

# Techniques fondamentales de calcul différentiel et intégral

A) Fonctions d'une variable réelle à valeurs réelles ou complexes

a) Généralités sur les fonctions

23 septembre 2022

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Généralités sur les fonctions</b>	<b>3</b>
1.1	Application et/ou fonction . . . . .	3
1.2	Fonctions particulières . . . . .	3
1.3	Image et antécédent . . . . .	3
1.4	Ensemble de définition d'une fonction . . . . .	4
1.5	Restriction d'une application . . . . .	4
1.6	Composée de deux fonctions . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Cas des fonctions d'une variable réelle à valeurs réelles ou complexes</b>	<b>5</b>
2.1	Représentation graphique d'une fonction à valeurs réelles . . . . .	5
2.2	Somme, produit, quotient, composée de fonctions . . . . .	5
2.3	Fonctions paires, impaires, périodiques . . . . .	6
2.4	Ordre sur l'ensemble des fonctions à valeurs réelles . . . . .	7
2.4.1	Ordre sur $\mathbb{R}^X$ . . . . .	7
2.4.2	Ordre strict sur $\mathbb{R}^X$ . . . . .	8
2.5	Quelques fonctions particulières . . . . .	8
2.6	Les fonctions lipschitziennes . . . . .	8
2.7	Majorant, maximum, borne supérieure d'une fonction à valeurs réelles . . . . .	9
2.7.1	Majorant, minorant d'une fonction . . . . .	9
2.7.2	Maximum, minimum d'une fonction . . . . .	10
2.8	Monotonie large et stricte d'une fonction à valeurs réelles . . . . .	11
<b>3</b>	<b>Bijection et bijection réciproque</b>	<b>11</b>
3.1	Bijection, injection, surjection . . . . .	11
3.2	Bijection réciproque . . . . .	12
3.3	Propriétés . . . . .	12
3.4	Imparité de la réciproque d'une bijection impaire . . . . .	13
3.5	Stricte monotonie d'une bijection réciproque d'une bijection strictement monotone . . . . .	13
3.6	Représentation graphique de la réciproque d'une bijection . . . . .	13

3.7	Théorème de la bijection . . . . .	13
3.8	Théorème de la bijection réciproque . . . . .	14

# 1 Généralités sur les fonctions

Dans la suite,  $\mathbb{K}$  désigne  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ,  $\mathbb{X}$  une partie non vide de  $\mathbb{R}$

## 1.1 Application et/ou fonction

DÉFINITION :

Une **application** est définie par la donnée de 3 éléments :

1. Un ensemble  $\mathbb{E}$  non vide dit *ensemble de départ*
2. Un ensemble  $\mathbb{F}$  non vide dit *ensemble d'arrivée*
3. Une correspondance qui à tout élément de  $\mathbb{E}$  associe un, et un seul, élément de  $\mathbb{F}$

DÉFINITION :

Une **fonction** est définie par la donnée de 3 éléments :

1. Un ensemble  $\mathbb{E}$  non vide dit *ensemble de départ*
2. Un ensemble  $\mathbb{F}$  non vide dit *ensemble d'arrivée*
3. Une correspondance qui à tout élément de  $\mathbb{E}$  associe au plus un élément de  $\mathbb{F}$

L'ensemble des applications et fonctions de  $\mathbb{E}$  dans  $\mathbb{F}$  se note  $\mathbb{F}^{\mathbb{E}}$

## 1.2 Fonctions particulières

- (i) Fonctions nulles :  $f : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}, x \mapsto 0$
- (ii) Fonctions constantes :  $\exists a \in \mathbb{K}, f : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}, x \mapsto a$
- (iii) Fonctions affines :  $\exists (a, b) \in \mathbb{K}^2, f : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}, x \mapsto ax + b$
- (iv) Fonctions homographiques :

$$\exists (a, b, c, d) \in \mathbb{K}^4 \left\{ \begin{array}{l} c \neq 0 \\ ad - bc \neq 0 \end{array} \right. , f : \mathbb{K} - \left\{ \frac{-c}{d} \right\} \rightarrow \mathbb{K}, x \mapsto \frac{ax + b}{cx + d}$$

- (v) Fonctions polynomiales :

$$P \in \mathbb{K}[X], f : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}, x \mapsto P(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$$

