Distribuição de Energia Elétrica

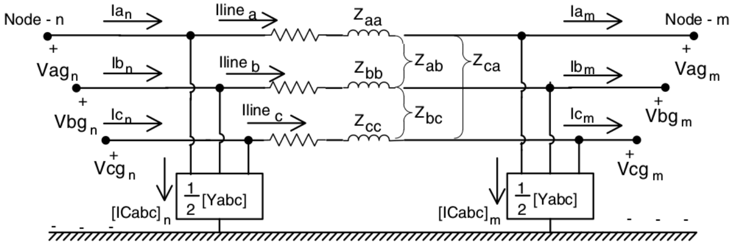
Modelos de linhas de distribuição

Lucas Melo

Universidade Federal do Ceará

Julho de 2021

Modelo exato de linha de distribuição



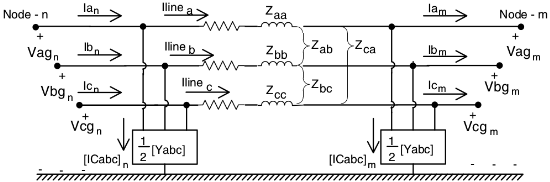
Aplicando *Lei de Kirchoff* das correntes:

$$\begin{bmatrix} Iline_a \\ Iline_b \\ Iline_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \end{bmatrix}_m + \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} y_{aa} & y_{ab} & y_{ac} \\ y_{ba} & y_{bb} & y_{bc} \\ y_{ca} & y_{cb} & y_{cc} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_a \\ V_b \\ V_c \end{bmatrix}_m \tag{1}$$

Modelo exato de linha de Distribuição

De maneira condensada podemos escrever:

$$\mathbf{Iline_{abc}} = \mathbf{I_{abc}}_m + \frac{1}{2} \cdot \mathbf{Y_{abc}} \cdot \mathbf{V_{abc}}_m \tag{2}$$



Agora aplicando *Lei de Kirchoff* das tensões:

$$\begin{bmatrix} V_a \\ V_b \\ V_c \end{bmatrix}_n = \begin{bmatrix} V_a \\ V_b \\ V_c \end{bmatrix}_m + \begin{bmatrix} z_{aa} & z_{ab} & z_{ac} \\ z_{ba} & z_{bb} & z_{bc} \\ z_{ca} & z_{cb} & z_{cc} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Iline_a \\ Iline_b \\ Iline_c \end{bmatrix} \tag{3}$$

Condensando a notação:

$$\mathbf{V_{abc}}_n = \mathbf{V_{abc}}_m + \mathbf{Z_{abc}} \cdot \mathbf{Iline_{abc}}_m \tag{4}$$

Modelo exato de linha de Distribuição

Agora, de posse da expressão de $\mathbf{Iline_{abc}}$, aplica-se na equação das tensões:

$$\mathbf{V_{abc}}_n = \mathbf{V_{abc}}_m + \mathbf{Z_{abc}} \cdot \left\{ \mathbf{I_{abc}}_m + \frac{1}{2} \cdot \mathbf{Y_{abc}} \cdot \mathbf{V_{abc}}_m \right\} \tag{5}$$

Organizando os termos:

$$\mathbf{V_{abc}}_n = \left\{ \mathbf{U} + \frac{1}{2} \cdot \mathbf{Z_{abc}} \cdot \mathbf{Y_{abc}} \right\} \mathbf{V_{abc}}_m + \mathbf{Z_{abc}} \cdot \mathbf{I_{abc}}_m \tag{6}$$

Em que:

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{7}$$

Modelo exato de linha de distribuição

$$\mathbf{V_{abc}}_n = \left\{\mathbf{U} + \frac{1}{2}\cdot\mathbf{Z_{abc}}\cdot\mathbf{Y_{abc}}\right\}\mathbf{V_{abc}}_m + \mathbf{Z_{abc}}\cdot\mathbf{I_{abc}}_m \tag{8}$$

Escrevendo na forma geral:

$$\mathbf{V_{abc}}_n = \mathbf{a}\cdot\mathbf{V_{abc}}_m + \mathbf{b}\cdot\mathbf{I_{abc}}_m \tag{9}$$

Com:

$$\mathbf{a} = \mathbf{U} + \frac{1}{2}\cdot\mathbf{Z_{abc}}\cdot\mathbf{Y_{abc}} \tag{10}$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{Z_{abc}} \tag{11}$$

