◆ AFD Mínimo ou Autômato Finito Mínimo

- AFD equivalente, com o menor número de estados possível

◆ Minimização em algumas aplicações especiais

- não necessariamente o menor custo de implementação
- exemplo: circuitos lógicos ou redes lógicas
  * pode ser desejável introduzir estados intermediários
  * de forma a melhorar eficiência ou facilitar ligações físicas
- prever variáveis específicas da aplicação

◆ Autômato finito mínimo é único

- a menos de isomorfismo
- diferenciando-se, eventualmente, na identificação dos estados

◆ Algoritmo de minimização

- unifica os estados equivalentes

◆ Estados equivalentes

- processamento de uma entrada qualquer
- a partir de estados equivalentes
- resulta na mesma condição de aceita/

Def: Estados Equivalentes

$M = (\Sigma, Q, \delta, q_0, F)$ AFD qualquer

q e p de Q são Estados Equivalentes sse, para qualquer $w \in \Sigma^*$

$$\delta(q, w) \quad \text{e} \quad \delta(p, w)$$

resultam simultaneamente em estados finais, ou não-finais

Def: Autômato Finito Mínimo

L linguagem regular. O Autômato Finito Mínimo é um AFD

$$M_m = (\Sigma, Q_m, \delta_m, q_{0_m}, F_m)$$

tal que

- $ACEITA(M_m) = L$
- para qualquer AFD $M = (\Sigma, Q, \delta, q_0, F)$ tal que $ACEITA(M) = L$

$$\#Q \geq \#Q_m$$

Obs: Pré-Requisitos do Algoritmo de Minimização

- determinístico
- estados alcançáveis a partir do estado inicial
- função programa total

◆ Caso não satisfaça algum dos pré-requisitos

- gerar um autômato determinístico equivalente
  * algoritmos de tradução apresentados nos teoremas
- eliminar estados inacessíveis (e transições): exercício
- função programa total
  * introduzir um estado não-final d
  * incluir transições não-previstas, tendo d como estado destino
  * incluir um ciclo em d para todos os símbolos do alfabeto

◆ Algoritmo de minimização

- identifica os estados equivalentes por exclusão
- tabela de estados
  - marca estados não-equivalentes
  - entradas não-marcadas: estados equivalentes

Def: Algoritmo de Minimização

$M = (\Sigma, Q, \delta, q_0, F)$ AFD que satisfaz aos pré-requisitos

Passo 1: Construção da Tabela: relaciona estados distintos

q_1					
q_2					
...					
q_n					
d					
	q_0	q_1	...	q_{n-1}	q_n

Passo 2: Marcação dos Estados Trivialmente Não-Equivalentes

- pares do tipo { estado final, estado não-final }

Passo 3: Marcação dos Estados Não-Equivalentes

Para $\{ q_u, q_v \}$ não-marcado e $a \in \Sigma$, suponha que

$$\delta(q_u, a) = p_u \quad \text{e} \quad \delta(q_v, a) = p_v$$

- $p_u = p_v$
  * q_u é equivalente a q_v para a: não marcar

- $p_u \neq p_v$ e $\{ p_u, p_v \}$ não está marcado
  * $\{ q_u, q_v \}$ incluído na lista encabeçada por $\{ p_u, p_v \}$

- $p_u \neq p_v$ e $\{ p_u, p_v \}$ está marcado
  * $\{ q_u, q_v \}$ não é equivalente: marcar
  * se $\{ q_u, q_v \}$ encabeça uma lista: marcar todos os pares da lista (e, recursivamente, se algum par da lista encabeça outra lista)

Passo 4: Unificação dos Estados Equivalentes

Pares não-marcados são equivalentes

- equivalência de estados é transitiva
- pares de estados não-finais equivalentes
  - ∗ um único estado não-final
- pares de estados finais equivalentes
  - ∗ um único estado final
- se algum dos estados equivalentes é inicial
  - ∗ estado unificado é inicial
- transições com origem (destino) em um estado equivalente
  - ∗ origem (destino) no estado unificado

