

Redes de Petri: Conceitos e Aplicações

Prof. Dr. Norian Marranghello
DCCE/IBILCE/UNESP

Março de 2005

Introdução:

Sistema é uma coleção de itens, entre os quais encontra-se ou define-se uma relação, que é objeto de estudo ou de interesse.

Modelo é uma descrição de um sistema por meio de equações e relações matemáticas bem como de representações gráficas, baseadas em leis ou princípios físicos que governam o sistema, ou seja, o modelo é uma abstração do sistema original.

Os modelos podem ser analíticos ou discretos. Os modelos do tipo analítico são formados por uma série de equações matemáticas usadas para prever o comportamento do sistema pela atribuição de valores aos parâmetros do modelo e a solução repetida das equações para cada conjunto de valores. Os modelos do tipo discreto são representados por uma estrutura matemática ou lógica que pode ser exercitada utilizando-se um computador, para simular o comportamento do sistema.

As simulações permitem inferências sobre os sistemas modelados sem a necessidade de construí-los, quando eles são ainda apenas propostas de novos sistemas; sem a necessidade de perturba-los, quando seu custo operacional é alto ou os seus requisitos de segurança impedem ou desaconselham experimentos; e sem o risco de destruí-los, quando se tem que definir os limites do sistema.

Os sistemas de automação e controle digital que desejamos tratar são do tipo a eventos discretos e requerem linguagens e ferramentas de modelagem específicas para o seu tratamento. Dentre as diversas linguagens existentes utilizaremos as Redes de Petri, por constituírem um conjunto de linguagens com

forte apelo gráfico que são muito adequadas para o projeto, a especificação a simulação e a verificação de diversos sistemas a eventos discretos, como os que desejamos tratar.

Algumas áreas nas quais encontram-se aplicações típicas das redes de Petri são:

- automação de escritórios;
- automação de manufatura;
- avaliação de desempenho;
- bancos de dados;
- circuitos integrados;
- protocolos de comunicação;
- sistemas distribuídos; e
- sistemas de produção.

Histórico:

Redes de Petri (ou simplesmente RdP) foram criadas a partir tese de doutorado de Carl Adam Petri, intitulada *Kommunikation mit Automaten* (Comunicação com Autômatos), apresentada à Universidade de Bonn em 1962 [01]. Desde o princípio, RdP objetivaram a modelagem de sistemas com componentes concorrentes.

Segundo Heuser [02], as primeiras aplicações de RdP aconteceram em 1968, no projeto norte-americano *Information System Theory*, da A.D.R. (*Applied Data Research, Inc.*). Muito da teoria inicial, da notação e da representação de RdP foi desenvolvido neste projeto e foi publicado em seu relatório final. Este trabalho ressaltou como RdP poderiam ser aplicadas na análise e na modelagem de sistemas com componentes concorrentes.

A década de setenta marcou o desenvolvimento da teoria de RdP e a expansão de seu campo de aplicação. No início daquela década, o trabalho de Petri chamou a atenção de membros do Projeto MAC, do MIT (*Massachusetts Institute of Technology*). O Grupo de Estruturas Computacionais, deste projeto, sob a

direção do Prof. Jack B. Dennis, foi a origem de consideráveis pesquisas e publicações sobre RdP, envolvendo relatórios e teses de doutorado. Duas conferências importantes foram organizadas pelo grupo, quais sejam: a “Conferência sobre Sistemas Concorrentes e Computação Paralela”, em Woods Hole (Projeto MAC, 1970) e a “Conferência sobre Redes de Petri e Métodos Relacionados”, no MIT, em 1975. A conferência realizada em 1975 no MIT foi, vale ressaltar, a primeira vez que o nome “Rede de Petri” foi oficialmente utilizado para se referir ao formalismo proposto por Carl Adam Petri treze anos antes, na Alemanha. Os resultados destes e de outros esforços no desenvolvimento da teoria de RdP estão registrados em inúmeros artigos e em três livros principais: um destes livros foi escrito pelo Prof. Wolfgang Reisig [03], que foi orientado do Prof. Petri, e representa a linha de pensamento mais diretamente ligada a ele; outro livro foi escrito por diversos autores franceses [04], liderados pelo Prof. G. W. Brams, e representa, por assim dizer, a linha de pensamento européia menos ligada ao Prof. Petri; e o terceiro livro foi escrito pelo Prof. James Lyle Peterson [05] e representa a linha de pensamento norte-americana. Em relação às aplicações, RdP atingiu áreas como a modelagem de componentes de *hardware*, controle de processos, linguagens de programação, sistemas distribuídos e protocolos de comunicação.

Ainda na década de setenta, surgiram três tipos de RdP capazes de modelar características temporais determinísticas, quais sejam, as RdP temporizadas de Ramchandani [06], de Merlin [07] e de Sifakis [08].

As aplicações de RdP aumentaram consideravelmente na década de oitenta, com o surgimento das chamadas redes de Petri de alto nível, como por exemplo, as numéricas [09], as predicado/transição [10] e as coloridas [11]. Em meados da década de oitenta surgiram também extensões de RdP estocásticas [12]. Tais inovações acrescentaram uma grande força descritiva ao processo de modelagem, pelo uso de marcas com identidade e, conseqüentemente, do uso de conjuntos de marcas na representação da dinâmica dos sistemas modelados, bem como pela possibilidade de se associar taxas de ocorrência não determinísticas aos eventos dos sistemas modelados. Desta forma, as RdP atingiram outras áreas, como automação de escritórios, bancos de dados, inteligência artificial e sistemas de informação de maneira geral. No final da

década de oitenta era publicado um artigo seminal sobre RdP, pelo Prof. Tadao Murata [13]. Embora este artigo trate primordialmente das redes de baixo nível, ele é um dos artigos mais referenciados sobre o assunto ainda nos dias de hoje.

Na década de noventa as RdP tiveram como seu principal representante a segunda versão das RdP Coloridas [14], desenvolvidas pelo Prof. Kurt Helmer Jensen, da Universidade de Aarhus, na Dinamarca. Além de trabalharem com marcas diferenciáveis, tais redes apresentam tratamento de aspectos temporais e permitem a representação de tipos de dados abstratos, um diferencial que as outras extensões existentes no final da década de oitenta e início da de noventa não apresentavam. Foi nesta década também que surgiram alguns livros sobre RdP, em português [15 e 16].

Outra preocupação era com a diversidade de extensões de RdP que estavam sendo propostas. A exemplo do que ocorreu com as linguagens de programação nas décadas de sessenta e setenta, cada grupo que sentia necessidade de determinada característica estava propondo sua extensão de RdP, mas por conveniências locais de implementação, estas extensões não se conversavam e estavam formando uma verdadeira Torre de Babel. Esta situação motivou, em meados da década de noventa, o início de um esforço para a padronização das redes de alto nível, bem como de uma sintaxe de transferência que pudesse ser comum a todas as RdP. Esta proposta foi encabeçada pelo Prof. Jonathan Billington e levada à ISO, *International Standards Organization*, em 1995 que a acolheu e atribuiu-lhe a designação de padrão ISO/IEC-15909, tendo sido dividido em três partes, quais sejam: a parte 1, designada por *High-level Petri Nets - Concepts, Definitions and Graphical Notation*; a parte 2, designada por *High-level Petri Nets - Transfer Format*; e a parte 3, designada por *High-level Petri Nets - Extensions*. Estas três partes iniciaram sua tramitação pelo longo processo de aprovação de padrões ISO em momentos diferentes e, conseqüentemente, estão em fases diferentes de padronização. A ISO/IEC-15909-1 foi ratificada como padrão em julho de 2003, tendo seu texto recebido a última atualização em maio de 2002. A ISO/IEC-15909-2 e a ISO/IEC-15909-3 iniciaram suas tramitações, respectivamente, em junho de 2003 e janeiro de 2004. Atualmente estão tramitando no Comitê Técnico em estágios diferentes, quando ainda podem receber alterações mais importantes aos seus textos.

Espera-se que em janeiro de 2006 a tramitação destas duas partes seja sincronizada, produzindo um padrão internacional completo até o final de 2006.

Informações atualizadas sobre estes e outros assuntos relativos a redes de Petri podem ser obtidas em vários sítios na internet, sendo o principal deles o hospedado pela Universidade de Aarhus (<http://www.daimi.au.dk/PetriNets>).

Classificação:

Há várias maneiras possíveis de se classificar as redes de Petri, uma maneira muito utilizada, a qual empregaremos neste texto, consiste em agrupá-las quanto ao seu grau de abstração. Neste caso, pode-se separá-las em RdP de baixo nível e de alto nível.

As RdP de baixo nível são aquelas cujo significado de suas marcas não são diferenciáveis a não ser pela estrutura da rede à qual estão associadas. Elas ainda podem ser subdivididas em elementares e lugar/transição. As redes elementares são aquelas que conservam as características das redes propostas por Petri, em sua tese de doutorado. Elas são extremamente restritivas do ponto de vista de modelagem, pois permitem a existência de apenas uma marca em cada elemento da rede forçando, desta forma, a representação das nuances de um sistema modelado totalmente por meio dos elementos estruturais da rede. As redes lugar/transição buscam minimizar este esforço de modelagem relaxando um pouco as restrições impostas nas redes elementares, fundamentalmente, permitindo a utilização de mais de uma marca em cada elemento da rede, conforme será estudado mais adiante. Este foi o tipo de rede mais utilizado na década de setenta, por permitir uma compactação razoável dos modelos.

As redes de alto nível são aquelas cujas marcas incorporam alguma semântica, viabilizando sua diferenciação. Esta semântica pode ir desde a atribuição de valores ou cores às marcas, até a adoção de noções de tipos de dados abstratos, conferindo-lhes um grande poder de expressão.

