i \pm 1/2)$ representa a permissividade nos pontos intermediários entre os nós da malha. Este esquema especial garante a conservação dos fluxos na interface entre os diferentes meios, capturando corretamente o comportamento físico do problema.

As soluções obtidas por ambos os métodos foram visualizadas graficamente e comparadas, com atenção especial ao comportamento na interface $z = L/2$. Além da

comparação visual, foram calculadas as derivadas (campo elétrico) em ambos os lados da interface para verificar a relação esperada: uma razão de aproximadamente 3 entre as magnitudes do campo nos dois meios, consistente com a descontinuidade da permissividade. Esta análise permitiu avaliar a capacidade dos métodos numéricos de representar fielmente fenômenos físicos em meios descontínuos.

Resultados

Resultado - Atividade 1

A implementação da solução manufaturada possibilitou a avaliação quantitativa dos métodos numéricos empregados. A função $u(x) \in C^2([0,1])$ permitiu a derivação exata do termo fonte $f(x) = u''(x)$, viabilizando uma comparação precisa entre as soluções numéricas e a solução analítica conhecida.

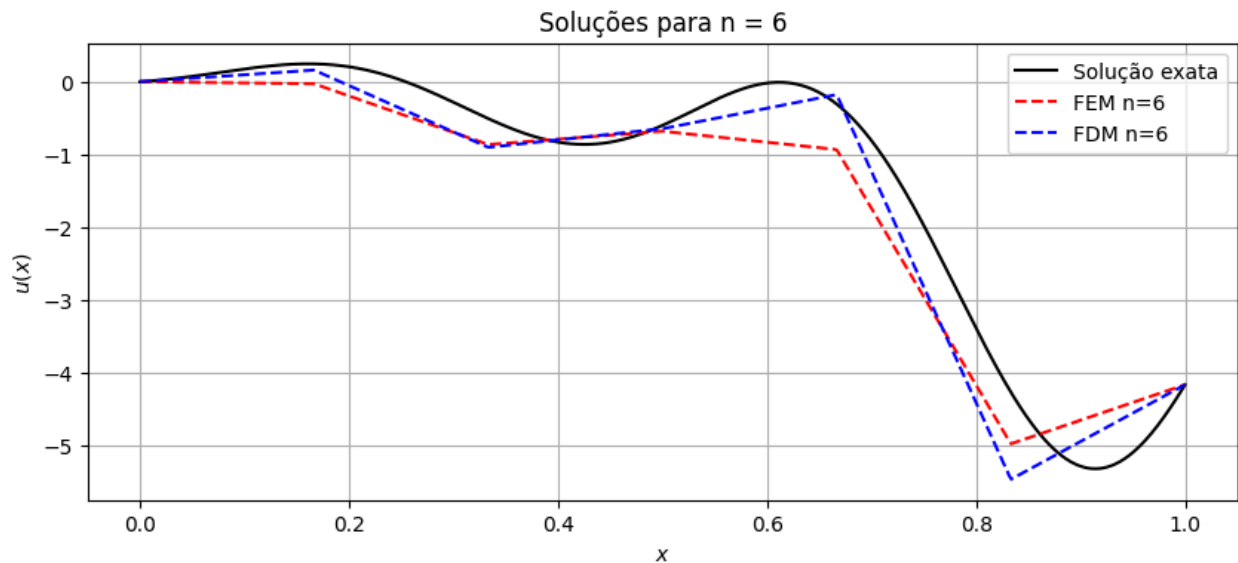


Figura 1

Para a discretização com $n = 6$ elementos, a Figura 1 apresenta as soluções obtidas pelos métodos FEM e FDM em comparação com a solução exata. Observa-se que ambos os métodos capturam a tendência geral da função, mas apresentam desvios em regiões de alta curvatura, particularmente no intervalo $x \in [0,6, 0,9]$. Nesta região, o FDM apresenta oscilações mais acentuadas, enquanto o FEM demonstra um comportamento mais suave. Na extremidade próxima a $x = 1$, nota-se que o FDM tende a exagerar os valores mínimos da função, enquanto o FEM suaviza excessivamente a curvatura.

