UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ - UFC
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA - DEE
CURSO DE CIRCUITOS ELÉTRICOS II
PROF[A]: RUTH P.S. LEÃO

FASORES E ÁLGEBRA DE NÚMEROS COMPLEXOS

OBJETIVOS

- Representar ondas senoidais por fasores e números complexos.
- Fazer uso do software Scilab para operar e representar matemática e graficamente fasores.

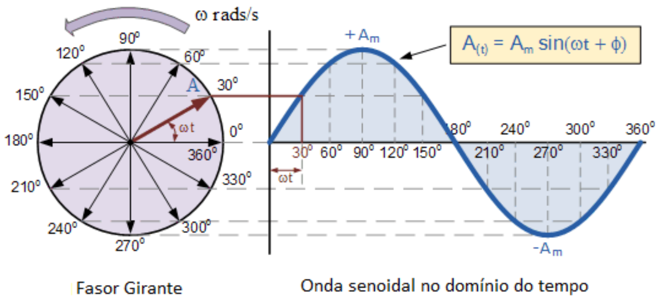
MATERIAL A SER UTILIZADO NA PRÁTICA

- Microcomputador
- Aplicativo: Scilab

CONCEITO TEÓRICO

As tensões e correntes senoidais de frequência angular ω podem ser gráfica e numericamente representadas por fasores em termos de suas magnitudes e ângulos de fase.

Figura 1. Representação de uma onda senoidal por fasor girante.



Fonte: http://www.electronics-tutorials.ws/accircuits/phasors.html

Os números complexos são usados para expressar os fasores e operá-los matematicamente. O conjunto dos números complexos contem o conjunto dos números reais mais o conjunto dos números imaginários.
E o que são os números imaginários? É o conjunto de números que podem ser escritos como um número real multiplicado por uma unidade ou operador imaginário i ou j que é definido por sua propriedade $j^2 = -1$.

Que número quando multiplicado por ele mesmo é igual a -1? Nenhum dos números racionais ou irracionais oferece resposta à pergunta. Este número é $\sqrt{-1}$ que não é um dos números reais como 1, 2, 3, etc. Ele pertence a um conjunto diferente de números, denominado de números imaginários. A distinção entre os números reais e imaginários é feita com o operador i ou j ($j = \sqrt{-1}$).

Os números imaginários permitem obter a raiz quadrada de qualquer número negativo expressando-o como um número real vezes j. Ex. $\sqrt{-9} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{9} = j3$.

Um número complexo é definido como:

$$a = \pm x \pm jy \qquad (1)$$

Em (1) as partes real e imaginária da grandeza complexa a são:

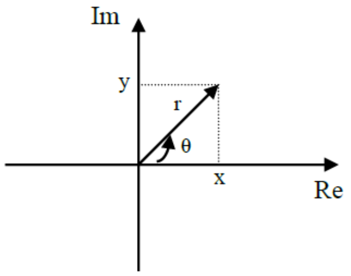
$$x = Re(a) \qquad (2)$$

$$y = Im(a) \qquad (3)$$

A álgebra complexa é uma extensão da álgebra de números reais, com regras próprias para adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação, extração de raízes e logaritmo.

Para representar um número complexo em um espaço bidimensional usa-se o plano complexo. Em um plano complexo, a parte real de uma grandeza complexa é plotada no eixo x e a parte imaginária no eixo y.
A Figura 2 mostra uma grandeza complexa na forma fasorial. A distância r da origem ao ponto $x + jy$ e o ângulo que r faz com o eixo real é outra forma de descrever a grandeza complexa.

Figura 2. Representação de um número complexo na forma fasorial.



