



UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
ESCOLA DE ENGENHARIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA

TRABALHO COMPUTACIONAL 4: O PROPULSOR ELETROSTÁTICO

André Prado Procópio

Lucas Ribeiro da Silva

Milena Terra Lopes

Belo Horizonte - Minas Gerais - Brasil
2025

Resumo

Este trabalho tem como objetivo de, a partir de uma simulação de um problema eletrostático - neste caso, do Propulsor Eletrostático - explorar a aplicação do Método dos Elementos Finitos em um problema de geometria axissimétrica. Para isso, foram utilizados softwares de simulação dedicados, como o FEniCS. O problema do propulsor eletrostático trata-se de um problema que foi modelado com os seguintes componentes: um capilar preenchido por um propelente que possui cargas elétricas e um eletrodo, que será o responsável por induzir uma diferença de potencial elétrico formando um campo elétrico. Avaliaremos o problema para o caso no qual o campo elétrico excede um valor crítico e ocorre a expulsão do líquido no interior do capilar.

Palavras-chave: Propulsor Eletrostático, Método dos Elementos Finitos, Problema Axissimétrico

O propulsor eletrostático

O propulsor eletrostático possui uma configuração delimitada pelos seguintes valores:

1. Geometria do eletropropulsor:

Parâmetro	Descrição	Valor
R	Raio do capilar	0.6e-3 (m)
d	Distância do capilar-eletrodo	6e-3 (m)
Ra	Raio interno do eletrodo	2e-3 (m)
Rb	Raio externo do eletrodo	9e-3 (m)
L	Comprimento do eletrodo	3.5e-4 (m)
h	Altura do eletrodo	0.05 x L (m)
y_capilar	Comprimento do capilar	15e-4 (m)

2. Domínio computacional:

Parâmetro	Valor
x_air	9e-3 (m)
y_air	9e-3 (m)

3. Propriedades físicas:

Parâmetro	Descrição	Valor
epsilon0	Permissividade do vácuo	8.854e-12
gamma	Tensão superficial	0.05 (N/m)
epsr_ar	Permissividade relativa do ar	1.0
epsr_capilar	Permissividade relativa da formamida	84.0

Metodologia

Atividade 1 - Modelagem Eletrostática e Fundamentos Físicos

A primeira etapa consistiu na modelagem do problema, em que foi criada a malha geométrica e definidas as posições de cada elemento na mesma, incluindo os parâmetros indicados pelo problema e respeitando a geometria axial indicada.

A malha foi construída no plano $r - z$, para representar uma seção transversal do propulsor, composta pelo tubo capilar, o espaço entre o capilar e o eletrodo, e o eletrodo. A discretização foi calculada com elementos triangulares, com o refinamento mais preciso nas regiões próximas à extremidade do capilar, onde existe maior concentração do campo elétrico devido ao efeito de ponta.

Foram aplicadas as seguintes condições de contorno de Dirichlet: potencial fixo no capilar ($\varphi = V$) e potencial nulo no eletrodo ($\varphi = 0$), além das condições de Neumann, com isolamento elétrico nas demais fronteiras ($\epsilon \times \partial n / \partial \varphi = 0$).

A modelagem geométrica garantiu a correta representação dos parâmetros físicos relevantes, como o raio do capilar, as dimensões do eletrodo e a distância entre os componentes, assegurando que a solução numérica fosse compatível com a descrição do problema e as hipóteses simplificadoras adotadas no modelo axissimétrico.

A formulação do problema foi baseada na equação de Laplace para meios homogêneos:

$$\nabla \cdot (\epsilon \nabla \varphi) = 0$$

Considerando a simetria axial do sistema, a forma fraca foi adaptada para incluir o fator radial r :

$$\int_{\Omega} r \epsilon \nabla \varphi \cdot \nabla w \, dr \, dz = 0$$

em que φ representa o potencial elétrico, $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$ é a permissividade do meio (Formamida, $\epsilon_r = 84$) e w é a função de teste.

Com a solução do potencial φ , o campo elétrico foi obtido pela relação:

$$E = -\nabla \varphi.$$

Determinação do Campo Elétrico Crítico

O campo elétrico crítico necessário para a ejeção do líquido é definido por:

$$E_n > \sqrt{\frac{\pi \gamma}{2 \epsilon_0 R}}$$

Com este valor, a tensão crítica foi determinada utilizando a aproximação de plano condutor:

$$V = \sqrt{\frac{\gamma R_c}{\epsilon_0}} \ln \left(\frac{4d}{R_c} \right)$$

Estes valores foram posteriormente calculados via simulação. Para obter o campo elétrico na ponta do capilar foi utilizada a seguinte abordagem: primeiramente, o campo elétrico E foi avaliado ao longo do eixo de simetria do domínio, ou seja, na linha $r = R + \text{tol}$, desde a saída do capilar até além da posição do eletrodo $r = R + d + \text{tol}$. Esse eixo corresponde fisicamente ao caminho principal de ejeção das partículas carregadas. Em seguida, foi obtido o valor de $E_y[0]$. Por fim, foi feita a comparação entre os valores simulados e os valores calculados.

