Techniques fondamentales de calcul différentiel et intégral

Fonctions d'une variable réelle et à valeurs réelles ou complexes

Dérivation, étude d'une fonction

19 septembre 2022

Table des matières

1 Domaine de définition, domaine d'étude

1.1 Domaine de définition

Afin de déterminer un domaine de définition $\mathcal{D}_f$ d'une fonction f, nous écrivons :

$$x \in \mathcal{D}_f \iff \begin{cases} \dots \\ \dots \end{cases} \iff \dots$$

1.2 Domaine d'étude

Remarque :

Avec des considérations de périodicité, parité / imparité

2 Domaine de continuité

2.1 Limite d'une fonction en un point

2.2 Continuité en un point, continuité sur un intervalle

Définition :

Soit $f : \mathbb{I} \to \mathbb{R}$, a un point de $\mathbb{I}$
On dit que f est **continue en a** si et seulement si :

$$f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} f(a)$$

Définition :

Soit $f : \mathbb{I} \to \mathbb{R}$.
On dit que f est **continue sur $\mathbb{I}$** si et seulement si pour tout $a \in \mathbb{I}$, f est continue en a.
L'ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{I}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ se note $\mathcal{C}(\mathbb{I}, \mathbb{R})$

Exemples usuels :

(i) Les fonctions polynômiales sont continues sur $\mathbb{R}$
(ii) La fonction $\sqrt{x}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$
(iii) La fonction exp est continue sur $\mathbb{R}$
(iv) La fonction ln est continue sur $\mathbb{R}_+^*$
(v) Les fonctions sin et cos sont continues sur $\mathbb{R}$

Propriété :

Soit $f, g : \mathbb{I} \to \mathbb{R}$ continues sur $\mathbb{I}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, alors :
- $f+g$, $\lambda \cdot f$, $f \times g$ sont continues sur $\mathbb{I}$
- en supposant que g ne s'annule pas sur $\mathbb{I}$, $\frac{f}{g}$ est continue sur $\mathbb{I}$

Propriété :

Soit $f : \mathbb{I} \to \mathbb{R}$ continue sur $\mathbb{I}$, $g : \mathbb{J} \to \mathbb{R}$ continue sur $\mathbb{J}$ tel que $f(\mathbb{I}) = \mathbb{J}$
Alors $g \circ f$ est continue sur $\mathbb{I}$

3 Domaine de dérivabilité et tableau de variations

3.1 Dérivée d'une fonction en un point

Soit $f : \mathbb{I} \to \mathbb{R}$, a un point de $\mathbb{I}$
Le taux d'accroissement est donné par :

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Définition :

Soit $f : \mathbb{I} \to \mathbb{R}$, a un point de $\mathbb{I}$, on dit que f est **dérivable en a** si et seulement si l'application à une limite :

$$\tau_q : \mathbb{I} - \{a\} \to \mathbb{R}, \ x \mapsto \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Cette limite est appelée **nombre dérivé** de f en a et se note $f'(a)$

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Définition :

Soit $f : \mathbb{I} \to \mathbb{R}$, a un point de $\mathbb{I}$ en lequel f est dérivable.
Alors la droite d'équation $y = f'(a)(x-a) + f(a)$ est appelée la **tangente** à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a

Définition :

Soit $f : \mathbb{I} \to \mathbb{R}$, on dit que f est **dérivable sur $\mathbb{I}$** si et seulement si f est dérivable en tout point de $\mathbb{I}$. L'ensemble des fonctions dérivables sur $\mathbb{I}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ se note $\mathcal{D}(\mathbb{I}, \mathbb{R})$

Exemples usuels :

(i) Les fonctions polynômiales sont dérivables sur $\mathbb{R}$
(ii) La fonction $\sqrt{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$
(iii) La fonction exp est dérivable sur $\mathbb{R}$
(iv) La fonction ln est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$
(v) Les fonctions sin et cos sont dérivables sur $\mathbb{R}$

Propriété :