Da mesma forma a corrente de saída no nó n é dada por:

$$\begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \end{bmatrix}_n = \begin{bmatrix} Iline_a \\ Iline_b \\ Iline_c \end{bmatrix}_m + \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} y_{aa} & y_{ab} & y_{ac} \\ y_{ba} & y_{bb} & y_{bc} \\ y_{ca} & y_{cb} & y_{cc} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_a \\ V_b \\ V_c \end{bmatrix}_n \tag{12}$$

Ou seja:

$$\mathbf{I_{abc}}_n = \mathbf{Iline_{abc}}_m + \frac{1}{2} \cdot \mathbf{Y_{abc}} \cdot \mathbf{V_{abc}}_n \tag{13}$$

Substituindo a expressão de $\mathbf{Iline_{abc}}_m$ na expressão acima:

$$\mathbf{I_{abc}}_n = \mathbf{I_{abc}}_m + \frac{1}{2} \cdot \mathbf{Y_{abc}} \cdot \mathbf{V_{abc}}_m + \frac{1}{2} \cdot \mathbf{Y_{abc}} \cdot \mathbf{V_{abc}}_n \tag{14}$$

Modelo exato de linha de Distribuição

Dada a expressão:

$$\mathbf{I}_{\mathbf{abc}n} = \mathbf{I}_{\mathbf{abc}m} + \frac{1}{2} \cdot \mathbf{Y}_{\mathbf{abc}} \cdot \mathbf{V}_{\mathbf{abc}m} + \frac{1}{2} \cdot \mathbf{Y}_{\mathbf{abc}} \cdot \mathbf{V}_{\mathbf{abc}n} \tag{15}$$

Substituindo o valor de $\mathbf{V}_{\mathbf{abc}n}$, facamos com:

$$\mathbf{I}_{\mathbf{abc}n} = \mathbf{I}_{\mathbf{abc}m} + \frac{1}{2} \cdot \mathbf{Y}_{\mathbf{abc}} \cdot \mathbf{V}_{\mathbf{abc}m} + \frac{1}{2} \cdot \mathbf{Y}_{\mathbf{abc}} \cdot \{\mathbf{a} \cdot \mathbf{V}_{\mathbf{abc}m} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{I}_{\mathbf{abc}m}\} \tag{16}$$

Agrupando os termos:

$$\mathbf{I}_{\mathbf{abc}n} = \left\{\frac{1}{2} \cdot \mathbf{Y}_{\mathbf{abc}} \left[\mathbf{U} + \mathbf{a}\right]\right\} \mathbf{V}_{\mathbf{abc}m} + \left\{\mathbf{U} + \frac{1}{2} \cdot \mathbf{Y}_{\mathbf{abc}} \cdot \mathbf{b}\right\} \mathbf{I}_{\mathbf{abc}m} \tag{17}$$

Modelo exato de linha de Distribuição

$$\mathbf{I_{abc}}_n = \left\{ \frac{1}{2} \cdot \mathbf{Y_{abc}} \left[\mathbf{U} + \mathbf{a} \right] \right\} \mathbf{V_{abc}}_m + \left\{ \mathbf{U} + \frac{1}{2} \cdot \mathbf{Y_{abc}} \cdot \mathbf{b} \right\} \mathbf{I_{abc}}_m \tag{18}$$

A forma geral fica:

$$\mathbf{I_{abc}}_n = \mathbf{c} \cdot \mathbf{V_{abc}}_m + \mathbf{d} \cdot \mathbf{I_{abc}}_m \tag{19}$$

$$\mathbf{c} = \frac{1}{2} \cdot \mathbf{Y_{abc}} \left[\mathbf{U} + \mathbf{a} \right] \tag{20}$$

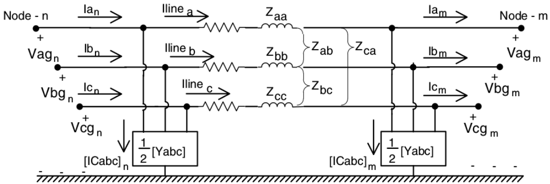
$$\mathbf{d} = \mathbf{U} + \frac{1}{2} \cdot \mathbf{Y_{abc}} \cdot \mathbf{b} \tag{21}$$

Modelo exato de linha de Distribuição

Acoplando as equações de tensão e corrente em forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{V_{abc}}_n \\ \mathbf{I_{abc}}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} \\ \mathbf{c} & \mathbf{d} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{V_{abc}}_m \\ \mathbf{I_{abc}}_m \end{bmatrix} \tag{22}$$

Essa expressão é bem semelhante a forma de quadripolos, utilizada na modelagem de sistemas de **transmissão**, mas diferente deste, os elementos da matriz, que multiplica as correntes e tensões na carga, também são matrizes.



