CÁLCULO NUMÉRICO

REFINAMENTO E MÉTODO DA BISSECÇÃO

LUCAS SAMPAIO LEITE

Link do plano de aula (versão pdf): https://github.com/lucassampaioleite/selecao-professor-CIn

NA AULA PASSADA...

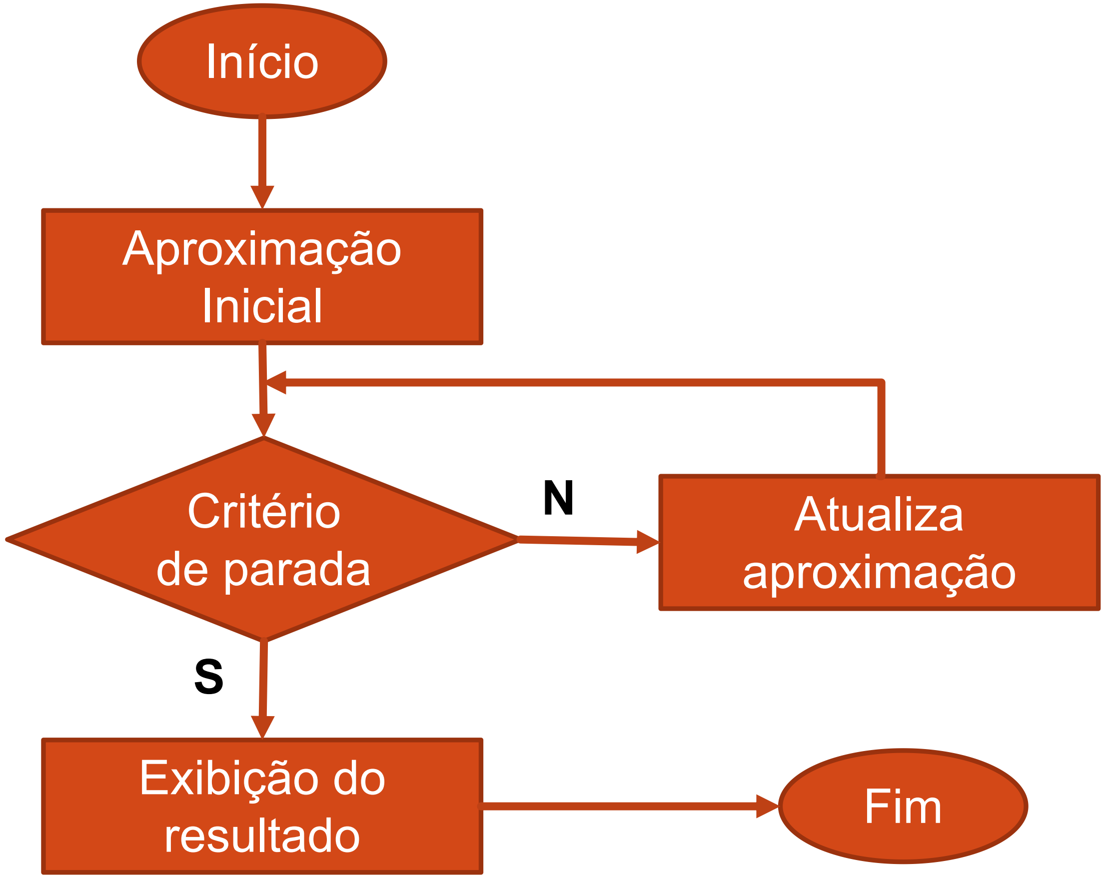
- Zeros de funções
- Métodos analíticos x métodos diretos
- Métodos numéricos
  - Fase 1: Isolamento de funções

OBJETIVOS DA AULA

- Apresentar o processo de refinamento para encontrar os zeros de uma função;
- Introduzir e demonstrar o método da Bissecção para obter soluções aproximadas.

MÉTODOS NUMÉRICOS (REFINAMENTO)

- Fase 1: Isolamento
- **Fase 2: Refinamento**



MÉTODOS NUMÉRICOS (REFINAMENTO)