Além destas categorias têm-se extensões as quais podem ser associadas a qualquer uma delas. As principais extensões visam a inclusão de hierarquias e de aspectos temporais às RdP. As extensões temporizadas referem-se àquelas que incorporam aspectos temporais determinísticos aos modelos. As extensões

estocásticas, por sua vez, incorporam-lhes aspectos temporais não determinísticos. As extensões hierárquicas têm por objetivo permitir a representação de modelos de sistemas complexos de forma mais compreensível pelo modelador. Via de regra as extensões hierárquicas não aumentam o poder de representação das RdP, apenas tornam mais fácil para o usuário a compreensão das redes resultantes.

Noções Fundamentais:

São três os elementos básicos que formam a estrutura topológica das redes de Petri, quais sejam: estados; ações; e relação de fluxo. Estes elementos bem como alguns conceitos relacionados a eles são discutidos nesta seção.


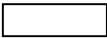
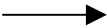
- (1) Estados são usados para modelar componentes os componentes passivos dos sistemas, isto é, correspondem às suas variáveis de estado, formando um conjunto $E = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$.
- (2) Ações são usadas para modelar os componentes ativos dos sistemas, ou seja, os eventos que levam o sistema de um estado a outro, formando um conjunto $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$.
- (3) Relação de fluxo é usada para especificar como se dá a transformação de um estado em outro pela ocorrência das ações no sistema. Esta relação é representada pelo conjunto $F = \{(x,y) \in E \times A \cup A \times E\}$.

Então a estrutura topológica de uma rede é dada por uma tripla $R = (E, A, F)$, que define um grafo bipartido, dirigido e conexo, com as seguintes características:

- a. $E \cup A \neq \emptyset$ - o grafo não é vazio e não tem elementos isolados;
- b. $E \cap A = \emptyset$ - seus conjuntos de estados e de ações são disjuntos;
- c. $F \subseteq (E \times A) \cup (A \times E)$ - a relação de fluxo está definida no universo de estados e ações, identificando a relação de vizinhança entre aquelas entidades;
- d. o domínio da relação de fluxo é dado por: $D(F) = \{x \in E \cup A \mid \forall (x,y) \in F \rightarrow \exists y \in E \cup A\}$;

- e. o contra-domínio da relação de fluxo é dado por: $CD(F) = \{y \in E \cup A / \forall (x,y) \in F \rightarrow \exists x \in E \cup A\}$; e
- f. $D(F) \cup CD(F) = E \cup A$ - a união de domínio e contra domínio da relação de fluxo corresponde ao universo de estados e ações da rede.

Existe uma notação gráfica adequada para a representação dos elementos das redes de Petri. Esta notação determina que:

- os estados são representados por elipses; 
- as ações são representadas por retângulos; e 
- os elementos da relação de fluxo por setas. 

Vale notar que tradicionalmente, em alguns modelos, estas figuras geométricas são degeneradas, sendo os estados representados por círculos e as ações por barras ou quadrados. No caso das redes lugar/transição, por exemplo, utilizam-se círculos e barras. Em outros casos, como algumas redes estocásticas, as ações podem ser representadas tanto por barras quanto por retângulos, para diferenciar ações com disparo imediato de ações com disparo temporizado.

Então, uma rede cuja representação algébrica é dada por:

$$R = (E, A, F)$$

$$E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$$

$$A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$$

$$F = \{(e_1, a_2), (e_2, a_2), (e_3, a_1), (e_5, a_4), (e_4, a_3), \\ (a_2, e_3), (a_3, e_1), (a_1, e_2), (a_4, e_4), (a_1, e_5)\}$$

é representada graficamente como mostra a Figura-1.

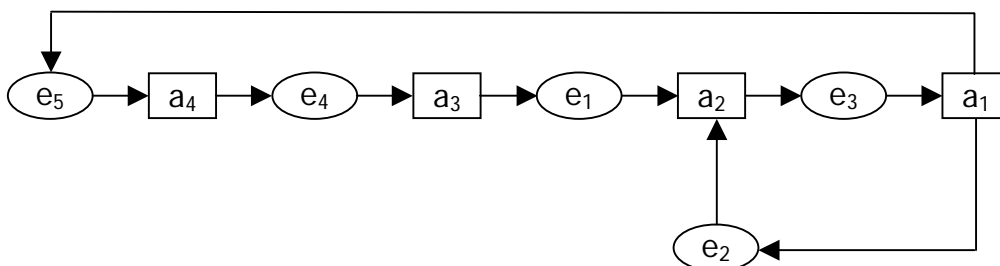


Figura-1: Representação gráfica de uma rede de Petri.

Definições:

- (1) Estados e ações são noções concomitantemente interdependentes e distintas.
- (2) Estados e ações são entidades distribuídas.
- (3) Um caso é um subconjunto de estados, distribuídos pela rede e satisfeitos simultaneamente.
- (4) Um passo é um subconjunto de ações, distribuídos pela rede e que podem ocorrer simultaneamente.
- (5) As alterações provocadas por uma ação são fixas e independentes do caso no qual ela ocorre.
- (6) A ocorrência de um estado é representada graficamente por uma marca (•) colocada dentro da elipse correspondente.
- (7) Sendo $\delta \in \Delta = E \cup A$ (δ é um estado ou uma ação da rede) um elemento da rede $R = (E, A, F)$, seus elementos de entrada são dados pelo seu pré-conjunto, representado por ${}^*\delta = \{x \in \Delta / (x, \delta) \in F\}$, e seus elementos de saída são dados por seu pós-conjunto, representado por $\delta^* = \{y \in \Delta / (\delta, y) \in F\}$.
- (8) Uma ação pode ocorrer em um determinado instante se e somente se as alterações provocadas pela ação são possíveis no caso considerado.
- (9) Uma rede é dita pura se e somente se $\forall \delta \in \Delta, {}^*\delta \cap \delta^* = \emptyset$, isto é, se não contiver laços, como exemplificado na Figura-2.

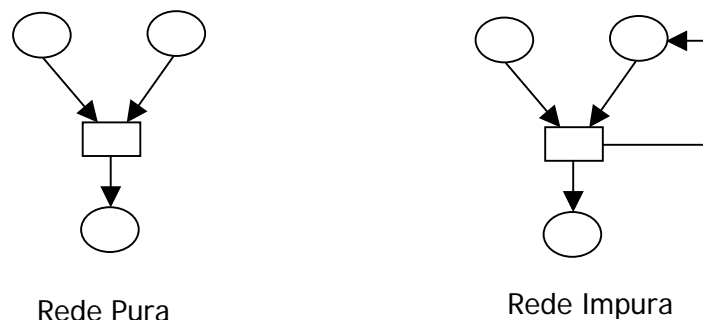


Figura-2: Exemplo de Rede de Petri pura.

Concessões

- (10) Diz-se que uma ação a pode ocorrer em um caso C se, e somente se, todas as pré-condições de a estiverem satisfeitas em C e nenhuma pós-condição de a for satisfeita em C .

$$C [a > \leftrightarrow \exists \bullet a \subseteq C \wedge a^\bullet \cap C = \emptyset$$

- (11) Por extensão, um passo P pode ocorrer em um caso C se, e somente se, todas as ações elementares de P puderem ocorrer individualmente em C , sem causarem interferências umas nas outras.

$$P = \{a_i / a_i \in A \wedge P \subseteq A\} \rightarrow C [P > \leftrightarrow \forall a_i \in P, C [a_i >$$

Efeito de ocorrência

- (12) Quando uma ação a ocorre em C suas pré-condições perdem a validade, suas pós-condições passam a existir e o restante do caso permanece inalterado.

$$C [a > C' \Rightarrow C' = (C \setminus \bullet a) \cup a^\bullet$$

- (13) Por extensão, o resultado de ocorrência de um passo P no caso C é a soma dos resultados individuais das ocorrências das ações elementares do passo no caso considerado.

$$P = \{a_i / a_i \in A \wedge P \subseteq A\} \rightarrow C [P > C' \Rightarrow C' = (C \setminus \bullet P) \cup P^\bullet$$

- (14) Seja a ação a , com pré-condições e_1 e e_2 e com pós-condição e_3 , considerando a ação habilitada neste caso, representa-se a concessão da ação a com as marcas em e_1 e e_2 (como na Figura-3a) e o efeito de sua ocorrência pela retirada das marcas de e_1 e e_2 e pela adição de uma marca em e_3 (como na Figura-3b).

$$\bullet a = C = \{e_1, e_2\} \wedge a^\bullet = \{e_3\} \rightarrow C' = C \setminus \{e_1, e_2\} \cup \{e_3\} = \{e_3\}$$

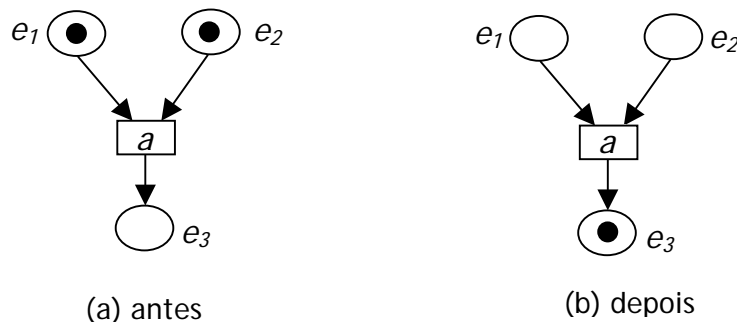


Figura-3: Efeito da ocorrência de uma ação.

Redes Elementares:

As redes de Petri elementares [17 e 18] constituem a versão atual, proposta para sintetizar as diversas variações que surgiram sobre o modelo proposto por Petri em 1962, conhecidas na literatura por redes *Clássicas* ou *Condição/Evento*, mas ainda conservando suas características originais.

