Distribuição de Energia Elétrica

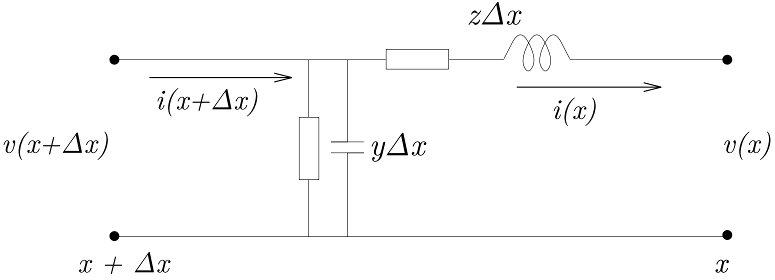
Adimitância em derivação de sistemas de distribuição aéreos e subterrâneos

Lucas Melo

Universidade Federal do Ceará

Junho de 2021

Modelo de uma linha de transmissão



- Resistência série;
- Indutância série;
- Capacitância em derivação;
- Condutância em derivação.

Adimitância em derivação de sistemas de distribuição aéreos e subterrâneos

A adimitância em derivação de uma linha é considerado como:

- Condutância;
- Susceptância Capacitiva.

A **condutância** geralmente é ignorada devido seu valor muito baixo. Essa capacitância é resultado da diferença de potencial entre os condutores.

Adimitância em derivação de sistemas de distribuição aéreos e subterrâneos

Linhas equipotenciais são criadas em torno dos condutores, conforme mostrado na figura:

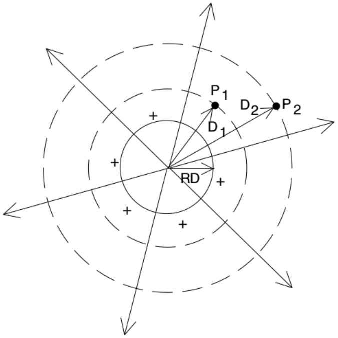


Figura: Linhas equipotencias de potencial elétrico.

Adimitância em derivação de sistemas de distribuição aéreos e subterrâneos

A diferença de potencial entre os pontos P_1 e P_2 é resultante do campo elétrico presente no condutor. Calculada a diferença de potencial entre P_1 e P_2 é possível encontrar o valor da capacitância entre estes dois pontos.

Se houver outros condutores próximos a P_1 e P_2 estes também devem ser levados em consideração.

Cálculo da admitância em derivação

Para calcularmos a capacitância entre condutores em um meio com permissividade elétrica ε constante, é necessário seguir os seguintes passos:

- Cáclulo do **campo elétrico** E que envolve o condutor, utilizando a **lei de Gauss**;
- Cálculo do **campo de potencial elétrico** que envolve o condutor;
- Cálculo da **capacitância** no entorno do condutor.

Cálculo da admitância em derivação

A Lei de Gauss confirma que o fluxo de campo elétrico em uma superfície fechada é igual à carga total envolvida por essa superfície fechada:

$$\oiint D \perp dS = \oiint \varepsilon E \perp dS = Q \tag{1}$$

Em que $D \perp$ representa a componente normal do fluxo elétrico e $E \perp$ representa a componente normal do campo elétrico, de modo que $D \perp = \varepsilon E \perp$. dS representa um elemento de área diferencial.

Analisando o campo elétrico no interior do condutor, sabemos que $E_{int} = 0$.

Aplicando a lei de Gauss para cálculo do campo elétrico no exterior do condutor, aplica-se uma superfície de raio $x > r$.
Pela simetria do problema $E = E_x$, ou seja, o campo elétrico é radial, o que resulta em:

$$\varepsilon E_x(2\pi x) = Q \tag{2}$$

$$E_x = \frac{Q}{2\pi\varepsilon x} \tag{3}$$

Considerando o vácuo: $\varepsilon = \varepsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12}\ F/m$

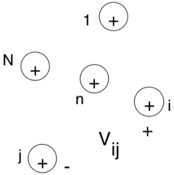
Agora, como superfícies cilindricas em torno do condutor são equipotenciais, a diferença de potencial entre pontos pertendentes a estas superfícies equipotenciais distantes D_1 e D_2 do centro do condutor é dada por:

$$V_{12} = \int_{D_1}^{D_2} E_x dx = \int_{D_1}^{D_2} \frac{Q}{2\pi\varepsilon x} dx = \frac{Q}{2\pi\varepsilon} \cdot \ln \frac{D_2}{D_1} \tag{4}$$

$$V_{12} = \frac{Q}{2\pi\varepsilon} \cdot \ln \frac{D_2}{D_1} \tag{5}$$

Equação da diferença de potencial geral

Dada uma matriz de condutores como a mostrada na figura, composta de N condutores positivamente carregados com uma densidade dada por $q \ \ [C \cdot metros]$



