I. Techniques fondamentales de calcul différentiel et intégral

A. Fonctions d'une variable réelle à valeurs réelles ou complexes

a) Fonction usuelles

23 septembre 2022

Table des matières

1 La fonction exponentielle

1.1 Définition

THÉORÈME + DÉFINITION :

Il existe une unique application f dérivable sur $\mathbb{R}$ tel que :

$$\left\{\begin{array}{l} f = f' \\ f(0) = 1 \end{array}\right.$$

La fonction f est appelée **exponentielle néperienne** et se note exp

DÉMONSTRATION :

Existance : admise
Unicité : Supposons qu'il existe $u, v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable sur $\mathbb{R}$ tel que :

$$\left\{\begin{array}{l} u' = u \\ u(0) = 1 \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} v' = v \\ v(0) = 1 \end{array}\right.$$

Nous avons à montrer que $u = v$ ou $u - v = 0$ ou $\left\{\begin{array}{l} \frac{u}{v} = 1 \\ u \text{ ne s'annule pas sur } \mathbb{R} \end{array}\right.$

(i) Afin de montrer que v ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, nous allons montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, v(x) \times v(-x) = 1$$

Introduisons la fonction $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto v(x) \times v(-x)$
Et $x \mapsto -x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, v est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc par composée $x \mapsto v(-x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$
Et par produit ϕ est dérivable sur $\mathbb{R}$
et :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \phi'(x) &= v'(x) \times v'(-x) + v(x) \times (-v'(-x)) \\ &= v'(x) \times v(-x) - v(x) \times v'(-x) \\ &= v(x) \times v(-x) - v(x) \times v(-x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Comme $\mathbb{R}$ est un intervalle, ϕ est constante sur $\mathbb{R}$
Et $\phi(0) = v(0) \times v(-0) = v(0)^2 = 1$
Donc ϕ est constante de valeur 1
Donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $v(x) \times v(-x) = 1$
En particulier, pour tout réel x, $v(x) \neq 0$

(ii) Comme u et v sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et que v ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, $\frac{u}{v}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2} = \frac{uv - vu}{v} = 0$$

Comme $\mathbb{R}$ est un intervalle, alors $\frac{u}{v}$ est constante sur $\mathbb{R}$

Et :

$$\left(\frac{u}{v}\right)(0) = \frac{u(0)}{v(0)} = 1$$

Donc $\left(\frac{u}{v}\right) = 1$, ainsi $u = v$

Propriété :

(i) Par définition, exp est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $exp' = exp$

(ii) exp est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \mathbb{R}, exp^{(n)} = exp$

(iii) Par définition, $exp(0) = 1$

(iv) $\forall x \in \mathbb{R},\ exp(x) \times exp(-x) = 1$

<u>Formule de dérivation :</u> $(exp \circ u)' = u'(exp \circ u)$

Limites :

(i) $\lim\limits_{x \to +\infty} exp(x) = +\infty$

(ii) $\lim\limits_{x \to -\infty} exp(x) = 0$

(iii) $\lim\limits_{x \to}$

(iv) $\lim\limits_{x \to 0} x \cdot exp(x) = 0$