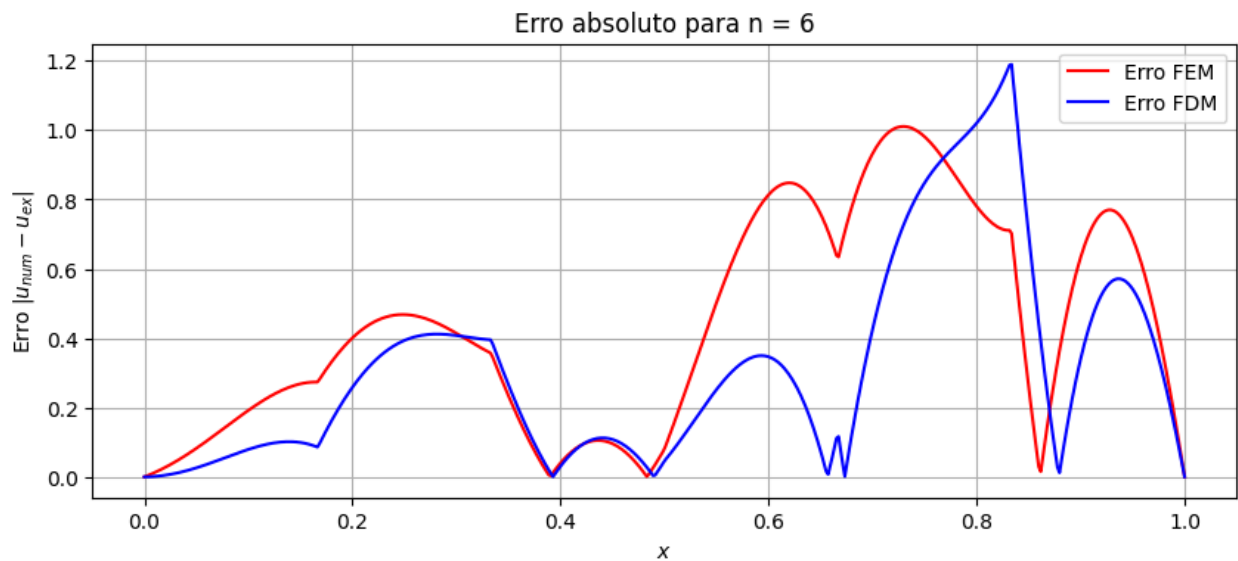


Figura 2

A Figura 2 ilustra o erro absoluto ponto a ponto para ambos os métodos com $n = 6$. Esta visualização revela que os maiores erros ocorrem em regiões onde a solução exata apresenta rápidas variações na segunda derivada. Para $x > 0,5$, o FEM exhibe erros mais distribuídos e de magnitude consistente, enquanto o FDM apresenta picos de erro mais acentuados, especialmente próximo a $x = 0,8$, onde atinge um erro absoluto superior a 1,2. Esta análise confirma a tendência do FEM de produzir uma solução mais suave, enquanto o FDM pode gerar aproximações com erros mais localizados.