A diferença de potencial entre os condutores i e j é dada por:

$$V_{ij} = \frac{1}{2\pi\epsilon}\left[q_1 \ln\frac{D_{1j}}{D_{1i}} + ... + q_i \ln\frac{D_{ij}}{RD_i} + ... + q_j \ln\frac{RD_j}{D_{ij}} + ... + q_N \ln\frac{D_{Nj}}{D_{Ni}}\right]$$

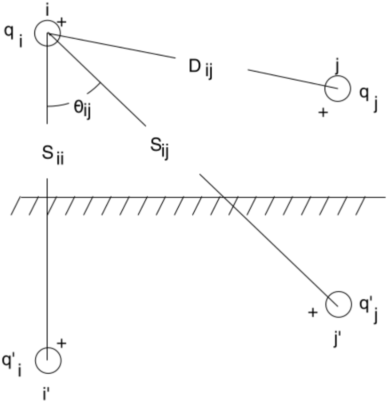
Equação da diferença de potencial geral

Ou de forma geral:

$$V_{ij} = \frac{1}{2\pi\epsilon} \sum_{n=1}^{N} q_n \ln \frac{D_{nj}}{D_{ni}} \tag{6}$$

- $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$ = permissividade elétrica do meio;
- q_n = densidade de carga no condutor n;
- D_{ni} = distância entre o condutor n e o condutor i;
- D_{nj} = distância entre o condutor n e o condutor j;
- RD_n = raio do condutor n.

O método dos condutores e suas imagens também é aplicado para o cálculo da capacitância em derivação.
Assumindo que: $q_i^{'} = -q_i$ e $q_j^{'} = -q_j$



Linhas Aéreas

Calculando a diferença de potencial entre o condutor i e sua imagem i'.

$$V_{ii} = \frac{1}{2\pi\epsilon}\left(q_i \ln\frac{S_{ii}}{RD_i} + q_i^{'} \ln\frac{RD_i}{S_{ii}} + q_j \ln\frac{S_{ij}}{D_{ij}} + q_j^{'} \ln\frac{D_{ij}}{S_{ij}}\right) \tag{7}$$

Resolvendo:

$$V_{ii} = \frac{1}{2\pi\epsilon}\left(2 \cdot q_i \cdot \ln\frac{S_{ii}}{RD_i} + 2 \cdot q_j \ln\frac{S_{ij}}{D_{ij}}\right) \tag{8}$$

Linhas Aéreas

Dado que V_{ii} é a diferença de potencial entre o condutor i e sua imagem, assume-se então que a a diferença de potencial V_{ig} será dada pela metade deste valor:

$$V_{ig} = \frac{1}{2\pi\epsilon}\left(q_i \cdot \ln\frac{S_{ii}}{RD_i} + q_j \ln\frac{S_{ij}}{D_{ij}}\right) \tag{9}$$

Ou podemos escrever:

$$V_{ig} = \hat{P}_{ii} \cdot q_i + \hat{P}_{ij} \cdot q_j \tag{10}$$

Linhas Aéreas

Se considerarmos para as linhas aéreas:

$$\epsilon_{ar} = 1,0 \times 8,85 \times 10^{-12} \;\; [F/metro] \tag{11}$$
$$\epsilon_{ar} = 1,424 \times 10^{-2} \mu \;\; [F/milha] \tag{12}$$

Assim ficamos com:

$$P_{ii} = 11,17689 \cdot \ln \frac{S_{ii}}{RD_i} \;\; [milha/\mu F] \tag{13}$$
$$P_{ij} = 11,17689 \cdot \ln \frac{S_{ij}}{D_{ij}} \;\; [milha/\mu F] \tag{14}$$

P_{ii} e P_{ij} são chamados de coeficientes de potencial próprios e mútuos, respectivamente.

