Centroide de una Placa Uniforme en Forma de Triangulo Equilatero

Método 1: Integral Doble

Tome el marco de referencia en la mitad de uno de los lados del triangulo equilatero. Se observa que la región de integración está definida por las siguientes ecuaciones:

$$-\frac{a}{2} \leq x \leq \frac{a}{2} \tag{1}$$

$$0 \leq y \leq \left(\frac{a}{2} - |x|\right) \tan 60 \tag{2}$$

La integral para el centro de masa en la posición y es dada por:

$$\bar{y} = \frac{1}{A} \int_{-a/2}^{a/2} \int_{0}^{\left(\frac{a}{2}-|x|\right)\tan 60} y \; dydx \tag{3}$$

$$\int_{-a/2}^{a/2} \int_{0}^{\left(\frac{a}{2}-|x|\right)\tan 60} y \; dydx = \frac{1}{2} \int_{-a/2}^{a/2} \left(\frac{a}{2} - |x|\right)^2 (\tan 60)^2 dx = \frac{3}{2} \int_{-a/2}^{a/2} \left(\frac{a}{2} - |x|\right)^2 dx \tag{4}$$

Donde se uso $(\tan 60)^2 = 3$. Se observa que el integrando es una función par por lo que se tiene:

$$\frac{3}{2} \int_{-a/2}^{a/2} \left(\frac{a}{2} - |x|\right)^2 dx = 3 \int_{0}^{a/2} \left(\frac{a}{2} - |x|\right)^2 dx = 3 \int_{0}^{a/2} \left(\frac{a}{2} - x\right)^2 dx \tag{5}$$

Usando el cambio de variable $u = \frac{a}{2} - x$ se obtiene:

$$3 \int_{0}^{a/2} \left(\frac{a}{2} - x\right)^2 dx = 3 \int_{0}^{a/2} u^2 du = \frac{a^3}{8} \tag{6}$$

Por lo que finalmente se obtiene el centro de masa dividiendo por el área que es $A = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$:

$$\bar{y} = \frac{a}{2\sqrt{3}} \tag{7}$$

Para la posición en x:

$$\bar{x} = \frac{1}{A} \int_{-a/2}^{a/2} \int_{0}^{\left(\frac{a}{2}-|x|\right)\tan 60} x \; dydx = \frac{1}{A} \int_{-a/2}^{a/2} \left(\frac{a}{2} - |x|\right) x \tan 60 \; dx = 0 \tag{8}$$

Donde se uso que la ultima integral tiene integrando impar.

Método 2: Una sola Integral

El problema se puede pensar como sumar rectángulos de ancho infinitesimal. El área de cada rectángulo es $dA = 2x'dy$, donde x' es dado por $x' = a/2 - x$ y $x' \tan 60 = y$. Es decir x' es una distancia sobre una cara del triangulo equilatero, medida desde un vértice. x es la distancia del centro de esa cara del triangulo al punto x'. Entonces $2x$ es el largo de nuestros rectángulos a integrar. La altura corre desde 0 hasta la altura del triangulo, $\sqrt{3}a/4$. Por lo que la doble integral se reduce a la siguiente simple integral:

$$\bar{y} = \frac{1}{A} \int \int y \; dA = \frac{1}{A} \int_{0}^{\frac{\sqrt{3}}{2}a} \left(a - \frac{2y}{\tan 60}\right) y \; dy = \frac{a}{2\sqrt{3}} \tag{9}$$