Soit $f, g : \mathbb{I} \to \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}$
(i) $f + g$ est dérivable sur $\mathbb{I}$ et $(f+g)' = f' + g'$
(ii) $\lambda \cdot f$ est dérivable sur $\mathbb{I}$ et $(\lambda \cdot f)' = \lambda \cdot f'$
(iii) $f \times g$ est dérivable sur $\mathbb{I}$ et $(f \times g)' = f'g + g'f$
(iv) en supposant que g ne s'annule pas sur $\mathbb{I}$, $\frac{f}{g}$ est dérivable sur $\mathbb{I}$ et $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2}$

Propriété :

Soit $f : \mathbb{I} \to \mathbb{R}$ dérivable sur $\mathbb{I}$, $g : \mathbb{J} \to \mathbb{R}$ dérivable sur $\mathbb{J}$ tel que $f(\mathbb{I}) \subset \mathbb{J}$
Alors $g \circ f$ est dérivable sur $\mathbb{I}$ et $(g \circ f)' = (g' \circ f) \times f'$

3.2 Domaine de dérivabilité

Nous avons une fonction f d'une variable réelle et nous avons déterminé son domaine de définition $\mathcal{D}_f$. Nous voulons maintenant étudier sa dérivabilité.

Remarque :

Etant donnée une fonction f :
(i) Lors de la recherche du domaine de définition :

$$" \ x \in \mathcal{D}_f \iff ... \text{ donc } \mathcal{D}_f = ... \ "$$

(ii) Lors de la recherche du domaine de continuité ou de dérivabilité :

" f est dérivable sur x tel que ... donc f est dérivable sur ...

Retenons que les propriétés générales donnent des conditions suffisantes de continuité ou de dérivation et non pas des conditions nécéssaires

4 Etude des bornes infinies

Plusieurs situations se présentent :
— $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \pm\infty, \ a \in \mathbb{R}$
Admet la droite d'équation $\Delta : x = a$ comme **asymptote verticale**

— $\lim\limits_{x \to \pm\infty} = b, \ b \in \mathbb{R}$
Admet une droite d'équation $y = b$ comme **asymptote horizontale**

DÉFINITION

> Soit f, g deux fonctions d'une variable réelle
> Nous disons que les courbes représentatives de f et g sont **asymptotes** au voisinage de $\pm\infty$ si et seulement si $f(x) - g(x) \underset{x \to \pm\infty}{\longrightarrow} 0$

— $f(x) - (ax + b) \underset{x \to \pm\infty}{\longrightarrow} 0$
Admet une droite d'équation $y = ax + b$ comme **asymptote oblique**

La recherche d'une asymptote oblique admet que $f(x) \underset{x \to \infty}{\longrightarrow} \pm\infty$
En supposant qu'il existe a, b non nuls tels que :

$$f(x) - (ax + b) \underset{x \to \pm\infty}{\longrightarrow} 0$$

Soit x variant au voisinage de $\pm\infty$

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{f(x) - (ax + b) + ax + b}{x} = \frac{f(x) - (ax + b)}{x} + a + \frac{b}{x} \underset{x \to \infty}{\longrightarrow} a$$

En connaissant a :

$$f(x) - ax = f(x) - (ax + b) + b \underset{x \to \pm\infty}{\longrightarrow} b$$

Completons les différentes situations :
— $\lim\limits_{x \to \pm\infty} = \pm\infty$
Nous étudions alors $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$:
(i) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty$, présence d'une **branche parabolique d'axe** (Oy)
(ii) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$, présence d'une **branche parabolique d'axe** (Ox)
(iii) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = a \in \mathbb{R}^*$
Nous étudions alors $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = ax$:
(a) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) - ax = \pm\infty$, **branche parabolique d'axe** $\Delta : y = ax$
(b) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) - ax = b \in \mathbb{R}$, présence d'une **droite asymptote d'équation** $y = ax + b$

5 Représentation graphique de la fonction

La courbe en rouge, les tangantes en vert, les asymptotes en bleu