Um fasor pode ser expresso na forma cartesiana, exponencial e polar.

$$x + jy = rcos\theta + jrsen\theta = r \cdot e^{j\theta} \equiv r\angle\theta \qquad (4)$$

Pode ser observado na Figura 2 que existe uma relação entre as partes real x e imaginária y da grandeza complexa com seu módulo r e ângulo de inclinação θ:

$$x = r \cdot cos\theta$$

$$y = r \cdot sen\theta$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad (5)$$

$$\theta = tg^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

Um fasor é uma grandeza complexa que representa um sinal sinusoidal de amplitude r e frequência angular ω. A projeção do fasor no eixo das ordenadas descreve uma senoide quando θ varia de $0 \leq \omega t \leq 2\pi$. De modo análogo, a projeção do fasor no eixo das abcissas descreve uma cossenoide para $0 \leq \omega t \leq 2\pi$. No instante $t = 0$, o fasor de magnitude ou módulo r faz um ângulo θ em relação ao plano horizontal de referência angular, como mostrado na Figura 2, podendo ser representado por uma das formas mostras em (4).

Assim, um sinal de tensão e corrente senoidal ou cossenoidal podem ser representados por fasores. Normalmente, a amplitude do fasor é igual ao valor eficaz da sinusoide.

Para explorar a representação de ondas senoidais por fasores usando números complexos, faremos uso do software Scilab. A sintaxe do Scilab é similar à do MATLAB e Octave, com algumas pequenas diferenças que serão informadas no enunciado de cada questão. Certifique-se se há 'dicas' de auxílio do uso do Scilab na implementação das questões apresentas ao longo do laboratório.

PROCEDIMENTO DA PRÁTICA

1. Digite os números complexos no $prompt$ de comando do Scilab:

$$A = -3 + \%i * 4$$

$$B = 3 + \%i * 4$$

$$C = -3 - \%i * 4$$

a) Existe alguma relação entre A, B e C?
b) Use as funções $real(\_)$ e $imag(\_)$ e observe o resultado obtido (o símbolo '_' representa os números complexos A, B ou C).
c) Calcule os módulos de A, B e C usando o método dos catetos.
d) Use a função $abs(A)$ e compare o resultado com o valor calculado no item (c).
e) Calcule o ângulo de A e C usando as formas abaixo:

$$atan(imag(\_)/real(\_))$$

$$atan(imag(\_), real(\_))$$

Os resultados obtidos estão em radianos, converta-os para graus, usando a expressão: $\theta = \text{â}nguloemradiano\ * 180/\%pi$
Que observações podem ser tiradas quanto aos resultados obtidos com o uso das funções angulares do item e)?

f) Plote em um mesmo gráfico os fasores A, B e C.

Dicas:
Item a):
O operador imaginário j, no Scilab, é representado por $\%i$.
O comando $disp(\_)$ permite exibir uma variável, um vetor, uma matriz ou mesmo uma mensagem (*string*) na janela de comandos (tela) do Scilab.
Para exibir somente mensagem *strings* na janela de comandos, deve-se utilizar o comando $printf("string")$, com aspas duplas.
Item f):
A função $plot(\_)$ é usada para plotar gráficos. Para plotar um fasor genérico num plano 2D, expresso pelo número complexo $z = x + jy$, as componentes real e imaginária são declaradas na forma vetorial, $X = [0\ x]$ e $Y = [0\ y]$. Ao digitar $plot(X, Y)$ será traçado o vetor z na forma retangular. Para plotar mais de um fasor no mesmo plano, a função $plot$ deve ser declarada como: $plot\ (X1, Y1, X2, Y2, X3, Y3)$ em que X_i e Y_i, $i = 1,2,3$ representam as

componentes real e imaginária de cada fasor, expressas na forma vetorial como exemplificada acima.