Modelo exato de linha de distribuição

Tembém é possível obter as tensões e correntes no nó m, ou seja na fonte, a partir da mesma expressão:

$$\left[\begin{array}{c} \mathbf{V_{abc}}_m \\ \mathbf{I_{abc}}_m \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} \mathbf{a} & \mathbf{b} \\ \mathbf{c} & \mathbf{d} \end{array}\right]^{-1} \cdot \left[\begin{array}{c} \mathbf{V_{abc}}_n \\ \mathbf{I_{abc}}_n \end{array}\right] \tag{23}$$

Como, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{d} - \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{I}$, então é possível escrever:

$$\left[\begin{array}{c} \mathbf{V_{abc}}_m \\ \mathbf{I_{abc}}_m \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} \mathbf{d} & -\mathbf{b} \\ -\mathbf{c} & \mathbf{a} \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c} \mathbf{V_{abc}}_n \\ \mathbf{I_{abc}}_n \end{array}\right] \tag{24}$$

Modelo exato de linha de distribuição

Desenvolvendo a expressão anterior:

$$\mathbf{V}_{\mathbf{abc}m} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{V}_{\mathbf{abc}n} - \mathbf{b} \cdot \mathbf{I}_{\mathbf{abc}n} \tag{25}$$

$$\mathbf{I}_{\mathbf{abc}m} = -\mathbf{c} \cdot \mathbf{V}_{\mathbf{abc}n} + \mathbf{d} \cdot \mathbf{I}_{\mathbf{abc}n} \tag{26}$$

Em algumas situações é necessário calcular as tensões no nó m (carga) em função das tensões no nó n (fonte) e das correntes que entram no nó m (carga). Isso é possível de ser feito isoalando o termo $\mathbf{V_{abc}}_m$ na equação que dá o valor de $\mathbf{V_{abc}}_n$. Veja:

$$\begin{aligned} \mathbf{V_{abc}}_n &= \mathbf{a} \cdot \mathbf{V_{abc}}_m + \mathbf{b} \cdot \mathbf{I_{abc}}_m && (27) \\ \mathbf{V_{abc}}_m &= \mathbf{a}^{-1} \cdot \{\mathbf{V_{abc}}_n - \mathbf{b} \cdot \mathbf{I_{abc}}_m\} && (28) \end{aligned}$$

Logo:

$$\mathbf{V_{abc}}_m = \mathbf{A} \cdot \mathbf{V_{abc}}_n - \mathbf{B} \cdot \mathbf{I_{abc}}_m \tag{29}$$

Em que:

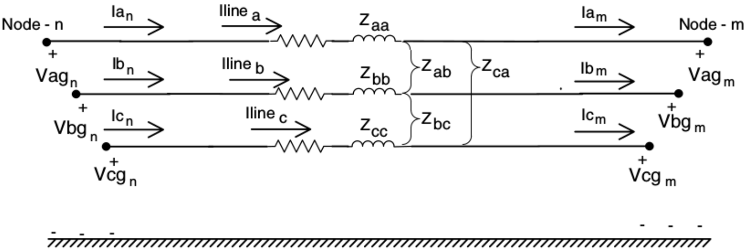
$$\mathbf{A} = \mathbf{a}^{-1} \;\; e \;\; \mathbf{B} = \mathbf{a}^{-1} \cdot \mathbf{b} \tag{30}$$

Modelo exato de linha de distribuição

Exercício
Uma carga equilibrada com potência de 6.000 kVA, tensão nominal de 12,47kV e fator de potência 0,9 indutivo está conectada no nó m de uma linha de distribuição trifásica de 10.000 pés.
Determine as matrizes **a**, **b**, **c**, **d**. Usando as matrizes determine as tesões no nó fonte **n** e as correntes que fluem na linha.

Modelo modificado de linha de distribuição

Em alguns casos a admitância em derivação da linha de distribuição é tão pequena que pode ser desprezada, conforme mostrado na Figura:



Modelo modificado de linha de distribuição

Para este caso, as matrizes do modelo de linhas de distribuição ficam:

Modelo Exato

$$
\begin{aligned}
\mathbf{a} &= \mathbf{U} + \frac{1}{2} \cdot \mathbf{Z_{abc}} \cdot \mathbf{Y_{abc}} \\
\mathbf{b} &= \mathbf{Z_{abc}} \\
\mathbf{c} &= \frac{1}{2} \cdot \mathbf{Y_{abc}} \left[\mathbf{U} + \mathbf{a} \right] \\
\mathbf{d} &= \mathbf{U} + \frac{1}{2} \cdot \mathbf{Y_{abc}} \cdot \mathbf{b}
\end{aligned}
$$