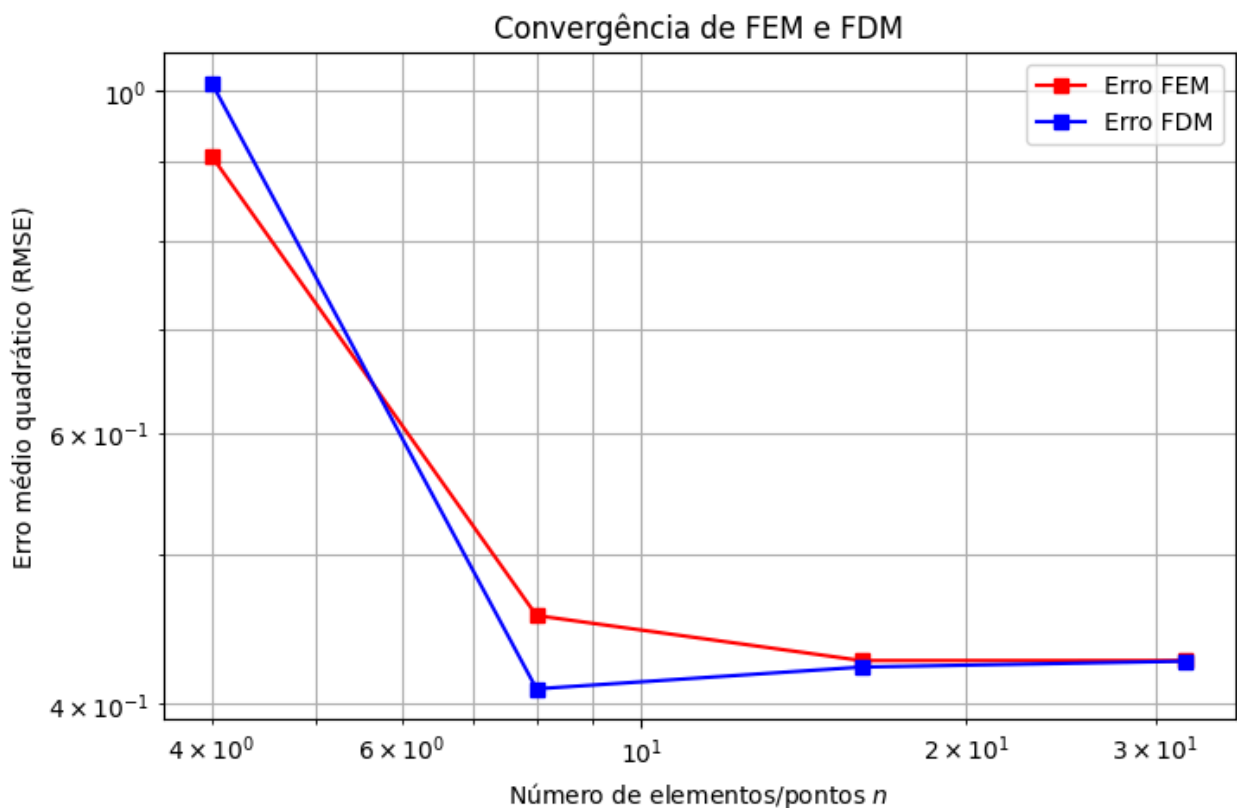


Figura 3

A análise de convergência para diferentes níveis de refinamento ($n = 4, 8, 16, 32$) é apresentada na Figura 3 em escala logarítmica. Os resultados demonstram que:

- Ambos os métodos apresentam redução significativa do erro médio quadrático (RMSE) conforme o refinamento da malha, confirmando a convergência numérica esperada.
- Para malhas grosseiras ($n = 4$), o FEM apresenta erro menor (aproximadamente 0,73) comparado ao FDM (aproximadamente 1,05), demonstrando maior robustez em discretizações menos refinadas.
- A partir de $n = 8$, as curvas de convergência se cruzam, com o FDM apresentando uma taxa de convergência ligeiramente superior nesta região.
- Para discretizações mais refinadas ($n \geq 16$), os métodos convergem para valores de erro semelhantes, em torno de 0,42-0,43, com o FDM apresentando erro marginalmente inferior.

A análise das taxas de convergência aproximadas, extraídas da inclinação das curvas no gráfico log-log, sugere comportamento próximo à convergência de segunda ordem, coerente com a teoria para ambos os métodos utilizando aproximação linear por partes (FEM) e diferenças centrais de segunda ordem (FDM).

O comportamento observado corrobora aspectos teóricos fundamentais: o FEM, baseado em formulação variacional, tende a distribuir o erro de forma mais equilibrada ao longo do domínio e apresenta melhor performance em malhas grosseiras. Já o FDM, fundamentado em aproximações locais, beneficia-se mais significativamente do

refinamento da malha. Para aplicações práticas, esta análise indica que o FEM pode ser preferível em situações com limitações computacionais, enquanto o FDM oferece precisão comparável com implementação mais direta quando refinamento adequado é viável.