Assim como no cálculo das impedâncias série de uma linha obtivemos a matriz de impedâncias primitiva, para o cálculo da capacitância em derivação é possível obter a matriz primitiva de potencial.
Por exemplo, para um sistema a quatro condutores, sendo três fases e um neutro, teríamos:

$$\hat{\mathbf{P}}_{\mathbf{primitiva}} = \begin{bmatrix} \hat{P}_{aa} & \hat{P}_{ab} & \hat{P}_{ac} & | & \hat{P}_{an} \\ \hat{P}_{ba} & \hat{P}_{bb} & \hat{P}_{bc} & | & \hat{P}_{bn} \\ \hat{P}_{ca} & \hat{P}_{cb} & \hat{P}_{cc} & | & \hat{P}_{cn} \\ - & - & - & - & - \\ \hat{P}_{n1a} & \hat{P}_{n1b} & \hat{P}_{n1c} & | & \hat{P}_{nn} \end{bmatrix} \tag{15}$$

Novamente, para obtermos a matriz de potencial de fase, particiona-se a matriz:

$$\mathbf{\hat{P}_{primitiva}} = \begin{bmatrix} \mathbf{\hat{P}_{ij}} & \mathbf{\hat{P}_{in}} \\ \mathbf{\hat{P}_{nj}} & \mathbf{\hat{P}_{nn}} \end{bmatrix} \tag{16}$$

E aplica-se redução de *Kron*:

$$\mathbf{\hat{P}_{abc}} = (\mathbf{\hat{P}_{ij}} - \mathbf{\hat{P}_{in}} \cdot \mathbf{\hat{P}_{nn}^{-1}} \cdot \mathbf{\hat{P}_{nj}}) \tag{17}$$

Sabendo que:

$$C = \frac{q}{V} \tag{18}$$

O inverso da matriz de potencial de fase, será a matriz de capacitância de fase:

$$\mathbf{C_{abc}} = \mathbf{P_{abc}}^{-1} \tag{19}$$

Conforme mencionado anterirormente, desprezando a condutância, a matriz de admitância em derivação pode ser obtida:

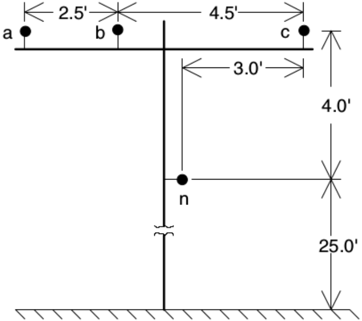
$$\mathbf{y_{abc}} = \mathbf{0} + j \cdot \omega \cdot \mathbf{C_{abc}} \ \ [\mu S/milha] \tag{20}$$

Em que:

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot f = 2 \cdot \pi \cdot 60 = 376,9911 \tag{21}$$

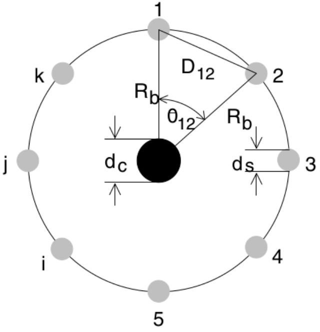
Exercício

Determine a matriz de adimitâncias em derivação para a linha aérea mostrada na figura:



Cabos de neutro concêntrico em linhas subterrâneas

Para o cálculo da matriz de admitâncias em derivação para condutores con neutro concêntricos é preciso levar em consideração os seguintes parâmetros:



Cabos de neutro concêntrico em linhas subterrâneas

Visto que o cabo de neutro concêntrico é aterrado, todos os fios que o formam estão no mesmo potencial.
Também o campo elétrico criado pelo condutor de fase estará confinado dentro do próprio condutor.
Aplicando a equação geral de diferença de potencial entre o condutor fase e um dos fios que compõem o neutro concêntrico, visto que todos os fios estão no mesmo potencial:

$$V_{ij} = \frac{1}{2\pi\epsilon}\left[q_p \ln\frac{R_b}{RD_c} + q_1 \ln\frac{RD_s}{R_b} + q_2 \ln\frac{D_{12}}{R_b} + \ldots + q_i \ln\frac{D_{1i}}{R_b} + \ldots + q_k \ln\frac{D_{1k}}{R_b}\right]$$

