

Techniques fondamentales de calcul différentiel et intégral

Fonctions d'une variable réelle et à valeurs réelles ou complexes

Dérivation, étude d'une fonction

23 septembre 2022

Table des matières

1	Domaine de définition, domaine d'étude	2
1.1	Domaine de définition	2
1.2	Domaine d'étude	2
2	Domaine de continuité	2
2.1	Limite d'une fonction en un point	2
2.2	Continuité en un point, continuité sur un intervalle	2
3	Domaine de dérivabilité et tableau de variations	3
3.1	Dérivée d'une fonction en un point	3
3.2	Domaine de dérivabilité	4
3.3	Dérivation des opérations	4
4	Etude des bornes infinies	5
5	Représentation graphique de la fonction	6
6	Dérivée d'ordre supérieur	6
6.1	Définition	6
6.2	Exemples usuels	7
6.3	Fonction de classe $\mathcal{C}^n, \mathcal{C}^\infty$	7
6.4	Propriétés	7

1 Domaine de définition, domaine d'étude

1.1 Domaine de définition

Afin de déterminer un domaine de définition \mathcal{D}_f d'une fonction f , nous écrivons :

$$x \in \mathcal{D}_f \iff \left\{ \begin{array}{l} \dots \\ \dots \end{array} \right. \iff \dots$$

1.2 Domaine d'étude

REMARQUE :

■ Avec des considérations de périodicité, parité / imparité

2 Domaine de continuité

2.1 Limite d'une fonction en un point

2.2 Continuité en un point, continuité sur un intervalle

DÉFINITION :

Soit $f : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}$, a un point de \mathbb{I}

On dit que f est continue en a si et seulement si :

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} f(a)$$

DÉFINITION :

Soit $f : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}$.

On dit que f est continue sur \mathbb{I} si et seulement si pour tout $a \in \mathbb{I}$, f est continue en a .

L'ensemble des fonctions continues sur \mathbb{I} à valeurs dans \mathbb{R} se note $\mathcal{C}(\mathbb{I}, \mathbb{R})$

EXEMPLES USUELS :

- (i) Les fonctions polynômiales sont continues sur \mathbb{R}
- (ii) La fonction \sqrt{x} est continue sur \mathbb{R}_+
- (iii) La fonction \exp est continue sur \mathbb{R}
- (iv) La fonction \ln est continue sur \mathbb{R}_+^*
- (v) Les fonctions \sin et \cos sont continues sur \mathbb{R}

PROPRIÉTÉ :

Soit $f, g : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}$ continues sur \mathbb{I} , $\lambda \in \mathbb{R}$, alors :

- $f + g, \lambda \cdot f, f \times g$ sont continues sur \mathbb{I}
- en supposant que g ne s'annule pas sur \mathbb{I} , $\frac{f}{g}$ est continue sur \mathbb{I}

PROPRIÉTÉ :

Soit $f : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur \mathbb{I} , $g : \mathbb{J} \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur \mathbb{J} tel que $f(\mathbb{I}) = \mathbb{J}$
 Alors $g \circ f$ est continue sur \mathbb{I}

3 Domaine de dérivabilité et tableau de variations

3.1 Dérivée d'une fonction en un point

Soit $f : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}$, a un point de \mathbb{I}
 Le taux d'accroissement est donné par :

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

DÉFINITION :

Soit $f : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}$, a un point de \mathbb{I} , on dit que f est **dérivable en a** si et seulement si l'application à une limite :

$$\tau_q : \mathbb{I} - \{a\} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Cette limite est appelée **nombre dérivé** de f en a et se note $f'(a)$

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

DÉFINITION :

Soit $f : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}$, a un point de \mathbb{I} en lequel f est dérivable.
 Alors la droite d'équation $y = f'(a)(x - a) + f(a)$ est appelée la **tangente** à \mathcal{C}_f au point d'abscisse a

DÉFINITION :

Soit $f : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}$, on dit que f est **dérivable sur \mathbb{I}** si et seulement si f est dérivable en tout point de \mathbb{I} . L'ensemble des fonctions dérivables sur \mathbb{I} à valeurs dans \mathbb{R} se note $\mathcal{D}(\mathbb{I}, \mathbb{R})$

