Trabalho Computacional II

André Prado Procopio
2022055556
approcopio@ufmg.br

Lucas Ribeiro da Silva
2022055564
lucasrsilvak@ufmg.br

I. Introdução

Os problemas de otimização não-linear são muito comuns nas áreas de engenharias e ciências exatas. Muitas vezes, esses problemas possuem restrições quanto aos recursos utilizados que se traduzem em fórmulas matemáticas que buscam contextualizar as limitações dos problemas reais em modelos matemáticos. Para encontrar os pontos ótimos desses problemas, é necessária a utilização de algoritmos sofisticados que encontram o ótimo ou alguma aproximação do ponto de otimização máxima.

Este relatório implementa as soluções para os problemas enunciados no Trabalho Computacional II da disciplina de Otimização Não-Linear, utilizando a biblioteca `otimo.py` desenvolvida pelo professor. Serão apresentados os problemas, suas soluções, os algoritmos utilizados e as justificativas para a inclusão de cada método, bem como as informações sobre a metodologia e os resultados obtidos.

II. Problema 1: Otimização de Treliça

O primeiro problema consiste na modelagem de uma treliça formada por três barras, onde cada barra tem o comprimento denotado por A_1, A_2 e A_3. O espaçamento horizontal entre as barras e a distância até a ponta são representados por uma mesma constante H.

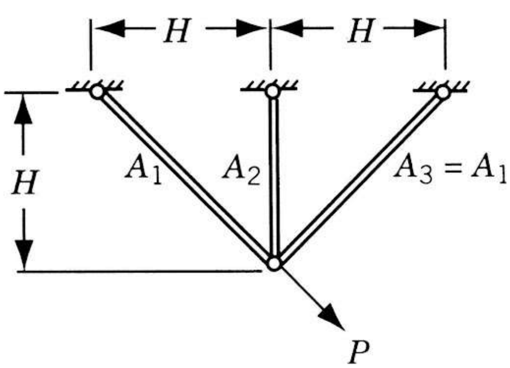

Fig. 1. Treliça de três barras

O parâmetro $P = 20$ representa a força-peso da carga constante aplicada na treliça. O objetivo da otimização é minimizar o peso da treliça considerando o comprimento das barras, onde $x_1 = A_1$ e $x_2 = A_2$. O modelo matemático do problema é:

$$\begin{aligned}
\min \quad & f(x_1, x_2) = (2\sqrt{2})x_1 + x_2 && (1)\\
\text{sujeito a} \quad & P\frac{x_2 + x_1\sqrt{2}}{x_1^2\sqrt{2} + 2x_1x_2} \leq 20 && (2)\\
& P\frac{1}{x_1 + x_2\sqrt{2}} \leq 20 && (3)\\
& P\frac{x_2}{x_1^2\sqrt{2} + 2x_1x_2} \leq 5 && (4)\\
& 0.1 \leq x_1, x_2 \leq 5 && (5)
\end{aligned}$$

onde a equação (1) representa a função objetivo (peso da treliça), as equações (2) e (3) representam o estresse máximo nas barras 1 e 2, a equação (4) representa o estresse mínimo na terceira barra, e (5) define os limites das variáveis.

A. Implementação

Para resolver este problema, utilizamos três métodos de otimização restrita: Penalidade Interior, Penalidade Exterior e Lagrangeano Aumentado. A implementação foi feita com a biblioteca `otimo.py` desenvolvida pelo professor, utilizando precisão de 10^{-8} e máximo de 20.000 avaliações para todos os métodos. O ponto inicial utilizado foi $(x_1, x_2) = (1, 3)$ conforme sugerido.

Como métodos auxiliares, utilizamos a Seção Áurea para busca unidimensional e o Gradiente Conjugado para otimização irrestrita. A Seção Áurea foi escolhida por sua robustez e convergência garantida, não necessitando de derivadas. O Gradiente Conjugado foi selecionado por sua eficiência computacional superior e convergência superlinear para funções quadráticas.