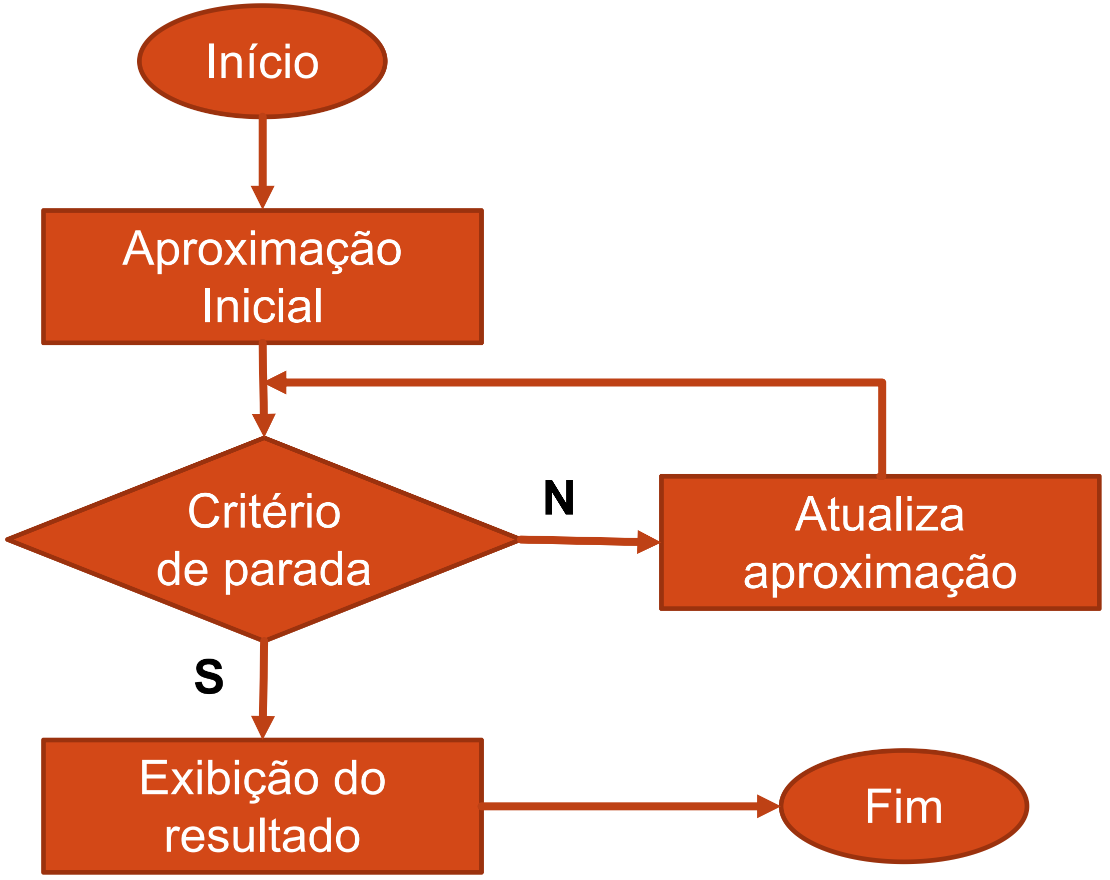
- Fase 1: Isolamento
- **Fase 2: Refinamento**

Critérios de parada

$$i)\ |f(x_k)| \leq \varepsilon$$

$$ii)\ |x_k - x_{k-1}| \leq \varepsilon$$

$$iii)\ n^{\underline{o}}\ limite\ de\ iterações$$



MÉTODO DA BISSECÇÃO

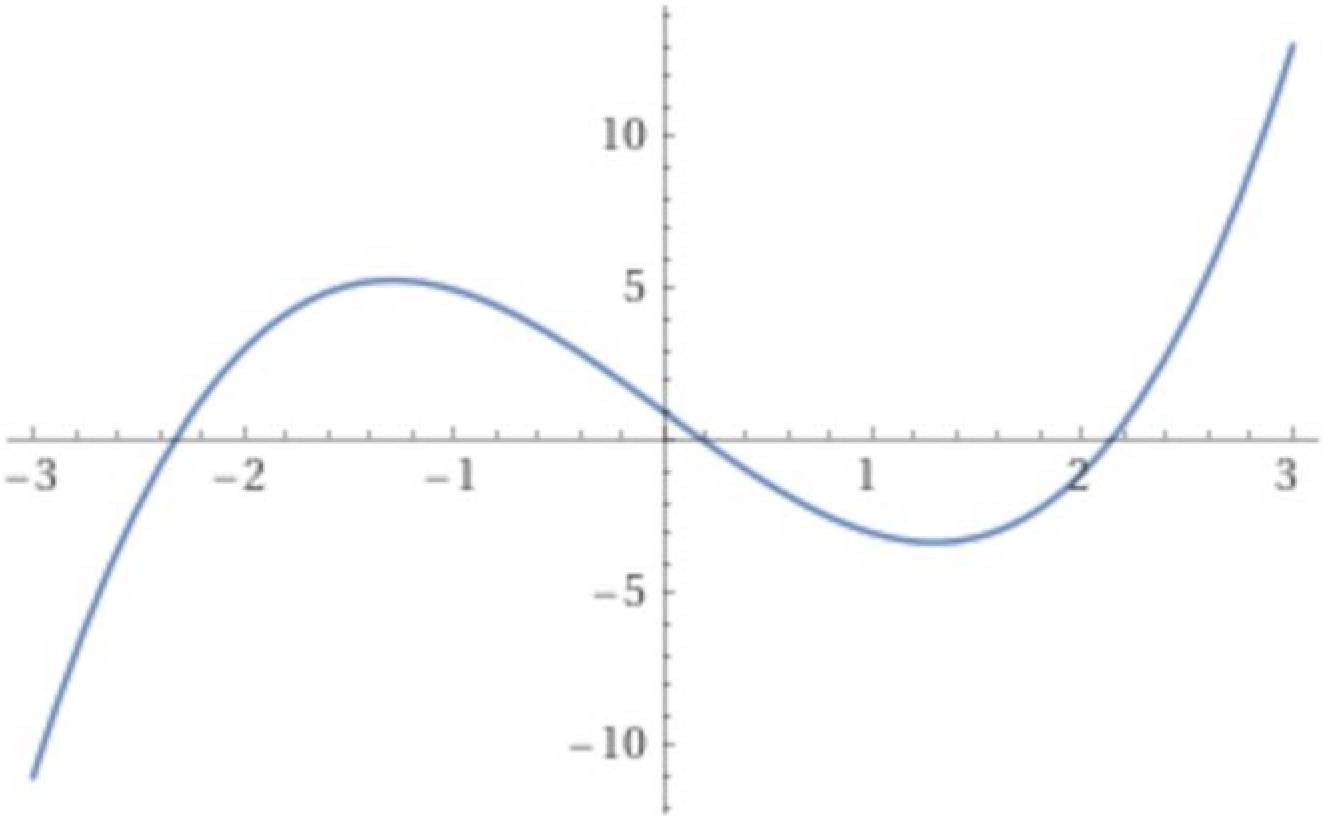
- Dada uma função $f(x)$ contínua no intervalo $[a, b]$ **onde existe uma raiz única**, é possível determinar tal raiz subdividindo sucessivas vezes o intervalo pelo ponto médio de a e b.

