Mecánica Cuántica II

Colisiones Elasticas Sin Creación Ni Aniquilación de Partículas

Notas de clase del Profesor: Luis Quiroga Puello

Estas son las notas de clase tomadas en el semestre 20151 en la clase Mecánica Cuántica II dictada por el profesor Luis Quiroga en La Universidad de los Andes. Estas notas son escritas por un alumno y pueden contener errores, uselas con precaución.

Contents

Chapter 1

Suma de Momentos Angulares

$$\widehat{J}_1^2 \left| j_1, j_2, m_1, m_2 \right\rangle = \hbar^2 j_1(j_1+1) \left| j_1, j_2, m_1, m_2 \right\rangle \tag{1.1}$$

$$\widehat{J}_{z_1} \left| j_1, j_2, m_1, m_2 \right\rangle = \hbar\, m_1 \left| j_1, j_2, m_1, m_2 \right\rangle \tag{1.2}$$

$$\widehat{J}_2^2 \left| j_1, j_2, m_1, m_2 \right\rangle = \hbar^2 j_2(j_2+1) \left| j_1, j_2, m_1, m_2 \right\rangle \tag{1.3}$$

$$\widehat{J}_{z_2} \left| j_1, j_2, m_1, m_2 \right\rangle = \hbar\, m_2 \left| j_1, j_2, m_1, m_2 \right\rangle \tag{1.4}$$

Considere dos momentos angulares arbitrarios $\widehat{J}_1$ y $\widehat{J}_2$. En la base con información individual de cada momento angular se tiene los estados propios que actúan como se muestra en las relaciones (1.1 - 1.4).

$$\widehat{J}_T = \widehat{J}_1 + \widehat{J}_2 \tag{1.5}$$

$$\widehat{J}_T^2 \left| j_1, j_2, J, M \right\rangle = \hbar^2 J(J+1) \left| j_1, j_2, J, M \right\rangle \tag{1.6}$$

$$\widehat{J}_{z_T} \left| j_1, j_2, J, M \right\rangle = \hbar\, M \left| j_1, j_2, J, M \right\rangle \tag{1.7}$$

Se define el operador de momento angular $\widehat{J}_T$ como se muestra en (1.5). En la base colectiva(en azul) que es la base de vectores propios del operador de momento angular total y momento angular total en la dirección z, se cumplen las relaciones (1.6 - 1.7). Se desea conocer los valores propio de los operadores totales y como escribir la base colectiva como combinación lineal de la base individual.

$$M_{\max} = j_1 + j_2 \tag{1.8}$$

$$|j_1 - j_2| \leq J \leq j_1 + j_2 \tag{1.9}$$

$$M \in \{-(j_1+j_2), -(j_1+j_2-1), \ldots, 0, \ldots, (j_1+j_2-1), j_1+j_2\} \tag{1.10}$$

$$J \in \{0 \text{ ó } 1/2, \ldots, j_1+j_2-1, j_1+j_2\} \tag{1.11}$$

Los valores propios de $\widehat{J}_T$ y $\widehat{J}_{z_T}$ estan dados por (1.10 - 1.11), que son una consecuencia directa de (1.8 - 1.9) por teoría del momento angular.

$$\widehat{J}_{z_T} \left| j_1, j_2, m_1, m_2 \right\rangle = \hbar(m_1+m_2) \left| j_1, j_2, m_1, m_2 \right\rangle \tag{1.12}$$

$$|j_1, j_2, j_1 + j_2, j_1 + j_2\rangle = |j_1, j_2, j_1, j_2\rangle \tag{1.13}$$

De (1.12) se observa que el vector propio del máximo valor $m_1 + m_2$ ya es vector propio de la base colectiva, con $M = j_1 + j_2$. De este vector propio se puede construir el resto de vectores propios con el mismo momento angular total por medio del operador escalera.

$$\widehat{J}^{\pm} = \widehat{J}_1^{\pm} + \widehat{J}_2^{\pm} \tag{1.14}$$

$$\widehat{J}^{\pm} |j_1, j_2, J, M\rangle = \hbar\sqrt{J(J+1) - M(M \pm 1)}\, |j_1, j_2, J, M \pm 1\rangle \tag{1.15}$$

$$\widehat{J}^{-} |j_1, j_2, j_1 + j_2, j_1 + j_2\rangle = \hbar\sqrt{2(j_1 + j_2)}\, |j_1, j_2, j_1 + j_2, j_1 + j_2 - 1\rangle \tag{1.16}$$

$$\widehat{J}^{-} |j_1, j_2, j_1 + j_2, j_1 + j_2\rangle = (\widehat{J}_1^{\pm} + \widehat{J}_2^{\pm})\, |j_1, j_2, j_1, j_2\rangle = \hbar\sqrt{2j_1}\, |j_1, j_2, j_1 - 1, j_2\rangle + \hbar\sqrt{2j_2}\, |j_1, j_2, j_1, j_2 - 1\rangle \tag{1.17}$$

