Techniques fondamentales de calcul différentiel et intégral

Fonctions d'une variable réelle à valeurs réelles ou complexes

16 septembre 2022

Table des matières

1 Généralités sur les fonctions

Dans la suite, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $\mathbb{X}$ une partie non vide de $\mathbb{R}$

1.1 Application et/ou fonction

DÉFINITION :

> Une **application** est définie par la donnée de 3 élements :
> 1. Un ensemble $\mathbb{E}$ non vide dit *ensemble de départ*
> 2. Un ensemble $\mathbb{F}$ non vide dit *ensemble d'arrivée*
> 3. Une correspondance qui a tout element de $\mathbb{E}$ associe un, et un seul, element de $\mathbb{F}$

DÉFINITION :

> Une **fonction** est définie par la donnée de 3 élements :
> 1. Un ensemble $\mathbb{E}$ non vide dit *ensemble de départ*
> 2. Un ensemble $\mathbb{F}$ non vide dit *ensemble d'arrivée*
> 3. Une correspondance qui a tout element de $\mathbb{E}$ associé au plus un element de $\mathbb{F}$

L'ensemble des applications et fonctions de $\mathbb{E}$ dans $\mathbb{F}$ se note $\mathbb{F}^{\mathbb{E}}$

1.2 Fonctions particulières

(i) Fonctions nulles : $f : \mathbb{K} \to \mathbb{K},\ x \mapsto 0$

(ii) Fonctions constantes : $\exists a \in \mathbb{K},\ f : \mathbb{K} \to \mathbb{K},\ x \mapsto a$

(iii) Fonctions affines : $\exists (a,b) \in \mathbb{K}^2,\ f : \mathbb{K} \to \mathbb{K},\ x \mapsto ax+b$

(iv) Fonctions homographiques :

$$\exists (a,b,c,d) \in \mathbb{K}^4 \begin{cases} c \neq 0 \\ ad - bc \neq 0 \end{cases},\ f : \mathbb{K} - \left\{\frac{-c}{d}\right\} \to \mathbb{K},\ x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$$

(v) Fonctions polynomiales :

$$P \in \mathbb{K}[X],\ f : \mathbb{K} \to \mathbb{K},\ x \mapsto P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

(vi) Fonctions rationnelles :

$$P, Q \in \mathbb{K}[X],\ f : \mathbb{K} \to \mathbb{K},\ x \mapsto \frac{P(x)}{Q(x)}$$

1.3 Image et antécédent

DÉFINITION :

Soit $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$ deux ensembles non vides, f une applicaiton de $\mathbb{F}$

Soit x un element de $\mathbb{E}$, la correspondance associée à f associe à x un, et un seul, élement de $\mathbb{F}$ appelée **image** de f

Soit $y \in \mathbb{F}$, on appelle **antécédent** de y par f, tout element dont l'image par f est y

1.4 Ensemble de définition d'une fonction

On appelle **ensemble de définition** de f l'ensemble des elements de $\mathbb{E}$ qui ont une image dans $\mathbb{F}$ par f, il est noté $\mathcal{D}_f$

DÉFINITION :

Soit $\mathbb{E}$, $\mathbb{F}$ deux ensembles non vides et $f : \mathbb{E} \to \mathbb{F}$

On appelle **graphe de f** l'ensemble

$$\{(x,\ f(x)),\ x \in \mathcal{D}_f\}$$

1.5 Restriction d'une application

REMARQUE :

Deux applications (ou fonctions) sont égales si et seulement si elles ont :

— un même ensemble de départ

— un même ensemble d'arrivée

— une même correspondance

DÉFINITION :

Soit $\mathbb{E}$, $\mathbb{F}$ deux ensembles non vides, $f : \mathbb{E} \to \mathbb{F}$, $\mathbb{E}_1$ une partie non vide de $\mathbb{E}$