MÉTODO DA BISSECÇÃO

Teorema de Bolzano: Se f é uma função contínua em um certo intervalo $[a\ ;\ b]$ e troca de sinal nos extremos deste intervalo, isto é, $f(a) * f(b) < 0$, então existe pelo menos uma raiz real de f em $[a;\ b]$.

MÉTODO DA BISSECÇÃO

$x^3 - 5x + 1,\ [-3,3]$



https://www.wolframalpha.com/input?i=plot+x%5E3+-+5x+%2B+1+from+x%3D-3+to+3

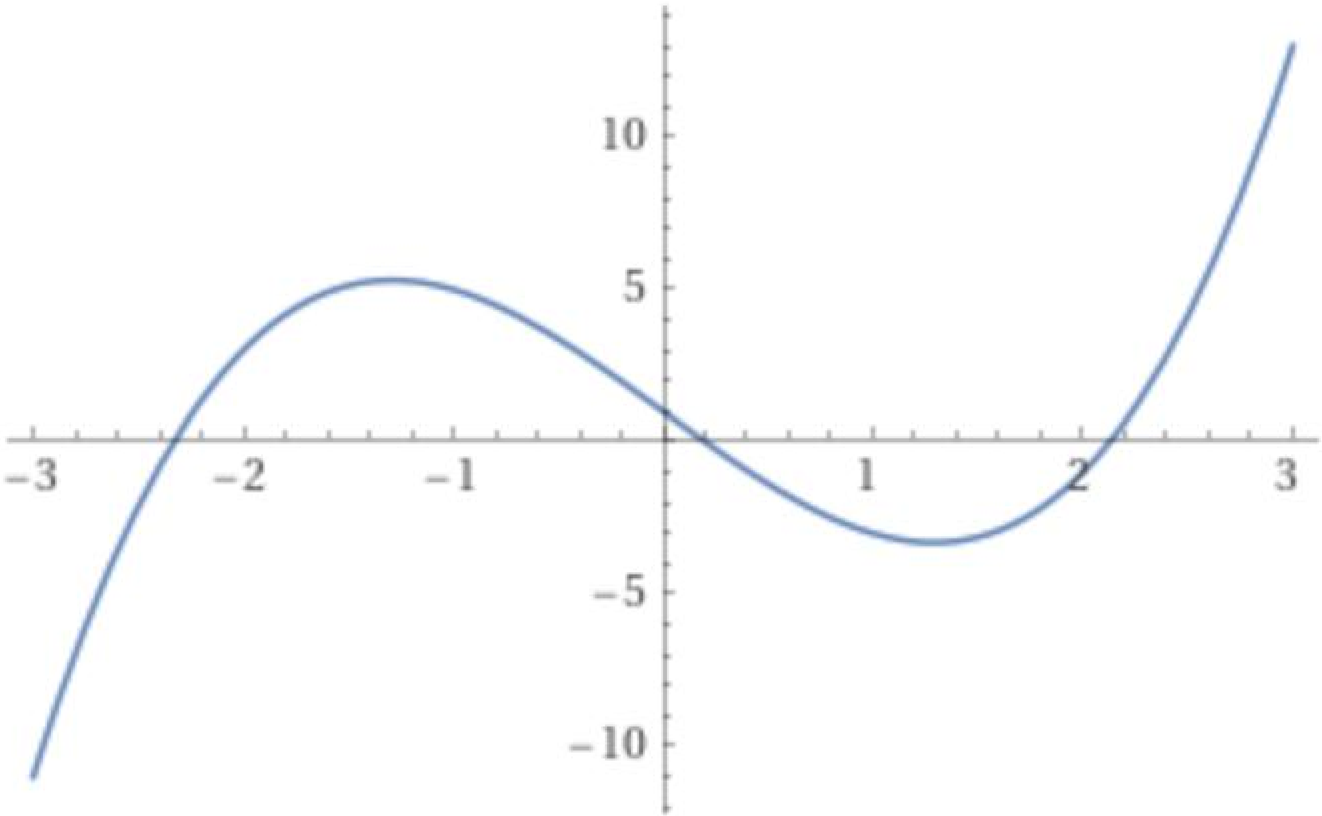
MÉTODO DA BISSECÇÃO

Teorema de Bolzano: Se f é uma função contínua em um certo intervalo $[a\ ;\ b]$ e troca de sinal nos extremos deste intervalo, isto é, $f(a) * f(b) < 0$, então existe pelo menos uma raiz real de f em $[a;\ b]$.

Corolário: Se além de satisfazer as condições deste teorema, f' tiver sinal constante no intervalo $[a\ ;\ b]$, ou seja, a função em estudo for sempre crescente ou decrescente neste intervalo, existirá uma única raiz real de f nele, o qual será chamado de intervalo de separação.