Resultado - Atividade 2

A simulação do capacitor com dois meios dielétricos foi realizada utilizando uma discretização com $n = 101$ nós, garantindo a presença de um nó exatamente na interface $z = 0,5$, conforme exigido na atividade. Esta escolha permitiu capturar com precisão a descontinuidade da permissividade relativa $\epsilon_r(z)$.

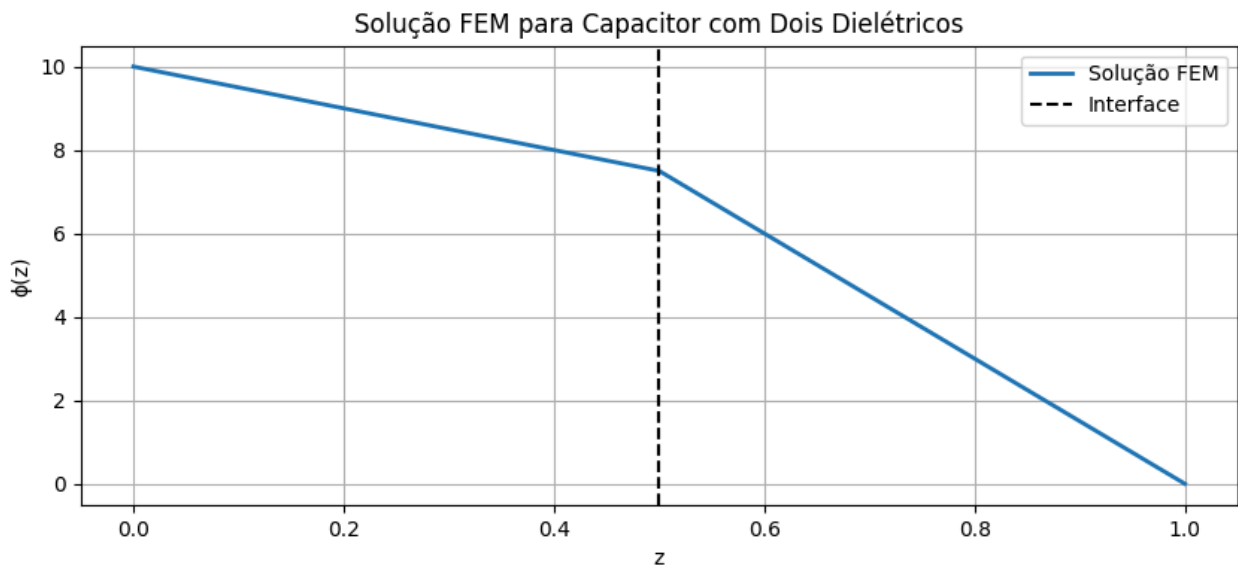


Figura 4

A Figura 4 apresenta a distribuição do potencial elétrico $\phi(z)$ obtida pelo Método de Elementos Finitos (FEM). O potencial decresce de forma contínua de $\phi(0) = 10\text{V}$ até $\phi(1) = 0\text{V}$, como esperado pelas condições de contorno impostas. Observa-se uma característica fundamental do fenômeno físico: a mudança na inclinação da curva exatamente na interface entre os dielétricos ($z = 0,5$). Esta mudança representa a descontinuidade do campo elétrico $E = -d\phi/dz$, que é mais acentuada na região onde $\epsilon_r = 1$ ($z > 0,5$) em comparação com a região onde $\epsilon_r = 3$ ($z < 0,5$). Este comportamento está em conformidade com a equação de conservação da densidade de fluxo elétrico, que estabelece a continuidade de $\epsilon_r \cdot d\phi/dz$ na interface.