- (vi) Fonctions rationnelles :

$$P, Q \in \mathbb{K}[X], f : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}, x \mapsto \frac{P(x)}{Q(x)}$$

## 1.3 Image et antécédent

DÉFINITION :

Soit  $\mathbb{E}$  et  $\mathbb{F}$  deux ensembles non vides,  $f$  une application de  $\mathbb{E}$  vers  $\mathbb{F}$ .  
 Soit  $x$  un élément de  $\mathbb{E}$ , la correspondance associée à  $f$  associe à  $x$  un, et un seul, élément de  $\mathbb{F}$  appelée **image** de  $x$  par  $f$ .  
 Soit  $y \in \mathbb{F}$ , on appelle **antécédent** de  $y$  par  $f$ , tout élément dont l'image par  $f$  est  $y$ .

## 1.4 Ensemble de définition d'une fonction

On appelle **ensemble de définition** de  $f$  l'ensemble des éléments de  $\mathbb{E}$  qui ont une image dans  $\mathbb{F}$  par  $f$ , il est noté  $\mathcal{D}_f$ .

DÉFINITION :

Soit  $\mathbb{E}, \mathbb{F}$  deux ensembles non vides et  $f : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{F}$ .  
 On appelle **graphe de  $f$**  l'ensemble

$$\{(x, f(x)), x \in \mathcal{D}_f\}$$

## 1.5 Restriction d'une application

REMARQUE :

Deux applications (ou fonctions) sont égales si et seulement si elles ont :  
 — un même ensemble de départ  
 — un même ensemble d'arrivée  
 — une même correspondance

DÉFINITION :

Soit  $\mathbb{E}, \mathbb{F}$  deux ensembles non vides,  $f : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{F}$ ,  $\mathbb{E}_1$  une partie non vide de  $\mathbb{E}$ .

On appelle **restriction** de  $f$  à  $\mathbb{E}_1$  la fonction notée  $f|_{\mathbb{E}_1} : \mathbb{E}_1 \rightarrow \mathbb{F}$  définie par

$$\forall x \in \mathbb{E}_1, f|_{\mathbb{E}_1}(x) = f(x)$$

## 1.6 Composée de deux fonctions

DÉFINITION :

Soit  $\mathbb{E}, \mathbb{F}, \mathbb{G}$  trois ensembles non vides,  $f : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{F}$ ,  $g : \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{G}$ .  
 Nous pouvons définir une application de  $\mathbb{E}$  dans  $\mathbb{G}$  définie par

$$\forall x \in \mathbb{E}, (g \circ f)(x) = g(f(x))$$

DÉFINITION :

Soit  $\mathbb{E}$  un ensemble non vide, nous pouvons définir application identité de  $\mathbb{E}$  notée  $id_{\mathbb{E}}$  par :

$$\forall x \in \mathbb{E}, id_{\mathbb{E}}(x) = x$$

PROPRIÉTÉ :

Soit  $\mathbb{E}, \mathbb{F}$  deux ensembles non vides,  $f : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{F}$ , alors :

$$\begin{cases} f \circ id_{\mathbb{E}} = f \\ id_{\mathbb{F}} \circ f = f \end{cases}$$

## 2 Cas des fonctions d'une variable réelle à valeurs réelles ou complexes

### 2.1 Représentation graphique d'une fonction à valeurs réelles

Soit  $f$  une fonction de  $\mathbb{X}$  dans  $\mathbb{R}$ . Nous munissons le plan usuel d'un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$

La représentation se note souvent  $\mathcal{C}_f$

### 2.2 Somme, produit, quotient, composée de fonctions

(i) Somme : Soit  $f, g : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{K}$  :

$$f + g : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{K}$$

$$\forall x \in \mathbb{X}, (f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

(ii) Produit : Soit  $f, g : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{K}$  :

$$f \times g : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{K}$$

$$\forall x \in \mathbb{X}, (f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$$

(iii) Produit par un réel : Soit  $\lambda \in \mathbb{K}$  :

$$\lambda \cdot f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{K}$$

$$\forall x \in \mathbb{X}, (\lambda \cdot f)(x) = \lambda \times f(x)$$

(iv) Quotient : Soit  $f, g : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{K}$  telles que nous pouvons définir la fonction quotient  $\frac{f}{g}$  par :

$$\forall x \in \mathbb{X}, \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