Los operadores escalera se definen en (1.14 - 1.16). En la linea (1.16) se aplica la definición para la base colectiva. En la línea (1.17) se utiliza la representación en la base individual del vector propio de la base colectiva que se conoce $M = j_1 + j_2$ y se actuá el operador escalera sobre él.

$$|j_1, j_2, j_1 + j_2, j_1 + j_2 - 1\rangle = \sqrt{\frac{j_1}{j_1 + j_2}}\, |j_1, j_2, j_1 - 1, j_2\rangle + \hbar\sqrt{\frac{j_2}{j_1 + j_2}}\, |j_1, j_2, j_1, j_2 - 1\rangle \tag{1.18}$$

Aplicando el operador escalera varias veces se puede obtener todos los vectores propios de $J = j_1 + j_2$. Para $J = j_1 + j_2 - 1$ se sabe lo siguiente:

$$|j_1, j_2, j_1 + j_2 - 1, j_1 + j_2 - 1\rangle = \alpha\, |j_1, j_2, j_1 - 1, j_2\rangle + \beta\, |j_1, j_2, j_1, j_2 - 1\rangle \tag{1.19}$$

Para determinar los coeficientes α y β se observa que este debe ser ortogonal a cualquier vector del subespacio con con $J = j_1 + j_2$ y en particular con el que tiene $M = j_1 + j_2 - 1$. Aprovechando esto sigue que:

$$\langle j_1, j_2, j_1 + j_2 - 1, j_1 + j_2 - 1 | j_1, j_2, j_1 + j_2 -, j_1 + j_2 - 1\rangle = 0 \tag{1.20}$$

$$\alpha\sqrt{\frac{j_1}{j_1 + j_2}} + \beta\sqrt{\frac{j_2}{j_1 + j_2}} = 0 \tag{1.21}$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = 1 \tag{1.22}$$

No se pierde información exigiendo que los coeficientes α y β sean reales. Con exigir esto y la condición de normalización se puede obtener los valores de α y β. Conociendo este vector se puede usar nuevamente el operador escalera para obtener el resto de vectores del subespacio con $J = j_1 + j_2 - 1$. El resto de subespacios se obtienen de forma análoga. Los valores de los coeficientes que acompañan la base individual al expresar la base colectiva como combinación lineal de ellos se les conoce como los coeficientes de Clebsch Gordan.

$$\textbf{Si } m_1 + m_2 \neq M \longrightarrow \textbf{Coeficiente} = 0 \tag{1.23}$$

La relación (1.23) permite saber sin hacer cálculos si un coeficiente de Clebsch Gordan va a ser nulo. Si un vector de la base individual tiene números m_1 y m_2 que no suman el valor de M inmediatamente se sabe que el coeficiente de Clebsch Gordan de ese ket es 0.

1.1 Ejemplo: $J_1 = J_2 = 1/2$

$$|1/2, 1/2, 1, 1\rangle = |1/2, 1/2, 1/2, 1/2\rangle \tag{1.24}$$

Se comienza con el máximo valor de M que para este caso es $M = 1$.

$$\widehat{J}^- \, |1/2, 1/2, 1, 1\rangle = \hbar\sqrt{2}\, |1/2, 1/2, 1, 0\rangle \tag{1.25}$$

$$\widehat{J}^- \, |1/2, 1/2, 1, 1\rangle = J^- \, |1/2, 1/2, 1/2, 1/2\rangle = \hbar \, |1/2, 1/2, -1/2, 1/2\rangle + \hbar \, |1/2, 1/2, 1/2, -1/2\rangle \tag{1.26}$$

Aplicando el operador escalera sobre las expresiones en representación individual y colectiva se obtiene las relaciones (1.25) y (1.26).

$$|1/2, 1/2, 1, 0\rangle = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \left[\, |1/2, 1/2, -1/2, 1/2\rangle + |1/2, 1/2, 1/2, -1/2\rangle \,\right] \tag{1.27}$$

Despejando se obtiene el ket $|1/2, 1/2, 1, 0\rangle$ en (1.27).

$$|1/2, 1/2, 1, -1\rangle = |1/2, 1/2, -1/2, -1/2\rangle \tag{1.28}$$

1.2 Ejemplo: $J_1 = J_2 = 1$