Modelo Modificado

$$
\begin{aligned}
\mathbf{a} &= \mathbf{U} \\
\mathbf{b} &= \mathbf{Z_{abc}} \\
\mathbf{c} &= \mathbf{0} \\
\mathbf{d} &= \mathbf{U} \\
\mathbf{A} &= \mathbf{U} \\
\mathbf{B} &= \mathbf{Z_{abc}}
\end{aligned}
$$

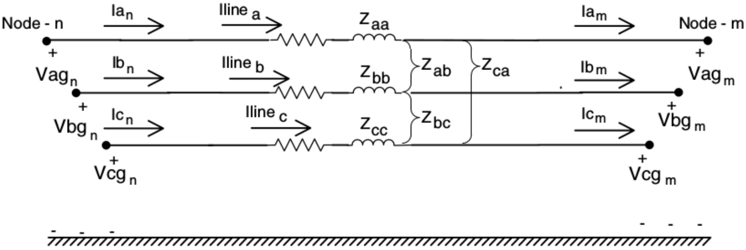
Modelo modificado de linha de Distribuição

Até aqui, consirerou-se somente a matriz das tensões fase-neutro de um sistema.

Caso tenhamos, por exemplo, um sistema do tipo delta a três condutores, seria necessário calcular as tensões fase-fase.

Mas uma vez que é possível calcularmos o sistema fase-neutro equivalente, as equações desenvolvidas até aqui continuam válidas.

Por exemplo, em termos de tensões fase-fase teríamos:



$$\begin{bmatrix} V_{ab} \\ V_{bc} \\ V_{ca} \end{bmatrix}_n = \begin{bmatrix} V_{ab} \\ V_{bc} \\ V_{ca} \end{bmatrix}_m + \begin{bmatrix} \Delta V_a \\ \Delta V_b \\ \Delta V_c \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \Delta V_b \\ \Delta V_c \\ \Delta V_a \end{bmatrix} \tag{31}$$

Modelo modificado de linha de Distribuição

Em que:

$$\begin{bmatrix} \Delta V_a \\ \Delta V_b \\ \Delta V_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{aa} & z_{ab} & z_{ac} \\ z_{ba} & z_{bb} & z_{bc} \\ z_{ca} & z_{cb} & z_{cc} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Iline_a \\ Iline_b \\ Iline_c \end{bmatrix} \tag{32}$$

Expandindo a equação da queda das tensões de linha:

$$V_{ab_n} = V_{ab_m} + \Delta V_a - \Delta V_b \tag{33}$$

Seguindo este raciocínio, temos que:

$$V_{ab_n} = V_{an_n} - V_{bn_n} \tag{34}$$

$$V_{ab_m} = V_{an_m} - V_{bn_m} \tag{35}$$

Então:

$$V_{an_n} - V_{bn_n} = V_{an_m} - V_{bn_m} + \Delta V_a - \Delta V_b \tag{36}$$

Modelo modificado de linha de Distribuição

$$V_{an_n} - V_{bn_n} = V_{an_m} - V_{bn_m} + \Delta V_a - \Delta V_b \tag{37}$$

Dividindo esta equação em duas partes:

$$V_{an_n} = V_{an_m} + \Delta V_a \tag{38}$$

$$V_{bn_n} = V_{bn_m} + \Delta V_b \tag{39}$$

Dessa forma, é possível trabalharmos com tensões equivalentes fase-neutro em sistemas delta a três condutores.

Isso é importante pois, as técnicas de análise se tornam gerais tanto para sistemas estrela a quatro condutores, quanto para sistemas delta a três condutores.

Modelo aproximado de linha de distribuição

É comum em algumas situações que as únicas informações disponíveis para a representação de uma linha de distribuição sejam as impedâncias de sequência positiva e negativa.

Com esses dados é possível obtermos os dados da matriz de impedâncias de fase.