(v) Composition de fonctions : Soit  $\mathbb{Y}$  une partie non vide de  $\mathbb{R}$ ,  $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g : \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{R}$  telles que :

$$\forall x \in \mathbb{X}, f(x) \in \mathbb{Y} \text{ ou } f(\mathbb{X}) \subset \mathbb{Y}$$

Nous pouvons définir la composée  $(g \circ f)$  par :

$$\forall x \in \mathbb{X}, (g \circ f)(x) = g(f(x))$$

PROPRIÉTÉ :

**Le groupe commutatif**  $(\mathbb{K}^{\mathbb{X}}, +)$  :

— L'addition est une loi de composition interne dans  $\mathbb{K}^{\mathbb{X}}$ , c'est-à-dire :

$$\forall f \in \mathbb{K}^{\mathbb{X}}, \forall g \in \mathbb{K}^{\mathbb{X}}, f + g \in \mathbb{K}^{\mathbb{X}}$$

— L'addition est associative dans  $\mathbb{K}^{\mathbb{X}}$ , c'est-à-dire :

$$\forall (f, g, h) \in (\mathbb{K}^{\mathbb{X}})^3, f + (g + h) = (f + g) + h$$

— L'addition admet un élément neutre dans  $\mathbb{K}^{\mathbb{X}}$

— Toute fonction  $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{K}$  est symétrisable pour l'addition dans  $\mathbb{K}^{\mathbb{X}}$ , c'est-à-dire :

$$\forall f \in \mathbb{K}^{\mathbb{X}}, \exists g : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{K}, \text{ tel que } f + g = g + f = 0$$

Ces quatre points se résument en disant que  $(\mathbb{K}^{\mathbb{X}}, +)$  est un **groupe**

— L'addition est commutative dans  $\mathbb{K}^{\mathbb{X}}$ , c'est-à-dire :

$$\forall (f, g) \in (\mathbb{K}^{\mathbb{X}})^2, f + g = g + f$$

Ce dernier point permet d'ajouter que  $(\mathbb{K}^{\mathbb{X}}, +)$  est un **groupe commutatif**

**L'anneau commutatif**  $(\mathbb{K}^{\mathbb{X}}, +, \times)$  :

De plus, la multiplication est distributive par rapport à l'addition dans  $\mathbb{K}^{\mathbb{X}}$  c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} &\forall (f, g, h) \in (\mathbb{K}^{\mathbb{X}})^3, \\ &\begin{cases} (f + g) \times h = (f \times h) + (g \times h) \\ f \times (g + h) = (f \times g) + (f \times h) \end{cases} \end{aligned}$$

## 2.3 Fonctions paires, impaires, périodiques

DÉFINITION :

Soit  $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{K}$

(i) On dit que  $f$  est **paire** si et seulement si :

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{X}, -x \in \mathbb{X} \\ \forall x \in \mathbb{X}, f(-x) = f(x) \end{cases}$$

(ii) On dit que  $f$  est **impaire** si et seulement si :

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{X}, -x \in \mathbb{X} \\ \forall x \in \mathbb{X}, f(-x) = -f(x) \end{cases}$$

PROPRIÉTÉ :

Soit  $\mathbb{Y}$  une partie non vide de  $\mathbb{R}$ ,  $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g : \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{R}$  tel que  $f(x) \in \mathbb{Y}$

- (i) en supposant  $f$  paire, alors  $g \circ f$  est paire
- (ii) en supposant  $f$  et  $g$  impaires, alors  $g \circ f$  est impaire
- (iii) en supposant  $f$  impaire et  $g$  paire alors  $g \circ f$  est paire

DÉFINITION :

Soit  $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $T \in \mathbb{R}_+^*$

On dit que  $f$  est **périodique** de période  $T$  si et seulement si :

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{X}, \forall k \in \mathbb{Z}, x + kT \in \mathbb{X} \\ \forall x \in \mathbb{X}, f(x + T) = f(x) \end{cases}$$

## 2.4 Ordre sur l'ensemble des fonctions à valeurs réelles

### 2.4.1 Ordre sur $\mathbb{R}^{\mathbb{X}}$

DÉFINITION :

Soit  $f, g : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$ , alors :

$$f \leq g \iff \forall x \in \mathbb{X}, f(x) \leq g(x)$$

PROPRIÉTÉ :