On appelle **restriction** de f à $\mathbb{E}_1$ la fonction notée $f_{|\mathbb{E}_1} : \mathbb{E}_1 \to \mathbb{F}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{E}_1,\ f_{|\mathbb{E}_1}(x) = f(x)$$

1.6 Composée de deux fonctions

DÉFINITION :

Soit $\mathbb{E}$, $\mathbb{F}$, $\mathbb{G}$ trois ensembles non vides, $f : \mathbb{E} \to \mathbb{F}$, $g : \mathbb{F} \to \mathbb{G}$

Nous pouvons définir une application de $\mathbb{E}$ dans $\mathbb{G}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{E},\ (g \circ f)(x) = g(f(x))$$

DÉFINITION :

Soit $\mathbb{E}$ un ensemble non vide, nous pouvons définir **application identité** de $\mathbb{E}$ notée $id_{\mathbb{E}}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{E},\ id_{\mathbb{E}}(x) = x$$

Propriété :

Soit $\mathbb{E}$, $\mathbb{F}$ deux ensembles non vides, $f : \mathbb{E} \to \mathbb{F}$, alors :

$$\begin{cases} f \circ id_{\mathbb{E}} = f \\ id_{\mathbb{F}} \circ f = f \end{cases}$$

2 Cas des fonctions d'une variable réelle à valeurs réelles ou complexes

2.1 Représentation graphique d'une fonction à valeurs réelles

Soit f une fonction de $\mathbb{X}$ dans $\mathbb{R}$. Nous munissons le plan usuel d'un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$

La représentation se note souvent $\mathcal{C}_f$

2.2 Somme, produit, quotient, composée de fonctions

(i) Somme : Soit $f,\ g : \mathbb{X} \to \mathbb{K}$:

$$f + g : \mathbb{X} \to \mathbb{K}$$

$$\forall x \in \mathbb{X}, (f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

(ii) Produit : Soit $f,\ g : \mathbb{X} \to \mathbb{K}$:

$$f \times g : \mathbb{X} \to \mathbb{K}$$

$$\forall x \in \mathbb{X},\ (f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$$

(iii) Produit par un réel : Soit $\lambda \in \mathbb{K}$:

$$\lambda \cdot f : \mathbb{X} \to \mathbb{K}$$

$$\forall x \in \mathbb{X},\ (\lambda \cdot f)(x) = \lambda \times f(x)$$

(iv) Quotient : Soit $f,\ g : \mathbb{X} \to \mathbb{K}$ telles que nous pouvons définir la fonction quotient $\frac{f}{g}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{X},\ \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

(v) Composition de fonctions : Soit $\mathbb{Y}$ une partie non vide de $\mathbb{R}$, $f : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{Y} \to \mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{X},\ f(x) \in \mathbb{Y} \text{ ou } f(\mathbb{X}) \subset \mathbb{Y}$$

Nous pouvons définir la composée $(g \circ f)$ par :

$$\forall x \in \mathbb{X},\ (g \circ f)(x) = g(f(x))$$

Propriété :

<u>**Le groupe commutatif**</u> $(\mathbb{K}^{\mathbb{X}},\ +)$:

— L'addition est une <u>loi de composition interne</u> dans $\mathbb{K}^{\mathbb{X}}$, c'est-à-dire :

$$\forall f \in \mathbb{K}^{\mathbb{X}},\ \forall g \in \mathbb{K}^{\mathbb{X}},\ f+g \in \mathbb{K}^{\mathbb{X}}$$

— L'addition est <u>associative</u> dans $\mathbb{K}^{\mathbb{X}}$, c'est-à-dire :

$$\forall (f,g,h) \in \left(\mathbb{K}^3\right),\ f+(g+h) = (f+g)+h$$

— L'addition admet <u>un élement neutre</u> dans $\mathbb{K}^{\mathbb{X}}$

— Toute fonction $f : \mathbb{X} \to \mathbb{K}$ est <u>symétrisable</u> pour l'addition dans $\mathbb{K}^{\mathbb{X}}$, c'est-à-dire :

$$\forall f \in \mathbb{K}^{\mathbb{X}},\ \exists g : \mathbb{X} \to \mathbb{K},\ \text{tel que } f+g = g+f = 0$$

