Escola Politécnica da USP
Departamento de Engenharia de Sistemas Eletrônicos

Transformada de Laplace aplicada a circuitos elétricos

Magno T. M. Silva

Agosto de 2020

Sumário

1 Introdução

Para introduzir a transformada de Laplace, vamos estudar o comportamento livre de um circuito RL, mostrado na Figura 1.

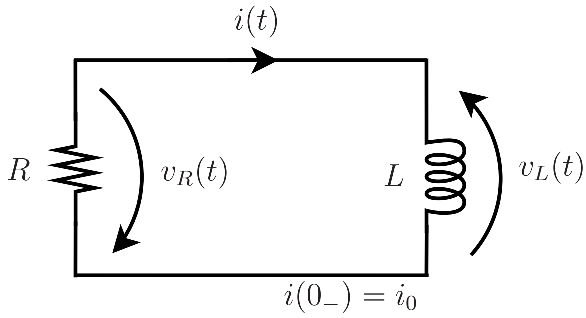

Figura 1: Circuito RL livre com condição inicial i_0.

Aplicando a segunda Lei de Kirchhoff ao único laço do circuito da Figura 1, obtemos a seguinte equação diferencial de primeira ordem

$$L\frac{di(t)}{dt} + Ri(t) = 0, \tag{1}$$

ou ainda,

$$\frac{di(t)}{dt} + \frac{R}{L}i(t) = 0. \tag{2}$$

É interessante observar que se trata de uma equação a coeficientes constantes pois supostamente os valores dos componentes R e L não variam ao longo do tempo. Para resolver essa equação, vamos aplicar uma transformação a ela e resolver a equação resultante em um *domínio transformado*. Depois devemos aplicar uma transformação inversa para se obter a solução no tempo.

Multiplicando ambos os lados de (2) por e^{-st}, e integrando de $t = 0_-$ a $t \to \infty$, obtemos

$$\int_{0_-}^{\infty} \frac{di(t)}{dt} e^{-st} dt + \int_{0_-}^{\infty} \frac{R}{L} i(t) e^{-st} dt = 0$$

ou ainda

$$\int_{0_-}^{\infty} \frac{di(t)}{dt} e^{-st} dt + \frac{R}{L} \underbrace{\int_{0_-}^{\infty} i(t) e^{-st} dt}_{I(s)} = 0. \tag{3}$$

Aqui cabem três observações:

- s é uma variável complexa $s = \sigma + j\omega$ que tem dimensão de frequência. Por isso, é usualmente chamada de *frequência complexa*;

- a integral é calculada a partir de $t = 0_-$ para contemplar o caso de impulso em $t = 0$;

- a segunda integral em (3) é definida como uma *corrente transformada* e é uma função da frequência complexa s. Por isso, é denotada como $I(s)$.

Note que a função que aparece na primeira integral em (3) é a derivada da corrente. Para continuar, precisamos calcular a transformada da derivada de uma função. Usando integração por partes, pode-se mostrar que

$$\int_{0_-}^{\infty} \frac{di(t)}{dt} e^{-st} dt = sI(s) - i(0_-). \tag{4}$$

É importante observar que a transformada aplicada à derivada de uma função levou ao produto $sI(s)$ e além disso apareceu automaticamente a condição inicial do indutor. Substituindo (4) em (3), obtemos a seguinte equação diferencial transformada

$$I(s)[s + R/L] = i_0 \Rightarrow I(s) = \frac{i_0}{s + R/L}. \tag{5}$$

Com a transformação aplicada à equação diferencial (2), obtivemos uma equação algébrica simples na variável complexa s. Obter a corrente transformada é simples. No entanto, ainda precisamos obter $i(t)$. Como obter $i(t)$ a partir de $I(s)$?

Para responder essa pergunta, vamos aplicar a mesma transformação à função exponencial $Ae^{-\alpha t}H(t)$, em que $H(t)$ representa o degrau unitário. Assim, obtemos

$$\int_{0_-}^{\infty} Ae^{-\alpha t} e^{-st} dt = \frac{A}{s + \alpha}. \tag{6}$$

Usando esse resultado, conclui-se que

$$I(s) = \frac{i_0}{s + R/L} = \int_{0_-}^{\infty} i_0 e^{-(R/L)t} e^{-st} dt \tag{7}$$

e portanto, a solução do problema é

$$i(t) = i_0 e^{-(R/L)t} H(t). \tag{8}$$

Obter a solução de uma equação diferencial ordinária de primeira ordem e a coeficientes constantes é relativamente simples e não justifica a resolução no domínio transformado. No entanto, as equações diferenciais que descrevem circuitos elétricos podem ter ordem elevada. A solução dessa equações diferenciais corresponde à soma da solução geral da equação homogênea com a solução particular da equação completa. Obter a solução particular da equação completa pode ser complicado. Em geral, essas soluções são conhecidas para um conjunto particular de excitações como, por exemplo, degrau, impulso ou senóide. Além disso, deve-se impor as condições iniciais para resolver o problema, o que também pode ser complicado.

