Análisis Matemático. Curso 2021/22.
Actividades de aprendizaje. Tema 1 (*)

(*) Es un instrumento de trabajo y de apoyo al aprendizaje. Contiene preguntas, ejercicios y problemas similares a los que se harán en las pruebas de evaluación del curso.

Se recomienda **comprobar con *WolframAlpha* las respuestas** dadas a las preguntas. En general, basta escribir la función en la línea de edición y se obtiene información que puede utilizarse para verificar dichas respuestas. Si se quiere solamente la gráfica se escribe antes *plot* y el programa ofrece diversas posibilidades de sintaxis para ajustar los valores de x o y.

1.1. Conoce, comprende y aplica los conceptos generales de funciones: dominio, acotación, crecimiento y extremos (máximos y mínimos)

Teoría: sección 1.1. Problemas: 1.1, 1.2

A1.1.1 El dominio de la función $\dfrac{\ln(x)}{\sqrt{x-1}}$ es:

(a) $(0, +\infty)$.

(b) $(1, +\infty)$.

(c) $[1, +\infty)$.

Justifica la respuesta:

A1.1.2 La función $f(x) = e^{-x}$

(a) es creciente en $\mathbb{R}$.

(b) es decreciente en $\mathbb{R}$.

(c) es creciente en $(-\infty, 0)$ y decreciente en $(0, +\infty)$.

Justifica la respuesta y esboza su gráfica:

A1.1.3 La función $f(x) = \ln(x+1)$

(a) está definida sólo para $x > 0$.

(b) es positiva en todo su dominio.

(c) es creciente en $(-1, +\infty)$.

Justifica por qué las opciones falsas son falsas y esboza su gráfica:

A1.1.4 La función $f(x) = |x^2 - 4|$ verifica que:

(a) alcanza un mínimo absoluto en $x = -2$.

(b) alcanza un máximo absoluto en $x = 0$.

(c) en el intervalo $[-5, 3]$, alcanza su valor máximo en $x = 3$.

Esboza su gráfica, justifica la respuesta verdadera y por qué las opciones falsas lo son.

A1.1.5 Conceptos de acotación y extremos. Escribe las definiciones de función acotada en un conjunto y de valores extremos (máximo y mínimo) de una función de un conjunto.

A1.1.6 Enlaza las siguientes funciones con las propiedades de acotación y extremos que verifiquen en sus respectivos dominios (alguna función verifica más de una de las propiedades indicadas):

$a(x) = \dfrac{1}{x^4}$	está acotada inferiormente por -1
$b(x) = x^2 + 1$	está acotada superiormente por 1
$c(x) = x^3$	está acotada
$d(x) = -e^{3x}$	no está acotada
$e(x) = \ln(x)$	no tiene ningún extremo relativo
$f(x) = \text{sen}(x+4)$	tiene un único extremo relativo
$f(x) = \lvert x+3 \rvert$	tiene infinitos extremos relativos

En la página siguiente esboza sus gráficas (puedes ayudarte de *Wolfram*) indicando en las mismas el significado de dichas acotaciones:

1.2. Calcula límites de funciones de una variable, resolviendo indeterminaciones.

Teoría: Secciones 1.2.1, 1.2.2 y 1.4.1. Problemas: 1.3 a 1.8

A1.2.1 Ejercicio. Calcula los siguientes límites indicando el proceso seguido para resolver las indeterminaciones:

(a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3 + 2x - 3}{3 + x^2 - 4x^3}$

(b) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 + 2x - 3}{3 + x^2 - 4x^3}$

(c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^3 + 2x^2}}{x^2 + 4x}$

(d) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\sqrt{x^3 + 2x^2}}{x^2 + 4x}$

(e) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x^2}$

(f) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{\ln(x^3 + x^4)}$

(g) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^3 + x^4}$

(h) $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{3x} \ln(x^2)$

(i) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{2x + 5} - \sqrt{x + 1}$

(j) $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{1/x}$

Comprueba con *WolframAlpha* los resultados y el proceso (puedes usar la opción *Step by Step Solution*). Basta escribir *lim* en la línea de edición y aparecen diferentes opciones de sintaxis para calcular límites.