Passo 5: Exclusão dos Estados Inúteis

q é um estado inútil

- não-final
- a partir de q não é possível atingir um estado final
- d (se incluído) é inútil

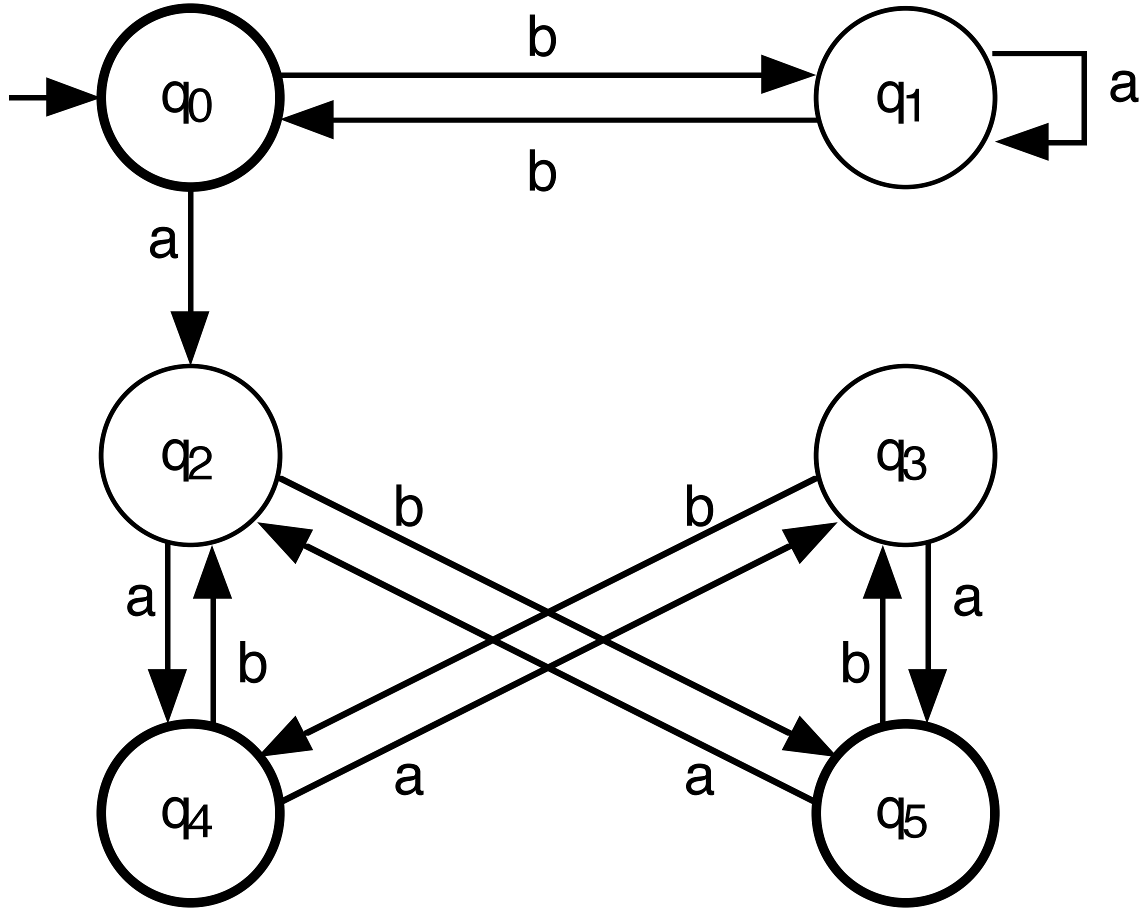
Transições com origem ou destino em estado inútil

- excluir

Algoritmo para excluir os estados inúteis

- exercício

Exp: Minimização



Pré-requisitos de minimização ???