A resolução de equações diferenciais (ou íntegro-diferenciais) ordinárias e a coeficientes constantes em um domínio transformado facilita sobremaneira os cálculos já que a derivada de uma função é transformada em um produto e a integral em uma divisão na variável complexa s. Assim, obtemos equações algébricas no domínio transformado que levam em conta as condições iniciais. Para obter a solução no tempo devemos aplicar a transformada inversa e para isso podemos usar técnicas bem conhecidas e relativamente simples, como a decomposição em frações parciais como veremos mais adiante. Assim, o procedimento de se aplicar a transformada de Laplace para resolução de equações diferenciais pode ser resumido através do diagrama mostrado na Figura 2.

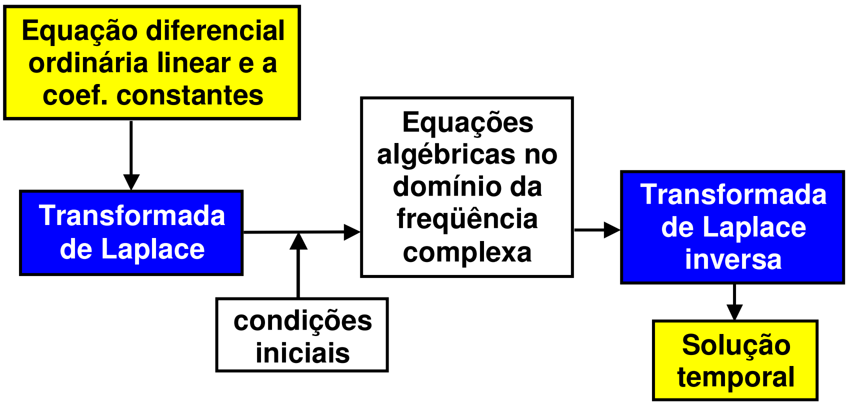

Figura 2: Transformada de Laplace aplicada a Circuitos Elétricos.

2 Definição

Seja $f(t)$ uma função real ou complexa definida em $[0_-, \infty]$. Sua transformada de Laplace unilateral é definida como

$$\boxed{\mathcal{L}\left[f(t)\right] = F(s) \triangleq \int_{0_-}^{\infty} f(t)e^{-st}dt} \tag{9}$$

sendo $s = \sigma + j\omega$ uma variável complexa.

Cabe observar que a transformada de Laplace bilateral é definida de $t \to -\infty$ a $t \to \infty$ e é importante quando se trabalha com sinais não causais (sinais que são diferentes de zero para $t < 0$). Em redes elétricas, um circuito sempre começa a operar a partir de um instante de tempo inicial ($t = 0_-$) em que há ou não energia armazenada no campo elétrico dos capacitores e no campo magnético do indutores (condições iniciais). Além disso, as excitações são aplicadas ao circuito a partir desse instante inicial. Por isso, a definição unilateral é mais conveniente para essa aplicação.

3 Existência e abscissa de convergência

Para que a transformada de Laplace exista, é necessário que a integral (9) convirja. Substituindo $s = \sigma + j\omega$ em (9), obtemos

$$F(s) = \int_{0_-}^{\infty} f(t)e^{-\sigma t}e^{-j\omega t}dt. \tag{10}$$

Como $|e^{-j\omega t}| = 1$, a integral do lado direito dessa equação converge se

$$\int_{0_-}^{\infty} |x(t)e^{-\sigma t}|dt < \infty. \tag{11}$$

Dessa forma, a existência da transformada de Laplace unilateral é garantida se a integral em (11) é finita para algum valor de σ. Qualquer sinal que não cresce mais rápido do que um sinal exponencial $Me^{\sigma_0 t}$ para algum M e σ_0 satisfaz a condição (11). Dessa forma, se para algum M e σ_0,

$$|x(t)| \leq Me^{\sigma_0 t} \tag{12}$$

basta escolher $\sigma > \sigma_0$ para satisfazer (11).

Exemplo 3.1. *Qual o valor de σ_0 para que a transformada de Laplace unilateral do sinal e^{2t} convirja? Calculando a transformada de Laplace desse sinal, obtemos*

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[e^{2t}] &= \int_{0_-}^{\infty} e^{2t}e^{-st}dt = \int_{0_-}^{\infty} e^{2t}e^{-(\sigma+j\omega)t}dt \\ &= \int_{0_-}^{\infty} e^{-(\sigma-2)t}e^{-j\omega t}dt \Rightarrow \sigma_0 = 2.\end{aligned}$$

A região de convergência para essa transformada está mostrada na Figura 3.

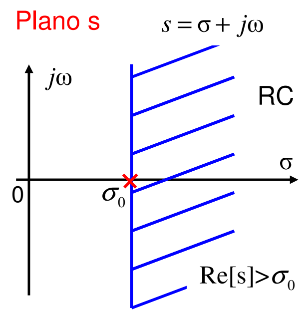

Figura 3: Abscissa de convergência da transformada de Laplace unilateral.