1.3 Comprende los conceptos de continuidad y derivabilidad de una función y su representación gráfica. Los aplica adecuadamente en el estudio de funciones definidas a trozos.

Teoría: secciones 1.2.3, 1.2.4, 1.3, 1.4.2 y 1.4.3. Problemas: 1.9 a 1.14.

A1.3.1 Preguntas teóricas e interpretación gráfica

(a) Escribe la definición de función continua en un punto $x = a$.

(b) Escribe la definición de punto crítico de una función.

(c) Da un ejemplo de las siguientes situaciones y esboza su gráfica en el intervalo $(-2, 2)$, o bien justifica que es imposible encontrarlo:

$a(x)$ continua y derivable $f(0) = 1$ y punto crítico en $x = 0$	$b(x)$ continua en $x = 1$ pero no derivable en $x = 1$

$c(x)$ con punto crítico en $x = 0$ pero $x = 0$ no es un extremo	$d(x)$ no derivable en $x = 0$ y es siempre creciente en $(-2, 2)$

A1.3.2 Mapa de relaciones. Haz un esquema que recoja relaciones entre los conceptos de función continua, función derivable, función acotada y función creciente en un intervalo. Para alguna de las relaciones habrá que distinguir si el intervalo es abierto o cerrado.

A1.3.3. Continuidad y derivabilidad de fuciones definidas a trozos.

Dada la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{x} & \text{si } x < 0 \\ e^{-x} & \text{si } 0 \leq x < 1, \\ 1 - \dfrac{\ln(x)}{x} & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$

(a) Estudia la continuidad de $f(x)$.

(b) Halla $f'(x)$ cuando tenga sentido indicando los puntos críticos donde la función no es derivable.

(c) Halla las rectas tangentes a $f(x)$ en los puntos $x = -\pi$ y $x = e$.

(d) Estudia el crecimiento y los extremos relativos de $f(x)$ en el intervalo $(0, \infty)$.

(e) Indica los máximos y mínimos absolutos de $f(x)$ en el intervalo $[0, e]$.

(f) Calcula $\lim_{x \to \infty} f(x)$. ¿Se puede decir que $f(x)$ es una función acotada en $(0, \infty)$?

(g) Representa gráficamente la función $f(x)$ con *WolframAlpha* y verifica que es coherente con tus resultados. Para ello, escribe *piecewise* en la línea de edición y aparecen las opciones de sintaxis para trabajar con funciones definidas a trozos. Para representarla en un determinado intervalo, escribe *plot* en la línea de edición y aparecen las opciones de sintaxis para ello.

1.4. Comprende el concepto de función de varias variables y el concepto de curvas de nivel de funciones de 2 variables.

Teoría: sección 1.5.1, Problemas: 1.15, 1.16.

Nota: *WolframAlpha* representa gráficamente funciones de dos variables, basta escribir su expresión, y las curvas de nivel con las opciones de *Contour Lines* y *Contour Plot*. Para calcular derivadas parciales se escribe `d/dx , d/dy, d^2/dx^2, d^2/dy^2`.

A1.4.1 Para todo $C > 0$ la curva de nivel de la superficie $z = \dfrac{4}{y^2 + x^2}$, correspondiente al valor C, es:

(a) Una circunferencia.

(b) Una parábola.

(c) Dos rectas.

Justifica la respuesta:

A1.4.2 La curva de nivel de la función $f(x, y) = \dfrac{4}{y - x^2}$ que pasa por el punto $(-1, 4)$ es:

(a) La parábola $y = x^2 + \frac{4}{3}$.

(b) La parábola $y = x^2 + 3$.

(c) La circunferencia $y - x^2 = \frac{3}{4}$.

Justifica la respuesta:

A1.4.3 La curva de nivel de la función $f(x, y) = e^{x^2+y^2}(2x + y)$ que pasa por el punto $(-1, 2)$ es:

(a) La recta $y = -2x$.