Ces quatres points se résument en disant que $(\mathbb{K}^{\mathbb{X}},\ +)$ est un <u>**groupe**</u>

— L'addition est <u>commutative</u> dans $\mathbb{K}^{\mathbb{X}}$, c'est-à-dire :

$$\forall (f,g) \in \left(\mathbb{K}^{\mathbb{X}}\right)^2,\ f+g = g+f$$

Ce dernier point permet d'ajouter que $(\mathbb{K}^{\mathbb{X}},\ +)$ est un <u>**groupe commutatif**</u>

<u>**L'anneau commutatif**</u> $(\mathbb{K}^{\mathbb{X}},\ +,\ \times)$:

De plus, la multiplication est distributive par rapport à l'addition dans $\mathbb{K}^{\mathbb{X}}$ c'est-à-dire :

$$\forall (f,g,h) \in \left(\mathbb{K}^3\right),$$

$$\begin{cases} (f+g)\times h = (f\times h)+(g\times h) \\ f\times(g+h) = (f\times g)+(f\times h) \end{cases}$$

2.3 Fonctions paires, impaires, périodiques

Définition :

Soit $f : \mathbb{X} \to \mathbb{K}$

(i) On dit que f est <u>**paire**</u> <u>si et seulement si</u> :

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{X},\ -x \in \mathbb{X} \\ \forall x \in \mathbb{X},\ f(-x) = f(x) \end{cases}$$

(ii) On dit que f est <u>**impaire**</u> <u>si et seulement si</u> :

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{X},\ -x \in \mathbb{X} \\ \forall x \in \mathbb{X}, f(-x) = -f(x) \end{cases}$$

Propriété :

Soit $\mathbb{Y}$ une partie non vide de $\mathbb{R}$, $f : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{Y} \to \mathbb{K}$ tel que $f(x) \subset \mathbb{Y}$

(i) en supposant f paire, alors $g \circ f$ est paire

(ii) en supposant f et g impaires, alors $g \circ f$ est impaire

(iii) en supposant f impaire et g paire alors $g \circ f$ est paire

Définition :

Soit $f : \mathbb{X} \to \mathbb{K}$, $T \in \mathbb{R}_+^*$
On dit que f est <u>**périodique**</u> de période T <u>si et seulement si</u> :

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{X},\ \forall k \in \mathbb{Z},\ x + kT \in \mathbb{X} \\ \forall x \in \mathbb{X}, f(x+T) = f(x) \end{cases}$$

2.4 Ordre sur l'ensemble des fonctions à valeurs réelles

2.4.1 Ordre sur $\mathbb{R}^{\mathbb{X}}$

Définition :

Soit $f, g : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$, alors :

$$f \leq g \iff \forall x \in \mathbb{X},\ f(x) \leq g(x)$$

Propriété :

(i) Soit $f : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$, alors $f \leq f$
On dit que $\leq$ est <u>**reflexive**</u> dans $\mathbb{R}^{\mathbb{X}}$

(ii) Soit $f, g : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$, alors :

$$\begin{cases} f \leq g \\ g \leq f \end{cases} \iff f = g$$

On dit que $\leq$ est <u>**anti-symétrique**</u> sur $\mathbb{R}^{\mathbb{X}}$

(iii) Soit $f, g, h : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ alors :

$$\left.\begin{matrix} f \leq g \\ g \leq h \end{matrix}\right\} \implies f \leq h$$

On dit que $\leq$ est <u>**transitif**</u> sur $\mathbb{R}^{\mathbb{X}}$

(iv) Ces 3 points se résument en disant que $\leq$ est une <u>**relation d'ordre**</u> sur $\mathbb{R}^{\mathbb{X}}$

Remarque :

Nous avons cependant une différence entre la relation $\leq$ sur $\mathbb{R}$ et la relation $\leq$ sur $\mathbb{R}^{\mathbb{X}}$