EXEMPLES USUELS :

- (i) Les fonctions polynômiales sont dérivables sur \mathbb{R}
- (ii) La fonction \sqrt{x} est dérivable sur \mathbb{R}_+^*
- (iii) La fonction \exp est dérivable sur \mathbb{R}
- (iv) La fonction \ln est dérivable sur \mathbb{R}_+^*
- (v) Les fonctions \sin et \cos sont dérivables sur \mathbb{R}

PROPRIÉTÉ :

Soit $f, g : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}$

- (i) $f + g$ est dérivable sur \mathbb{I} et $(f + g)' = f' + g'$
- (ii) $\lambda \cdot f$ est dérivable sur \mathbb{I} et $(\lambda \cdot f)' = \lambda \cdot f'$
- (iii) $f \times g$ est dérivable sur \mathbb{I} et $(f \times g)' = f'g + g'f$
- (iv) en supposant que g ne s'annule pas sur \mathbb{I} , $\frac{f}{g}$ est dérivable sur \mathbb{I} et

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2}$$

PROPRIÉTÉ :

Soit $f : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable sur \mathbb{I} , $g : \mathbb{J} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable sur \mathbb{J} tel que $f(\mathbb{I}) \subset \mathbb{J}$
 Alors $g \circ f$ est dérivable sur \mathbb{I} et $(g \circ f)' = (g' \circ f) \times f'$

3.2 Domaine de dérivabilité

Nous avons une fonction f d'une variable réelle et nous avons déterminé son domaine de définition \mathcal{D}_f . Nous voulons maintenant étudier sa dérivabilité.

REMARQUE :

Etant donnée une fonction f :

- (i) Lors de la recherche du domaine de définition :

$$" x \in \mathcal{D}_f \iff \dots \text{ donc } \mathcal{D}_f = \dots "$$

- (ii) Lors de la recherche du domaine de continuité ou de dérivabilité :

$$" f \text{ est dérivable sur } x \text{ tel que } \dots \text{ donc } f \text{ est dérivable sur } \dots "$$

Retenons que les propriétés générales donnent des conditions suffisantes de continuité ou de dérivation et non pas des conditions nécessaires

3.3 Dérivation des opérations

PROPRIÉTÉS :

Soit $f, g : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{K}$ dérivables sur \mathbb{I} , $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$:

(i) La dérivée d'une combinaison linéaire est donnée par :

$$(\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g'$$

(ii) La dérivée d'un produit est donnée par :

$$(f \times g)' = f'g + g'f$$

(iii) La dérivée d'un quotient est donnée par :

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2}$$

(iv) La dérivée d'une composée est donnée par :

$$(g \circ f)' = f' \times (g' \circ f)$$

Soit $f : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{J}$ bijective et f^{-1} sa bijection réciproque, alors

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $f_i : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{K}$ dérivable sur \mathbb{I} , alors :

$$\left(\prod_{i=1}^n f_i\right)' = \sum_{i=1}^n \left(\left(\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n f_k\right) \times f_i' \right)$$

4 Etude des bornes infinies

Plusieurs situations se présentent :

— $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$, $a \in \mathbb{R}$

Admet la droite d'équation $\Delta : x = a$ comme asymptote verticale

— $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = b$, $b \in \mathbb{R}$

Admet une droite d'équation $y = b$ comme asymptote horizontale

DÉFINITION

Soit f, g deux fonctions d'une variable réelle

Nous disons que les courbes représentatives de f et g sont asymptotes au voisinage de $\pm\infty$ si et seulement si $f(x) - g(x) \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} 0$

— $f(x) - (ax + b) \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} 0$

Admet une droite d'équation $y = ax + b$ comme asymptote oblique

La recherche d'une asymptote oblique admet que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \pm\infty$

En supposant qu'il existe a, b non nuls tels que :

$$f(x) - (ax + b) \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} 0$$

Soit x variant au voisinage de $\pm\infty$

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{f(x) - (ax + b) + ax + b}{x} = \frac{f(x) - (ax + b)}{x} + a + \frac{b}{x} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} a$$