Uma rede elementar é uma quádrupla $RE = (E, A, F, C_{in})$, onde se tem:

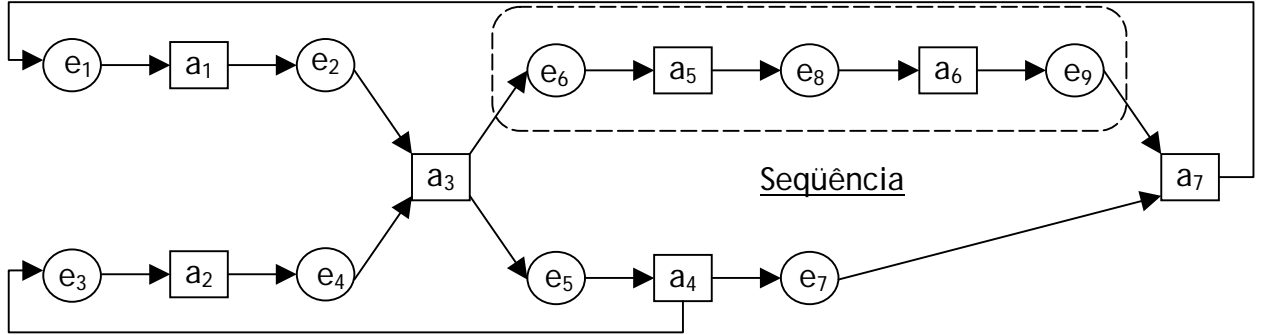
- $R = (E, A, F)$ como sendo a rede base, isto é, representando a estrutura topológica estática do sistema modelado, conservando toda a notação, a terminologia e os conceitos vistos para redes até agora; e
- C_{in} como sendo um caso inicial, que representa a situação dinâmica inicial do sistema, imediatamente antes de ser acionado.

Portanto, a representação gráfica de uma rede elementar consiste da notação gráfica da rede subliminal acrescida da marcação do caso inicial por meio de marcas. A esta associação de uma estrutura topológica de rede com um conjunto de marcas denomina-se rede marcada.

Há várias maneiras das ações de uma rede elementar se relacionarem em um caso C , como veremos a seguir.

Seqüência

Dizemos que a_1 e a_2 formam uma seqüência em um caso C_1 se, e somente se, a_1 pode ocorrer em C_1 e a_2 não pode. Contudo, após a ocorrência de a_1 , a_2 fica habilitado. Um exemplo de seqüência é mostrado na Figura-4.

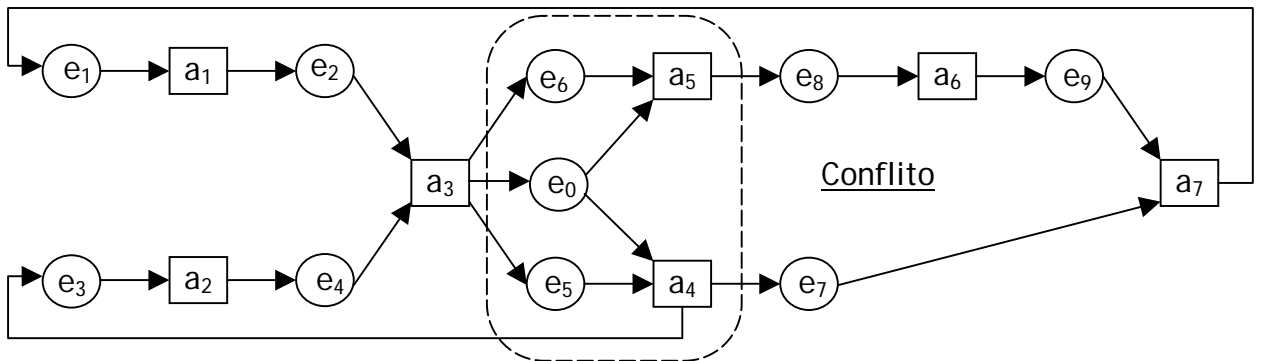


$$\{e_5, e_6\} [a_5 > \{e_5, e_8\} \wedge \neg (\{e_5, e_6\} [a_6 >] \wedge \{e_5, e_8\} [a_6 >]$$

Figura-4: Exemplo de Situação de Seqüência

Conflito

Dizemos que a_1 e a_2 estão em conflito em um caso C se, e somente se, a_1 e a_2 podem ocorrer individualmente no caso C , mas não podem ocorrer simultaneamente. Portanto, $\{a_1, a_2\}$ não é um passo no caso C . Não sendo possível dizer qual das ações ocorrerá primeiro, antes da execução do sistema, pode-se dizer que a rede elementar não é determinística. Um exemplo de conflito é mostrado na Figura-5.



$$\{e_0, e_5, e_6\} [a_4 > \wedge \{e_0, e_5, e_6\} [a_5 > \wedge \neg (\{e_0, e_5, e_6\} [\{a_4, a_5\} >])$$

Figura-5: Exemplo de Situação de Conflito

Concorrência

Dizemos que a_1 e a_2 podem ocorrer concorrentemente em um caso C se, e somente se, não sofrerem interferência mútua. Não há uma ordem especificada para a ocorrência das ações que compõem o passo habilitado em C . Então a ocorrência das ações e os estados delas resultantes serão parcialmente ordenados, donde redes elementares podem exibir comportamento não seqüencial. Um exemplo de concorrência é mostrado na Figura-6.

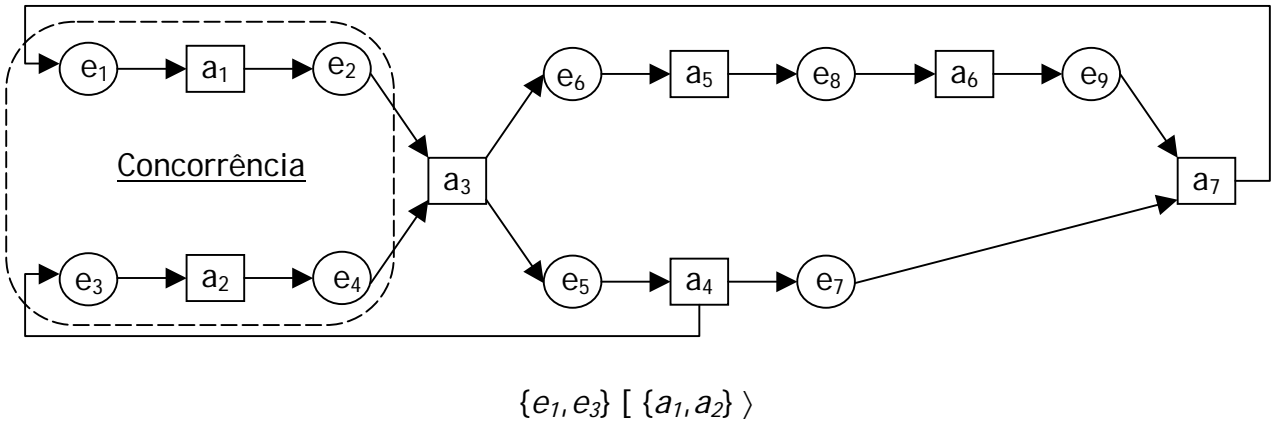
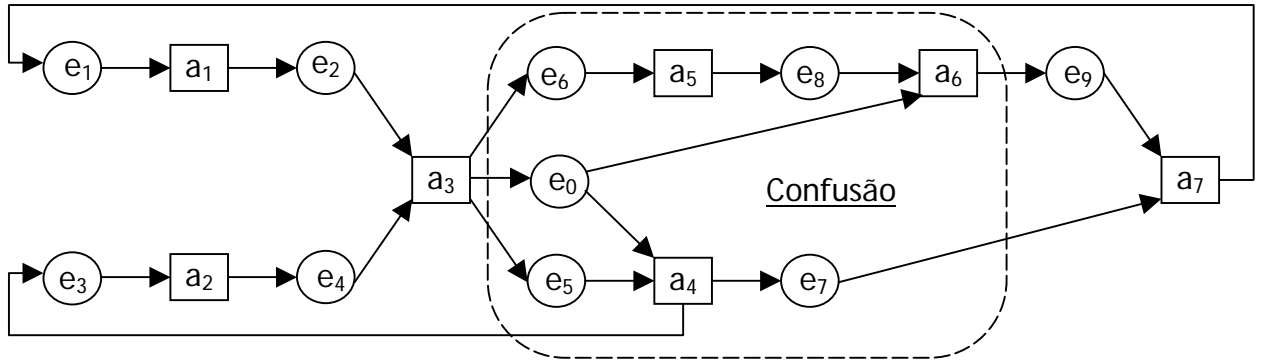


Figura-6: Exemplo de Situação de Concorrência

Confusão

É uma situação resultante da mistura de concorrência e conflito. Sendo a uma ação do espaço de ações com concessão em C , o conjunto de conflitos de a em C , designado por $cfl(a, C)$, é o conjunto de ações a' com concessão em C e que não formem passo com a , isto é, $cfl(a, C) = \{a' \in A / C[a'] \wedge \neg(C[\{a, a'\}])\}$. Portanto, para quaisquer duas ações a_1 e a_2 , com concessão em C_1 , a tripla (C_1, a_1, a_2) é uma confusão em C_1 se, e somente se, os conjuntos de conflito de a_1 em C_1 e em C_2 forem diferentes e a execução de a_2 em C_1 resultar em C_2 . Um exemplo de confusão é mostrado na Figura-7. Observe-se que a_4 e a_6 estão potencialmente em conflito. Contudo, tão logo a_3 seja executada, a_4 estará habilitada, mas a_6 não. A confusão surge porque a_5 , que é concorrente com a_4 e

também fica habilitada após a execução de a_3 , pode ser executada antes de a_4 , habilitando a_6 e colocando-a em conflito efetivo com a_4 .



$$cfl(a_4, \{e_0, e_5, e_6\}) = \emptyset \wedge cfl(a_4, \{e_0, e_5, e_8\}) = \{a_6\}$$

A tripla $(\{e_0, e_5, e_6\}, a_4, a_5)$ é confusão em $\{e_0, e_5, e_6\}$ porque

$$cfl(a_4, \{e_0, e_5, e_6\}) \neq cfl(a_4, \{e_0, e_5, e_8\}) \wedge \{e_0, e_5, e_6\} [a_5] \{e_0, e_5, e_8\}$$

Figura-7: Exemplo de Situação de Confusão

Espaço de Estados

O *espaço de estados* de uma rede elementar é o conjunto de todos os casos da rede, que ocorrem durante a execução do sistema ($C_{RE} = [C_{in}]$). Este espaço é utilizado na análise das propriedades da rede.