Inicialmente têm-se:

$$\mathbf{Z_{seq}} = \begin{bmatrix} z_0 & 0 & 0 \\ 0 & z_1 & 0 \\ 0 & 0 & z_1 \end{bmatrix} \tag{40}$$

Modelo aproximado de linha de distribuição

Aplicando a equação de transformação de componentes de sequência para componentes de fase, obtemos a matriz de impedância de fase aproximada:

$$\mathbf{Z_{aprox}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{Z_{seq}} \cdot \mathbf{A}^{-1} \tag{41}$$

$$\mathbf{Z_{aprox}} = \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} (2 \cdot z_1 + z_0) & (z_0 - z_1) & (z_0 - z_1) \\ (z_0 - z_1) & (2 \cdot z_1 + z_0) & (z_0 - z_1) \\ (z_0 - z_1) & (z_0 - z_1) & (2 \cdot z_1 + z_0) \end{bmatrix} \tag{42}$$

Observe que a matrix $\mathbf{Z_{aprox}}$ é simétrica, ou seja, os termos da diagonal principal são iguais entre sí e os fora dela também o são, o que caracteriza o modelo de uma **linha transposta**.

Modelo aproximado de linha de distribuição

Aplicando a matriz $\mathbf{Z_{aprox}}$ nas equações de tensão matriciais obtidas anteriormente:

$$\begin{bmatrix} V_a \\ V_b \\ V_c \end{bmatrix}_n = \begin{bmatrix} V_a \\ V_b \\ V_c \end{bmatrix}_m + \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} (2 \cdot z_1 + z_0) & (z_0 - z_1) & (z_0 - z_1) \\ (z_0 - z_1) & (2 \cdot z_1 + z_0) & (z_0 - z_1) \\ (z_0 - z_1) & (z_0 - z_1) & (2 \cdot z_1 + z_0) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Iline_a \\ Iline_b \\ Iline_c \end{bmatrix}$$

Ou de forma condensada:

$$\mathbf{V_{abc}}_n = \mathbf{V_{abc}}_m + \mathbf{Z_{aprox}} \cdot \mathbf{I_{abc}}_m \tag{43}$$

Modelo aproximado de linha de distribuição

$$\mathbf{V}_{\mathbf{abc}n} = \mathbf{V}_{\mathbf{abc}m} + \mathbf{Z}_{\mathbf{aprox}} \cdot \mathbf{I}_{\mathbf{abc}m}$$

Comparando com:

$$\mathbf{V}_{\mathbf{abc}n} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{V}_{\mathbf{abc}m} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{I}_{\mathbf{abc}m} \tag{44}$$

Então:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \mathbf{U} \\ \mathbf{b} &= \mathbf{Z}_{\mathbf{aprox}} \end{aligned} \tag{45}$$

Resolvendo a equação matricial das tensões para uma das fases, no caso a fase a, ficamos com:

$$V_{a_n} = V_{a_m} + \frac{1}{3} \cdot \{(2 \cdot z_1 + z_0) \cdot I_a + (z_0 - z_1) \cdot I_b + (z_0 - z_1) \cdot I_c\} \tag{46}$$

Adicionando e subtraindo o termo $(z_0 + z_1) \cdot I_a$ na equação acima, chega-se a seguinte expressão:

$$V_{a_n} = V_{a_m} + z_1 \cdot I_a + \frac{(z_0 - z_1)}{3} \cdot (I_a + I_b + I_c) \tag{47}$$

Modelo aproximado de linha de distribuição

Realizando o procedimento para as fases **b** e **c**, ficamos com o conjuto de equações:

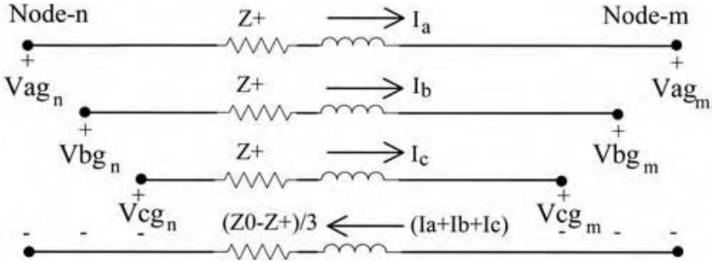
$$V_{a_n} = V_{a_m} + z_1 \cdot I_a + \frac{(z_0 - z_1)}{3} \cdot (I_a + I_b + I_c) \quad (48)$$

$$V_{b_n} = V_{b_m} + z_1 \cdot I_b + \frac{(z_0 - z_1)}{3} \cdot (I_a + I_b + I_c) \quad (49)$$

$$V_{c_n} = V_{c_m} + z_1 \cdot I_c + \frac{(z_0 - z_1)}{3} \cdot (I_a + I_b + I_c) \quad (50)$$

Modelo aproximado de linha de distribuição

As equações anteriores nos levam ao seguinte modelo de linha:



A utilização deste modelo leva em consideração um **circuito desacoplado** e sua utilização implica em considerar que **a linha de distribuição possui transposição entre suas fases**.