Os sinais e^{t^2}, e^{e^t} e t^t crescem com uma taxa mais rápida que $e^{\sigma_0 t}$ e consequentemente não possuem transformada de Laplace. Felizmente, esses sinais têm pouca importância na prática. Resumindo, as condições suficientes para a existência da transformada de Laplace unilateral são:

- $f(t)$ contínua e integrável em intervalos;
- $|f(t)| \leq Me^{\sigma_0 t}, \quad \forall t \in [0_-, \infty]$ para M e σ_0 reais;
- $\exists \lim_{t\to\infty} e^{-s_0 t}f(t)$ para algum valor de $s_0 = \sigma_0 + j\omega$ que é abscissa de convergência da transformada;
- a integral é convergente para $\mathrm{Re}[s] > \mathrm{Re}[s_0]$.

É importante observar ainda que a transformada de Laplace unilateral $F(s)$ tem uma única inversa $f(t)$ e por isso, não é necessário explicitar a região de convergência. Por essa razão, raramente vamos falar de região de convergência ao longo do texto.

4 Transformadas de Laplace úteis em circuitos

Usando a definição (9), pode-se obter algumas transformadas de funções úteis na análise de circuitos elétricos. Essas transformadas estão mostradas na Tabela 1.

Tabela 1: Transformadas de Laplace de funções elementares.

$f(t)$	$F(s)$	$f(t)$	$F(s)$
$\delta(t)$	1	$\text{sen}(\omega t)H(t)$	$\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$H(t)$	$\dfrac{1}{s}$	$\cos(\omega t)H(t)$	$\dfrac{s}{s^2+\omega^2}$
$kH(t)$	$\dfrac{k}{s}$	$e^{-at}H(t)$	$\dfrac{1}{s+a}$

Usando os pares de transformadas da Tabela 1, podemos derivar transformadas de Laplace de outras funções. Por exemplo, vamos calcular a transformada de Laplace da função

$$f(t) = \cos(2t + \varphi) = \cos\varphi \cos 2t - \text{sen}\varphi\text{sen}2t.$$

Como veremos a seguir, a transformada de Laplace atende à propriedade de linearidade. Por isso, podemos calcular

$$F(s) = \cos\varphi\mathcal{L}[\cos 2t] - \text{sen}\varphi\mathcal{L}[\text{sen}2t] = \frac{s\cos\varphi - 2\text{sen}\varphi}{s^2+4}.$$

5 Propriedades

A seguir enumeramos as propriedades básicas da Transformada de Laplace unilateral. As demonstrações dessas propriedades seguem diretamente da definição (9) e por isso não serão mostradas.

P1- A primeira propriedade que segue diretamente da definição (9) é a linearidade, ou seja, a transformada de Laplace de uma combinação linear das funções $f_1(t)$ e $f_2(t)$ é dada pela combinação linear de suas transformadas:

$$\mathcal{L}[c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)] = c_1 F_1(s) + c_2 F_2(s),$$

em que c_1 e c_2 são duas constantes reais ou complexas.

P2- Derivada da transformada em relação a s

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) \Rightarrow -\frac{d}{ds}F(s) = \mathcal{L}[tf(t)]$$

Essa propriedade é importante para calcularmos a transformada de funções do tipo

$$\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}e^{\alpha t}$$

com $k \geq 1$ e inteiro, que podem aparecer em circuitos elétricos. A partir do par de transformadas

$$e^{\alpha t} \leftrightarrow \frac{1}{s-\alpha}$$

e usando essa propriedade, obtemos

$$te^{\alpha t} \leftrightarrow \frac{1}{(s-\alpha)^2}$$

e

$$\frac{t^2}{2}e^{\alpha t} \leftrightarrow \frac{1}{(s-\alpha)^3}.$$

Aplicando essa propriedade sucessivamente, chegamos a

$$\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}e^{\alpha t} \leftrightarrow \frac{1}{(s-\alpha)^k}.$$

P3- Translação no campo real

$$\mathcal{L}[f(t-a)] = e^{-as}F(s)$$

P4- Translação no campo complexo

$$\mathcal{L}[e^{-at}f(t)] = F(s+a)$$

P5- Multiplicação do argumento por constante

$$\mathcal{L}[f(\omega t)] = \frac{1}{\omega}F(s/\omega)$$

P6- Transformada de funções periódicas

$$\mathcal{L}[f(t)] = \frac{1}{1-e^{-sT}}\int_{0_-}^{T} e^{-st}f(t)dt$$

P7- Transformada da derivada de uma função

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[\dot{f}(t)] &= sF(s) - f(0_-) \\
\mathcal{L}[\ddot{f}(t)] &= s^2F(s) - sf(0_-) - \dot{f}(0_-) \\
\mathcal{L}[f^{(n)}(t)] &= s^nF(s) - s^{n-1}f(0_-) - s^{n-2}\dot{f}(0_-) - \cdots - f^{(n-1)}(0_-)
\end{aligned}$$

Caso particular: condições iniciais nulas

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[\dot{f}(t)] &= sF(s) \\
\mathcal{L}[f^{(n)}(t)] &= s^nF(s)
\end{aligned}$$

P8- Transformada da integral de uma função

$$\mathcal{L}\left[\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau\right] = \frac{F(s)}{s} + \frac{\int_{-\infty}^{0-} f(\tau)d\tau}{s}$$

Caso particular: condições iniciais nulas

$$\mathcal{L}\left[\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau\right] = \frac{F(s)}{s}$$