MÉTODO DA BISSECÇÃO

$x^3 - 5x + 1,\ [-3,3]$



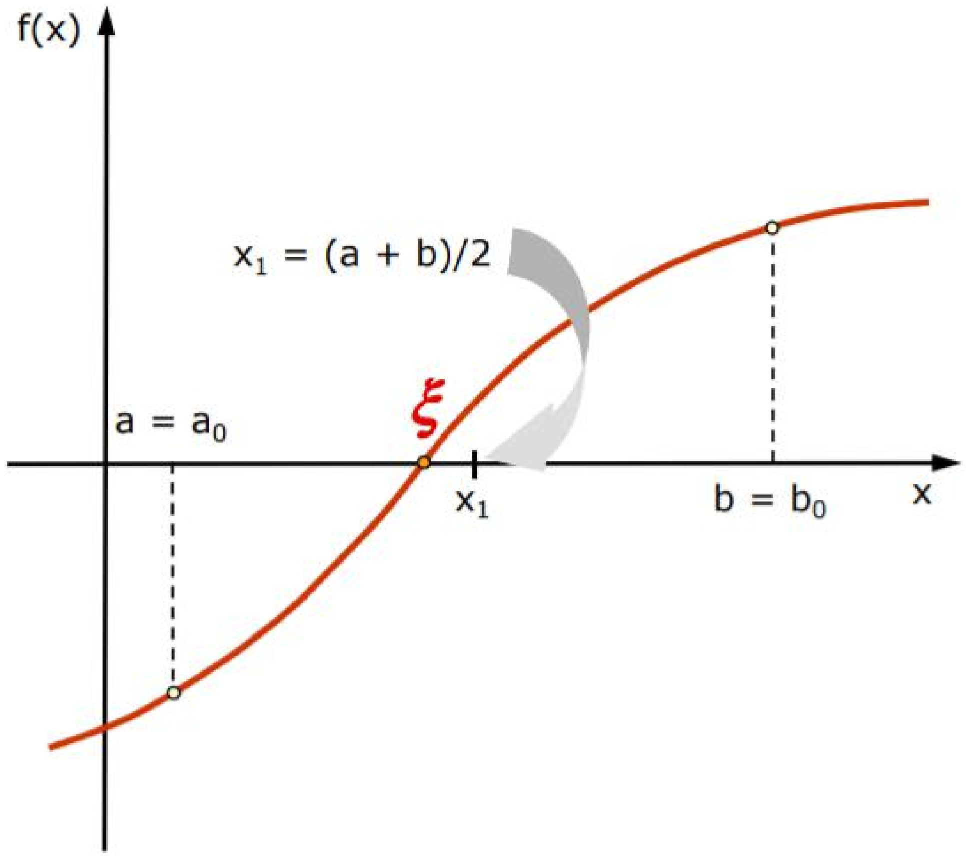
https://www.wolframalpha.com/input?i=plot+x%5E3+-+5x+%2B+1+from+x%3D-3+to+3

MÉTODO DA BISSECÇÃO

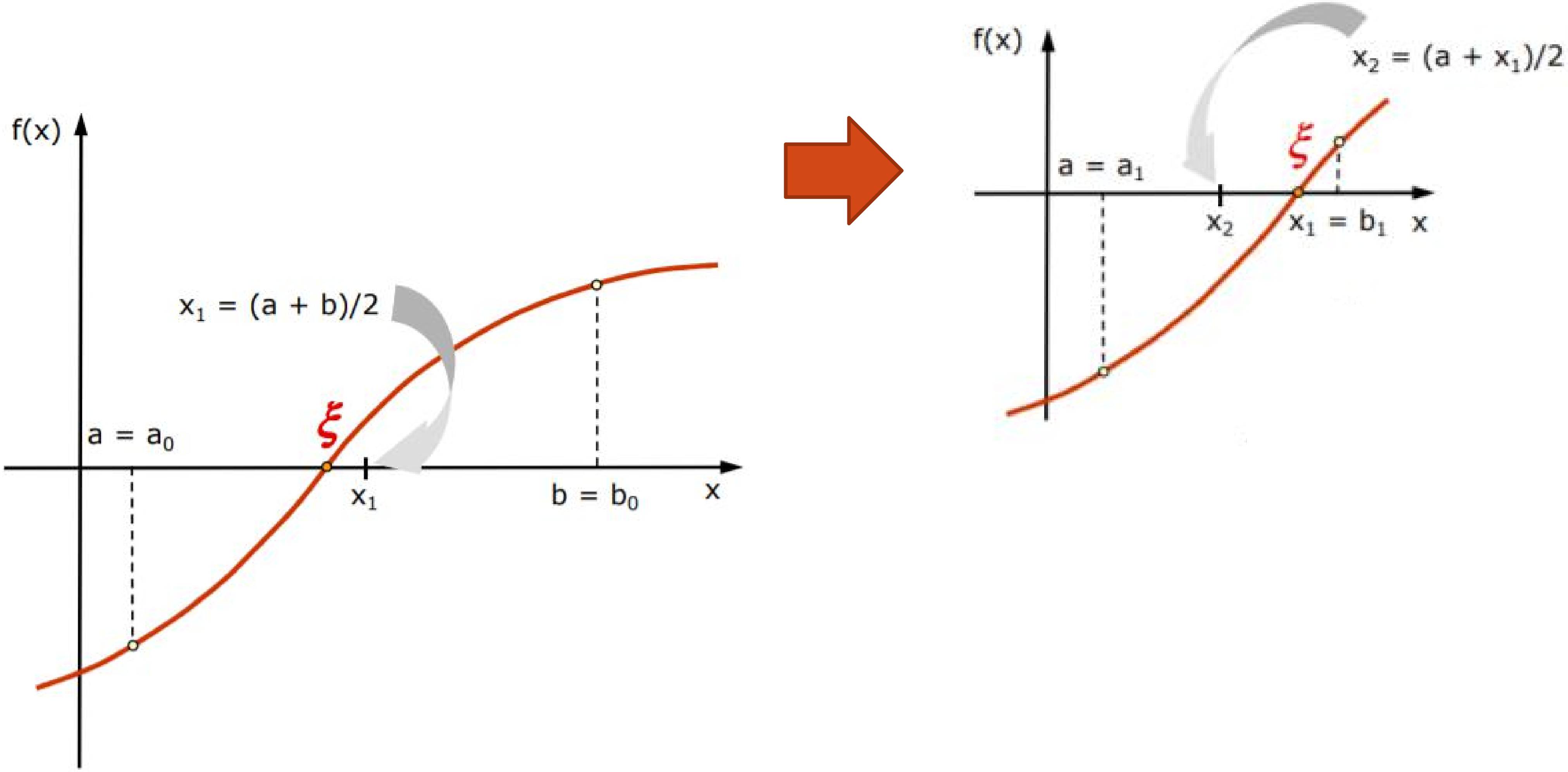
- Dada uma função $f(x)$ contínua no intervalo $[a, b]$ onde existe uma raiz única, é possível determinar tal raiz **subdividindo sucessivas vezes o intervalo pelo ponto médio de $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$**.