Passo 1. Construção da tabela

Passo 2. Marcação dos pares { estado final, estado não-final }

q_1	X				
q_2	X				
q_3	X				
q_4		X	X	X	
q_5		X	X	X	
	q_0	q_1	q_2	q_3	q_4

Passo 3. Análise dos pares de estado não-marcados

$\{ q_0, q_4 \}$

$$\delta(q_0, a) = q_2 \quad \delta(q_0, b) = q_1$$
$$\delta(q_4, a) = q_3 \quad \delta(q_4, b) = q_2$$

- $\{ q_1, q_2 \}$ e $\{ q_2, q_3 \}$ são não-marcados
  - ∗ inclui $\{ q_0, q_4 \}$ nas listas de $\{ q_1, q_2 \}$ e $\{ q_2, q_3 \}$

$\{ q_0, q_5 \}$

$$\delta(q_0, a) = q_2 \quad \delta(q_0, b) = q_1$$
$$\delta(q_5, a) = q_2 \quad \delta(q_5, b) = q_3$$

- $\{ q_1, q_3 \}$ é não-marcado (e $\{ q_2, q_2 \}$ é trivialmente equivalente)
  - ∗ inclui $\{ q_0, q_5 \}$ na lista de $\{ q_1, q_3 \}$

$\{ q_1, q_2 \}$

$$\delta(q_1, a) = q_1 \quad \delta(q_1, b) = q_0$$
$$\delta(q_2, a) = q_4 \quad \delta(q_2, b) = q_5$$

- $\{ q_1, q_4 \}$ é marcado: marca $\{ q_1, q_2 \}$
- $\{ q_1, q_2 \}$ encabeça uma lista: marca $\{ q_0, q_4 \}$

$\{ q_1, q_3 \}$

$$\delta(q_1, a) = q_1 \quad \delta(q_1, b) = q_0$$
$$\delta(q_3, a) = q_5 \quad \delta(q_3, b) = q_4$$

- $\{ q_1, q_5 \}$ e $\{ q_0, q_4 \}$ são marcados: marca $\{ q_1, q_3 \}$
- $\{ q_1, q_3 \}$ encabeça uma lista: marca $\{ q_0, q_5 \}$