6 Exemplo – Circuito RLC série

Exemplo 6.1. *Considere o circuito RLC série da Figura 4 com valores de componentes no sistema de unidades de audiofrequências, excitado por um gerador de tensão.*

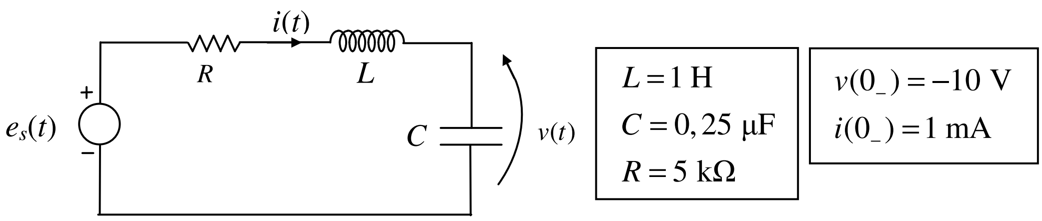

Figura 4: Circuito RLC série.

Aplicando a segunda Lei de Kirchhoff ao laço, obtém-se

$$L\frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + \frac{1}{C}\int_{0_-}^{t} i(\lambda)d\lambda + v(0_-) = e_s(t)$$

Essa equação íntegro-diferencial pode ser transformada em uma equação diferencial de segunda ordem. Derivando ambos os lados em relação a t e dividindo a equação resultante por L, obtemos

$$\frac{d^2i(t)}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{LC}i(t) = \frac{1}{L}\frac{de_s(t)}{dt}.$$

O fator de amortecimento e a frequência própria não amortecida (frequência de ressonância) valem respectivamente

$$\alpha = \frac{R}{2L} = 2{,}5\ \text{ms}^{-1}\ \text{ e }\ \omega_0 = 2\ \text{krd/s}$$

Vamos estudar o comportamento livre desse circuito ($e_s(t) = 0$). Como $\alpha > \omega_0$ o circuito livre tem um comportamento super-amortecido. A resolução da equação diferencial no tempo leva à seguinte expressão para a corrente

$$i(t) = e^{-\alpha t}\left[i_0\left(\cosh(\beta t) - \frac{\alpha}{\beta}\text{senh}\,(\beta t)\right) - \frac{v_0}{\beta L}\text{senh}(\beta t)\right]$$

para $t \geq 0$, sendo $\beta = \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$. No problema, $\beta = 1{,}5\ \text{ms}^{-1}$ e a partir de manipulações algébricas chega-se a

$$i(t) = (3e^{-t} - 2e^{-4t})H(t).$$

Vamos agora obter essa expressão usando a transformada de Laplace. Usando a Propriedade P7, a equação diferencial de segunda ordem pode ser descrita no domínio transformado como

$$s^2 I(s) - si(0_-) - \frac{di(0_-)}{dt} + \frac{R}{L} I(s) - \frac{R}{L} sI(s) - \frac{R}{L} i(0_-) + \frac{1}{LC} I(s) = \frac{1}{L} sE_s(s).$$

Dessa equação, obtemos a seguinte expressão para a corrente transformada

$$I(s) = \frac{\frac{1}{L} sE_s(s) + si(0_-) + \left[\frac{di(0_-)}{dt} + \frac{R}{L} i(0_-)\right]}{s^2 + \frac{R}{L} s + \frac{1}{LC}}.$$

Não dispomos da derivada da corrente em $t = 0_-$*, mas podemos cacular essa condição inicial a partir de* $v(0_-)$*. A partir da equação integro-diferencial, calculada em* $t = 0_-$*, obtemos*

$$L \frac{di(0_-)}{dt} + Ri(0_-) + \frac{1}{C} \int_{0_-}^{0_-} i(\lambda) d\lambda + v(0_-) = e_s(0_-).$$

Dessa equação, obtemos

$$\left[\frac{di(0_-)}{dt} + \frac{R}{L} i(0_-)\right] = -\frac{1}{L} v(0_-).$$

Usando esse resultado, a corrente transformada fica

$$I(s) = \frac{\frac{1}{L} sE_s(s) + si(0_-) - \frac{1}{L} v(0_-)}{s^2 + \frac{R}{L} s + \frac{1}{LC}}.$$

Cabe observar que poderíamos obter esse resultado aplicando as Propriedades P7 e P8 diretamente na equação íntegro-diferencial. Isso evitaria o passo adicional de obter a condição inicial da derivada da corrente em função do valor inicial da tensão.

Substituindo os valores dos componentes e das condições iniciais e lembrando que para obter a resposta livre $E_s(s) = 0$*, chega-se*

$$I(s) = \frac{s + 10}{s^2 + 5s + 4} = \frac{s + 10}{(s + 1)(s + 4)}.$$

O próximo passo é aplicar a transformada inversa para obter a expressão da corrente no tempo. Note que, a corrente transformada pode ser reescrita da forma

$$I(s) = \frac{3}{s + 1} + \frac{-2}{s + 4}.$$

Usando os pares de transformadas da Tabela 1, obtemos

$$i(t) = (3e^{-t} - 2e^{-4t}) H(t),$$

que coincide com o resultado da resolução da equação diferencial. O gráfico dessa corrente ao longo do tempo está mostrado na Figura 5.