- (i) Soit  $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$ , alors  $f \leq f$   
On dit que  $\leq$  est **reflexive** dans  $\mathbb{R}^{\mathbb{X}}$
- (ii) Soit  $f, g : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$ , alors :

$$\begin{cases} f \leq g \\ g \leq f \end{cases} \iff f = g$$

On dit que  $\leq$  est **anti-symétrique** sur  $\mathbb{R}^{\mathbb{X}}$

- (iii) Soit  $f, g, h : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$  alors :

$$\begin{cases} f \leq g \\ g \leq h \end{cases} \implies f \leq h$$

On dit que  $\leq$  est **transitif** sur  $\mathbb{R}^{\mathbb{X}}$

- (iv) Ces 3 points se résument en disant que  $\leq$  est une **relation d'ordre** sur  $\mathbb{R}^{\mathbb{X}}$

REMARQUE :

Nous avons cependant une différence entre la relation  $\leq$  sur  $\mathbb{R}$  et la relation  $\leq$  sur  $\mathbb{R}^{\mathbb{X}}$

- (i) Soit 2 réels  $a$  et  $b$ , soit  $(a \leq b)$  soit  $(b \leq a)$

La relation est dite **totale**

- (ii) Soit 2 fonctions  $f, g : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$ , on a pas forcément  $f \leq g$  ou  $f \geq g$

La relation  $\leq$  est dite **partielle** sur  $\mathbb{R}^{\mathbb{X}}$

- (iii) Etant donné  $x$  réel, la discussion  $x \leq 0$  et  $x \geq 0$  est exhaustive.

Et du fait de l'ordre partiel sur  $\mathbb{R}^{\mathbb{X}}$ , étant donné  $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$  la discussion  $f \leq 0$  et  $f \geq 0$  ne traite pas tous les cas

#### 2.4.2 Ordre strict sur $\mathbb{R}^{\mathbb{X}}$

DÉFINITION :

Soit  $f, g : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$ , alors

$$f < g \iff \forall x \in \mathbb{X}, f(x) < g(x)$$

### 2.5 Quelques fonctions particulières

- (i) Soit  $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$ , nous définissons les fonctions :

$$|f| : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto (|f|)(x) = |f(x)|$$

$$f^+ : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f^+(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } f(x) \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$f^- : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f^-(x) = \begin{cases} -f(x) & \text{si } f(x) \leq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- (ii) Soit  $f, g : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\max(f, g) : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \max(f(x), g(x))$$

$$\min(f, g) : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \min(f(x), g(x))$$

Alors  $\max(f, g) \geq f \geq \min(f, g)$  et

$$\max(f, g) + \min(f, g) = f + g$$

$$\max(f, g) - \min(f, g) = |f - g|$$

$$\text{Donc } \max(f, g) = \frac{f+g+|f-g|}{2} \text{ et } \min(f, g) = \frac{f+g-|f-g|}{2}$$

### 2.6 Les fonctions lipschitziennes

DÉFINITION :



Soit  $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{K}, k \in \mathbb{R}_+$ , on dit que  $f$  est lipschitzienne sur  $\mathbb{X}$  de rapport  $k$  si et seulement si :

$$\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{X}^2, |f(x_1) - f(x_2)| \leq k|x_1 - x_2|$$

REMARQUE :

Soit  $k \in \mathbb{R}_+$ ,  $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $k$ -lipschitzienne sur  $\mathbb{X}$ , alors :

$$\left| \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \right| \leq k$$

PROPRIÉTÉ :

Soit  $k, l \in \mathbb{R}^+$ ,  $f, g : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{K}$  tel que :

$$\begin{cases} f \text{ est } k\text{-lipschitzienne sur } \mathbb{X} \\ g \text{ est } l\text{-lipschitzienne sur } \mathbb{X} \end{cases}$$

- (i) Alors  $f + g$  est  $(k + l)$ -lipschitzienne sur  $\mathbb{X}$
- (ii) Soit  $\lambda \in \mathbb{K}$ , alors  $\lambda \cdot f$  est  $|\lambda|k$ -lipschitzienne sur  $\mathbb{X}$
- (iii) Soit  $\mathbb{X}_1$  une partie non vide de  $\mathbb{X}$  alors  $f|_{\mathbb{X}_1}$

DÉFINITION :

Soit  $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{K}$  :