(b) La recta $y = -2x + 1$.

(c) La circunferencia $x^2 + y^2 = \ln(5)$.

Justifica la respuesta:

1.5. Calcula e interpreta las derivadas parciales y el gradiente de funciones de varias variables.

Teoría: sección 1.5.3. Problemas: 1.17 a 1.22.

A1.5.1 Ejercicio. Dada la función $f(x,y) = 3x^2y - y^3$, calcula sus derivadas parciales de primer y segundo orden, y demuestra que es una función armónica, es decir, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$.

A1.5.2 Problema (interpretación del gradiente). La temperatura en un punto de una placa circular delgada de radio 10, que suponemos centrada en el punto $(0,0)$, viene dada por $T(x,y) = 100 - (x^2 + y^2)$.

(a) Esboza las curvas de nivel para $T = 0$, $T = 51$ y $T = 84$.

(b) ¿Cuál es el punto o los puntos más fríos de la placa?, ¿y el punto o los puntos más calientes?

(c) Calcula los siguientes gradientes $\nabla T(1,-1)$, $\nabla T(0,-10)$ y $\nabla T(6,0)$ y represéntalos gráficamente junto a las curvas de nivel correspondientes a sus puntos.

(d) Encuentra la dirección en la que debe moverse una partícula situada en el punto $(1,-1)$ para que la temperatura decrezca lo más rápido posible. ¿Y si está situada en $(6,0)$?

1.6. Localiza puntos críticos de una función de dos variables y usa el Hessiano para determinar si son extremos relativos o no.

Teoría: sección 1.5.5. Problemas: 1.23 y 1.24.

Nota: Tras resolver los ejercicios de este apartado, se pueden comprobar las cuentas utilizando las opciones *gradient*, *hessian*, *critical points* de *WolframAlpha*.

A1.6.1 Pensamiento algorítmico. Sea $f(x, y)$ una función que admite derivadas parciales de orden 2. Enuncia los pasos a seguir para determinar si $f(x, y)$ tiene extremos relativos y de qué tipo (en caso de que existan).

A1.6.2 Ejercicio. Dada la función $f(x, y) = x^2 - y^3 - xy$, aplica el procedimiento anterior para determinar sus extremos relativos.

A1.6.3 Ejercicio. Dada $f(x,y) = 2e^x - 2y^2e^x + y^4$, se pide determinar si tiene extremos relativos y de qué tipo.

, .

1.7. Resuelve problemas de optimización que pueden modelizarse mediante funciones de una o varias variables. Teoría: sección 1.6. Problemas: 1.25 a 1.28.

A1.7.1 Problema. En un edificio de 100 apartamentos, están todos alquilados con un precio de 600 euros al mes. El propietario quiere subir el precio, pero le han dicho que por cada 10 euros de subida se le quedará sin alquilar 1 apartamento. ¿Cuánto le interesa subir el precio para obtener el máximo beneficio? ¿En qué porcentaje se incrementan los beneficios? Teniendo en cuenta la situación actual de la vivienda, ¿tiene sentido dejar pisos sin alquilar para incrementar el beneficio en ese porcentaje?

A1.7.2 Problema. Una industria química fabrica dos tipos de sustancias A y B. El coste de fabricación total viene dado por $C(x, y) = 4x^2 + 2y^2$, siendo x los m^3 producidos de la sustancia A e y los m^3 producidos de la sustancia B. Los ingresos también varían en función de dichas cantidades según la función $R(x, y) = x(500 - 6x) + y(384 - 4y)$. Determina qué cantidades de ambas sustancias habría que producir para que el beneficio sea máximo.

1.8 Análisis y Síntesis.

A1.8.1 Síntesis del tema 1. Elabora tu propio resumen/esquema/mapa conceptual del tema 1, en donde sintetices los conceptos, resultados y técnicas fundamentales del mismo, y te pueda ser útil para consultarlo para preparar los exámenes y para cuando necesites recordarlo en cursos posteriores. Una idea es comparar las definiciones y resultados para funciones de una variable y para funciones de dos variables.