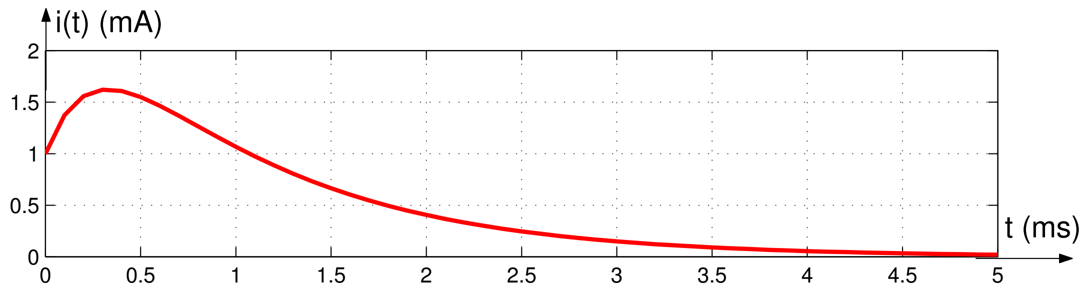

Figura 5: Corrente do circuito RLC série da Figura 4; comportamento livre.

7 A transformada inversa de Laplace

Até agora vimos como calcular a transformada de Laplace unilateral e sua aplicação para resolver equações diferenciais. Como calcular a transformada inversa? Como reescrever uma expressão racional no domínio transformado como uma soma de frações parciais como fizemos no exemplo anterior? Vamos responder essas perguntas a seguir.

7.1 Tabelas de transformadas e propriedades

Lembrando que a transformada de Laplace unilateral é unívoca e linear, podemos anti-transformá-la usando tabelas de pares de transformadas e de propriedades. Vamos ver isso no próximo exemplo.

Exemplo 7.1. *Vamos anti-transformar a função racional*

$$F(s) = \frac{s+5}{(s+2)^2} = \frac{1}{s+2} + \frac{3}{(s+2)^2}.$$

Usando o seguinte resultado

$$\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}e^{\alpha t} \leftrightarrow \frac{1}{(s-\alpha)^k},$$

por inspeção visual obtemos $f(t) = (e^{-2t} + 3te^{-2t})H(t)$.

7.2 Fórmula de inversão

A transformada de Laplace inversa pode ser calculada a partir da fórmula de inversão

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s)e^{st}ds.$$

Para isso, devemos calcular a integral no campo complexo, o que muitas vezes é complicado. Por isso, o uso da fórmula de inversão é evitado em geral, principalmente porque a maior parte das transformadas que aparecem em circuitos elétricos são funções racionais.

7.3 Transformada inversa de funções racionais

As transformadas que aparecem em circuitos elétricos são funções racionais do tipo

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_{m-1}s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}s + a_n},$$

em que a_i, $i = 0, 1, \cdots, n$ e b_j, $j = 0, 1, \cdots, m$ são constantes reais e $a_0 \neq 0$ e $b_0 \neq 0$. Se $n > m$ então $F(s)$ é uma *função racional estritamente própria* e pode ser expandida em frações parciais. Se $n \leq m$ então $F(s)$ deve ser reduzida em uma função polinomial mais um resto que é uma função racional estritamente própria, obtido a partir de divisão de polinômios. Neste caso, o resto da divisão pode ser expandido em frações parciais como veremos mais adiante.

7.3.1 Definição de polos e zeros

Uma função racional pode ser fatorada da seguinte forma

$$F(s) = K\frac{\Pi_{i=1}^{m}(s - z_i)}{\Pi_{j=1}^{n}(s - p_j)}, \tag{13}$$

em que $K = b_0/a_0$ é um fator de escala, z_i, $i = 1, \cdots, n$ são os zeros (raízes do polinômio do numerador, $N(s)$) e p_j, $j = 1, \cdots, m$ são os polos (raízes do polinômio do denominador). Uma função racional é descrita completamente a partir dos polos, zeros e do fator de escala, como veremos no exemplo seguinte.

Exemplo 7.2. *Seja*

$$F(s) = 10\frac{s^2 + 3s}{s^4 + 6s^3 + 14s^2 + 5}$$

uma função racional no domínio da transformada complexa s. Determine os polos, zeros e represente-os no plano s. A função $F(s)$ pode ser fatorada na forma (13)*, ou seja,*

$$F(s) = 10\frac{s(s + 3)}{(s + 1)^2(s + 2 - j)(s + 2 + j)},$$

de onde podemos identificar os polos $p_{1,2} = -1$ e $p_{3,4} = -2 \pm j$, os zeros $z_1 = 0$ e $z_2 = -3$ e o fator de escala $K = 10$. O diagrama de polos e zeros está mostrado na Figura 6.

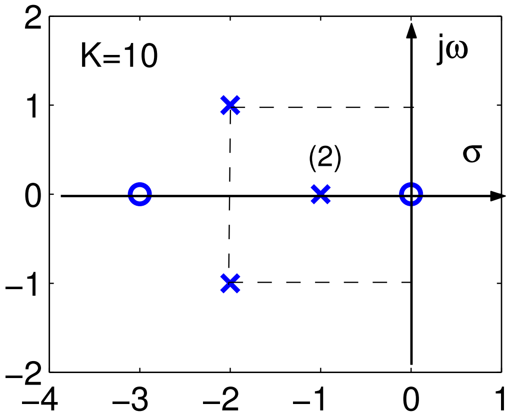

Figura 6: Diagrama de polos e zeros da função $F(s)$.