On dit que  $f$  est contractante sur  $\mathbb{X}$  si et seulement si il existe  $k \in [0; 1[$  tel que  $f$  soit  $k$ -lipschitzienne sur  $\mathbb{X}$ , c'est à dire :

$$\exists k \in [0; 1[, \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{X}^2, |f(x_1) - f(x_2)| \leq k|x_1 - x_2|$$

## 2.7 Majorant, maximum, borne supérieure d'une fonction à valeurs réelles

### 2.7.1 Majorant, minorant d'une fonction

DÉFINITION :

- (i) On appelle majorant de  $f$  sur  $\mathbb{X}$ , tout réel  $M$  tel que :

$$\forall x \in \mathbb{X}, f(x) \leq M$$

- (ii) On appelle minorant de  $f$  sur  $\mathbb{X}$ , tout réel  $m$  tel que :

$$\forall x \in \mathbb{X}, m \leq f(x)$$

DÉFINITION :

Soit  $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$

- (i) On dit que  $f$  est **majorée** sur  $\mathbb{X}$  si et seulement si  $f$  admet un majorant sur  $\mathbb{X}$ , c'est à dire :

$$(\exists M \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{X})(f(x) \leq M)$$

- (ii) On dit que  $f$  est **minorée** sur  $\mathbb{X}$  si et seulement si  $f$  admet un minorant sur  $\mathbb{X}$ , c'est à dire :

$$(\exists m \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{X})(f(x) \geq m)$$

- (iii) On dit que  $f$  est **bornée** sur  $\mathbb{X}$  si et seulement si  $f$  est majorée et minorée sur  $\mathbb{X}$ , c'est à dire :

$$\exists(m, M) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in \mathbb{X}, m \leq f(x) \leq M$$

## 2.7.2 Maximum, minimum d'une fonction

DÉFINITION :

Soit  $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a$  un point de  $\mathbb{X}$

- (i) On dit que  $f$  présente un **maximum** en  $a$  si et seulement si :

$$\forall x \in \mathbb{X}, f(x) \leq f(a)$$

- (ii) On dit que  $f$  présente un **minimum** en  $a$  si et seulement si :

$$\forall x \in \mathbb{X}, f(x) \geq f(a)$$

- (iii) On dit que  $f$  présente un **extremum** en  $a$  si et seulement si  $f$  présente un maximum ou un minimum en  $a$

DÉFINITION :

Soit  $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a$  un point de  $\mathbb{X}$  en lequel  $f$  présente un maximum, alors :

- (i)  $f(a)$  est un **majorant** de  $f$  sur  $\mathbb{X}$   
(ii)  $f(a)$  est appelée le maximum de  $f$  sur  $\mathbb{X}$  et se note  $\max_{\mathbb{X}} f$  ou  $\max_{x \in \mathbb{X}} f(x)$

DÉFINITION :

Soit  $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a$  un point de  $\mathbb{X}$  en lequel  $f$  présente un minimum, alors :

- (i)  $f(a)$  est un **minorant** de  $f$  sur  $\mathbb{X}$   
(ii)  $f(a)$  est appelée le minimum de  $f$  sur  $\mathbb{X}$  et se note  $\min_{\mathbb{X}} f$  ou  $\min_{x \in \mathbb{X}} f(x)$

## 2.8 Monotonie large et stricte d'une fonction à valeurs réelles

### Définition :

Soit  $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$

- (i) On dit que  $f$  est **croissante** sur  $\mathbb{X}$  si et seulement si :

$$\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{X}^2, x_1 \leq x_2 \implies f(x_1) \leq f(x_2)$$

- (ii) On dit que  $f$  est **décroissante** sur  $\mathbb{X}$  si et seulement si :

$$\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{X}^2, x_1 \leq x_2 \implies f(x_1) \geq f(x_2)$$

- (iii) On dit que  $f$  est **monotone** sur  $\mathbb{X}$  si et seulement si  $f$  est croissante ou décroissante sur  $\mathbb{X}$

### Définition :

Soit  $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$

- (i) On dit que  $f$  est **strictement croissante** sur  $\mathbb{X}$  si et seulement si :

$$\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{X}^2, x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2)$$

- (ii) On dit que  $f$  est **strictement décroissante** sur  $\mathbb{X}$  si et seulement si :

$$\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{X}^2, x_1 < x_2 \implies f(x_1) > f(x_2)$$