O espaço de estados da rede apresentada na Figura-4, é mostrado na Figura-8. Ressalte-se que os vértices do grafo representam os conjuntos de estados (casos) válidos em cada instante da execução do sistema e as arestas do grafo representam as ações (ou passos) que devem ser executadas para que o sistema passe de um caso a outro. Note-se ainda que, por simplicidade, nos vértices foram anotados apenas os números dos estados (1, 2, 3 ...) e não seus nomes ($e_1, e_2, e_3 \dots$).

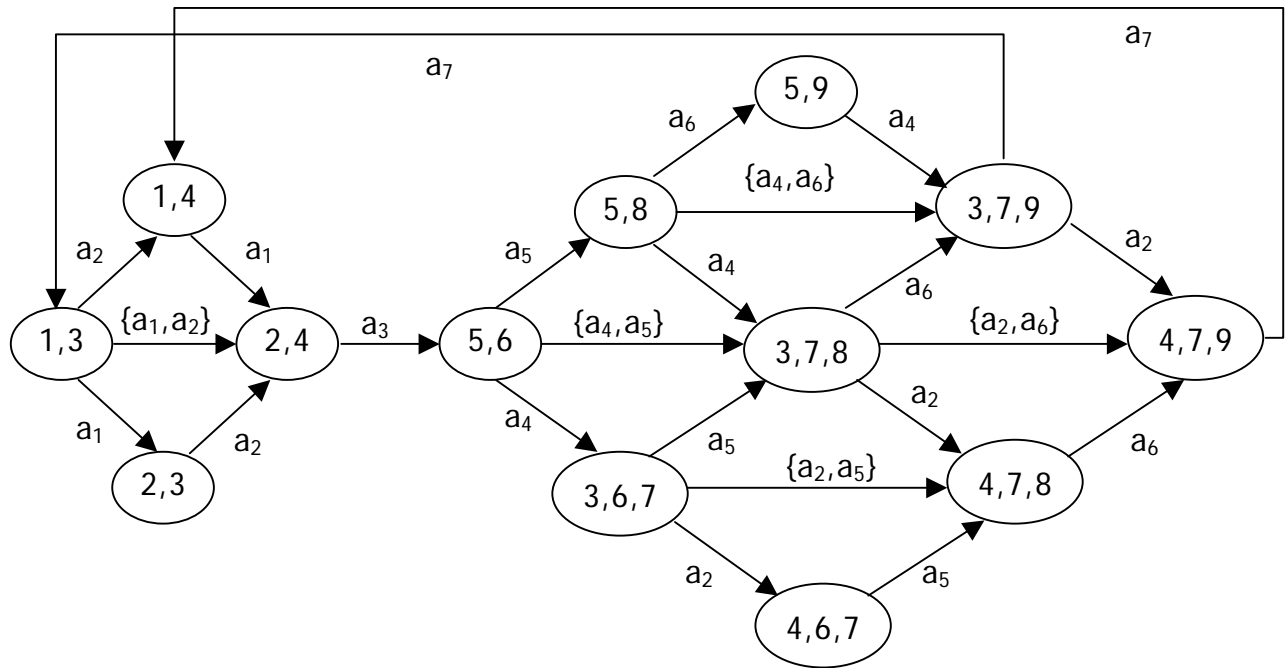


Figura-8: Espaço de Estados correspondente à rede da Figura-4.

Redes Lugar/Transição:

As redes elementares prestam-se fundamentalmente ao estudo de concorrência e ao desenvolvimento teórico das redes de Petri. Contudo, elas não são muito boas para utilização prática, pois os modelos desenvolvidos com essas redes chegam rapidamente a um número de elementos muito grande, mesmo ao se descrever sistemas simples. Na tentativa de suplantar esta dificuldade, na década de setenta foi desenvolvida uma extensão das redes clássicas, que foi chamada de rede lugar/transição [19 e 20], ou simplesmente redes LT. Embora estas redes também sejam de baixo nível, as modificações introduzidas nas propriedades das redes elementares, possibilitam a criação de modelos dos sistemas com estruturas topológicas mais reduzidas.

Para distinguir a nova extensão das existentes até então, os estados da rede passaram a ser chamados de lugares e as ações de transições. A popularidade das RdP LT foi tal que a grande maioria das extensões criadas a partir desta época conservaram esta nomenclatura.

Aspectos Estáticos

A principal modificação introduzida nas RdP LT foi a possibilidade dos lugares acumularem mais de uma marca por vez, o que se contrapõe às redes

elementares nas quais os estados só podem ter uma marca em cada instante de tempo. Esta modificação teve implicações importantes na definição da rede e, em especial, exigiu algumas modificações periféricas, por assim dizer, como a necessidade de se criar arcos valorados, para viabilizar o desenvolvimento de modelos mais concisos. Desta feita, uma rede de Petri lugar/transição é definida como uma sêxtupla $LT = (L, T, F, C, P, M_0)$, na qual:

- $R = (L, T, F)$ é a rede base, isto é, representa a estrutura topológica estática do sistema modelado, como na rede elementar, porém mudando a terminologia de estados para lugares e de ações para transições. Note-se que a relação de fluxo permanece inalterada.
- $C: L \rightarrow \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$ é uma função de capacidade, a qual determina o número máximo de marcas que podem coexistir em um lugar num dado instante.
- $P: F \rightarrow \mathbb{N}^*$ é uma função de peso dos arcos, a qual define quantas marcas são necessárias para executar determinada transição e quantas são geradas como resultado da execução de certa transição.
- $M_0: L \rightarrow \mathbb{N}^*$ é uma marcação inicial, que representa a situação dinâmica inicial do sistema, imediatamente antes de ser acionado, como C_{in} fazia no caso das redes elementares.

Define-se aqueles lugares de uma RdP LT ligados diretamente a uma transição, de forma que os arcos que os conectam tenham origem nos lugares e destino a transição, de conjunto de lugares de entrada da transição. Este conjunto de lugares de entrada de uma transição corresponde ao pré-conjunto de uma ação nas redes elementares e é dado por: $\bullet t = \{l \in L / \exists (l, t) \in F\}$.

Analogamente definem-se aqueles lugares de uma RdP LT ligados diretamente a uma transição, de forma que os arcos que os conectam tenham origem na transição e destino nos lugares, de conjunto de lugares de saída da transição. Este conjunto de lugares de saída de uma transição corresponde ao pós-conjunto de uma ação nas redes elementares e é dado por: $t^\bullet = \{l \in L / \exists (t, l) \in F\}$.

Aspectos Dinâmicos

- (1) A função $M: L \rightarrow \mathbb{N}$ é uma marcação da rede LT se, e somente se, a marcação de cada um dos lugares da rede for menor ou igual à capacidade do lugar correspondente $\forall I \in L, M(I) \leq C(I)$.
- (2) Uma transição t está habilitada em uma marcação M se, e somente se, para todo o lugar da marcação pertencente ao conjunto de lugares de entrada de t , o peso correspondente ao arco que conecta o lugar à transição considerada for menor ou igual ao número de marcas disponíveis no lugar de entrada e o número de marcas pré-existentes em cada um dos lugares de saída da transição t for menor ou igual à diferença entre suas respectivas capacidades e o peso dos arcos de saída correspondentes, $\forall I \in L: P(I, t) \leq M(I) \leq C(I) - P(t, I) \rightarrow M[t \in T >$.
- (3) Se t é uma transição habilitada na marcação M , então t pode ocorrer e o resultado é uma nova marcação M' obtida subtraindo-se da marcação M o número de marcas correspondentes aos pesos dos arcos de entrada da transição e adicionando-se à marcação M o número de marcas correspondentes aos pesos dos arcos de saída da transição, $\forall I \in L: M(I) [t \in T > M'(I) = M(I) - P(I, t) + P(t, I)$.
- (4) A ocorrência de uma transição nas RdP LT chama-se, mais comumente, de disparo da transição. Ele transforma a marcação M na marcação M' e as notações utilizadas para denota-lo são $M[t > M'$ ou $M \xrightarrow{t} M'$.
- (5) O conjunto de alcançabilidade de uma RdP LT é o menor conjunto formado por todas as marcações que se pode atingir pelo disparo das transições da rede correspondente a partir da marcação inicial da rede. Este conjunto é denotado por $[M_0 >$ e é tal que se M_0, M_i e M_j são marcações diferentes de uma RdP LT e se σ_m e σ_n são duas seqüências quaisquer de disparos de transições da rede, então $M_j \in [M_0 >$ se $M_0[\sigma_m > M_i \wedge M_i[\sigma_n > M_j$.

Exemplo de Simplificação

Nesta seção apresenta-se um exemplo da simplificação obtida com a utilização das RdP LT. Trata-se do problema bastante conhecido dos produtores

e consumidores. Apenas para recordá-lo rapidamente, trata-se de um conjunto de elementos que produzem bens, os produtores, e outro conjunto de elementos que consomem os bens, os consumidores, produzidos pelos elementos do primeiro conjunto. Este problema é bastante genérico e pode ser aplicado em diversas situações.

Neste exemplo consideraremos a situação do teleférico em uma estação turística. Neste sistema os turistas sobem e descem a montanha utilizando-se de vagões suspensos por cabos, para apreciar a paisagem. Inicialmente, consideremos que a estação turística não dispõe de muitos recursos e tem apenas um vagão em operação. Também, consideremos que para reduzir os custos operacionais este vagão só funciona em um sentido, por exemplo, subindo a montanha. Assim, os turistas chegam no pé da montanha, são transportados para cima e são recepcionados lá no topo por um funcionário que lhes mostra a vista e os encaminha para outro meio de transporte, para a descida. O teleférico pode ser modelado como tendo uma estação produtora de turistas (a estação de embarque no vagão, no pé da montanha), uma estação consumidora de turistas (a estação de desembarque do vagão, no topo da montanha) e um sistema de transmissão de turistas (a linha por onde eles são transportados). Consideremos ainda que a nossa unidade de transporte é um grupo de até seis turistas por vez e que nunca chegam mais do que seis turistas, simultaneamente, na estação de embarque. Este sistema pode ser modelado por uma rede elementar, conforme apresentado na Figura-9.