$\{ q_2, q_3 \}$

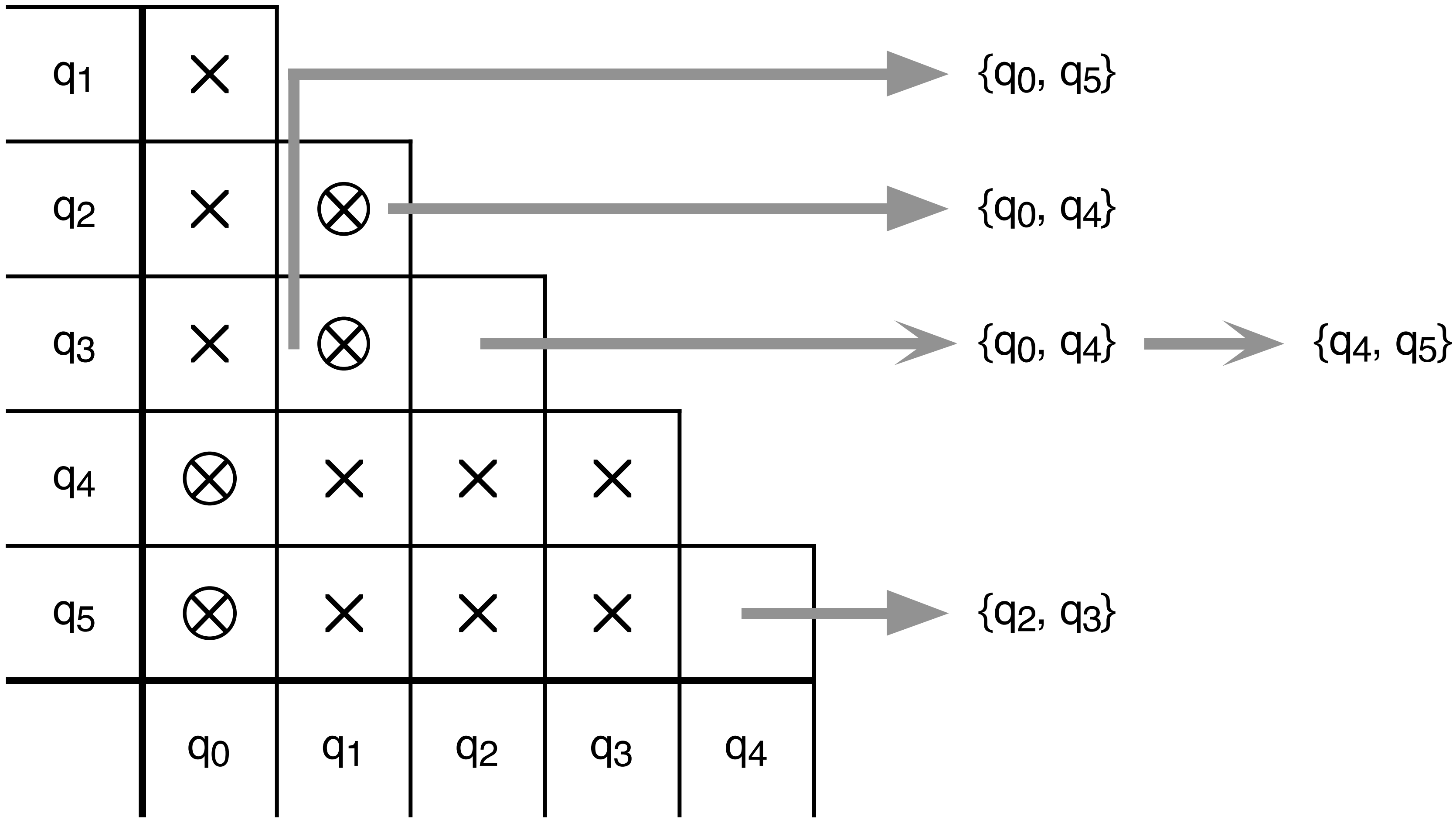
$$\delta(q_2, a) = q_4 \quad \delta(q_2, b) = q_5$$
$$\delta(q_3, a) = q_5 \quad \delta(q_3, b) = q_4$$

- $\{ q_4, q_5 \}$ é não-marcado: inclui $\{ q_2, q_3 \}$ na lista de $\{ q_4, q_5 \}$

$\{ q_4, q_5 \}$

$$\delta(q_4, a) = q_3 \quad \delta(q_4, b) = q_2$$
$$\delta(q_5, a) = q_2 \quad \delta(q_5, b) = q_3$$

- $\{ q_2, q_3 \}$ é não-marcado: inclui $\{ q_4, q_5 \}$ na lista de $\{ q_2, q_3 \}$



q1
q2
q3
q4
q5
q0
q1
q2
q3
q4
{q0, q5}
{q0, q4}
{q0, q4}
{q4, q5}
{q2, q3}

q_1	×					$\{q_0, q_5\}$
q_2	×	⊗				$\{q_0, q_4\}$
q_3	×	⊗				$\{q_0, q_4\} \rightarrow \{q_4, q_5\}$
q_4	⊗	×	×	×		
q_5	⊗	×	×	×		$\{q_2, q_3\}$
	q_0	q_1	q_2	q_3	q_4	

Passo 4. $\{ q_2, q_3 \}$ e $\{ q_4, q_5 \}$ são não-marcados

- q_{23}: unificação dos estados q_2 e q_3
- q_{45}: unificação dos estados finais q_4 e q_5

Autômato mínimo resultante