7.4 Inversa de funções racionais estritamente próprias

As funções racionais estritamente próprias ($n > m$) podem ser expandidas em frações parciais da forma

$$F(s) = \sum_{j=1}^{p} \sum_{k=1}^{m_j} A_{kj} \frac{1}{(s - p_j)^k}$$

em que A_{kj} são coeficientes reais ou complexos chamados de *resíduos* p_j, $j = 1, \cdots, p$ são os polos de $F(s)$, cada um deles com multiplicidade m_j de modo que $m_1 + m_2 + \cdots + m_p = n$.

Reescrever a função $F(s)$ dessa forma é conveniente pois sabemos que

$$\frac{t^{k-1}}{(k-1)!} e^{\alpha t} \leftrightarrow \frac{1}{(s - \alpha)^k}.$$

Como calcular os resíduos? Vamos estudar o cálculo dos resíduos através de vários exemplos. As constas serão conferidas com a função residue.m do Matlab.

Exemplo 7.3. ***Polos simples e reais.*** *Vamos obter a transformada de Laplace inversa da função*

$$F(s) = \frac{s + 3}{s^3 + 3s^2 + 2s} = \frac{s + 3}{s(s + 1)(s + 2)}.$$

com polos $p_1 = 0$, $p_2 = -1$ e $p_3 = -2$ e zero $z_1 = -3$. A expansão em frações parciais dessa função é dada por

$$F(s) = \frac{A_1}{s} + \frac{A_2}{s + 1} + \frac{A_3}{s + 2}.$$

O resíduo A_1 pode ser calculado, multiplicando a expansão em frações parciais de $F(s)$ por s e calculando a expressão resultante em $s = 0$, ou seja,

$$A_1 = F(s)s|_{s=0} = \left[A_1 + \frac{A_2 s}{s + 1} + \frac{A_3 s}{s + 2} \right]_{s=0} = \left. \frac{s + 3}{(s + 1)(s + 2)} \right|_{s=0} = 1,5.$$

O resíduo A_2, por sua vez, pode ser calculado como

$$A_2 = F(s)(s + 1)|_{s=-1} = \left[\frac{A_1(s + 1)}{s} + A_2 + \frac{A_3(s + 1)}{s + 2} \right]_{s=-1} = -2 = \left. \frac{s + 3}{s(s + 2)} \right|_{s=-1} = -2.$$

Por fim, o resíduo A_3 é calculado de forma análoga, ou seja,

$$A_3 = F(s)(s + 2)|_{s=-2} = \left[\frac{A_1(s + 2)}{s} + \frac{A_2(s + 2)}{(s + 1)} + A_3 \right]_{s=-2} = \left. \frac{s + 3}{s(s + 1)} \right|_{s=-2} = 0,5.$$

Dessa forma, a expansão em frações parciais de $F(s)$ se reduz a

$$F(s) = \frac{1,5}{s} + \frac{-2}{s + 1} + \frac{0,5}{s + 2},$$

cuja transformada inversa é dada por

$$f(t) = \left[1,5 - 2e^{-t} + 0,5e^{-2t} \right] H(t).$$

Podemos obter esses resíduos usando a função residue.m *do Matlab. Entrando com os coeficientes do polinômio do numerador e do denominador, obtemos os resíduos na variável R, os polos na variável P e coeficientes na variável K, que aparecem caso a função não seja estritamente própria. Ou seja, a expansão em frações parciais é do tipo*

```
B(s)       R(1)       R(2)             R(n)
----  =  -------- + -------- + ... + -------- + K(s)
A(s)     s - P(1)   s - P(2)         s - P(n)
```

Para o nosso exemplo, obtemos

```
b=[1, 3];
a=[1, 3, 2, 0];

[R,P,K]=residue(b,a)

R =
    0.5000
   -2.0000
    1.5000

P =
    -2
    -1
     0

K = []
```

Exemplo 7.4. ***Polos simples e complexos conjugados.*** *Quando há polos complexos conjugados p_k e p_k^*, uma parcela da expansão em frações parciais de $F(s)$ é dada por*

$$F_k(s) = \frac{A_k}{s - p_k} + \frac{A_k^*}{s - p_k^*},$$

sendo $A_k = |A_k|e^{j\phi_k}$ e $A_k^* = |A_k|e^{-j\phi_k}$ resíduos que também são complexos conjugados e estão relacionados ao polos $p_k = \sigma_k + j\omega_k$ e $p_k^* = \sigma_k - j\omega_k$, respectivamente. A transformada inversa de $F_k(s)$ é dada por

$$f_k(t) = A_k e^{p_k t} + A_k^* e^{p_k^* t} = 2\text{Re}\{A_k e^{p_k t}\}.$$

Usando a descrição do polo p_k em parte real e imaginária e do resíduo A_k em módulo e fase, podemos reescrever essa função como

$$f_k(t) = 2|A_k|e^{\sigma_k t}\cos(\omega_k + \phi_k).$$

Vamos então calcular a transformada inversa da função

$$F(s) = 20\frac{s + 3}{s^4 + 5s^3 + 13s^2 + 19s + 10}.$$

Usando a função residue.m *do Matlab obtemos*

```
b=20*[1 3];
a=[ 1     5    13    19    10];

[R,P,K]=residue(b,a)

R =
  -3.0000 + 1.0000i
  -3.0000 - 1.0000i
  -4.0000
  10.0000

P =
  -1.0000 + 2.0000i
  -1.0000 - 2.0000i
  -2.0000
  -1.0000

K = []
```