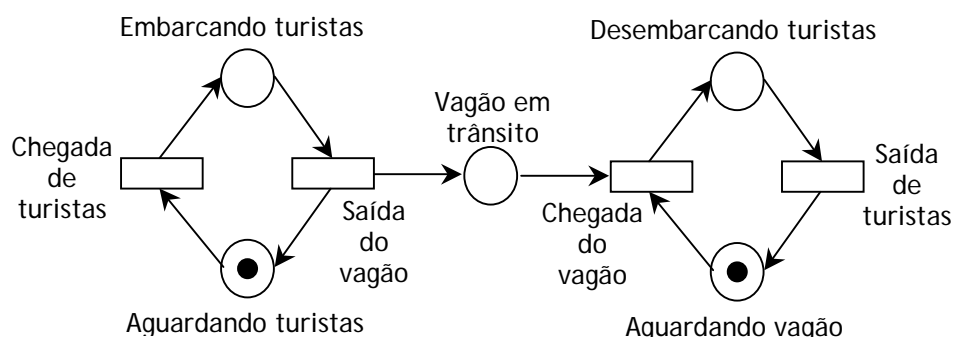


Figura-9: Rede elementar modelando um teleférico com um único vagão e uma única linha.

Imaginemos agora que o movimento de turistas aumentou e que um único vagão não é suficiente para carregá-los adequadamente montanha acima, pois provoca filas de espera muito longas, o que não agrada a ninguém. Então, o gerente da estação turística decide investir em mais dois vagões, de forma que agora é possível embarcar três grupos de até seis turistas por vez. Esta nova situação pode ser representada pela rede elementar apresentada na Figura-10. Note-se que para representar os três vagões em utilização na linha, foi necessário criar dois novos estados entre o produtor e o consumidor.

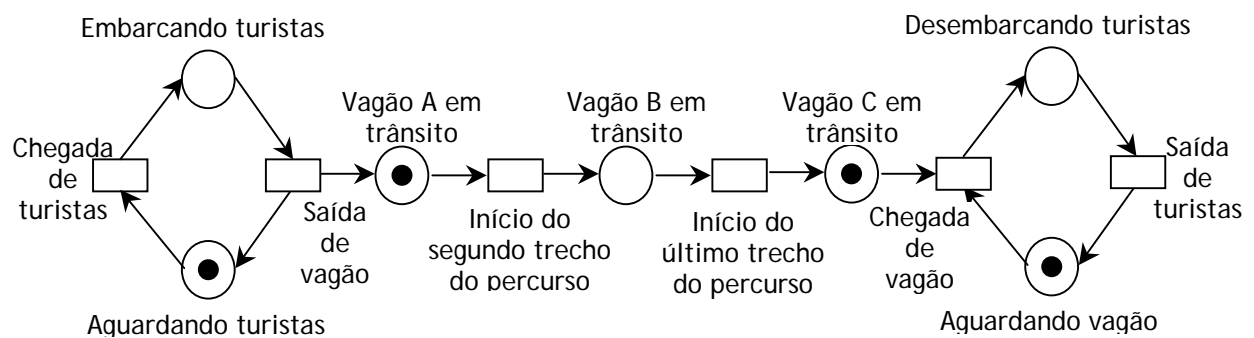


Figura-10: Rede elementar modelando um teleférico com três vagões e uma única linha.

Esta profusão de vagões na linha atrai cada vez mais turistas para passearem de teleférico, de tal sorte que um único grupo de seis turistas por vez não é mais suficiente. Sensível ao problema o gerente da estação turística decide ampliar o negócio e, como a linha disponível não suporta vagões com capacidade superior a seis pessoas, ele decide construir uma linha paralela, ampliando as estações de embarque e desembarque. Assim, ele pode transportar dois grupos (doze turistas) simultaneamente, por meio de duas linhas paralelas, cada uma contendo três vagões com capacidade para seis turistas cada vagão. Esta nova situação pode ser representada pela rede elementar da Figura-11. Note-se que a rede está ficando, rapidamente, mais complexa, conforme acrescentamos funcionalidades ao sistema modelado.

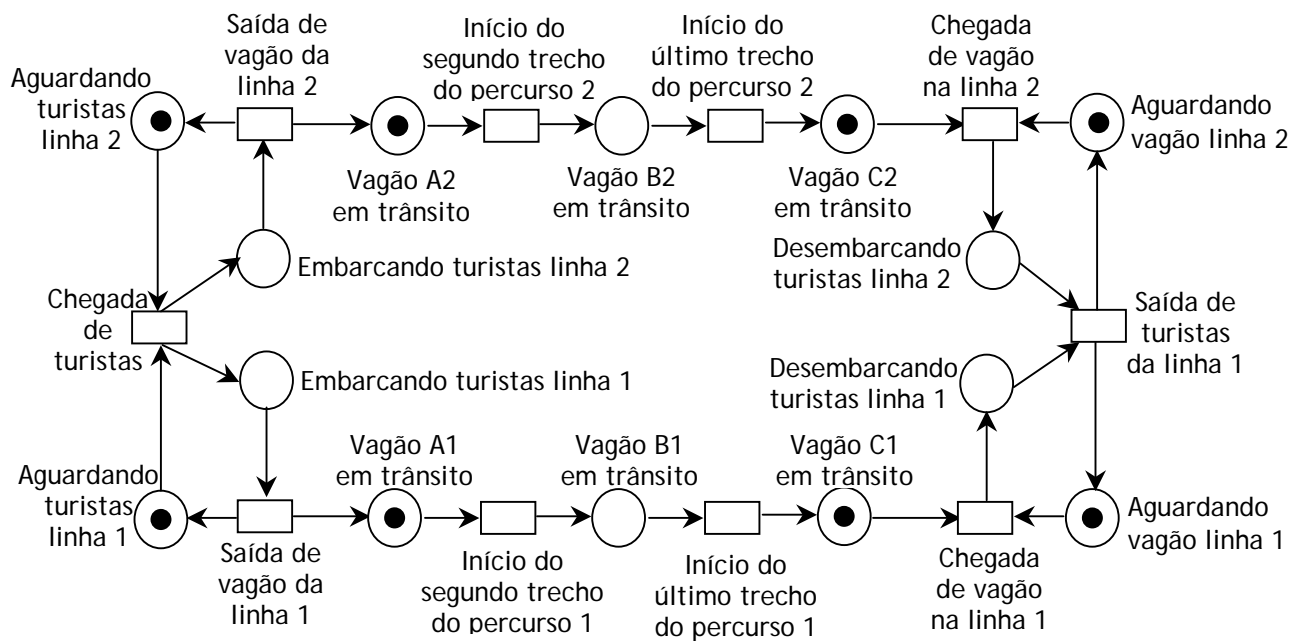


Figura-11: Rede elementar modelando um teleférico com seis vagões e duas linhas.

O objetivo da criação das redes lugar/transição foi, exatamente, reduzir a complexidade dos modelos resultantes, para facilitar seu tratamento. O modelo em rede elementar apresentado na Figura-11 pode ser transformado em um modelo mais simples utilizando-se as redes lugar/transição. A primeira simplificação possível consiste em representar os três vagões de cada linha de transmissão por um único lugar com capacidade igual a três. A segunda simplificação possível consiste em representar as duas linhas juntando-se os lugares correspondentes a cada linha, aumentando-se sua capacidade para seis, e aglutinando os arcos de entrada e de saída destes lugares de tal forma que os arcos do novo lugar passem a ter peso dois, representando os vagões das duas linhas. Note-se que esta aglutinação subentende que devido ao grande fluxo de turistas os vagões de ambas as linhas saem sempre aos pares e que, como as linhas funcionam à mesma velocidade, eles também chegam ao destino aos pares. A rede lugar/transição resultante não necessita representar o agrupamento de turistas e ficaria como apresentada na Figura-12.

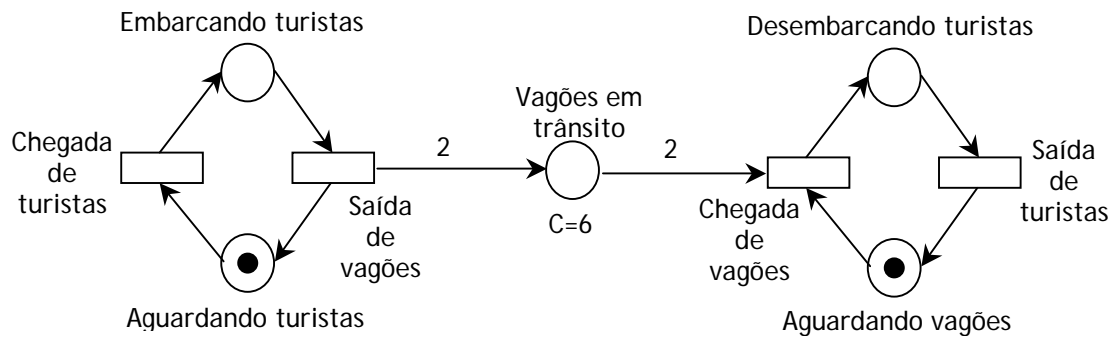


Figura-12: Rede lugar/transição modelando um teleférico com duas linhas e seis vagões.

Redes de Alto Nível:

A principal característica das redes de alto nível [22], comparativamente às redes elementares, é que nestas as marcas apresentam condições puramente booleanas e naquelas as marcas representam dados individualizados.

Os dois principais modelos de redes de alto nível são as redes predicado/transição, que se baseiam na lógica de predicados de primeira ordem, e as redes coloridas, as quais originalmente foram orientadas a representações algébrico-lineares.