En connaissant a :

$$f(x) - ax = f(x) - (ax + b) + b \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} b$$

Complétons les différentes situations :

— $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} = \pm\infty$

Nous étudions alors $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$:

- (i) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty$, présence d'une branche parabolique d'axe (Oy)
- (ii) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$, présence d'une branche parabolique d'axe (Ox)
- (iii) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = a \in \mathbb{R}^*$

Nous étudions alors $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = ax$:

- (a) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) - ax = \pm\infty$, branche parabolique d'axe $\Delta : y = ax$
- (b) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) - ax = b \in \mathbb{R}$, présence d'une droite asymptote d'équation $y = ax + b$

5 Représentation graphique de la fonction

La courbe en rouge, les tangentes en vert, les asymptotes en bleu

6 Dérivée d'ordre supérieur

6.1 Définition

DÉFINITION :

Soit $f : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{K}$

- (i) Par définition, f est 0-fois dérivable sur \mathbb{I} et nous définissons sa dérivée 0-ième par $f^{(0)} = f$
- (ii) Soit $n \in \mathbb{N}$, nous supposons avoir défini la dérivabilité même de f sur \mathbb{I} notée $f^{(n)}$

6.2 Exemples usuels

- (i) $\forall n \in \mathbb{N}$, \exp n -fois dérivable et $\exp^{(n)} = \exp$
- (ii) Soit $p \in \mathbb{N}$, notons $f : x \mapsto x^p$, alors f indéfiniment dérivable sur \mathbb{R} et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f^{(n)}(x) = \frac{p!}{(p-n)!} x^{p-n}$$

- (iii) $f : x \mapsto \frac{1}{x}$:

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, f^{(n)}(x) = \frac{n!(-1)^n}{x^{n+1}}$$

- (iv) $f : x \mapsto \sin(x)$

$$\forall k \in \mathbb{N}, \begin{cases} \sin^{(2k)} = (-1)^k \sin \\ \sin^{(2k+1)} = (-1)^k \cos \end{cases}$$

6.3 Fonction de classe \mathcal{C}^n , \mathcal{C}^∞

DÉFINITION :

Soit $f : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{K}$

- (i) On dit que f est de classe \mathcal{C}^n sur \mathbb{I} si et seulement si :

$$\begin{cases} f \text{ est } n \text{ fois dérivable sur } \mathbb{I} \\ f^{(n)} \text{ est continue sur } \mathbb{I} \end{cases}$$

- (ii) On dit que f est de classe \mathcal{C}^∞ si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N}$, f est de classe \mathcal{C}^n

EXEMPLES USUELS :

- (i) Les fonctions polynômiales sont de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}
- (ii) La fonction \sqrt{x} est continue sur \mathbb{R}_+ et de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}_+^*
- (iii) La fonction $\frac{1}{x}$ est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}_-^* et sur \mathbb{R}_+^*
- (iv) La fonction \exp est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}
- (v) La fonction \ln est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}_+^*
- (vi) Les fonctions \cos et \sin sont de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}

6.4 Propriétés

PROPRIÉTÉ :

- Soit $n \in \mathbb{N}$, $f, g : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{K}$ de classe \mathcal{C}^n sur \mathbb{I} , $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, alors
 - $\alpha f + \beta g$ est de classe \mathcal{C}^n sur \mathbb{I} et $(\alpha f + \beta g)^{(n)} = \alpha f^{(n)} + \beta g^{(n)}$
 - $f \times g$ est de classe \mathcal{C}^n sur \mathbb{I}
 - $\frac{f}{g}$ est de classe \mathcal{C}^n (avec g qui ne s'annule pas sur \mathbb{I})

Soit $n \in \mathbb{N}$, $f : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{K}$ de classe \mathcal{C}^n sur \mathbb{I} , $g : \mathbb{J} \rightarrow \mathbb{K}$ de classe \mathcal{C}^n sur \mathbb{J} tel que $f(\mathbb{I}) \subset \mathbb{J}$, alors $(g \circ f)$ est de classe \mathcal{C}^n sur \mathbb{I}