Atividade 2 - O Problema Dinâmico

A segunda etapa do trabalho consistiu na resolução do problema dinâmico da gotícula carregada. Considerou-se uma única gotícula viajando ao longo do eixo de simetria do propulsor, mantendo uma geometria esférica durante todo o trajeto e sendo submetida apenas à ação da força elétrica. Para o cálculo, foram adotados os seguintes parâmetros adicionais, especificados no problema:

Parâmetro	Descrição	Valor
Rg	Raio da gotícula	0.002 (mm)
Rho	Densidade da Formamida	0.05 (g/cm ³)
a0	Aceleração inicial	0.0 m/s ²
v0	Velocidade inicial	0.0 m/s

A partir desses novos parâmetros, foi possível calcular a massa (m) e a carga (Q) da gotícula pelas expressões:

$$m = \frac{4}{3}\pi R g^3 \rho$$

$$Q = 8\pi \sqrt{\epsilon_0 \gamma} R_g^{3/2}$$

Em seguida, a força elétrica foi obtida por $F_e = Q * E_y$. Foi considerado apenas o componente do campo elétrico no eixo longitudinal, E_y , obtido a partir da geometria do problema. A curva $F_e(x)$ foi estimada por interpolação linear, utilizando a função `interp1d` da biblioteca `scipy`. Para esse cálculo, foi considerado `y_sampled`, com as posições verticais discretizadas, e os valores correspondentes da força elétrica.

A equação diferencial de segunda ordem $F_e(x) = m \cdot \ddot{x}$ foi então escrita como um sistema de equações de primeira ordem no espaço de estados:

$$x'1 = x2$$

$$x'2 = \frac{F_e}{m}$$

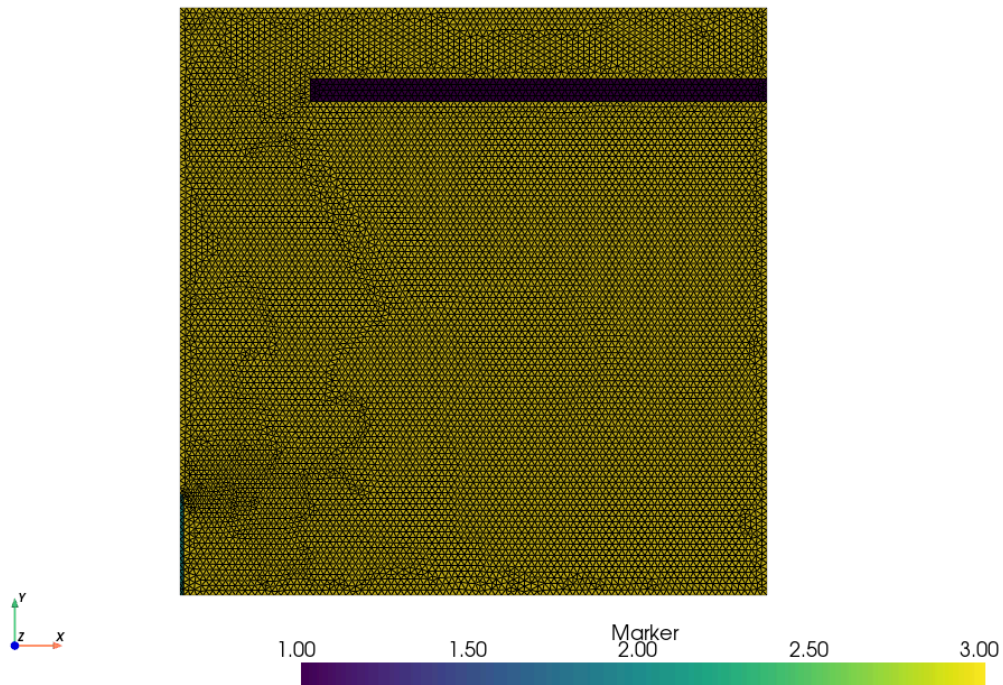
Para resolver o problema, foi utilizado o método Runge-Kutta de quarta ordem (RK45) por meio da função `solve_ivp`, com condição inicial de repouso.