Com $RD_c = \frac{d_c}{2}$ e $RD_s = \frac{d_s}{2}$

Cabos de neutro concêntrico em linhas subterrâneas

Assumindo que cada fio do condutor de neutro concêntrico tem carga igual:

$$q_1 = q_2 = q_i = q_k = -\frac{q_p}{k} \tag{22}$$

Simplifica-se a equação da diferença de potencial para:

$$\begin{aligned}
V_{ij} &= \frac{1}{2\pi\epsilon}\left[q_p \ln\frac{R_b}{RD_c} - \frac{q_p}{k}\cdot\left(\ln\frac{RD_s}{R_b} + \ln\frac{D_{12}}{R_b} + \ldots + \ln\frac{D_{1k}}{R_b}\right)\right] \\
V_{ij} &= \frac{q_p}{2\pi\epsilon}\left[\ln\frac{R_b}{RD_c} - \frac{1}{k}\cdot\left(\ln\frac{RD_s\cdot D_{12}\cdot D_{1i}\ldots D_{1k}}{R_b^k}\right)\right]
\end{aligned}$$

Cabos de neutro concêntrico em linhas subterrâneas

A última equação obtida, tem como numerador do segundo termo logarítmo o produto do raio dos fios de neutro e das distâncias entre estes fios.
Aplicando:

$$\theta_{12} = \frac{2 \cdot \pi}{k} \tag{23}$$

$$\theta_{13} = 2 \cdot \theta_{12} = \frac{4 \cdot \pi}{k} \tag{24}$$

De forma geral:

$$\theta_{1i} = (i-1) \cdot \theta_{12} = \frac{(i-1) \cdot 2\pi}{k} \tag{25}$$

Cabos de neutro concêntrico em linhas subterrâneas

A distância entre o fio 1 e um fio i que compõe o condutor de neutro concêntrico é dada por:

$$D_{1i} = 2 \cdot R_b \cdot sin\left(\frac{\theta_{1i}}{2}\right) = 2 \cdot R_b \cdot sin\left(\frac{(1-i) \cdot \pi}{k}\right) \tag{26}$$

Assim,

$$RD_s \cdot \prod_{i=2}^{k} D_{1i} = RD_s \cdot R_b^{k-1} \cdot \prod_{i=2}^{k} 2 \cdot sin\left(\frac{(i-1)\pi}{k}\right) \tag{27}$$

A expressão do produtório é uma identidade trigonométrica, de tal forma que:

$$\prod_{i=2}^{k} 2 \cdot sin\left(\frac{(i-1)\pi}{k}\right) = k \tag{28}$$

Cabos de neutro concêntrico em linhas subterrâneas

Aplicando na expressão da diferença de potencial:

$$
\begin{aligned}
V_{p1} &= \frac{q_p}{2\pi\epsilon}\left[\ln\frac{R_b}{RD_c} - \frac{1}{k}\cdot\left(\ln\frac{k\cdot RD_s\cdot R_b^{k-1}}{R_b^k}\right)\right] \\
V_{p1} &= \frac{q_p}{2\pi\epsilon}\left[\ln\frac{R_b}{RD_c} - \frac{1}{k}\cdot\left(\ln\frac{k\cdot RD_s}{R_b}\right)\right]
\end{aligned}
$$

Essa equação mostra a diferença de potencial entre o condutor fase e um dos fios que formam o neutro de um cabo com neutro concêntrico. Como os condutor neutro é considerado aterrado essa expressão define a diferença de potencial entre a fase e o neutro do condutor, e a capacitância em derivação é dada por:

$$
C_{pg} = \frac{q_p}{V_{p1}} = \frac{2\pi\epsilon}{\ln\frac{R_b}{RD_c} - \frac{1}{k}\ln\frac{k\cdot RD_s}{R_b}} \tag{29}
$$

Cabos de neutro concêntrico em linhas subterrâneas

Note que como o campo elétrico gerado pelo condutor fase, fica confinado no material isolante, é claramente observável que o valor da capacitância em derivação do condutor irá depender do material utilizado na isolação.
Como $\epsilon = \epsilon_0 \cdot \epsilon_r$ e utilizando a tabela abaixo:

Material	**Range of Values of Relative Permittivity**
Polyvinyl Chloride (PVC)	3.4–8.0
Ethylene-Propylene Rubber (EPR)	2.5–3.5
Polyethylene (PE)	2.5–2.6
Cross-Linked Polyethlyene (XLPE)	2.3–6.0

Utilizando o valor mínimo da permissividade do polietileno e considerando $\omega = 2 \cdot \pi \cdot 60$:

$$y_{ag} = 0 + j\frac{77,3619}{\ln\frac{R_b}{RD_c} - \frac{1}{k}\ln\frac{k \cdot RD_s}{R_b}} \quad \mu S/milha \tag{30}$$