2. Definidas as grandezas A, B, C como na questão 1, executar as operações mostradas abaixo, com resultados expressos na forma retangular e polar. Comente os resultados.

   a) $A + C$
   b) $A + B$
   c) $B + conj(B)$
   d) $A + B - C$
   e) $A * C$
   f) $A\hat{}2$
   g) $1/A$
   h) B/C
   i) $-2j * B$
   j) $\sqrt{-100} + 4\sqrt{-20}$

   Dicas:
   Para converter uma grandeza complexa na forma retangular para a forma polar, sugere-se o uso da linha $[Ro, Theta] = polar(\_)$, em que Ro é a magnitude e $Theta$ o ângulo expresso em radiano, o qual pode ser convertido para graus. Para exibir na tela as variáveis Ro e $Theta$ use a função $disp(\_)$.
   Outra possibilidade para conversão de forma retangular para polar é com os comandos $abs(\_)$ e $atan(\_,\_)$.

3. Executar as operações de raiz, potenciação, e logaritmo em Scilab.

   a) $\sqrt{4.5 - j7.79}$
   b) $(100\angle 60°)^3$
   c) $(50e^{j45°})^{\frac{1}{5}}$
   d) $\frac{1570°}{(3-j4)} + Ln(8 + j5)$

4. Em um mesmo plano complexo represente os fasores $A = 5 + j7$, $B = 3 - j2$ e as operações $A + B$ e $A - B$, usando uma cor diferente para cada fasor. Insira título para o gráfico e para seus eixos.
   Dica:
   Considerando os números $A = ax + jay$ e $B = bx + jby$, no $prompt$ do Scilab digite:

$$ax = [0\ 5];$$

$$ay = [0\ 7];$$

$$bx = [0\ 3];$$

$$by = [0\ \ -2];$$

$$plot(ax, ay, 'b', dx, dy, 'k').$$

   A soma de dois fasores é um terceiro fasor que é definido em módulo e posição de fase pela diagonal do paralelogramo que tem para dois de seus lados os vetores somados.

$$plot(ax, ay, 'b', bx, by, 'k', ax + bx\ , ay + by, 'g', ax - bx\ , ay - by, 'c'\ )$$

   Use as funções $title(\_)$, $xlabel(\_)$ e $ylabel(\_)$ para incluir título e legenda das ordenadas no gráfico.

5. Plotar o número complexo $z = 4\angle 45°$ utilizando a forma POLAR do Scilab.
   Dica:
   $t = linspace(0,1,10)$; (gera vetor de comprimento 1 e com 10 pontos entre 0 e 1)
   $z = (t + j * t).* 4$; (vetor z sendo variado no tempo, nos eixos imaginário e real)
   $rho = abs(z)/sqrt(2)$; (valor rms de z sendo estabelecido para plotagem)
   $theta = atan(imag(z)/real(z))$; (ângulo de z, em radianos)
   $polarplot(theta, rho, 'k')$; (plota no plano complexo, na forma POLAR)

6. Considere os fasores de diferentes frequências como mostrados no quadro abaixo. Converta-os em senoides e plote em um mesmo gráfico, usando diferentes cores, as seguintes operações: A, B, C, D, $A + B$, $A + B + C$, $A + B + C + D$. O que você observa quanto à forma de onda da soma das senoides? Se o ângulo de fase for diferente de zero, existe mudança na forma de onda das somas de senoides?

Fasor	Velocidade angular	Onda senoidal
$A = \frac{40}{\pi} 0^{\circ}$	$\omega_A = 377 \ \frac{rad}{s}$	
$B = \frac{40}{3\pi} 0^{\circ}$	$\omega_B = 3\omega_A$	
$C = \frac{40}{5\pi} 0^{\circ}$	$\omega_C = 5\omega_A$	
$D = \frac{40}{7\pi} 0^{\circ}$	$\omega_D = 7\omega_A$	

Dica:
Considere o tempo da senoide variando de zero até $tmax$, com $tmax = 2T$, sendo T o período da onda A. Considere ainda o passo de cálculo dado por $Dt = T/100$. Defina o vetor tempo $[t] = (0: Dt: tmax)$. Plote as funções usando o formato, por exemplo, $plot(t, A, 'r', t, B, 'b')$.