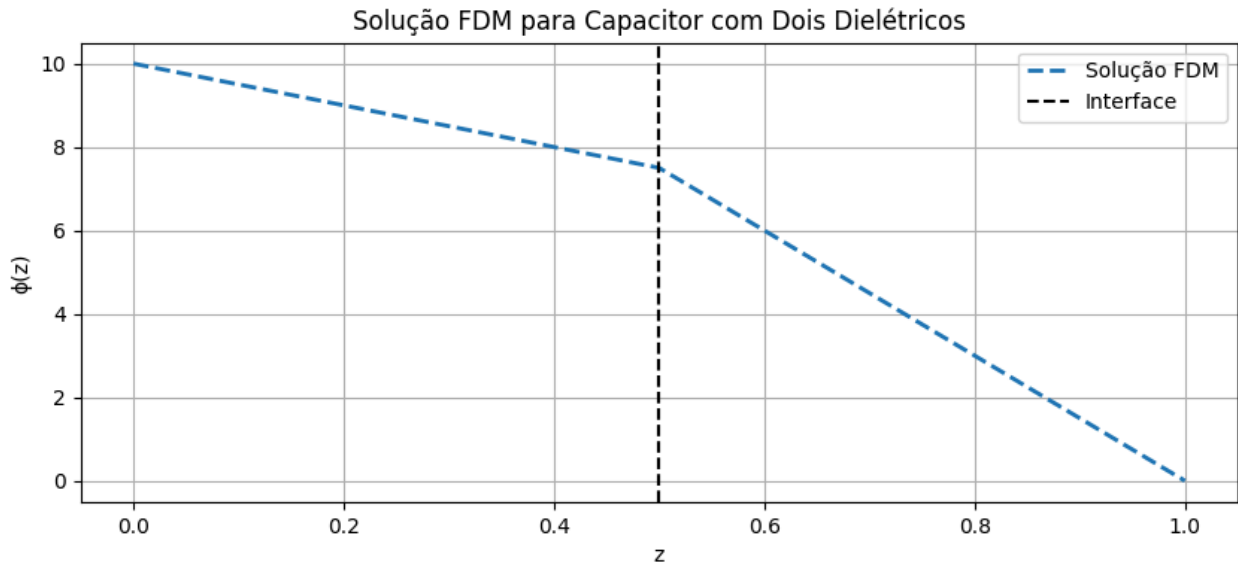


Figura 5

A solução obtida pelo Método de Diferenças Finitas (FDM), apresentada na Figura 5, exibe comportamento similar. Nota-se a mesma característica de mudança de inclinação na interface, com resultados quantitativamente muito próximos aos do FEM.

A discretização especial implementada para o FDM, considerando os valores de permissividade nos pontos médios entre os nós, mostrou-se eficaz para capturar corretamente o comportamento físico na descontinuidade do material.