Novamente, a variável K é vazia pois $F(s)$ é uma função racional estritamente própria. Neste caso temos dois polos complexos conjugados e dois reais e um zero real, como podemos ver no diagrama de polos e zeros de $F(s)$ e no gráfico do $|F(s)|$ em função da parte real σ e parte imaginária ω da variável complexa s, mostrados nas Figuras 7 e 8, respectivamente. Na Figura 7, a reta tracejada indica a abscissa de convergência de $F(s)$.

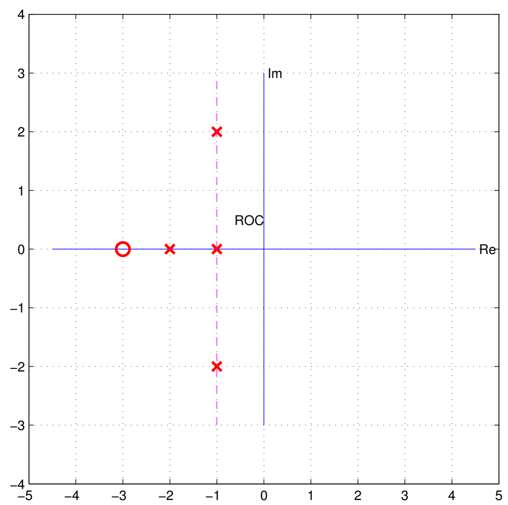

Figura 7: Diagrama de polos e zeros da função $F(s)$.

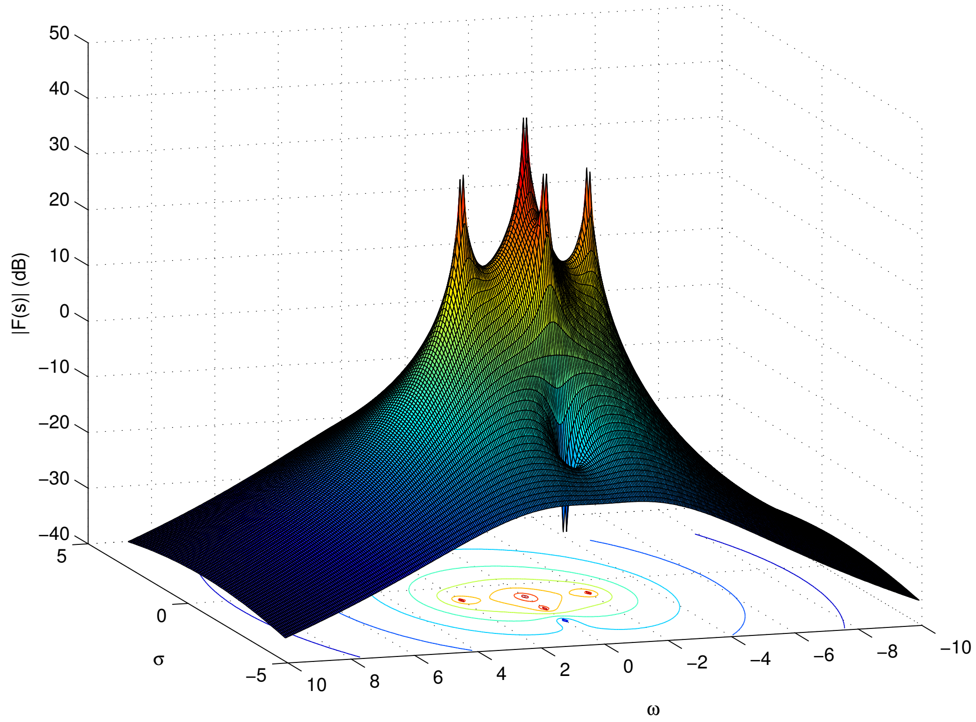

Figura 8: Módulo de F(s) em dB em função da parte real σ e parte imaginária ω da variável complexa s.