A definição de um evento terminal faz com que a simulação seja interrompida quando a gotícula atinge a posição do eletrodo. Ao final, são obtidas as curvas de força elétrica e velocidade em função da posição da gotícula, assim como os valores da velocidade de saída e do tempo de voo.

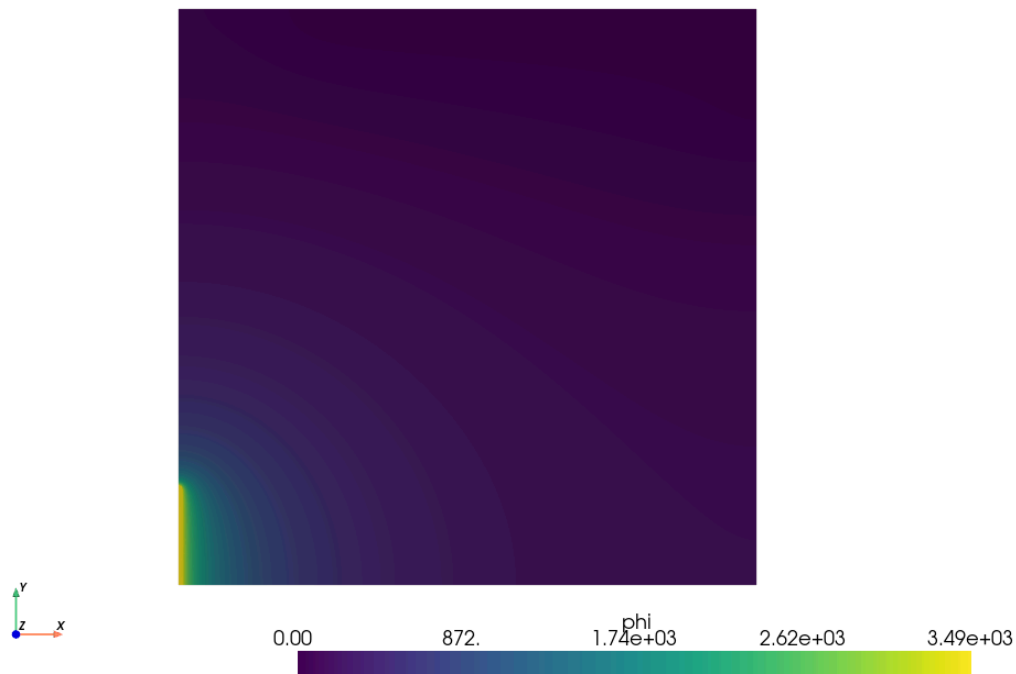
Resultados

Resultado - Atividade 1

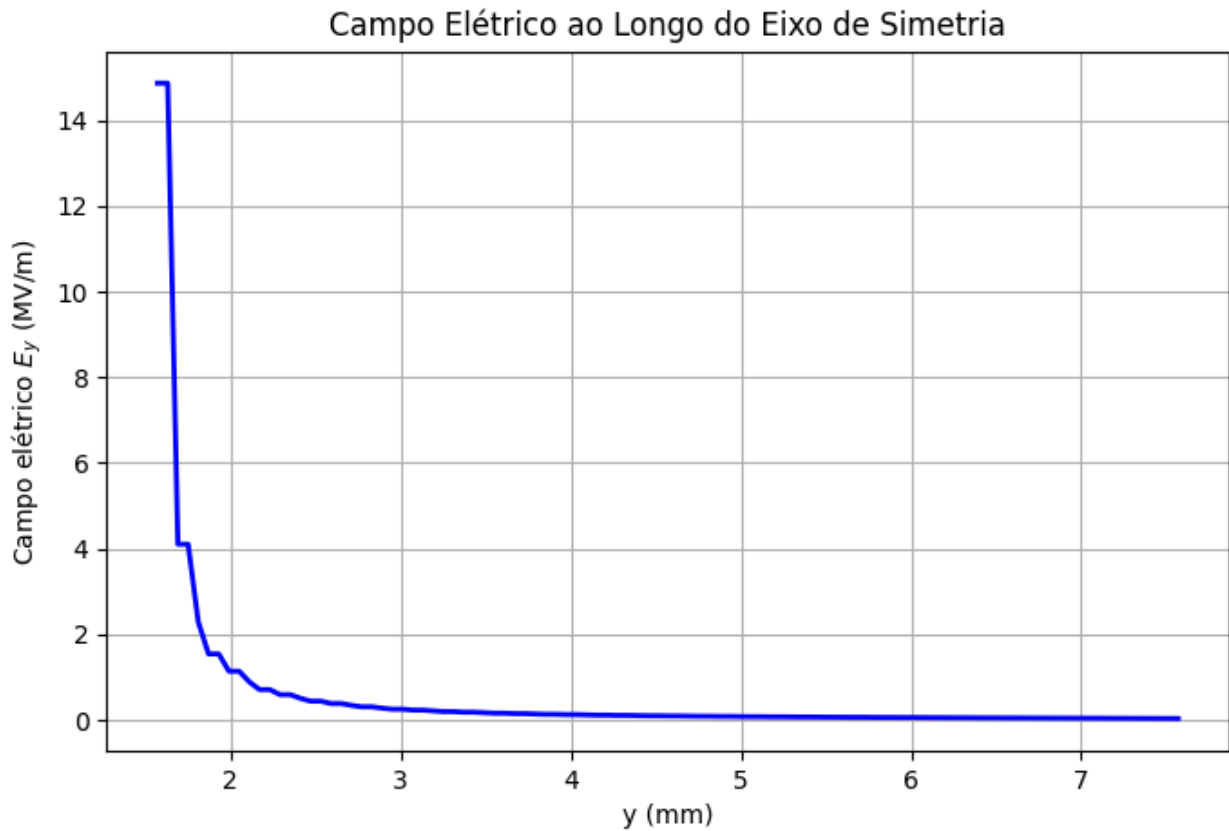
Após a construção do modelo axissimétrico para simular a situação de instabilidade, foi obtida a malha apresentada na figura abaixo. Nela, é possível identificar o capilar, em posição vertical, no canto esquerdo inferior, e o eletrodo, consideravelmente maior que o capilar, em posição horizontal, no canto direito superior. A malha possui refinamento próximo à extremidade do capilar, onde se esperava uma maior concentração de campo elétrico devido ao efeito de ponta.