$$\boxed{\overline{x_k} = \frac{a+b}{2}}$$

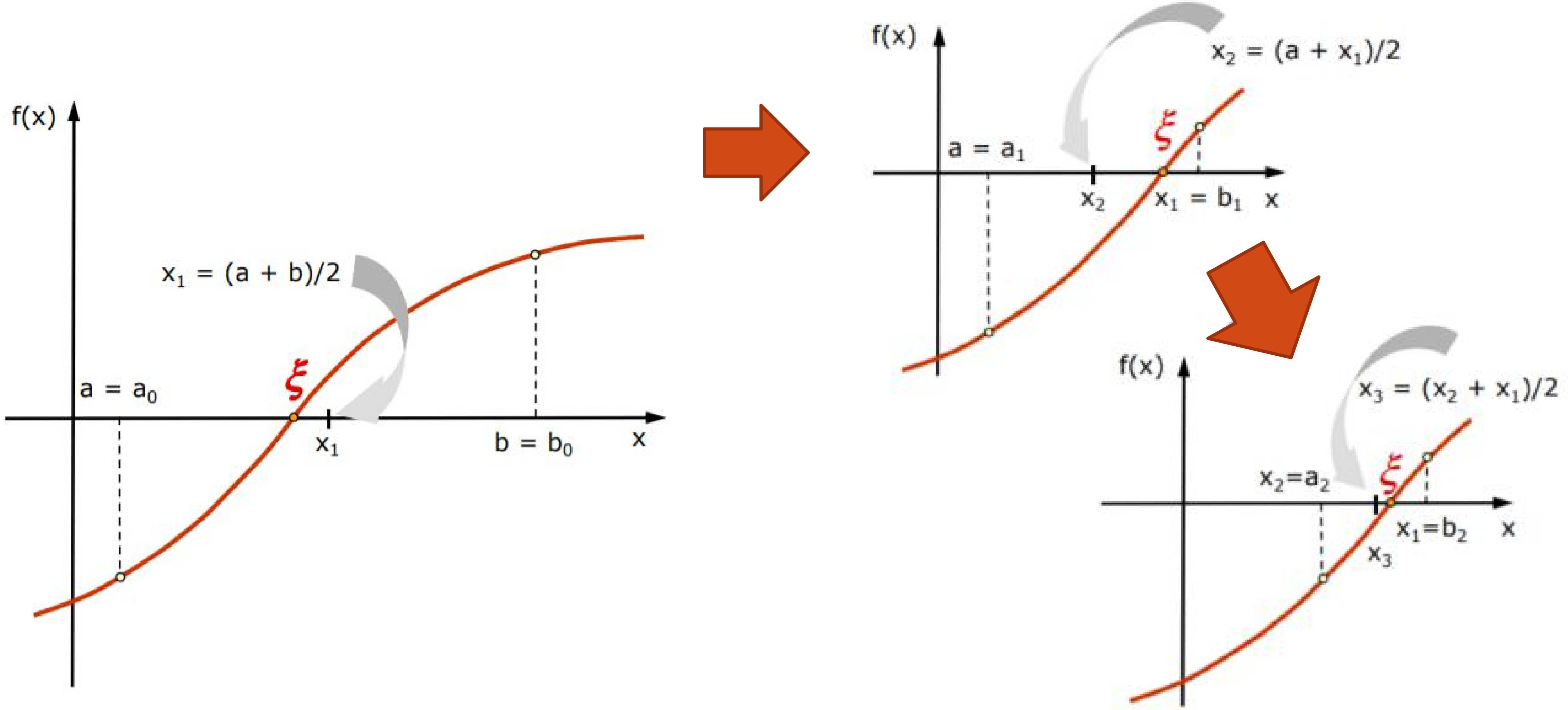
MÉTODO DA BISSECÇÃO



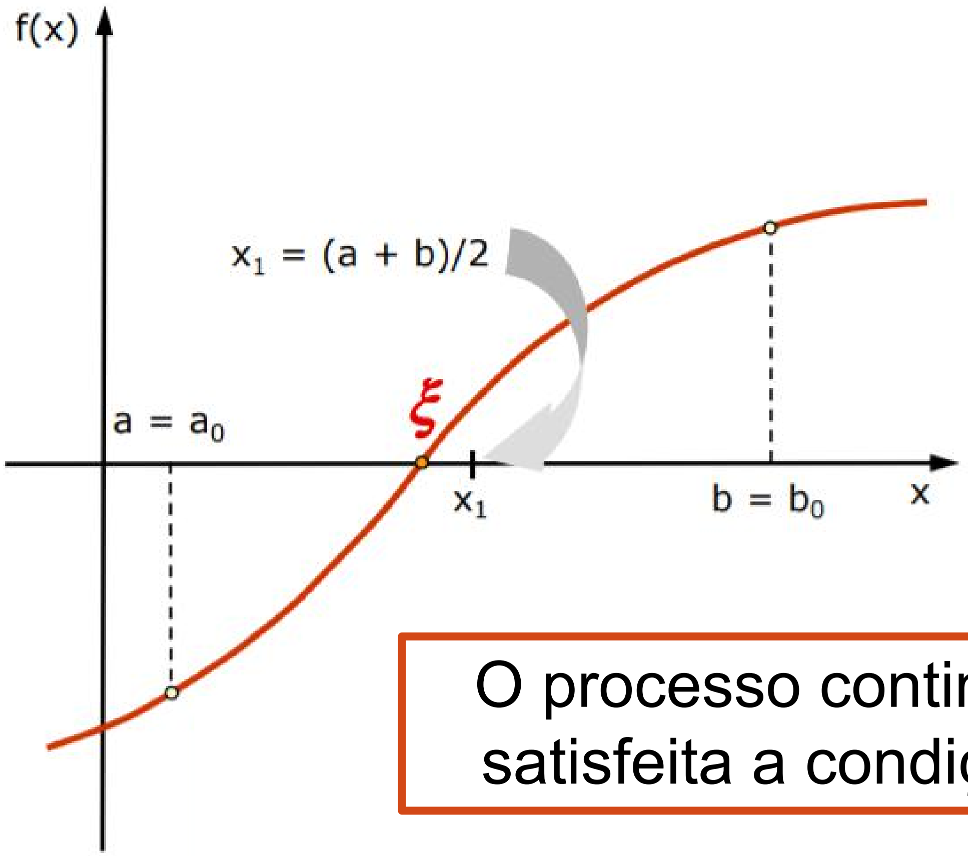
MÉTODO DA BISSECÇÃO

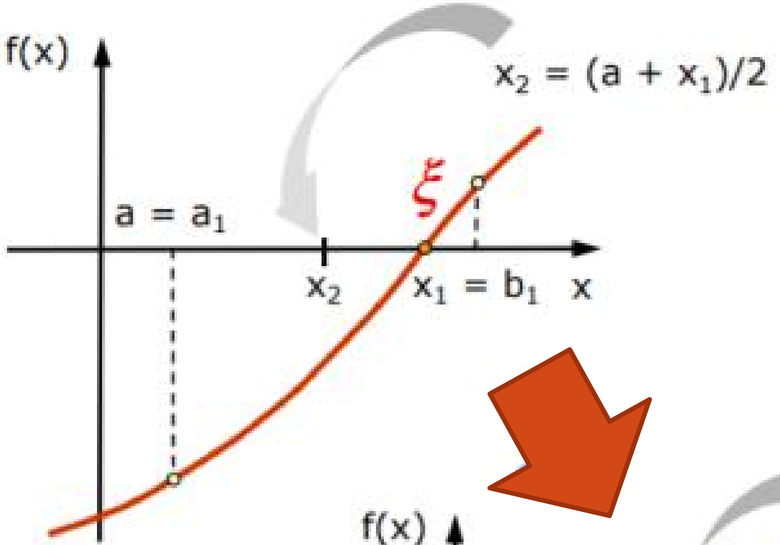


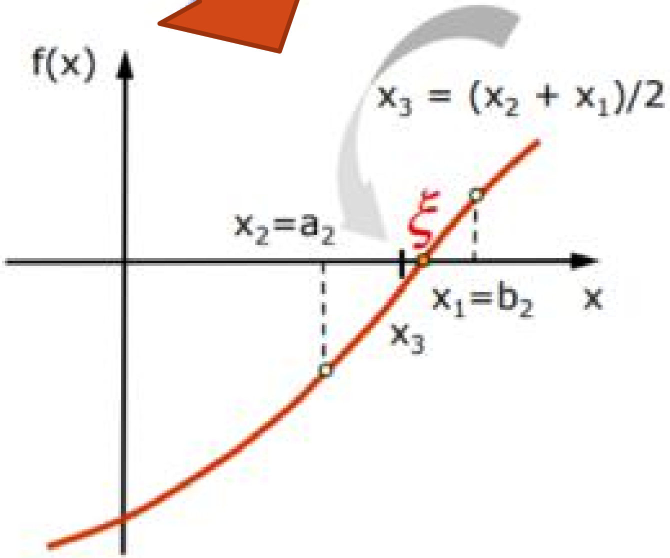
MÉTODO DA BISSECÇÃO



MÉTODO DA BISSECÇÃO



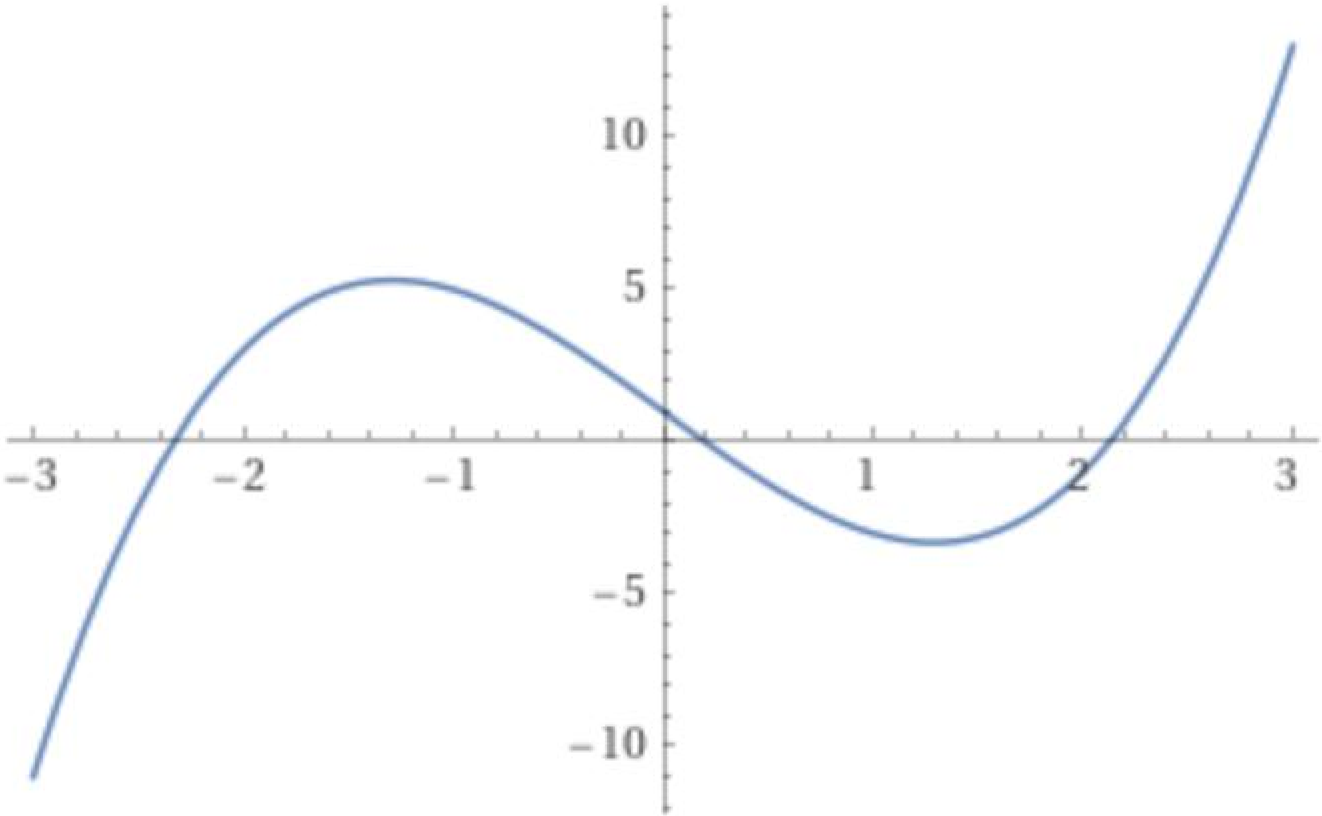




O processo continua até que seja satisfeita a condição de parada...

MÉTODO DA BISSECÇÃO

$x^3 - 5x + 1, \ [-3,3]$