1) Formulação Matemática: O problema original pode ser reformulado como:

$$\begin{cases}
\min f(x_1, x_2) = (2\sqrt{2})x_1 + x_2\\
\text{sujeito a}\\
g_1(x) = P\frac{x_2 + x_1\sqrt{2}}{x_1^2\sqrt{2} + 2x_1x_2} - 20 \leq 0\\
g_2(x) = P\frac{1}{x_1 + x_2\sqrt{2}} - 20 \leq 0\\
g_3(x) = -P\frac{x_2}{x_1^2\sqrt{2} + 2x_1x_2} + 5 \leq 0\\
g_4(x) = -x_1 + 0.1 \leq 0\\
g_5(x) = x_1 - 5 \leq 0\\
g_6(x) = -x_2 + 0.1 \leq 0\\
g_7(x) = x_2 - 5 \leq 0
\end{cases}$$

Para cada método de otimização, aplicamos as seguintes formulações:

Penalidade Exterior:

$$\min \Phi_{\text{ex}}(x;r) = f(x) + r\sum_{i=1}^{7}\big(\max(0, g_i(x))\big)^2$$

Penalidade Interior:

$$\min \Phi_{\text{in}}(x;\mu) = f(x) - \mu\sum_{i=1}^{7}\ln(-g_i(x)), \quad g_i(x) < 0$$

Lagrangiano Aumentado:

$$\mathcal{L}_r(x,\lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^{7}\lambda_i g_i(x) + \frac{r}{2}\sum_{i=1}^{7}\big(g_i(x)\big)^2$$

Os parâmetros utilizados para cada método foram:

TABLE I
PARÂMETROS DOS MÉTODOS DE OTIMIZAÇÃO - PROBLEMA 1

Método	Penalidade	Aceleração
Penalidade Exterior	1.0	2.0
Penalidade Interior	3.0	0.75
Lagrangeano Aumentado	1.0	1.5

B. Análise da Região Factível

A região factível do problema é mostrada na Figura 2. Observamos que o ponto inicial $(1, 3)$ está localizado dentro da região factível, o que é essencial para o método de Penalidade Interior, pois este requer que todos os pontos durante a otimização permaneçam estritamente dentro da região factível.

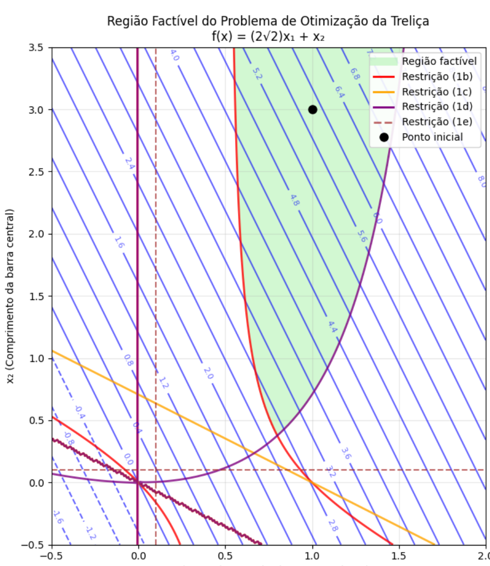

Fig. 2. Região factível do problema de otimização da treliça

C. Resultados

Os três métodos apresentaram comportamentos distintos e característicos:

Penalidade Exterior: Convergiu em 11 iterações com 37.510 avaliações, obtendo solução ótima $[0.78867267, 0.40824677]$ com valor objetivo 2.6390. O método apresentou uma pequena violação da restrição (0.000064), comportamento normal e esperado para este tipo de algoritmo.

Penalidade Interior: Convergiu em 25 iterações com 8.876 avaliações, obtendo solução $[0.78008955, 0.45403424]$ com valor objetivo 2.6992. Manteve-se rigorosamente dentro da região factível durante todo o processo, mas convergiu para uma solução sub-ótima.

Lagrangeano Aumentado: Convergiu em 17 iterações com 29.559 avaliações, obtendo solução ótima $[0.78867515, 0.40824825]$ com valor objetivo 2.6390. Demonstrou o melhor equilíbrio entre eficiência e precisão na satisfação das restrições.