Com o modelo axissimétrico, foi possível obter a solução numérica para o potencial elétrico no domínio e, a partir dele, calcular o campo elétrico. A figura abaixo exibe o módulo do campo elétrico obtido. Observa-se que ele obedece às condições de contorno de Dirichlet: o potencial no capilar é fixo, enquanto no eletrodo é nulo. Assim, o eletrodo não se destaca no gráfico. Observa-se que os valores mais altos estão concentrados na ponta do capilar, o que está de acordo com o comportamento físico esperado. O forte gradiente nessa região justifica o refinamento da malha próximo à extremidade do capilar, onde o campo elétrico varia mais intensamente.



Com base na simulação numérica, foi possível determinar o valor do campo elétrico ao longo do eixo de simetria, desde a ponta do capilar até a posição do eletrodo. O comportamento obtido é apresentado no gráfico abaixo.



Observa-se que o campo elétrico atinge seu valor máximo na saída do capilar, com uma rápida queda conforme a distância aumenta. Esse comportamento é esperado devido ao forte gradiente de potencial gerado pelo efeito de ponta. Na ponta do capilar, o valor do campo elétrico é de 1.49×10^7 V/m, enquanto o potencial máximo é de 3487.58 V.

A partir das expressões analíticas, os valores críticos teóricos foram estimados. O valor encontrado necessário para a formação do cone de Taylor foi de 1.22×10^7 V/m, e a tensão para que esse campo ocorra foi de 3487.6 V.

Ao comparar os resultados, verifica-se uma forte coerência entre os valores simulados e os valores esperados teoricamente. As ordens de grandeza são compatíveis e houveram pequenos desvios, que ocorrem devido à aproximações numéricas. Esses resultados validam o modelo desenvolvido, indicando que ele representa adequadamente o fenômeno físico.

Sistema neutralizador

Em propulsores eletrospray, a emissão contínua de partículas carregadas pode levar ao acúmulo de carga no eletrodo coletor, resultando em um impulso total resultante nulo. Para evitar esse problema, é essencial incluir um sistema neutralizador para garantir a neutralidade elétrica de um propulsor iônico. Conforme descrito na obra *Fundamentals of Electric Propulsion: Ion and Hall Thrusters* de Goebel e Katz, o cátodo neutralizador é posicionado externamente ao corpo do propulsor e tem a função de fornecer elétrons em uma taxa equivalente à dos íons emitidos, de modo a evitar o desequilíbrio de carga entre o feixe e a espaçonave. Esses elétrons neutralizam o feixe de íons positivos, mantendo o potencial do propulsor em equilíbrio com o plasma espacial ao redor, contribuindo assim para a estabilidade e eficiência do sistema de propulsão elétrica. Além disso, o uso de fontes pulsantes pode ser uma alternativa,

desligando o campo elétrico quando a partícula se aproxima do eletrodo, evitando o acúmulo de carga.