https://www.wolframalpha.com/input?i=plot+x%5E3+-+5x+%2B+1+from+x%3D-3+to+3

MÉTODO DA BISSECÇÃO

$$\overline{x_k} = \frac{a+b}{2}$$

$$x^3 - 5x + 1,\ [2{,}0;\ 3{,}0]$$
$$a = 2{,}0;\quad b = 3{,}0$$
$$\varepsilon = 10^{-1}$$

$\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{b}$	$\overline{\boldsymbol{x}}$	$\boldsymbol{f}(\overline{\boldsymbol{x}})$
2,0	3,0		

MÉTODO DA BISSECÇÃO

$$\overline{x_k} = \frac{a+b}{2}$$

$$x^3 - 5x + 1,\ [2{,}0;\ 3{,}0]$$
$$a = 2{,}0;\quad b = 3{,}0$$
$$\varepsilon = 10^{-1}$$

$\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{b}$	$\overline{\boldsymbol{x}}$	$\boldsymbol{f}\,(\overline{\boldsymbol{x}})$
2,0	3,0	2,5	

MÉTODO DA BISSECÇÃO

$$\overline{x_k} = \frac{a+b}{2}$$

$$x^3 - 5x + 1, \ [2{,}0; \ 3{,}0]$$
$$a = 2{,}0; \quad b = 3{,}0$$
$$\varepsilon = 10^{-1}$$

$\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{b}$	$\overline{\boldsymbol{x}}$	$\boldsymbol{f}(\overline{\boldsymbol{x}})$
2,0	3,0	2,5	4,125