- (iii) On dit que  $f$  est **strictement monotone** sur  $\mathbb{X}$  si et seulement si  $f$  est strictement croissante ou strictement décroissante sur  $\mathbb{X}$

## 3 Bijection et bijection réciproque

### 3.1 Bijection, injection, surjection

#### DÉFINITION :

Soit  $\mathbb{E}, \mathbb{F}$  deux ensembles non vides,  $f : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{F}$

- (i) On dit que  $f$  est **bijective** si et seulement si tout élément de  $\mathbb{F}$  admet un unique antécédent par  $f$  dans  $\mathbb{E}$ , c'est à dire :

$$\forall y \in \mathbb{F}, \exists ! x \in \mathbb{E}, y = f(x)$$

- (ii) On dit que  $f$  est **surjective** si et seulement si tout élément de  $\mathbb{F}$  admet au moins un antécédent par  $f$  dans  $\mathbb{E}$ , c'est à dire :

$$\forall y \in \mathbb{F}, \exists x \in \mathbb{E}, y = f(x)$$

(iii) On dit que  $f$  est **injective** si et seulement si tout element de  $\mathbb{F}$  admet au plus un antécédent par  $f$  dans  $\mathbb{E}$ , c'est à dire :

$$(\forall y \in \mathbb{F}) \left( \exists (x_1, x_2) \in \mathbb{E}^2, \begin{cases} y = f(x_1) \\ y = f(x_2) \end{cases} \right) \implies (y = f(x))$$

### 3.2 Bijection réciproque

DÉFINITION :

Soit  $\mathbb{E}, \mathbb{F}$  deux ensembles non vides,  $f$  une bijection de  $\mathbb{E}$  dans  $\mathbb{F}$  alors la correspondance qui a tout element de  $\mathbb{F}$  associe son unique antécédent dans  $\mathbb{E}$  nous définit une application de  $\mathbb{E}$  dans  $\mathbb{F}$  notée  $f^{-1}$  appelée **bijection réciproque de  $f$**

$$\forall x \in \mathbb{E}, y \in \mathbb{F}, x = f^{-1}(y) \iff y = f(x)$$

PROPRIÉTÉ :

Soit  $\mathbb{E}, \mathbb{F}$  deux ensembles non vides,  $f : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{F}$ , alors :

$$f^{-1} \circ f = id_{\mathbb{E}}, f \circ f^{-1} = id_{\mathbb{F}}$$

### 3.3 Propriétés

PROPRIÉTÉ

Soit  $\mathbb{E}, \mathbb{F}$  deux ensembles non vides,  $f : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{F}$  bijective, alors  $f^{-1} : \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{E}$  est bijective et  $(f^{-1})^{-1} = f$

PROPRIÉTÉ

Soit  $\mathbb{E}, \mathbb{F}, \mathbb{G}$  trois ensembles non vides,  $f$  une bijective de  $\mathbb{E}$  dans  $\mathbb{F}$ ,  $g$  une bijective de  $\mathbb{F}$  dans  $\mathbb{G}$

Alors  $g \circ f$  réalise une bijection de  $\mathbb{E}$  dans  $\mathbb{G}$  et  $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

PROPRIÉTÉ

Soit  $\mathbb{E}, \mathbb{F}$  deux ensembles non vides,  $f : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{F}$ . Les assertions suivantes sont équivalentes

- $f$  est bijective
- Il existe  $g : \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{E}$  tel que :

$$\begin{cases} g \circ f = id_{\mathbb{E}} \\ f \circ g = id_{\mathbb{F}} \end{cases}$$

### 3.4 Imparité de la réciproque d'une bijection impaire

PROPRIÉTÉ :

Soit  $\mathbb{Y}$  une partie non vide de  $\mathbb{R}$ ,  $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$  bijective et impaire  
Alors  $f^{-1}$  impaire

### 3.5 Stricte monotonie d'une bijection réciproque d'une bijection strictement monotone

PROPRIÉTÉ :

Soit  $\mathbb{Y}$  une partie non vide de  $\mathbb{R}$ , alors  $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$  bijective et strictement monotone sur  $\mathbb{X}$   
Alors,  $f^{-1}$  est strictement monotone sur  $\mathbb{Y}$  et de même sens de variation

