Techniques fondamentales de calcul différentiel et intégral

A) Fonctions d'une variable réelle et à valeurs réelles ou complexes

b) Dérivation, étude d'une fonction

23 septembre 2022

Table des matières

1 Domaine de définition, domaine d'étude

1.1 Domaine de définition

Afin de déterminer un domaine de définition $\mathcal{D}_f$ d'une fonction f, nous écrivons :

$$x \in \mathcal{D}_f \iff \begin{cases} \dots \\ \dots \end{cases} \iff \dots$$

1.2 Domaine d'étude

Remarque :

> Avec des considérations de périodicité, parité / imparité

2 Domaine de continuité

2.1 Limite d'une fonction en un point

2.2 Continuité en un point, continuité sur un intervalle

Définition :

> Soit $f : \mathbb{I} \to \mathbb{R}$, a un point de $\mathbb{I}$
> On dit que f est **continue en a** si et seulement si :
>
> $$f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} f(a)$$

Définition :

> Soit $f : \mathbb{I} \to \mathbb{R}$.
> On dit que f est **continue sur $\mathbb{I}$** si et seulement si pour tout $a \in \mathbb{I}$, f est continue en a.
> L'ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{I}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ se note $\mathcal{C}(\mathbb{I}, \mathbb{R})$

Exemples usuels :

> (i) Les fonctions polynômiales sont continues sur $\mathbb{R}$
> (ii) La fonction $\sqrt{x}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$
> (iii) La fonction exp est continue sur $\mathbb{R}$
> (iv) La fonction ln est continue sur $\mathbb{R}_+^*$
> (v) Les fonctions sin et cos sont continues sur $\mathbb{R}$

Propriété :

Soit $f, g : \mathbb{I} \to \mathbb{R}$ continues sur $\mathbb{I}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, alors :
— $f+g$, $\lambda \cdot f$, $f \times g$ sont continues sur $\mathbb{I}$
— en supposant que g ne s'annule pas sur $\mathbb{I}$, $\frac{f}{g}$ est continue sur $\mathbb{I}$

Propriété :

Soit $f : \mathbb{I} \to \mathbb{R}$ continue sur $\mathbb{I}$, $g : \mathbb{J} \to \mathbb{R}$ continue sur $\mathbb{J}$ tel que $f(\mathbb{I}) = \mathbb{J}$
Alors $g \circ f$ est continue sur $\mathbb{I}$

3 Domaine de dérivabilité et tableau de variations

3.1 Dérivée d'une fonction en un point

Soit $f : \mathbb{I} \to \mathbb{R}$, a un point de $\mathbb{I}$
Le taux d'accroissement est donné par :

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Définition :

Soit $f : \mathbb{I} \to \mathbb{R}$, a un point de $\mathbb{I}$, on dit que f est **dérivable en a** si et seulement si l'application à une limite :

$$\tau_q : \mathbb{I} - \{a\} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Cette limite est appelée **nombre dérivé** de f en a et se note $f'(a)$

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Définition :

Soit $f : \mathbb{I} \to \mathbb{R}$, a un point de $\mathbb{I}$ en lequel f est dérivable.
Alors la droite d'équation $y = f'(a)(x-a) + f(a)$ est appelée la **tangante** à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a

Définition :

Soit $f : \mathbb{I} \to \mathbb{R}$, on dit que f est **dérivable sur $\mathbb{I}$** si et seulement si f est dérivable en tout point de $\mathbb{I}$. L'ensemble des fonctions dérivables sur $\mathbb{I}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ se note $\mathcal{D}(\mathbb{I}, \mathbb{R})$

Exemples usuels :

(i) Les fonctions polynômiales sont dérivables sur $\mathbb{R}$
(ii) La fonction $\sqrt{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$
(iii) La fonction exp est dérivable sur $\mathbb{R}$
(iv) La fonction ln est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$
(v) Les fonctions sin et cos sont dérivables sur $\mathbb{R}$

Propriété :

Soit $f, g : \mathbb{I} \to \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}$