(i) Soit 2 réels a et b, soit $(a \leq b)$ soit $(b \leq a)$
La relation est dite **totale**

(ii) Soit 2 fonctions $f, g : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$, on a pas forcément $f \leq g$ ou $f \geq g$
La relation $\leq$ est dite **partielle** sur $\mathbb{R}^{\mathbb{X}}$

(iii) Etant donné x réel, la discussion $x \leq 0$ et $x \geq 0$ est exhaustive.
Et du fait de l'ordre partiel sur $\mathbb{R}^{\mathbb{X}}$, étant donné $f : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ la discussion $f \leq 0$ et $f \geq 0$ ne traite pas tous les cas

2.4.2 Ordre strict sur $\mathbb{R}^{\mathbb{X}}$

DÉFINITION :

Soit $f, g : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$, alors

$$f < g \iff \forall x \in \mathbb{X},\ f(x) < g(x)$$

2.5 Quelques fonctions particulières

(i) Soit $f : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$, nous définissions les fonctions :

$$|f| : \mathbb{X} \to \mathbb{R},\ x \mapsto (|f|)(x) = |f(x)|$$

$$f^+ : \mathbb{X} \to \mathbb{R},\ x \mapsto f^+(x) = \begin{cases} f(x) \text{ si } f(x) \geq 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

$$f^- : \mathbb{X} \to \mathbb{R},\ x \mapsto f^-(x) = \begin{cases} -f(x) \text{ si } f(x) \leq 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

(ii) Soit $f, g : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$

$$max(f, g) : \mathbb{X} \to \mathbb{R},\ x \mapsto max(f(x), g(x))$$

$$min(f, g) : \mathbb{X} \to \mathbb{R},\ x \mapsto min(f(x), g(x))$$

Alors $max(f, g) \geq f \geq min(f, g)$ et

$$max(f, g) + min(f, g) = f + g$$

$$max(f, g) + min(f, g) = |f - g|$$

Donc $max(f, g) = \frac{f+g+|f-g|}{2}$ et $min(f, g) = \frac{f+g-|f-g|}{2}$

2.6 Les fonctions lipschitziennes

DÉFINITION :

Soit $f : \mathbb{X} : \mathbb{K}, k \in \mathbb{R}_+$, on dit que f est **lipschitzienne** sur $\mathbb{X}$ de rapport k si et seulement si :

$$\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{X}^2,\ |f(x_1) - f(x_2)| \leq k|x_1 - x_2|$$

Remarque :

Soit $k \in \mathbb{R}_+,\ f : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$, k-lipschitzienne sur $\mathbb{X}$, alors :

$$\left| \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \right| \leq k$$

Propriété :

Soit $k, l \in \mathbb{R}^+,\ f, g : \mathbb{X} \to \mathbb{K}$ tel que :

$$\begin{cases} f \text{ est } k\text{-lipschitzienne sur } \mathbb{X} \\ g \text{ est } l\text{-lipschitzienne sur } \mathbb{X} \end{cases}$$

(i) Alors $f + g$ est $(k + l)$-lipschitzienne sur $\mathbb{X}$
(ii) Soit $\lambda \in \mathbb{K}$, alors $\lambda \cdot f$ est $|\lambda|k$-lipschitzienne sur $\mathbb{X}$
(iii) Soit $\mathbb{X}_1$ une partie non vide de $\mathbb{X}$ alors $f_{|\mathbb{X}_1}$

Définition :

Soit $f : \mathbb{X} \to \mathbb{K}$:
On dit que f est **contractante** sur $\mathbb{X}$ si et seulement si il existe $k \in [0; 1[$ tel que f soit k-litschitzienne sur $\mathbb{X}$, c'est à dire :

$$\exists k \in [0; 1[,\ \forall (x_1, x2) \in \mathbb{X}^2,\ |f(x_1) - f(x_2)| \leq k|x_1 - x_2|$$