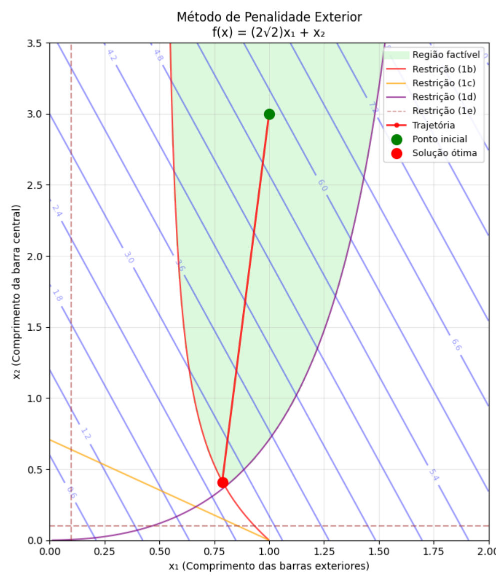

Fig. 3. Trajetória da Penalidade Exterior

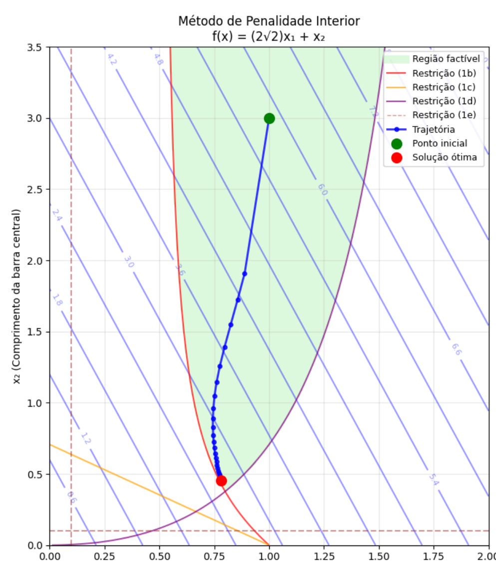

Fig. 4. Trajetória da Penalidade Interior

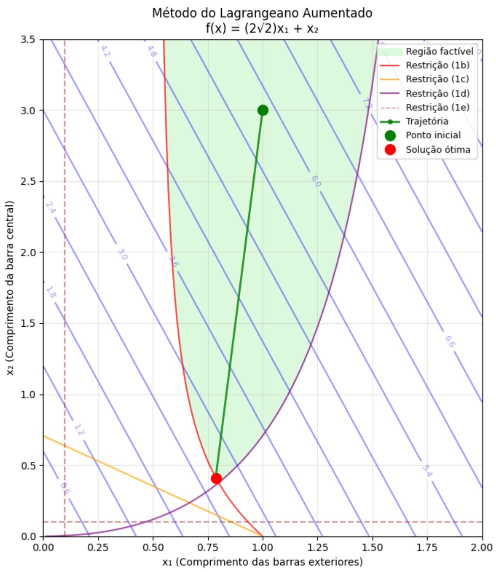

Fig. 5. Trajetória do Lagrangeano Aumentado

A análise das trajetórias revela que a Penalidade Exterior e o Lagrangeano Aumentado convergiram para o mesmo ótimo global, enquanto a Penalidade Interior, apesar de usar menos avaliações, encontrou uma solução sub-ótima devido à sua natureza conservadora de manter-se sempre dentro da região factível.

III. Problema 2: Despacho Econômico

O segundo problema trata da modelagem de um sistema elétrico de potência, onde três unidades geradoras operam simultaneamente para suprir uma demanda de 850 MW. Cada unidade possui características operacionais distintas com diferentes custos de geração:

$$
\begin{aligned}
C_1(P_1) &= 0{,}15P_1^2 + 38P_1 + 756 \\
C_2(P_2) &= 0{,}1P_2^2 + 46P_2 + 451 \\
C_3(P_3) &= 0{,}25P_3^2 + 40P_3 + 1049
\end{aligned}
$$

onde $C_i(P_i)$ é o custo de geração da unidade i em reais por hora, e P_i é a potência gerada pela unidade i em MW.

O problema de despacho econômico pode ser formulado como:

$$
\begin{aligned}
\min \quad & f(P_1, P_2, P_3) = C_1(P_1) + C_2(P_2) + C_3(P_3) \\
\text{sujeito a} \quad & P_1 + P_2 + P_3 = 850 + PL \\
& 150 \leq P_1 \leq 600 \\
& 100 \leq P_2 \leq 400 \\
& 50 \leq P_3 \leq 200
\end{aligned}
$$

onde $PL = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} P_i B_{ij} P_j$ representa as perdas na transmissão, com a matriz de coeficientes:

$$
B = \begin{bmatrix} 0{,}000049 & 0{,}000014 & 0{,}000015 \\ 0{,}000014 & 0{,}000045 & 0{,}000016 \\ 0{,}000015 & 0{,}000016 & 0{,}000039 \end{bmatrix}
$$

A. Implementação

Para este problema, utilizamos os métodos de Penalidade Exterior e Lagrangeano Aumentado com as mesmas configurações do Problema 1: Seção Áurea para busca unidimensional, Gradiente Conjugado para otimização irrestrita, precisão de 10^{-8} e máximo de 20.000 avaliações. O ponto inicial utilizado foi $(P_1, P_2, P_3) = (380.0, 320.0, 160.0)$.

