Techniques fondamentales de calcul différentiel et intégral

Fonctions d'une variable réelle et à valeurs réelles ou complexes

Dérivation, étude d'une fonction

17 septembre 2022

Table des matières

1 Domaine de définition, domaine d'étude **2**

1.1 Domaine de définition 2

1.2 Domaine d'étude 2

2 Domaine de continuité **2**

2.1 Limite d'une fonction en un point 2

2.2 Continuité en un point, continuité sur un intervalle 2

3 Domaine de dérivabilité et tableau de variations **3**

3.1 Dérivée d'une fonction en un point 3

3.2 Domaine de dérivabilité 4

1 Domaine de définition, domaine d'étude

1.1 Domaine de définition

Afin de déterminer un domaine de définition $\mathcal{D}_f$ d'une fonction f, nous écrivons :

$$x \in \mathcal{D}_f \iff \begin{cases} \dots \\ \dots \end{cases} \iff \dots$$

1.2 Domaine d'étude

Remarque :

Avec des considérations de périodicité, parité / imparité

2 Domaine de continuité

2.1 Limite d'une fonction en un point

2.2 Continuité en un point, continuité sur un intervalle

Définition :

Soit $f : \mathbb{I} \to \mathbb{R}$, a un point de $\mathbb{I}$
On dit que f est **continue en a** si et seulement si :

$$f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} f(a)$$

Définition :

Soit $f : \mathbb{I} \to \mathbb{R}$.
On dit que f est **continue sur $\mathbb{I}$** si et seulement si pour tout $a \in \mathbb{I}$, f est continue en a.
L'ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{I}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ se note $\mathcal{C}(\mathbb{I}, \mathbb{R})$

Exemples usuels :

(i) Les fonctions polynômiales sont continues sur $\mathbb{R}$
(ii) La fonction $\sqrt{x}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$
(iii) La fonction exp est continue sur $\mathbb{R}$
(iv) La fonction ln est continue sur $\mathbb{R}_+^*$
(v) Les fonctions sin et cos sont continues sur $\mathbb{R}$

Propriété :

Soit $f, g : \mathbb{I} \to \mathbb{R}$ continues sur $\mathbb{I}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, alors :
— $f + g$, $\lambda \cdot f$, $f \times g$ sont continues sur $\mathbb{I}$
— en supposant que g ne s'annule pas sur $\mathbb{I}$, $\frac{f}{g}$ est continue sur $\mathbb{I}$

PROPRIÉTÉ :

Soit $f : \mathbb{I} \to \mathbb{R}$ continue sur $\mathbb{I}$, $g : \mathbb{J} \to \mathbb{R}$ continue sur $\mathbb{J}$ tel que $f(\mathbb{I}) = \mathbb{J}$
Alors $g \circ f$ est continue sur $\mathbb{I}$

3 Domaine de dérivabilité et tableau de variations

3.1 Dérivée d'une fonction en un point

Soit $f : \mathbb{I} \to \mathbb{R}$, a un point de $\mathbb{I}$
Le taux d'accroissement est donné par :

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

DÉFINITION :

Soit $f : \mathbb{I} \to \mathbb{R}$, a un point de $\mathbb{I}$, on dit que f est <u>**dérivable en** a</u> <u>si et seulement si</u> l'application à une limite :

$$\tau_q : \mathbb{I} - \{a\} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Cette limite est appelée <u>**nombre dérivé**</u> de f en a et se note $f'(a)$

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

DÉFINITION :

Soit $f : \mathbb{I} \to \mathbb{R}$, a un point de $\mathbb{I}$ en lequel f est dérivable.
Alors la droite d'équation $y = f'(a)(x-a) + f(a)$ est appelée la <u>**tangente**</u> à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a

DÉFINITION :

Soit $f : \mathbb{I} \to \mathbb{R}$, on dit que f est <u>**dérivable sur** $\mathbb{I}$</u> <u>si et seulement si</u> f est dérivable en tout point de $\mathbb{I}$. L'ensemble des fonctions dérivables sur $\mathbb{I}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ se note $\mathcal{D}(\mathbb{I}, \mathbb{R})$

EXEMPLES USUELS :

(i) Les fonctions polynômiales sont dérivables sur $\mathbb{R}$
(ii) La fonction $\sqrt{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$
(iii) La fonction exp est dérivable sur $\mathbb{R}$
(iv) La fonction ln est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$
(v) Les fonctions sin et cos sont dérivables sur $\mathbb{R}$

Propriété :

Soit $f, g : \mathbb{I} \to \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}$

(i) $f + g$ est dérivable sur $\mathbb{I}$ et $(f+g)' = f' + g'$
(ii) $\lambda \cdot f$ est dérivable sur $\mathbb{I}$ et $(\lambda \cdot f)' = \lambda \cdot f'$
(iii) $f \times g$ est dérivable sur $\mathbb{I}$ et $(f \times g)' = f'g + g'f$
(iv) en supposant que g ne s'annule pas sur $\mathbb{I}$, $\frac{f}{g}$ est dérivable sur $\mathbb{I}$ et $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2}$

Propriété :

Soit $f : \mathbb{I} \to \mathbb{R}$ dérivable sur $\mathbb{I}$, $g : \mathbb{J} \to \mathbb{R}$ dérivable sur $\mathbb{J}$ tel que $f(\mathbb{I}) \subset \mathbb{J}$
Alors $g \circ f$ est dérivable sur $\mathbb{I}$ et $(g \circ f)' = (g' \circ f) \times f'$

3.2 Domaine de dérivabilité

Nous avons une fonction f d'une variable réelle et nous avons déterminé son domaine de définition $\mathcal{D}_f$. Nous voulons maintenant étudier sa dérivabilité.

Remarque :

Etant donnée une fonction f :

(i) Lors de la recherche du domaine de définition :

$$\text{" } x \in \mathcal{D}_f \iff \text{... donc } \mathcal{D}_f = \text{... "}$$

(ii) Lors de la recherche du domaine de continuité ou de dérivabilité :

" f est dérivable sur x tel que ... donc f est dérivable sur ...

Retenons que les propriétés générales donnent des conditions <u>suffisantes</u> de continuité ou de dérivation et non pas des conditions <u>nécéssaires</u>