Uma rede predicado/transição é uma quintupla $PrT = (R, \mathcal{L}, \lambda, \mathcal{V}, M_{in})$, onde:

$R = (L, T, F)$ é a rede básica;

\mathcal{L} é uma linguagem disjunta de L ;

L é um mapeamento (parcial) com domínio $T \cup F$, inscrevendo:

(a) algumas transições t (não necessariamente todas) com fórmulas \mathcal{L}, ϕ_t chamadas de guardas da transição;

(b) cada arco $(x, y) \in F$ com um conjunto finito $(x, y) = (\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m)$ de n -uplas de termos \mathcal{L} , em que n é a aridade do lugar pertencente ao arco;

\mathcal{V} é um modelo para \mathcal{L} ; e

M_{in} é uma marcação inicial.

Uma rede colorida é uma eneátupla $RPC = (S, L, T, A, N, C, G, E, I)$ conforme as definições a seguir:

S é o conjunto de cores que determina os tipos, as operações e as funções que podem ser usadas nas inscrições da rede;

L é o conjunto de lugares, T é o conjunto de transições e A é o conjunto de arcos, os quais devem ser finitos e disjuntos dois a dois;

N é a função nodal que mapeia cada arco em um par cujo primeiro elemento é o nó fonte e o segundo elemento é o nó destino;

C é a função de cores que mapeia cada lugar em um conjunto de cores;

G é a função guarda que mapeia cada transição em uma expressão booleana;

E é a função que mapeia cada arco em uma expressão cujo resultado é um multiconjunto sobre o conjunto de cores associado ao lugar correspondente; e

I é a função de inicialização que mapeia cada lugar em uma expressão cujo resultado é um multiconjunto sobre o conjunto de cores dos lugares.

Extensões das Redes de Petri:

Nesta seção falamos das extensões mais significativas das redes de Petri, quais sejam, as extensões hierárquicas e as temporizadas. Ambas extensões podem ser aplicadas tanto em redes de baixo nível quanto de alto nível.

Redes Hierárquicas

A modelagem de sistemas de grande porte resulta em redes muito complexas, cuja compreensão fica bastante prejudicada se não utilizarmos mecanismos de estruturação ao desenvolvermos tais modelos. Esta estruturação é, na verdade, apenas uma conveniência gráfica, para facilitar a legibilidade dos modelos resultantes; ela não acrescenta qualquer poder computacional ao modelo. A hierarquização das redes de Petri se dá pela estratificação de lugares ou transições.

Por meio da modelagem hierárquica de sistemas é possível considerar diversos níveis de detalhamento ao observá-los. Conseqüentemente, em cada fase da análise pode-se atentar para aspectos diferentes do sistema modelado. Além

disto, como o modelo é construído de forma modular, é possível utilizar partes do modelo de determinado sistema na modelagem de outros sistemas que lhe sejam semelhantes.

A hierarquia baseia-se na possibilidade de refinar partes do sistema modelado em sub-redes associadas a lugares ou transições de uma rede. Sendo esta rede, portanto, descrita em nível de abstração mais elevado. Contudo, pode haver dificuldade no controle da consistência dos modelos quando é necessário refinar elementos adjacentes da rede. Por esta razão, muitas extensões hierárquicas permitem a estratificação apenas de lugares, outras apenas de transições e outras de lugares e transições, mas muitas não permitem o refinamento de elementos adjacentes. [23]

Um dos morfismos utilizados para a obtenção de redes hierárquicas é a substituição de transições. Neste caso, algumas transições da rede são designadas como transições de substituição e correspondem a uma sub-rede. Cada rede pode ter diversas sub-redes e as sub-redes podem ser aninhadas em vários níveis de detalhamento. A interface entre uma transição de substituição e a sub-rede correspondente é feita por meio de lugares-porta. A Figura-13a apresenta uma rede de Petri contendo uma transição de substituição e a Figura-13b apresenta a sub-rede correspondente. A Figura-13c mostra a rede resultante da substituição da rede da Figura-13b na rede da Figura-13a.

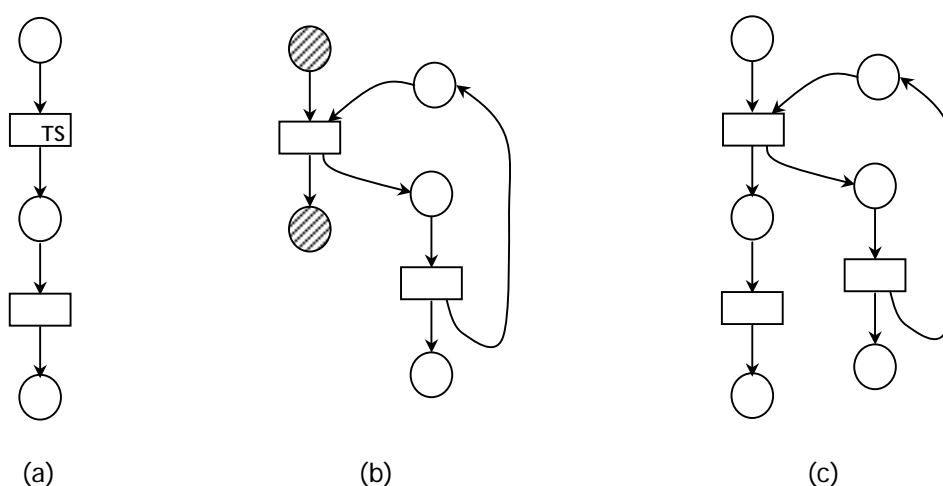


Figura-13: Exemplo de hierarquia por estratificação de transições.
 (a) Nível hierárquico superior (TS → transição de substituição);
 (b) Nível hierárquico inferior (lugares hachurados → lugares-porta);
 (c) Rede plana correspondente à substituição de (b) em (a).

Note-se que na Figura-13a a transição de substituição é identificada com uma inscrição TS no canto inferior direito. Esta transição é a que deve ser substituída pela sub-rede, para efeitos de planarização do modelo, isto é, quando se deseja desfazer a hierarquia da rede e a conseqüente recuperação do modelo completo, sem hierarquias. Analogamente, na Figura-13b, pode-se observar lugares hachurados. Embora esta notação não seja usual, ela foi utilizada nesta figura para identificar os lugares-porta. Estes lugares são cópias dos lugares de entrada e de saída da transição de substituição, na rede de nível hierárquico superior. Ao se substituir a sub-rede na transição de substituição correspondente, estes lugares desaparecem do modelo, pois são usados apenas para refletir, na sub-rede, o comportamento da rede mais abstrata.

O outro morfismo utilizado para a obtenção de redes hierárquicas é a substituição de lugares. Neste caso, alguns lugares da rede são designados como lugares de substituição e correspondem a uma sub-rede. A exemplo do morfismo anterior, cada rede pode ter diversas sub-redes e as sub-redes podem ser aninhadas em vários níveis de detalhamento. A interface entre um lugar de substituição e a sub-rede correspondente é feita por meio de transições-porta. A Figura-14a apresenta uma rede de Petri contendo um lugar de substituição e a Figura-14b apresenta a sub-rede correspondente. A Figura-14c mostra a rede resultante da substituição da rede da Figura-14b na rede da Figura-14a.

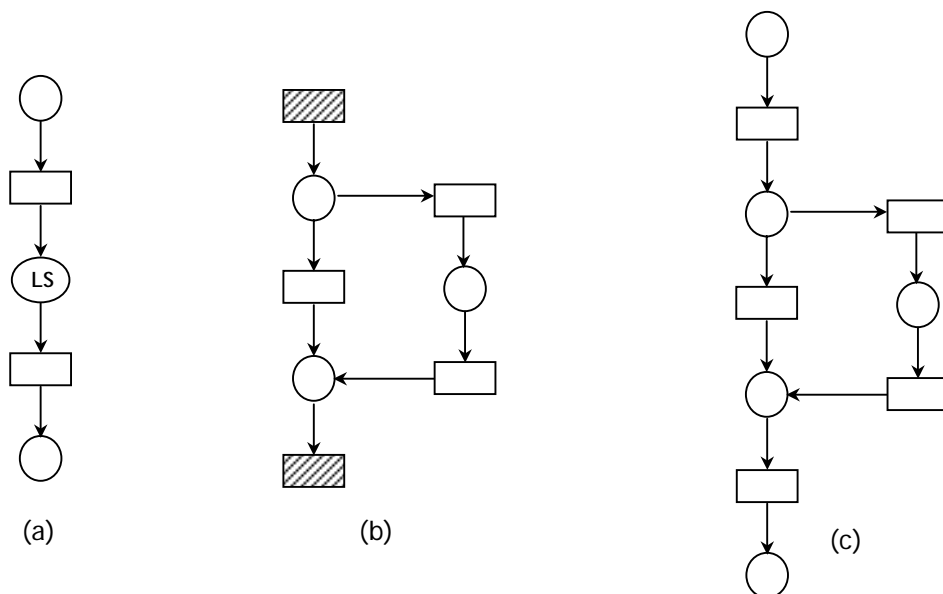


Figura-14: Exemplo de hierarquia por estratificação de lugares.

(d) Nível hierárquico superior (LS → lugar de substituição);

(e) Nível hierárquico inferior (transições hachuradas → transições-porta);

(f) Rede plana correspondente à substituição de (b) em (a).

Note-se que na Figura-14a o lugar de substituição é identificado com uma inscrição LS. Este lugar é o que deve ser substituído pela sub-rede, para efeitos de planarização do modelo, isto é, quando se deseja desfazer a hierarquia da rede e a conseqüente recuperação do modelo completo, sem hierarquias. Analogamente, na Figura-14b, pode-se observar transições hachuradas. Embora esta notação não seja usual, ela foi utilizada nesta figura para identificar as transições-porta. Estas transições são cópias das transições de entrada e de saída do lugar de substituição, na rede de nível hierárquico superior. Ao se substituir a sub-rede no lugar de substituição correspondente, estas transições desaparecem do modelo, pois são usadas apenas para refletir, na sub-rede, o comportamento da rede mais abstrata.