Resultado - Atividade 2

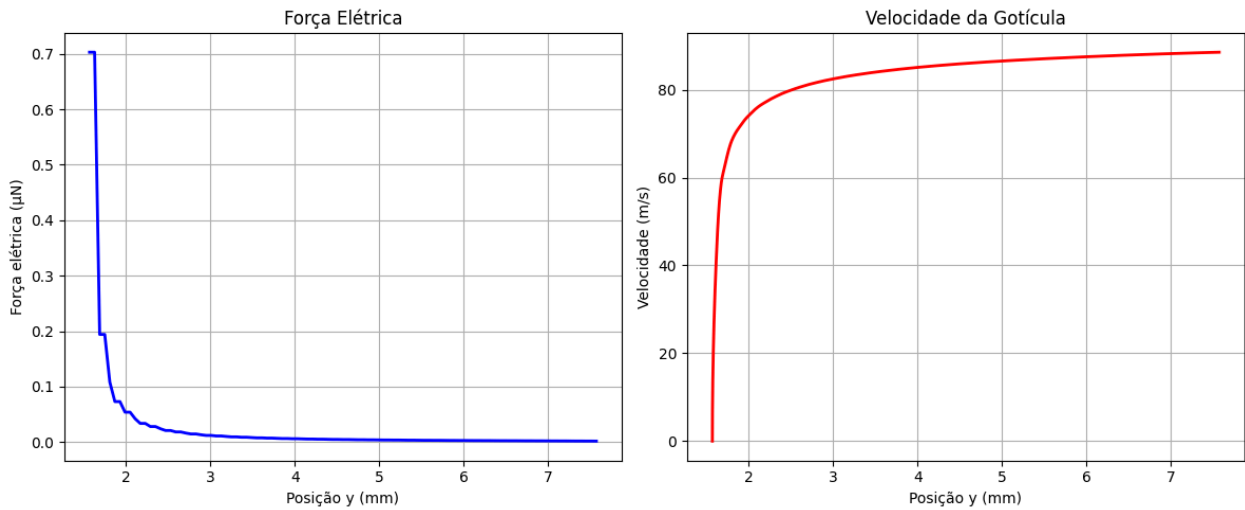
A simulação do problema forneceu os seguintes resultados físicos para as propriedades da gotícula:

- Massa da gotícula: 37.87 fg
- Carga da gotícula: 47297.66 aC

A gotícula partiu do repouso e acelerou sob ação da força elétrica até atravessar o eletrodo em forma de disco, onde foram registrados os seguintes valores:

- Velocidade de saída: 88.5 m/s
- Tempo de voo: 73.6 μ s
- Força elétrica máxima: 0,70 μ N
- Aceleração máxima: $1,86 \times 10^7$ m/s²
-

Os resultados simulados estão ilustrados nos gráficos abaixo. O gráfico à esquerda retrata o decaimento da E_z ao longo da posição axial, refletindo o perfil do campo elétrico no sistema. Já o gráfico à direita mostra a velocidade da gotícula aumentando rapidamente até se estabilizar próximo ao valor de saída, indicando que a aceleração ocorre principalmente nas posições iniciais do trajeto.



Discussão e Conclusão

Este trabalho abordou a modelagem de um propulsor eletrostático do tipo capilar, com foco na determinação do campo elétrico e na análise do movimento de uma gotícula carregada.

A primeira etapa consistiu na construção de um modelo axissimétrico baseado no Método dos Elementos Finitos, permitindo obter a distribuição do potencial elétrico e o campo elétrico no domínio. Os resultados mostraram concordância com o comportamento físico esperado: o campo apresentou maior intensidade na ponta do capilar, devido ao efeito de ponta. Além disso, a comparação entre os valores simulados e os teóricos para o campo elétrico crítico e a tensão mostrou muita coerência, confirmando a validade do modelo.

Na segunda etapa, o campo elétrico simulado foi utilizado para resolver o problema dinâmico de uma única gotícula sendo acelerada no eixo de simetria do

propulsor. Assumindo geometria esférica e desprezando outras forças, a equação diferencial do movimento foi resolvida com o método de Runge-Kutta de quarta ordem, evidenciando o efeito da força elétrica sobre a aceleração da partícula. Observou-se que a gotícula adquire velocidade ao longo do trajeto até o eletrodo, em que a força elétrica máxima se encontra na saída do capilar e decai com a distância.

Por fim, conclui-se que a modelagem numérica se mostrou eficaz para prever o comportamento eletrostático e dinâmico do sistema, sendo uma ferramenta essencial para o projeto e análise de propulsores eletrostáticos.