(i) $f + g$ est dérivable sur $\mathbb{I}$ et $(f+g)' = f' + g'$
(ii) $\lambda \cdot f$ est dérivable sur $\mathbb{I}$ et $(\lambda \cdot f)' = \lambda \cdot f'$
(iii) $f \times g$ est dérivable sur $\mathbb{I}$ et $(f \times g)' = f'g + g'f$
(iv) en supposant que g ne s'annule pas sur $\mathbb{I}$, $\frac{f}{g}$ est dérivable sur $\mathbb{I}$ et $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2}$

Propriété :

Soit $f : \mathbb{I} \to \mathbb{R}$ dérivable sur $\mathbb{I}$, $g : \mathbb{J} \to \mathbb{R}$ dérivable sur $\mathbb{J}$ tel que $f(\mathbb{I}) \subset \mathbb{J}$
Alors $g \circ f$ est dérivable sur $\mathbb{I}$ et $(g \circ f)' = (g' \circ f) \times f'$

3.2 Domaine de dérivabilité

Nous avons une fonction f d'une variable réelle et nous avons déterminé son domaine de définition $\mathcal{D}_f$. Nous voulons maintenant étudier sa dérivabilité.

Remarque :

Etant donnée une fonction f :

(i) Lors de la recherche du domaine de définition :

$$\text{" } x \in \mathcal{D}_f \iff \text{... donc } \mathcal{D}_f = \text{... "}$$

(ii) Lors de la recherche du domaine de continuité ou de dérivabilité :

" f est dérivable sur x tel que ... donc f est dérivable sur ...

Retenons que les propriétés générales donnent des conditions <u>suffisantes</u> de continuité ou de dérivation et non pas des conditions <u>nécéssaires</u>

3.3 Dérivation des opérations

Propriétés :

Soit $f, g : \mathbb{I} \to \mathbb{K}$ dérivables sur $\mathbb{I}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$:

(i) La dérivée d'une combinaison linéaire est donnée par :

$$(\alpha f + \beta f)' = \alpha f' + \beta f'$$

(ii) La dérivée d'un produit est donnée par :

$$(f \times g)' = f'g + g'f$$

(iii) La dérivée d'un quotient est donnée par :

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2}$$

(iv) La dérivée d'une composée est donnée par :

$$(g \circ f)' = f' \times (g' \circ f)$$

Soit $f : \mathbb{I} \to \mathbb{J}$ bijective et f^{-1} sa bijection réciproque, alors

$$\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $f_i : \mathbb{I} \to \mathbb{K}$ dérivable sur $\mathbb{I}$, alors :

$$\left(\prod_{i=0}^{n} f_i\right)' = \sum_{i=1}^{n}\left(\left(\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} f_k\right) \times f_i'\right)$$

4 Etude des bornes infinies

Plusieurs situations se présentent :

— $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \pm\infty,\ a \in \mathbb{R}$
Admet la droite d'équation $\Delta : x = a$ comme **asymptote verticale**

— $\lim\limits_{x \to \pm\infty} = b,\ b \in \mathbb{R}$
Admet une droite d'équation $y = b$ comme **asymptote horizontale**

DÉFINITION

Soit f, g deux fonctions d'une variable réelle
Nous disons que les courbes représentatives de f et g sont **asymptotes** au voisinage de $\pm\infty$ si et seulement si $f(x) - g(x) \underset{x \to \pm\infty}{\longrightarrow} 0$

— $f(x) - (ax + b) \underset{x \to \pm\infty}{\longrightarrow} 0$
Admet une droite d'équation $y = ax + b$ comme **asymptote oblique**

La recherche d'une asymptote oblique admet que $f(x) \underset{x \to \infty}{\longrightarrow} \pm\infty$

En supposant qu'il existe a, b non nuls tels que :

$$f(x) - (ax + b) \underset{x \to \pm\infty}{\longrightarrow} 0$$

Soit x variant au voisinage de $\pm\infty$

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{f(x) - (ax + b) + ax + b}{x} = \frac{f(x) - (ax + b)}{x} + a + \frac{b}{x} \underset{x \to \infty}{\longrightarrow} a$$

En connaissant a :

$$f(x) - ax = f(x) - (ax + b) + b \underset{x \to \pm\infty}{\longrightarrow} b$$