2.7 Majorant, maximum, borne supérieure d'une fonction à valeurs réelles

2.7.1 Majorant, minorant d'une fonction

Définition :

(i) On appelle **majorant** de f sur $\mathbb{X}$, tout réel M tel que :

$$\forall x \in \mathbb{X},\ f(x) \leq M$$

(ii) On appelle **minorant** de f sur $\mathbb{X}$, tout réel m tel que :

$$\forall x \in \mathbb{X},\ m \leq f(x)$$

DÉFINITION :

Soit $f : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$

(i) On dit que f est **majorée** sur $\mathbb{X}$ si et seulement si f admet un majorant sur $\mathbb{X}$, c'est à dire :

$$(\exists M \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{X})(f(x) \leq M)$$

(ii) On dit que f est **manorée** sur $\mathbb{X}$ si et seulement si f admet un minorant sur $\mathbb{X}$, c'est à dire :

$$(\exists m \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{X})(f(x) \geq m)$$

(iii) On dit que f est **bornée** sur $\mathbb{X}$ si et seulement si f est majorée et minorée sur $\mathbb{X}$, c'est à dire :

$$\exists (m, M) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in \mathbb{X},\ m \leq f(x) \leq M$$

2.7.2 Maximum, minimum d'une fonction

DÉFINITION :

Soit $f : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$, a un point de $\mathbb{X}$

(i) On dit que f présente un **maximum** en a si et seulement si :

$$\forall x \in \mathbb{X},\ f(x) \leq f(a)$$

(ii) On dit que f présente un **minimum** en a si et seulement si :

$$\forall x \in \mathbb{X},\ f(x) \geq f(a)$$

(iii) On dit que f présente un **extremum** en en a si et seulement si f présente un maximum ou un minimum en a

DÉFINITION :

Soit $f : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$, a un point de $\mathbb{X}$ en lequel f présente un maximum, alors :

(i) $f(a)$ est un **majorant** de f sur $\mathbb{X}$

(ii) $f(a)$ est appellée le maximum de f sur $\mathbb{X}$ et se note $\underset{\mathbb{X}}{max}\ f$ ou $\underset{x \in \mathbb{X}}{max}\ f(x)$

DÉFINITION :

Soit $f : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$, a un point de $\mathbb{X}$ en lequel f présente un minimum, alors :

(i) $f(a)$ est un **minorant** de f sur $\mathbb{X}$

(ii) $f(a)$ est appellée le minimum de f sur $\mathbb{X}$ et se note $\underset{\mathbb{X}}{min}\ f$ ou $\underset{x \in \mathbb{X}}{min}\ f(x)$

2.8 Monotonie large et stricte d'une fonction à valeurs réelles

Définition :

Soit $f : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$

(i) On dit que f est **croissante** sur $\mathbb{X}$ si et seulement si :

$$\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{X}^2,\ x_1 \leq x_2 \implies f(x_1) \leq f(x_2)$$

(ii) On dit que f est **décroissante** sur $\mathbb{X}$ si et seulement si :

$$\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{X}^2,\ x_1 \leq x_2 \implies f(x_1) \geq f(x_2)$$

(iii) On dit que f est **monotone** sur $\mathbb{X}$ si et seulement si f est croissante ou décroissante sur $\mathbb{X}$

Définition :

Soit $f : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$

(i) On dit que f est **strictement croissante** sur $\mathbb{X}$ si et seulement si :

$$\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{X}^2,\ x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2)$$

(ii) On dit que f est **strictement décroissante** sur $\mathbb{X}$ si et seulement si :

$$\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{X}^2,\ x_1 < x_2 \implies f(x_1) > f(x_2)$$

(iii) On dit que f est **strictement monotone** sur $\mathbb{X}$ si et seulement si f est strictement croissante ou strictement décroissante sur $\mathbb{X}$

3 Bijection et bijection réciproque

3.1 Bijection, injection, surjection

DÉFINITION :