Redes Temporizadas

O formalismo a que chamamos de redes de Petri possibilita a representação de sistemas dinâmicos a eventos discretos, com atividades concorrentes e assíncronas. Entretanto, para que seja possível especificar sistemas de tempo real, avaliar o desempenho de sistemas dinâmicos de um modo geral e examinar questões referentes ao seu escalonamento, por exemplo, é necessário que se considerem informações relativas ao tempo em que ocorrem os eventos no sistema considerado. Os modelos estudados até o momento permitem apenas a descrição funcional desses sistemas, levam em conta apenas a relação causal entre os eventos dos sistemas modelados, mas não possibilitam a representação da relação do tempo de ocorrência de tais eventos.

As redes de Petri temporizadas são extensões que buscam acrescentar às redes de Petri a possibilidade de análise no domínio de tempo [24, 25, 26]. Nestas extensões o tempo pode estar associado às marcas, aos arcos, aos lugares ou às transições. Quando associado às marcas, elas carregam uma informação indicando, geralmente, quando a marca estará disponível para ser considerada para a habilitação de transições. Quando a informação de tempo está associada aos arcos, a cada arco é associado um tempo de disparo. Quando a informação de tempo está associada aos lugares, usualmente, corresponde a uma indicação do tempo que a marca deve permanecer naquele lugar antes de ser utilizada

para a habilitação das transições sucessoras do lugar em questão. Finalmente, quando o tempo é associado às transições a indicação refere-se, de modo geral, tempo que a ação leva para ser executada.

Estas extensões temporais podem ser determinísticas ou estocásticas [24]. As extensões determinísticas surgiram na primeira metade da década de setenta e indicam tempos absolutos relativos à execução dos eventos correspondentes. As extensões estocásticas, por sua vez, permitem considerar incertezas nos instantes de execução de eventos do sistema associando a eles funções de probabilidade para a determinação de sua execução.

Uma possível classificação para as redes de Petri temporizadas é apresentada na Figura-15, a qual é uma adaptação da classificação apresentada por Wang [24]. Esta adaptação é discutida no parágrafo que segue a figura.

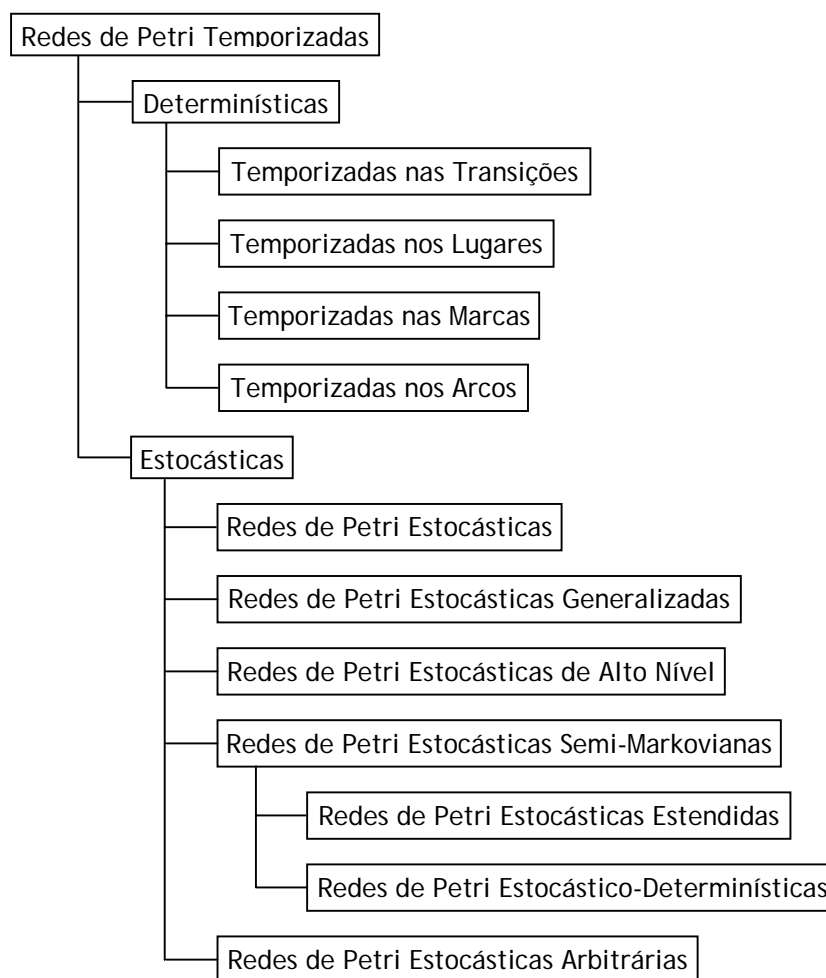


Figura-15: Uma classificação de redes de Petri temporizadas.

Na Figura-15 consideram-se as redes de Petri com temporização nas marcas, como as redes coloridas, englobadas por Wang como redes temporizadas nos arcos. Também fundem-se as redes de petri estocásticas coloridas e as redes de Petri de alto nível estocásticas em uma única classe, qual seja, a das redes de Petri estocásticas de alto nível, uma vez que não parece razoável separar as redes coloridas das demais redes de alto nível. Pelas razões discutidas na seção seguinte, não se faz aqui a distinção entre redes de Petri temporizadas e redes de Petri com tempos, uma vez que estas formam um superconjunto daquelas.

Redes Temporizadas Determinísticas

Foram três os primeiros modelos de redes de Petri temporizadas determinísticas a serem propostos no início da década de setenta, quais sejam, o modelo de Ramchandani, o modelo de Merlin e o modelo de Sifakis, todos baseados nas redes lugar/transição, que era então o modelo de redes de Petri mais utilizado em aplicações práticas.

Nas redes propostas por Ramchandani em 1973 [06], além da rede lugar/transição define-se uma função τ que associa a cada transição um número relativo à duração do seu disparo, o qual ocorre em duas etapas: inicialmente, logo após se tornar habilitada o pré-conjunto da transição é decrementado das marcas correspondentes aos pesos dos respectivos arcos de entrada; a seguir, depois de transcorrido um intervalo de tempo $\tau(t)$, o pós-conjunto da transição é acrescido das marcas correspondentes aos respectivos arcos de saída.

Nas redes propostas por Sifakis em 1976 [08], além da rede lugar/transição define-se uma função δ que associa um atraso a cada lugar, o que torna as marcas que chegam em determinado lugar indisponíveis por um certo intervalo de tempo. Tais marcas só ficarão disponíveis para uso após o decurso do período $\delta(l)$, associado ao lugar em questão.

Posteriormente, foi demonstrado que as redes de Sifakis e de Ramchandani são equivalentes e que constituem casos particulares das redes de Merlin. Por esta razão, a seguir estudamos com mais detalhes apenas as redes de Merlin.

A rede de Petri temporizada proposta por Merlin em 1974 [07] é dada pela septupla $TPN = (L, T, F, C, P, M_0, I_e)$, onde os primeiros seis termos correspondem a uma rede lugar/transição normal:

$$R = (L, T, F) \Rightarrow \text{rede base}$$

$$C: L \rightarrow \mathbb{N}_+ \cup \{\infty\} \Rightarrow \text{função capacidade}$$

$$P: F \rightarrow \mathbb{N}_+ \Rightarrow \text{função peso}$$

$$M_0: L \rightarrow \mathbb{N} \Rightarrow \text{marcação inicial}$$

E o sétimo termo é uma função, $I_e: T \rightarrow \wp \times (\wp \cup \infty)$, que associa um intervalo fechado $[\alpha, \beta] \rightarrow 0 \leq \alpha \leq \beta$ a cada transição, chamado de intervalo de disparo estático. O limite inferior, α , do intervalo é o tempo de disparo inicial (TDI) estático e o limite superior, β , do intervalo é o tempo de disparo final (TDF) estático. \wp é o conjunto dos números racionais.

O disparo de uma transição ocorre dentro do intervalo I_e , a menos que a transição seja desabilitada pelo disparo de outra transição. Após a habilitação de uma transição, o TDI associado indica o período de tempo mínimo que a transição deve esperar até que se possa executar a ação correspondente a ela e o TDF representa o período máximo admissível de espera para o disparo da transição.

Segundo esta definição, uma rede lugar/transição é um caso particular da rede temporizada de Merlin, na qual cada transição estaria associada a um intervalo de disparo estático igual a $[0, \infty]$.

Redes Temporizadas Estocásticas

Há vários modelos de redes estocásticas, dentre eles pode-se citar as redes estocásticas propostas por Natkin em 1980 [27] e por Molloy em 1981 [28, 29], as redes estocásticas estendidas propostas por Dugan et al. [30] e as redes estocásticas generalizadas propostas por Marsan et al. [12] ambas em 1984.

O modelo mais abrangente é o das redes de Petri estocásticas generalizadas, $GSPN = (L, T, F, C, P, I, W, M_0)$, proposto pelo pessoal da Universidade de Torino, na Itália. Este modelo é composto por uma rede lugar/transição com dois

tipos de transições, as temporizadas e as imediatas. As transições temporizadas têm retardos associados por uma função peso, $W(t)$, correspondentes a variáveis aleatórias distribuídas exponencialmente. As transições imediatas são associadas com níveis de prioridades ditados por uma função de prioridades, $P(t)$, e têm retardos determinísticamente nulos.

$R = (L, T, F) \Rightarrow$ rede base

$C: L \rightarrow \mathbb{N}^+ \cup \{\infty\} \Rightarrow$ função capacidade

$P: T \rightarrow \pi \Rightarrow$ função de prioridades

$I \Rightarrow$ arcos inibidores

$W: T \rightarrow \tau \Rightarrow$ função peso

$M_0: L \rightarrow \mathbb{N} \Rightarrow$ marcação inicial

Além disto, a relação de fluxo é acrescida de arcos inibidores que servem, fundamentalmente, para a realização de testes por zero. Por exemplo, na Figura-16, a transição só dispara se e_1 possuir uma marca e se e_2 não possuir marcas, isto é, se houver uma ou mais marcas em e_2 a transição não disparará.