Usando os resultados da função residue.m*, a expansão em frações parciais de $F(s)$ é dada por*

$$F(s) = \frac{\sqrt{10}e^{j161{,}6^o}}{s+1-2j} + \frac{\sqrt{10}e^{-j161{,}6^o}}{s+1+2j} + \frac{-4}{s+2} + \frac{10}{s+1}.$$

Usando o resultado anterior para anti-transformar parcelas complexas conjugadas, obtém-se

$$f(t) = \left[2\sqrt{10}e^{-t}\cos(2t+161{,}6^o) - 4e^{-2t} + 10e^{-t}\right] H(t).$$

Exemplo 7.5. ***Polos múltiplos.*** *Neste exemplo vamos calcular a inversa de uma função racional estritamente própria que tem polos múltiplos. Seja a seguinte função racional estritamente própria*

$$F(s) = \frac{s+2}{s^3+2s^2+s} = \frac{s+2}{s(s+1)^2}$$

com zero $z_1 = -2$ e polos em $p_1 = 0$ e $p_2 = p_3 = -1$ (multiplicidade 2). A decomposição em frações parciais dessa função é dada por

$$F(s) = \frac{A_{11}}{s} + \frac{A_{12}}{(s+1)} + \frac{A_{22}}{(s+1)^2}.$$

Os resíduos A_{11} e A_{22} são calculados como nos casos anteriores, ou seja

$$A_{11} = sF(s)|_{s=0} = 2$$
$$A_{22} = (s+1)^2F(s)|_{s=-1} = -1.$$

Com os valores de A_{11} e A_{22}, é possível calcular o resíduo A_{12} igualando a expansão em frações parciais a $F(s)$, ou seja,

$$\frac{A_{11}(s+1)^2 + A_{12}(s+1) + A_{22}s}{s(s+1)^2} = \frac{s+2}{s(s+1)^2}.$$

Os numeradores dessas funções racionais devem ser iguais para todo s na região de convergência de $F(s)$. Em particular para $s = 1$, obtemos

$$2(2)^2 + A_{12}(2)1 + (-1)1 = 3 \Rightarrow 2A_{12} = -4 \Rightarrow A_{12} = -2.$$

Assim, a expansão em frações parciais fica

$$F(s) = \frac{2}{s} + \frac{-2}{(s+1)} + \frac{-1}{(s+1)^2}$$

e a transformada inversa é dada por

$$f(t) = [2 - 2e^{-t} - te^{-t}]H(t).$$

Usando a função residue.m *do Matlab, obtemos*

```
b=[1, 2];
a=[1, 2, 1, 0];

[R,P,K]=residue(b,a)

R =
-2
-1
 2

P =
-1
-1
 0

K =[]
```

É importante observar que no caso em que um polo

```
P(j) = ... = P(j+m-1)
```

aparece com multiplicidade m, a expansão em frações parciais inclui termos da forma

```
  R(j)         R(j+1)                 R(j+m-1)
-------- + -----------    + ... + -----------
s - P(j)   (s - P(j))^2            (s - P(j))^m
```

Usando essa expressão podemos identificar os resíduos e relacioná-los com os termos da expansão.

7.5 Inversa de funções racionais impróprias

Quando o grau do numerador da função racional é maior ou igual que o grau do denominador $m \geq n$, temos uma função racional imprópria. Neste caso, antes de fazer a expansão em frações parciais, devemos fazer uma divisão de polinômios de modo a escrever a função $F(s)$ como a soma de um polinômio em s e uma função racional estritamente própria.

Exemplo 7.6. *Vamos anti-transformar a função imprópria*

$$F(s) = \frac{s^4 + 5s^3 + 4s^2 + 3^2 + 1}{s^3 + 3s^2 + 2s}.$$

Devemos fazer primeiramente uma divisão de polinômios até obtermos uma função estritamente própria. Dessa forma, chega-se a

$$F(s) = s + 2 + \frac{-4s^2 - s + 1}{s^3 + 3s^2 + 2s}.$$

Usando a função residue.m *do Matlab, obtemos*

```
b=[1 5 4 3 1];
a=[1 3 2 0];

[R,P,K]=residue(b,a)
R =
  -6.5000
   2.0000
   0.5000


P =
    -2
    -1
     0


K =
     1     2
```

Neste caso, a variável K não é vazia e corresponde aos coeficientes do polinômio $s + 2$ que aparece em $F(s)$, através da divisão de polinômios. Os resíduos e os polos obtidos com essa função correspondem à expansão em frações parciais da parcela estritamente própria de $F(s)$. Assim,

$$F(s) = s + 2 + \frac{-6,5}{s+2} + \frac{2}{s+1} + \frac{0,5}{s}.$$

Para transformar a parcela s devemos lembrar que a transformada do impulso $\delta(n)$ é igual a 1. Usando a Propriedade P7, obtemos

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^{(n)}\delta(n)}{dt}\right] = s^n.$$

Assim, $f(t)$ é dado por

$$f(t) = \frac{d\delta(n)}{dt} + 2\delta(n) + 0,5u(n) + 2e^{-t}u(n) - 6,5e^{-2t}u(n).$$

Referências

[1] OPPENHEIM, A. V.; WILLSKY, A. S. *Signals and Systems*, Prentice Hall, 2ª edição, 1997.

[2] LATHI B. P., *Linear systems and signals*, Oxford, 2ª edição, 2005.

[3] ORSINI, L. Q.; CONSONNI, D. *Curso de Circuitos Elétricos*, Edgard Blucher, vol.1, 2ª edição, 2002.

[4] NILSSON, J. W.; RIEDEL, S. A. Riedel *Electric Circuits*, 7ª edição, Prentice Hall, 2004.

[5] HAYKIN, S.; VAN VEEN, B. *Signals and Systems*, 2ª edição, Wiley, 2002