Soit $\mathbb{E}$, $\mathbb{F}$ deux ensembles non vides, $f : \mathbb{E} \to \mathbb{F}$

(i) On dit que f est **bijective** si et seulement si tout element de $\mathbb{F}$ admet un unique antécédent par f dans $\mathbb{E}$, c'est à dire :

$$\forall y \in \mathbb{F},\ \exists! x \in \mathbb{E},\ y = f(x)$$

(ii) On dit que f est **surjective** si et seulement si tout element de $\mathbb{F}$ admet au moins un antécédent par f dans $\mathbb{E}$, c'est à dire :

$$\forall y \in \mathbb{F},\ \exists x \in \mathbb{E},\ y = f(x)$$

(iii) On dit que f est **injective** si et seulement si tout element de $\mathbb{F}$ admet au plus un antécédent par f dans $\mathbb{E}$, c'est à dire :

$$(\forall y \in \mathbb{F}) \left(\exists (x_1, x_2) \in \mathbb{E}^2, \begin{cases} y = f(x_1) \\ y = f(x_2) \end{cases} \right) \implies (y = f(x))$$

3.2 Bijection réciproque

Définition :

Soit $\mathbb{E}$, $\mathbb{F}$ deux ensembles non vides, f une bijection de $\mathbb{E}$ dans $\mathbb{F}$ alors la correspondance qui a tout element de $\mathbb{F}$ associe son unique antécédent dans $\mathbb{E}$ nous défini une application de $\mathbb{E}$ dans $\mathbb{F}$ notée f^{-1} appelée **bijection réciproque de f**

$$\forall x \in \mathbb{E},\ y \in \mathbb{F},\ x = f^{-1}(y) \iff y = f(x)$$

Propriété :

Soit $\mathbb{E}$, $\mathbb{F}$ deux ensembles non vides, $f : \mathbb{E} \to \mathbb{F}$, alors :

$$f^{-1} \circ f = id_{\mathbb{E}},\ f \circ f^{-1} = id_{\mathbb{F}}$$

3.3 Propriétés

Propriété

Soit $\mathbb{E}$, $\mathbb{F}$ deux ensembles non vides, $f : \mathbb{E} \to \mathbb{F}$ bijective, alors $f^{-1} : \mathbb{F} \to \mathbb{E}$ est bijective et $\left(f^{-1}\right)^{-1} = f$

Propriété

Soit $\mathbb{E}$, $\mathbb{F}$, $\mathbb{G}$ trois ensembles non vides, f une bijective de $\mathbb{E}$ dans $\mathbb{F}$, g une bijective de $\mathbb{F}$ dans $\mathbb{G}$

Alors $g \circ f$ réalise une bijection de $\mathbb{E}$ dans $\mathbb{G}$ et $(g \circ f) = f^{-1} \circ g^{-1}$

Propriété

Soit $\mathbb{E}$, $\mathbb{F}$ deux ensembles non vides, $f : \mathbb{E} \to \mathbb{F}$. Les assertions suivantes sont equivalentes

— f est bijective

— Il existe $g : \mathbb{F} \to \mathbb{E}$ tel que :

$$\begin{cases} g \circ f = id_{\mathbb{E}} \\ f \circ g = id_{\mathbb{F}} \end{cases}$$

3.4 Imparité de la réciproque d'une bijection impaire

PROPRIÉTÉ :

Soit $\mathbb{Y}$ une partie non vide de $\mathbb{R}$, $f : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ bijective et impaire
Alors f^{-1} impaire

3.5 Stricte monotonie d'une bijection réciproque d'une bijection strictement monotone

PROPRIÉTÉ :

Soit $\mathbb{Y}$ une partie non vide de $\mathbb{R}$, alors $f : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ bijective et strictement monotone sur $\mathbb{X}$
Alors, f' est strictement monotone sur $\mathbb{Y}$ et de même sens de variation