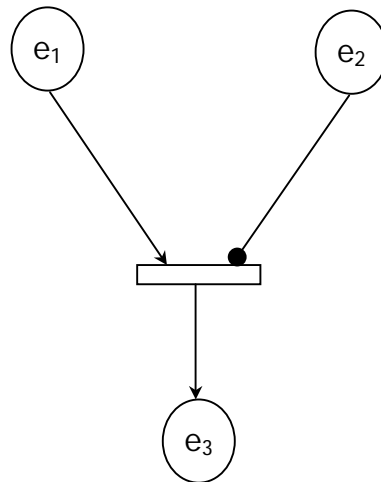


Figura-16: Exemplo de rede estocástica com arco inibidor.

Referências Bibliográficas:

- [01] C.A.Petri, Kommunikation mit Automaten. Schriften des IIM Nr.2, Institut für Instrumentelle Mathematik, Bonn, 1962. Traduzida para o inglês como: *Communication with Automata*, Technical Report RADC-TR-65-377, Griffiths Air Force Base, New York, Vol.1, Supl.1, 1966.
- [02] C.A.Heuser, Modelagem Conceitual de Sistemas. (1ª. Edição, EBAI - 1988) 2ª. Edição, Campinas: UNICAMP (IV Escola Brasileiro-Argentina de Informática), 150 págs., 1991.
- [03] W.Reisig, Petrinetze - Eine Einführung, Springer Verlag, 158 págs., 1982 (ISBN: 3540114785). Este livro foi traduzido para o italiano (1984) e o inglês (1985), e teve uma segunda edição alemã, corrigida e expandida, em 1986.
- [04] G.W.Brams, Réseaux de Petri: Théorie et Pratique. Tome 1: Théorie et Analyse (ISBN: 2903607125). Tome 2: Modélisation et Applications (ISBN: 2903607133). Editions Masson, setembro de 1982. (Brams é usado como nome coletivo de: Brams, G.W.; Andre, C.; Berthelot, G.; Girault, C.; Memmi, G.; Roucairol, G.; Sifakis, J.; Valette, R.; Vidal-Naquet, G.) Este livro foi traduzido para o italiano em 1985 e para o espanhol em 1986.
- [05] J.L.Peterson, Petri Net Theory and the Modeling of Systems, Prentice Hall, Inc., 190 págs., junho de 1981 (ISBN: 0136619835).
- [06] C.Ramchandani, Analysis of Asynchronous Concurrent Systems by Means of Petri Nets. Project MAC, TR-120, MIT, Cambridge, MA, 1974.
- [07] P.M.Merlin e D.J.Farber, *Recoverability of Communication Protocols - Implication of a Theoretical Study*. IEEE Transactions on Communications, págs.1036-1043, setembro de 1976.
- [08] J.Sifakis, *Use of Petri nets for Performance Evaluation*. 3rd International Symposium on Modeling and Evaluation, IFIP, North Holland, págs. 75-93, 1977.
- [09] F.J.W.Simons, Modelling and Analysis of Communication Protocols Using Numerical Petri Nets. Tese de Doutorado, Report 152, Department of Electrical and Engineering Science, University of Essex, Telecommunications System Group, 1978.

- [10] H.Genrich e K.Lautenbach, *Facts in Place/Transition Nets*. Proceedings of the Seventh Symposium on Mathematical Foundations of Computer Science. Lecture Notes in Computer Science, Vol.64, págs.213-231, 1978.
- [11] K.H.Jensen, *High-level Petri Nets*. In: A. Pagnoni and G. Rozenberg (eds.): Applications and Theory of Petri Nets, Informatik-Fachberichte vol. 66, Springer-Verlag 1983, 166-180.
- [12] M.A.Marsan, G.Balbo e G.Conte, *A Class of Generalized Stochastic Petri Nets for the Performance Analysis of Multiprocessor Systems*. ACM Transactions on Computer Systems, 2(2)93-122, maio de 1984.
- [13] T.Murata, *Petri Nets: Properties, Analysis and Applications*, Proceedings of the IEEE, 77(4)541-580, abril de 1989.
- [14] K.H.Jensen, Coloured Petri Nets. Vol.1: Basic Concepts, 1996 (2nd Ed.) (ISBN: 3540609431). Vol.2: Analysis Methods, 1995 (ISBN: 3540582762). Vol.3: Practical Use (ISBN: 3540628673), 1997. Springer Verlag.
- [15] P.R.M.Maciél, R.D.Lins e P.R.F.Cunha, Introdução às Redes de Petri e Aplicações. X Escola de Computação da SBC, 187 págs., 1996.
- [16] J.Cardoso e R.Valette, Redes de Petri. Editora da UFSC, 212 págs., 1997 (ISBN: 8532800955).
- [17] P.S.Thiagarajan, G.Rozenberg e C.Fernández, *Elementary Net Systems — Fundamentals*, in W.Brauer, W.Reisig e G.Rozenberg (Eds.) “Petri Nets: Central Models and Their Properties — Section 1”, Lecture Notes in Computer Science, vol.254, pp.25-115, Springer-Verlag, 1987 (ISBN: 3540179054).
- [18] G.Rozenberg e J.Engelfriet, *Elementary Net Systems*, in W.Reisig e G.Rozenberg (Eds.) “Lectures on Petri Nets I: Basic Models”, Lecture Notes in Computer Science, vol.1491, pp.12-121, Springer-Verlag, 1998 (ISBN: 3540653066).
- [19] W.Reisig, K.Lautenbach e E.Best, *Place/Transition Systems — Fundamentals*, in W.Brauer, W.Reisig e G.Rozenberg (Eds.) “Petri Nets: Central Models and Their Properties — Section 2”, Lecture Notes in Computer Science, vol.254, pp.116-205, Springer-Verlag, 1987 (ISBN: 3540179054).

- [20] W.Reisig, A Primer on Petri Net Design, Springer Verlag - Nova Iorque, 1992 (ISBN: 0387520449). Tradução de "Systementwurf mit Netzen", Springer Verlag - Berlin, 1985 (ISBN: 3540520449).
- [21] J.Desel e W.Reisig, Place/Transition Nets, in W.Reisig e G.Rozenberg (Eds.) "Lectures on Petri Nets I: Basic Models", Lecture Notes in Computer Science, vol.1491, pp.122-173, Springer-Verlag, 1998 (ISBN: 3540653066).
- [22] K.Jensen e G.Rozenberg (Eds.), High-level Petri Nets - Theory and Application, Springer-Verlag, 1991 (ISBN: 354054125X).
- [23] P.R.M.Maciel, R.D.Lins e P.R.F.Cunha, Introdução às Redes de Petri e Aplicações, 10^a Escola de Computação da Sociedade Brasileira de Computação, Instituto de Computação da UNICAMP, 187pp., Campinas, 8 a 13 de julho de 1996.
- [24] J.Wang, Timed Petri Nets - Theory and Application, Kluwer Academic Publishers, 1998 (ISBN: 0792382706).
- [25] W.M.Zuberek, *Timed Petri Nets: Definitions, Properties, and Applications*, Microelectronics and Reliability, 31(4)627-644, 1991.
- [26] P.H.Starke, A Memo on Time Constraints in Petri Nets, Informatik-Berichte, Nr.46, 28pp., Humboldt-Universität zu Berlin, Agosto de 1995
- [27] S.Natkin, Les Réseaux de Petri Stochastiques et Leur Application a L'évaluation des Systemes Informatiques, Thèse de Docteur Ingegnieur, CNAM, Paris, France, 1980.
- [28] M.Molloy, On the Integration of Delay and Throughput Measures in Distributed Processing Models, Ph.D.Thesis, UCLA, 1981.
- [29] M.Molloy, *Performance Analysis Using Stochastic Petri Nets*, IEEE Transactions on Computers, C-31(9)913-917, 1982.
- [30] J.B.Dugan, K.S.Trivedi, R.M.Geist e V.F.Nicola, *Extended Stochastic Petri Nets: Application and Analysis*, Proceedings of Performance'84, pp.507-519, Paris, França, 1984.

Apêndices

Algoritmo gerador da árvore de cobertura:

Para a geração da árvore de coberturas define-se uma variável ω , que representa um número qualquer de marcas e, em relação a uma variável “a” qualquer, apresenta as seguintes propriedades:

$$\checkmark \omega + a = \omega$$

$$\checkmark \omega - a = \omega$$

$$\checkmark a < \omega$$

Os nós da árvore de cobertura podem ser de quatro tipos, quais sejam: fronteira, interiores, terminais e duplicatas. Os nós de fronteira são aqueles que ainda não foram processados. Os nós interiores são aqueles já processados e que produziram algum sucessor. Os nós terminais são aqueles já processados e que não possuem qualquer sucessor. Os nós duplicatas são aqueles iguais a algum outro nó (interior ou terminal), os quais, por terem sucessores idênticos, não precisam ser analisados. No começo, a marcação inicial é a raiz da árvore e este nó é definido como um nó de fronteira.

Etapas :

- (1) Seja χ um nó de *fronteira*.
- (2) Se há outro nó γ na árvore, que não seja nó fronteira e que tenha a mesma marcação associada ($M_\chi = M_\gamma$), então o nó χ é definido como uma *duplicata*.
- (3) Se nenhuma transição estiver habilitada na marcação M_χ , então χ é definido como um nó *terminal*.
- (4) Para todas as transições $t_j \in T$, habilitadas em M_χ , criar um novo nó ξ na árvore. A marcação M_ξ associada a este novo nó é, para cada lugar l_i , definida por:

$$(a) \text{ se } M_\chi(l_i) = \omega, \text{ então } M_\xi(l_i) = \omega;$$

- (b) se existe um nó γ no percurso do nó raiz ao nó χ tal que $M_\gamma < \delta(M_\chi, t_j)$ e $M_\gamma(l_i) < \delta(M_\chi, t_j)_{/li}$, então $M_\xi(l_i)=w$;
- (c) em qualquer outro caso $M_\xi(l_i) < \delta(M_\chi, t_j)_{/li}$.
- (5) Insere-se um arco rotulado com t_j , direcionado do nó χ ao nó ξ .
- (6) Redefine-se o nó χ como *interior* e o nó ξ como *fronteira*.
- (7) Havendo nós de *fronteira* volta-se ao passo (2). Quando não houver mais nós de *fronteira* o algoritmo termina.