MÉTODO DA BISSECÇÃO

$$\overline{x}_k = \frac{a+b}{2}$$

$$x^3 - 5x + 1, \ [2{,}0; \ 3{,}0]$$
$$a = 2{,}0; \quad b = 3{,}0$$
$$\varepsilon = 10^{-1}$$

$\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{b}$	$\overline{\boldsymbol{x}}$	$\boldsymbol{f}\,(\overline{\boldsymbol{x}})$
2,0	3,0	2,5	4,125
2,0	2,5		

MÉTODO DA BISSECÇÃO

$$\overline{x_k} = \frac{a+b}{2}$$

$$x^3 - 5x + 1,\ [2{,}0;\ 3{,}0]$$
$$a = 2{,}0;\quad b = 3{,}0$$
$$\varepsilon = 10^{-1}$$

$\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{b}$	$\overline{\boldsymbol{x}}$	$\boldsymbol{f}(\overline{\boldsymbol{x}})$
2,0	3,0	2,5	4,125
2,0	2,5	2,25	

MÉTODO DA BISSECÇÃO

$$\overline{x}_k = \frac{a+b}{2}$$

$$x^3 - 5x + 1,\ [2{,}0;\ 3{,}0]$$
$$a = 2{,}0;\quad b = 3{,}0$$
$$\varepsilon = 10^{-1}$$

$\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{b}$	$\overline{\boldsymbol{x}}$	$\boldsymbol{f}\,(\overline{\boldsymbol{x}})$
2,0	3,0	2,5	4,125
2,0	2,5	2,25	1,140625

MÉTODO DA BISSECÇÃO

$$\overline{x_k} = \frac{a+b}{2}$$

$$x^3 - 5x + 1,\ [2{,}0;\ 3{,}0]$$
$$a = 2{,}0;\quad b = 3{,}0$$
$$\varepsilon = 10^{-1}$$

a	b	$\overline{x}$	$f(\overline{x})$
2,0	3,0	2,5	4,125
2,0	2,5	2,25	1,140625
2,0	2,25		

MÉTODO DA BISSECÇÃO

$$\overline{x_k} = \frac{a+b}{2}$$

$$x^3 - 5x + 1,\ [2,0;\ 3,0]$$
$$a = 2,0;\quad b = 3,0$$
$$\varepsilon = 10^{-1}$$

$\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{b}$	$\overline{\boldsymbol{x}}$	$\boldsymbol{f}\,(\overline{\boldsymbol{x}})$
2,0	3,0	2,5	4,125
2,0	2,5	2,25	1,140625
2,0	2,25	2,125	

MÉTODO DA BISSECÇÃO

$$\overline{x}_k = \frac{a+b}{2}$$

$$x^3 - 5x + 1,\ [2{,}0;\ 3{,}0]$$
$$a = 2{,}0;\quad b = 3{,}0$$
$$\varepsilon = 10^{-1}$$

$\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{b}$	$\overline{\boldsymbol{x}}$	$\boldsymbol{f}\,(\overline{\boldsymbol{x}})$
2,0	3,0	2,5	4,125
2,0	2,5	2,25	1,140625
2,0	2,25	**2,125**	-0,029296875

VAMOS A UMA IMPLEMENTAÇÃO DO MÉTODO?

VANTAGENS E DESVANTAGENS

- A maior vantagem do Método da Bissecção é que ele converge sempre que a função $f(\mathrm{x})$ for contínua no intervalo $[a\ ;\ b]$ e $f(a) * f(b) < 0$.
- A maior desvantagem é que ele não é eficiente devido à sua convergência lenta. Isto decorre do fato de que na escolha de uma aproximação $x = (a + b)/2$ não se leva em consideração os valores da função nos extremos do intervalo. No pior caso, a raiz está próxima a um extremo.
- O Método da Bisseção é mais utilizado para reduzir o intervalo antes de usar um outro método de convergência mais rápida ser aplicado.

CONCLUSÃO

- Fase de refinamento para encontrar os zeros de uma função;
- Método da Bissecção.

- Próxima aula:
  - Método da Falsa Posição;
  - Método do Ponto Fixo.

ATIVIDADE AVALIATIVA

1. Dado o exemplo da equação x^3-5x+1, $[-3,3]$, visto em sala de aula. Encontre as soluções presentes no intervalo $[-3, -2]$ e $[0, 1]$ utilizando o método da Bissecção, com $\varepsilon = 0.01$.
2. Utilizando o método da Bissecção, resolva a equação $x^3 - \text{sen}(x) = 0$, com $\varepsilon = 0.01$.
3. Utilizando o método da Bissecção, resolva a equação $x^2 + \ln(x) = 0$, com $\varepsilon = 0.001$.

Link da atividade e slides (versão pdf): https://github.com/lucassampaioleite/selecao-professor-CIn

REFERÊNCIAS

- Métodos Numéricos. José Dias dos Santos e Zanoni Carvalho da Silva – Ed. Universitária UFPE, 3ª Edição – 2010.
- RUGGIERO, Márcia A. Gomes; LOPES, Vera Lúcia da Rocha. Cálculo numérico: aspectos teóricos e computacionais. Makron Books do Brasil, 1997.

DÚVIDAS???

Link dos slides (para impressão):
https://github.com/lucassampaioleite/selecao-professor-CIn

Fonte: https://blogs.unitec.mx/vida-universitaria/valiosos-tips-de-orientacion-vocacional/