3.6 Représentation graphique de la réciproque d'une bijection

$\mathcal{C}_{f^{-1}}$ est le symétrique de $\mathcal{C}_f$ par rapport à la droite d'équation $y = x$

3.7 Théorème de la bijection

THÉORÈME

Théorème de la bijection :
Soit $\mathbb{I}$ un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant au moins 2 points différents, $f : \mathbb{I} \to \mathbb{R}$ continue sur $\mathbb{I}$ et strictement monotone sur $\mathbb{I}$
Alors $\mathbb{J} = f(\mathbb{I})$ est un intervalle de $\mathbb{R}$ et f réalise une bijection de $\mathbb{I}$ dans $\mathbb{J}$:

$$\forall y \in \mathbb{J},\ \exists ! x \in \mathbb{I},\ y = f(x)$$

REMARQUE

Soit $f : \mathbb{I} \to \mathbb{R}$, continue et strictement monotone sur $\mathbb{I}$

(i) La continuité de f assure le fait que $\mathbb{J}$ soit un intervalle de $\mathbb{R}$
(ii) le fait de considérer f allant de $\mathbb{I}$ dans $\mathbb{J} = f(\mathbb{I})$ assure la surjectivité de f
(iii) La stricte monotonie de f sur $\mathbb{I}$ assure l'injectivité de f

REMARQUE :

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ continue sur } \mathbb{I} \\ f \text{ strictement monotone} \\ \mathbb{J} = f(\mathbb{I}) \end{array}\right\} \Longrightarrow f \text{ réalise une bijection de } \mathbb{I} \text{ dans } \mathbb{J}$$

Les conditions sont **suffisantes** pour amener la conclusion

Théorème :

Théorème des valeurs intermédiaires
Soit $\mathbb{I}$ un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant au moins deux 2 points distincts, $f : \mathbb{I} \to \mathbb{R}$ continue sur $\mathbb{I}$, $a, b \in \mathbb{I}$

Alors, pour tout réel d compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe un réel c compris entre a et b tel que $d = f(c)$

3.8 Théorème de la bijection réciproque

Théorème :

Théorème de la bijection réciproque
Soit $\mathbb{I}$ un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant au moins deux 2 points distincts et f réalise une bijection de $\mathbb{I}$ dans $\mathbb{J}$

(i) Alors $\mathbb{J} = f(\mathbb{I})$

(ii)
- f^{-1} est une bijection de $\mathbb{J}$ dans $\mathbb{I}$
- si f est impaire, alors f^{-1}
- f^{-1} est strictement monotone sur $\mathbb{J}$ et de même sens de variation que f sur $\mathbb{I}$
- $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_{f^{-1}}$ sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$
- Soit a un point de $\mathbb{I}$ ou une extrémité éventuellement infinie de $\mathbb{I}$, b un point de $\mathbb{J}$ ou une extrémité eventuellement infinie tel que :

$$f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} b \text{ alors, } f^{-1}(y) \underset{y \to b}{\longrightarrow} a$$

- f^{-1} est continue sur $\mathbb{J}$

Théorème :

Soit $\mathbb{I}$ un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant au moins 2 points distincts $f : \mathbb{I} \to \mathbb{R}$ dérivable sur $\mathbb{I}$ est strictement monotone sur $\mathbb{I}$, alors :

(i) $\mathbb{J} = f(\mathbb{I})$ est une inervalle de $\mathbb{R}$ contenant au moins deux points distincts et f réalise une bijection de $\mathbb{I}$ dans $\mathbb{J}$

(ii) f^{-1} est dérivable sur tout point $y_0 \in \mathbb{J}$ tel que $f'\left(f^{-1}(y_0)\right) \neq 0$:

$$(f^{-1})(y_0) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(y_0)\right)}$$

Remarque :

Avec les notations du théorème, dans le cas où f' ne s'annule pas sur $\mathbb{I}$, alors $\forall y \in \mathbb{J},\ f'\left(f^{-1}(0)\right) \implies f^{-1}$ dérivable sur $\mathbb{J}$