### 3.6 Représentation graphique de la réciproque d'une bijection

$\mathcal{C}_{f^{-1}}$  est le symétrique de  $\mathcal{C}_f$  par rapport à la droite d'équation  $y = x$

### 3.7 Théorème de la bijection

THÉORÈME

**Théorème de la bijection :**

Soit  $\mathbb{I}$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  contenant au moins 2 points différents,  $f : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}$  continue sur  $\mathbb{I}$  et strictement monotone sur  $\mathbb{I}$

Alors  $\mathbb{J} = f(\mathbb{I})$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $f$  réalise une bijection de  $\mathbb{I}$  dans  $\mathbb{J}$  :

$$\forall y \in \mathbb{J}, \exists ! x \in \mathbb{I}, y = f(x)$$

REMARQUE

Soit  $f : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}$ , continue et strictement monotone sur  $\mathbb{I}$

- (i) La continuité de  $f$  assure le fait que  $\mathbb{J}$  soit un intervalle de  $\mathbb{R}$
- (ii) le fait de considérer  $f$  allant de  $\mathbb{I}$  dans  $\mathbb{J} = f(\mathbb{I})$  assure la surjectivité de  $f$
- (iii) La stricte monotonie de  $f$  sur  $\mathbb{I}$  assure l'injectivité de  $f$

REMARQUE :

$$\left. \begin{array}{l} f \text{ continue sur } \mathbb{I} \\ f \text{ strictement monotone} \\ \mathbb{J} = f(\mathbb{I}) \end{array} \right\} \implies f \text{ réalise une bijection de } \mathbb{I} \text{ dans } \mathbb{J}$$

Les conditions sont suffisantes pour amener la conclusion

THÉORÈME :

**Théorème des valeurs intermédiaires**

Soit  $\mathbb{I}$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  contenant au moins deux points distincts,  $f : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}$  continue sur  $\mathbb{I}$ ,  $a, b \in \mathbb{I}$

Alors, pour tout réel  $d$  compris entre  $f(a)$  et  $f(b)$ , il existe un réel  $c$  compris entre  $a$  et  $b$  tel que  $d = f(c)$

### 3.8 Théorème de la bijection réciproque

THÉORÈME :

**Théorème de la bijection réciproque**

Soit  $\mathbb{I}$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  contenant au moins deux points distincts et  $f$  réalise une bijection de  $\mathbb{I}$  dans  $\mathbb{J}$

- (i) Alors  $\mathbb{J} = f(\mathbb{I})$
- (ii) —  $f^{-1}$  est une bijection de  $\mathbb{J}$  dans  $\mathbb{I}$ 
  - si  $f$  est impaire, alors  $f^{-1}$
  - $f^{-1}$  est strictement monotone sur  $\mathbb{J}$  et de même sens de variation que  $f$  sur  $\mathbb{I}$
  - $\mathcal{C}_f$  et  $\mathcal{C}_{f^{-1}}$  sont symétriques par rapport à la droite d'équation  $y = x$
  - Soit  $a$  un point de  $\mathbb{I}$  ou une extrémité éventuellement infinie de  $\mathbb{I}$ ,  $b$  un point de  $\mathbb{J}$  ou une extrémité éventuellement infinie tel que :

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} b \text{ alors, } f^{-1}(y) \xrightarrow{y \rightarrow b} a$$

- $f^{-1}$  est continue sur  $\mathbb{J}$

THÉORÈME :

Soit  $\mathbb{I}$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  contenant au moins 2 points distincts  $f : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}$  dérivable sur  $\mathbb{I}$  est strictement monotone sur  $\mathbb{I}$ , alors :

- (i)  $\mathbb{J} = f(\mathbb{I})$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$  contenant au moins deux points distincts et  $f$  réalise une bijection de  $\mathbb{I}$  dans  $\mathbb{J}$
- (ii)  $f^{-1}$  est dérivable sur tout point  $y_0 \in \mathbb{J}$  tel que  $f'(f^{-1}(y_0)) \neq 0$  :

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$$

REMARQUE :

Avec les notations du théorème, dans le cas où  $f'$  ne s'annule pas sur  $\mathbb{I}$ , alors  $\forall y \in \mathbb{J}$ ,  $f'(f^{-1}(y)) \neq 0 \implies f^{-1}$  dérivable sur  $\mathbb{J}$