O problema pode ser reformulado como:

$$
\begin{cases}
\min f(P_1, P_2, P_3) = 0{,}15P_1^2 + 0{,}1P_2^2 + 0{,}25P_3^2 + 38P_1 + 46P_2 + 40 \\
\text{sujeito a:} \\
g_1(P) = P_1 + P_2 + P_3 - 850 - \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} P_i B_{ij} P_j = 0 \\
g_2(P) = 150 - P_1 \leq 0 \\
g_3(P) = P_1 - 600 \leq 0 \\
g_4(P) = 100 - P_2 \leq 0 \\
g_5(P) = P_2 - 400 \leq 0 \\
g_6(P) = 50 - P_3 \leq 0 \\
g_7(P) = P_3 - 200 \leq 0
\end{cases}
$$

As formulações utilizadas para cada método foram:

Penalidade Exterior:

$$
\min \Phi_{\text{ex}}(P; r) = f(P) + r \sum_{i=1}^{7} \left(\max(0, g_i(P)) \right)^2
$$

Lagrangiano Aumentado:

$$
\mathcal{L}_r(P, \lambda) = f(P) + \sum_{i=1}^{7} \lambda_i g_i(P) + \frac{r}{2} \sum_{i=1}^{7} \left(g_i(P) \right)^2
$$

B. Otimização dos Hiperparâmetros

Para garantir que utilizássemos os melhores hiperparâmetros possíveis, realizamos uma análise sistemática através de um grid bidimensional. Variamos tanto a penalidade quanto a aceleração de 0.1 a 5.0, com 50 pontos cada, totalizando 2.500 combinações testadas. O objetivo foi identificar os parâmetros que, mantendo a precisão de 10^{-8} e o limite de 20.000 avaliações, proporcionassem o menor custo entre todas as soluções factíveis (erro de balanço ¡ 1×10).