Completons les différentes situations :

— $\underset{x \to \pm\infty}{lim} = \pm\infty$

Nous étudions alors $\underset{x \to \pm\infty}{lim} \frac{f(x)}{x}$:

(i) $\underset{x \to \pm\infty}{lim} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty$, présence d'une **branche parabolique d'axe** (Oy)

(ii) $\underset{x \to \pm\infty}{lim} \frac{f(x)}{x} = 0$, présence d'une **branche parabolique d'axe** (Ox)

(iii) $\underset{x \to \pm\infty}{lim} \frac{f(x)}{x} = a \in \mathbb{R}^*$

Nous étudions alors $\underset{x \to \pm\infty}{lim} f(x) = ax$:

(a) $\underset{x \to \pm\infty}{lim} f(x) - ax = \pm\infty$, **branche parabolique d'axe** $\Delta : y = ax$

(b) $\underset{x \to \pm\infty}{lim} f(x) - ax = b \in \mathbb{R}$, présence d'une **droite asymptote d'équation** $y = ax + b$

5 Représentation graphique de la fonction

La courbe en rouge, les tangantes en vert, les asymptotes en bleu

6 Dérivée d'ordre supérieur

6.1 Définition

DÉFINITION :

> Soit $f : \mathbb{I} \to \mathbb{K}$
>
> (i) Par définition, f est 0-fois dérivable sur $\mathbb{I}$ et nous définissons sa dérivée 0-ième par $f^{(0)} = f$
>
> (ii) Soit $n \in \mathbb{N}$, nous supposons avoir défini la dérivabilité même de f sur $\mathbb{I}$ notée $f^{(n)}$

6.2 Exemples usuels

(i) $\forall n \in \mathbb{N}$, exp n-fois dérivable et $exp^{(n)} = exp$

(ii) Soit $p \in \mathbb{N}$, notons $f : x \mapsto x^p$, alors f indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f^{(n)}(x) = \frac{p!}{(p-n)!}x^{p-n}$$

(iii) $f : x \mapsto \frac{1}{x}$:

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, f^{(n)}(x) = \frac{n!(-1)^n}{x^{n+1}}$$

(iv) $f : x \mapsto sin(x)$

$$\forall k \in \mathbb{N}, \begin{cases} sin^{(2k)} = (-1)^k sin \\ sin^{(2k+1)} = (-1)^k cos \end{cases}$$

6.3 Fonction de classe $\mathcal{C}^n$, $\mathcal{C}^\infty$

DÉFINITION :

Soit $f : \mathbb{I} \to \mathbb{K}$

(i) On dit que f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{I}$ si et seulement si :

$$\begin{cases} f \text{ est } n \text{ fois dérivable sur } \mathbb{I} \\ f^{(n)} \text{ est continue sur } \mathbb{I} \end{cases}$$

(ii) On dit que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N}, f$ est de classe $\mathcal{C}^n$

EXEMPLES USUELS :

(i) Les fonctions polynômiales sont de classe $\mathcal{C}^\infty sur \mathbb{R}$

(ii) La fonction $\sqrt{x}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$

(iii) La fonction $\frac{1}{x}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_-^*$ et sur $\mathbb{R}_+^*$

(iv) La fonction exp est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$

(v) La fonction ln est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$

(vi) Les fonctions cos et sin sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$

6.4 Propriétés

PROPRIÉTÉ :

Soit $n \in \mathbb{N}$, $f, g : \mathbb{I} \to \mathbb{K}$ de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{I}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, alors

— $\alpha f + \beta g$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{I}$ et $(\alpha f + \beta g)^{(n)} = \alpha f^{(n)} + \beta g^{(n)}$

— $f \times g$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{I}$

— $\frac{f}{g}$ est de classe $\mathcal{C}^n$ (avec g qui ne s'annule pas sur $\mathbb{I}$)

Soit $n \in \mathbb{N}$, $f : \mathbb{I} \to \mathbb{K}$ de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{I}$, $g : \mathbb{J} \to \mathbb{K}$ de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{J}$ tel que $f(\mathbb{I}) \subset \mathbb{J}$, alors $(g \circ f)$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{I}$