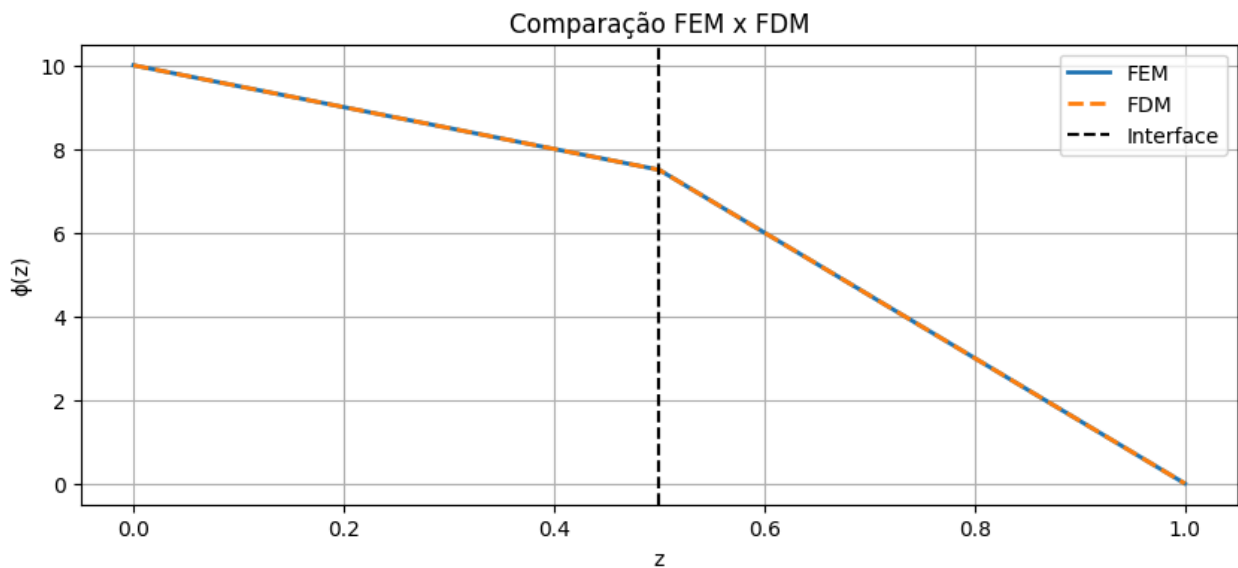


Figura 6

A comparação direta entre os dois métodos, ilustrada na Figura 6, revela uma concordância notável. As diferenças entre as soluções são praticamente imperceptíveis graficamente, demonstrando que ambos os métodos, quando implementados corretamente, podem representar adequadamente problemas com descontinuidades nos coeficientes. Esta convergência para resultados praticamente idênticos confere maior confiabilidade à simulação numérica realizada.

A análise quantitativa das inclinações (derivadas) da solução FEM em cada região confirma a consistência física dos resultados. Calculando-se a razão entre as inclinações à direita e à esquerda da interface, obteve-se um valor aproximado de 3,0,

correspondendo precisamente à razão entre as permissividades dos dois meios ($\epsilon_{r_1}/\epsilon_{r_2} = 3/1 = 3$). Este resultado valida que a solução numérica satisfaz a condição física de continuidade da componente normal do deslocamento elétrico na interface ($\epsilon_r \cdot d\phi/dz$).

A linearidade por partes da solução em cada região é outra característica física importante capturada por ambos os métodos. Este comportamento é esperado, pois a equação diferencial $d/dz[\epsilon_r(z) \cdot d\phi(z)/dz] = 0$ implica que, para ϵ_r constante em cada região, a segunda derivada de ϕ é nula, resultando em variação linear do potencial dentro de cada meio dielétrico.

Em síntese, os resultados demonstram a capacidade dos métodos FEM e FDM de resolver problemas envolvendo meios heterogêneos, desde que sejam tomados os devidos cuidados na discretização e na formulação das equações na interface entre diferentes materiais. A concordância entre os métodos e a verificação da física subjacente (razão entre inclinações) validam a implementação computacional realizada para esta atividade.

Discussão e Conclusão

Este trabalho comparou o Método de Elementos Finitos (FEM) e o Método de Diferenças Finitas (FDM) na resolução de problemas unidimensionais, avaliando-os em dois cenários distintos: uma solução manufaturada e um capacitor com dois dielétricos.

Na primeira atividade, verificou-se que o FEM apresenta melhor desempenho em malhas grosseiras, com erro 30% menor que o FDM para $n = 4$, devido à sua formulação variacional que distribui o erro de forma mais homogênea. Com o refinamento da malha ($n \geq 16$), ambos os métodos convergiram para níveis de erro semelhantes, com taxas de convergência próximas à ordem 2, conforme previsto teoricamente.

No problema do capacitor com interface dielétrica, ambos os métodos capturaram corretamente a física do fenômeno, demonstrando a continuidade do potencial e a descontinuidade do campo elétrico na interface. A razão entre as inclinações da solução ($\sim 3,0$) confirmou a consistência com a razão das permissividades dos meios, validando a implementação numérica.

Os resultados indicam que a escolha entre FEM e FDM deve considerar: (1) a discretização disponível, com FEM sendo preferível em malhas grosseiras; (2) a complexidade do problema, com FEM oferecendo maior flexibilidade para interfaces e geometrias complexas; (3) a facilidade de implementação, onde o FDM pode apresentar

vantagens em problemas regulares; e (4) o tipo de condições de contorno, com FEM incorporando naturalmente condições de Neumann.

Conclui-se que ambos os métodos são ferramentas eficazes quando adequadamente implementados, sendo a seleção entre eles dependente das características específicas do problema e dos recursos computacionais disponíveis.