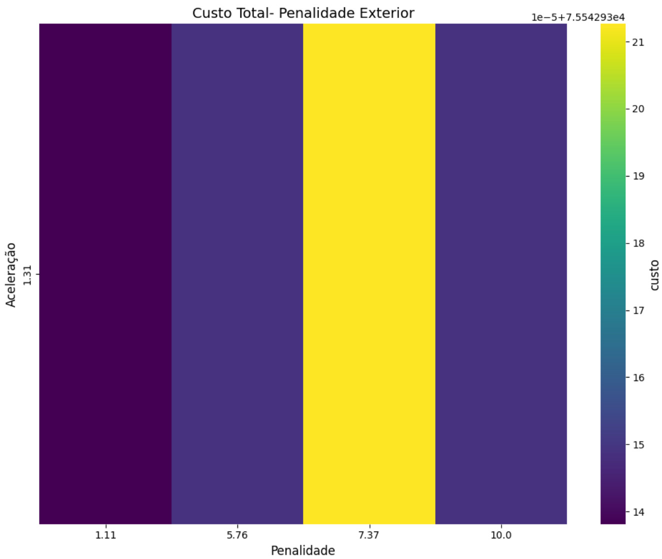

Fig. 6. Grid de otimização - Penalidade Exterior

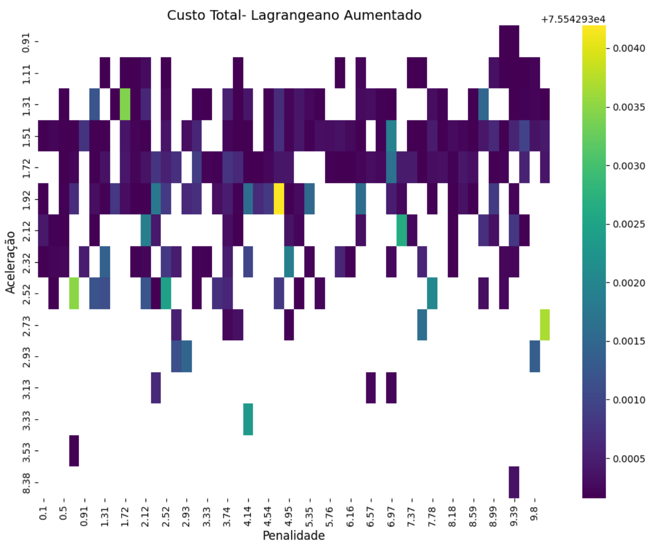

Fig. 7. Grid de otimização - Lagrangeano Aumentado

Os heatmaps revelam comportamentos muito distintos entre os métodos. A Penalidade Exterior apresenta uma região bem definida de convergência ótima, evidenciada pela faixa vertical amarela concentrada em torno da penalidade 7.37. Este padrão indica robustez em relação ao parâmetro de aceleração, facilitando a identificação de parâmetros adequados.

Por outro lado, o Lagrangeano Aumentado mostra um padrão extremamente fragmentado, com pequenas "ilhas" de convergência espalhadas irregularmente por todo o espaço paramétrico. Esta fragmentação indica alta sensibilidade a ambos os hiperparâmetros, exigindo uma busca muito mais cuidadosa. Apesar dessa complexidade, quando bem configurado, o método oferece superior desempenho.

Através desta análise sistemática, identificamos os parâmetros ótimos:

TABLE II
PARÂMETROS OTIMIZADOS - PROBLEMA 2

Método	Penalidade	Aceleração
Penalidade Exterior	1.11	1.31
Lagrangeano Aumentado	9.39	0.91

C. Resultados

Utilizando os parâmetros otimizados, obtivemos os seguintes resultados:

Penalidade Exterior: Convergiu em 62 iterações com 20.845 avaliações, obtendo solução $[294.85607346, 399.30776743, 175.56648138]$ com custo total de 75542.9299 reais e perdas de 19.7303 MW. Apresentou violação mínima na restrição de balanço (9.70×10), comportamento típico e aceitável para este método.

Lagrangeano Aumentado: Convergiu em 65 iterações com 13.287 avaliações, obtendo solução $[294.84975164, 399.31475663, 175.56585695]$ com custo total de 75542.9302 reais e perdas de 19.7304 MW. Apresentou violação ainda menor (1.93×10), demonstrando maior precisão na satisfação das restrições.

Ambos os métodos convergiram para soluções praticamente idênticas, com diferença de apenas 0.0003 reais. O Lagrangeano Aumentado mostrou-se 36% mais eficiente em termos de avaliações de função (13.287 vs 20.845), confirmando sua superioridade computacional quando adequadamente configurado.

A distribuição ótima encontrada (P 295 MW, P 399 MW no limite superior, P 176 MW) reflete uma alocação economicamente eficiente respeitando as características de custo de cada unidade. As perdas na transmissão de aproximadamente 19.73 MW representam cerca de 2.3% da demanda total, valor típico para sistemas reais.

IV. CONCLUSÃO

Este trabalho demonstrou a importância da seleção adequada tanto do algoritmo quanto dos hiperparâmetros na otimização não-linear. O Lagrangeano Aumentado destacou-se como o método mais eficiente em ambos os problemas, oferecendo o melhor equilíbrio entre precisão na satisfação das restrições e eficiência computacional.

No Problema 1, o método convergiu para o ótimo global com menos avaliações que a Penalidade Exterior, enquanto a Penalidade Interior, embora eficiente em número de avaliações, encontrou apenas uma solução sub-ótima devido à sua natureza conservadora.

No Problema 2, ambos os métodos principais encontraram soluções praticamente idênticas, mas o Lagrangeano Aumentado requereu significativamente menos recursos computacionais. A análise de grid revelou que, embora o Lagrangeano Aumentado seja mais sensível aos hiperparâmetros, quando bem configurado oferece desempenho superior.

A precisão de 10^{-8} mostrou-se adequada para ambos os problemas, e a análise sistemática de hiperparâmetros foi fundamental para extrair o máximo desempenho dos algoritmos. Para aplicações práticas similares, recomenda-se o uso do Lagrangeano Aumentado, sempre precedido de uma análise cuidadosa dos hiperparâmetros quando a eficiência computacional for crítica.

REFERENCES

[1] J. A. Ramírez, F. Campelo, F. G. Guimarães, L. S. Batista, and R. H. C. Takahashi, *Otimização Não Linear — Métodos Numéricos para Otimização Irrestrita*. Departamento de Engenharia Elétrica, Universidade Federal de Minas Gerais, 2023.