Física Moderna
Solución Taller Semana 9

1 Velocidad de grupo: Pulsos de agua

Si usted tira una piedra a un lago, se va a crear un pulso de ondas circulares que se propagan hacia afuera del punto de perturbación. Sin embargo si usted observa bien notara que algunas se moverán hacia adentro de la propagación circular. Explique dicho fenómeno basado en que la velocidad de grupo de dichas ondas está dada por la siguiente relación:

$$v_p = \sqrt{\frac{2\pi S}{\lambda\rho}}$$

donde S es la tensión superficial y ρ es la densidad del liquido.

Solución

La velocidad de fase es $v_p = \omega/k$, por lo que:

$$\begin{aligned} v_g &= \frac{d\omega}{dk} \\ &= v_p + k\frac{dv_p}{dk} \\ &= v_p + k\frac{d}{dk}\sqrt{\frac{kS}{\rho}} \\ &= \frac{3}{2}v_p \end{aligned}$$

Donde se uso $k = 2\pi/\lambda$. Notamos entonces que:

$$v_g > v_p$$

Por lo que el pulso viaja más rápido que las ondas individuales por lo que se ve como que se movieran hacia adentro relativo al pulso de las ondas.

---

2 Electrón libre

Un electrón tiene velocidad v_0 NO relativista. Muestre que la velocidad de grupo del electrón es $v_g = v_0$.

Solución

La energía de un electrón libre no relativista es:

$$E = \frac{(\hbar k)^2}{2m_e}$$

Donde $p = \hbar k$. También tenemos que $E = \omega\hbar$. Luego:

$$\omega = \frac{\hbar}{2m_e}k^2$$

Utilizando $v_g = d\omega/dk$:

$$v_g = \frac{\hbar k}{m_e} = \frac{p}{m_e}$$

Notamos que $p/m_e = v = v_0$ (es un electrón libre por lo que su velocidad no cambia).

---

3 Electrón libre relativista

La relación de dispersión para un electrón libre relativista está dada por:

$$\omega(k) = \sqrt{c^2k^2 + (m_e c^2/\hbar)^2} \tag{1}$$

Obtenga una expresión para la velocidad de grupo v_g y de fase v_p. Muestre que el producto de dichas cantidades es constante. Del resultado comente que le pasa a v_g si $v_p > c$.

Solución

La velocidad de grupo es:

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{kc^2}{\sqrt{k^2c^2 + (m_e c^2/\hbar)^2}}$$

Y la velocidad de fase es:

$$v_p = \frac{\omega}{k} = \frac{\sqrt{c^2k^2 + (m_e c^2/\hbar)^2}}{k}$$

Es fácil ver que $v_g v_p = c^2$. Por lo tanto si $v_p > c$ entonces $v_g < c$.

---

4 Humano Extra-dimensional

Nicolas Jaar es un humano que vive en un universo donde $h = 2\pi J \cdot s$. Él tiene una masa de 2.0 kg y inicialmente se sabe que se encuentra en una región de 1.0 m de largo.

1. ¿Cuál es la mínima incertidumbre de su velocidad?
2. Asumiendo que la incertidumbre de su velocidad va a durar 5.0 s, determine la incertidumbre de su posición luego de ese tiempo.

Solución

1. Tenemos que $\Delta p = m\Delta v$ por lo que:

$$\Delta x \Delta p = m \Delta x \Delta v \geq \frac{\hbar}{2}$$

Despejando obtenemos:

$$\Delta v \geq \frac{h}{4\pi m \Delta x} = 0.25\text{m/s}$$

2. El humano se podría mover $\Delta v/t = (0.25\text{m/s})/(5\text{s}) = 1.25\text{m}$ más. Por lo que su incertidumbre en la posición se convierte en:

$$\Delta x = \Delta x_0 + \Delta v/t = 2.25\text{m}$$

---

5 Detectores gamma

Un núcleo excitado con una vida media de 0.1 ns emite un rayo γ con energía de 2.00 MeV. Si los mejores detectores gamma pueden medir energías de ± 5 eV, ¿pueden estos detectores medir el ancho de energía (ΔE) para dicha emisión?

Solución

Calculamos el ancho de energía con la relación de incertidumbre para energía:

$$\Delta E \geq \frac{\hbar}{2\Delta t} = 3.29 \times 10^{-6}\text{eV}$$

El ancho entonces es mucho menor a la resolución de los detectores, por lo cual es imposible medirlo con ellos directamente.

---

6 Grosor natural de las lineas espectrales

Las lineas de un espectro tienen un grosor. Este grosor en varios casos es causado por el efecto doppler. Sin embargo existe también un grosor asociado a que las transiciones ocurren en un tiempo finito, lo cual da una incertidumbre intrínseca. Para transiciones atómicas la vida media para que ocurra una transición es $\tau = 10^{-8}s$.

1. Calcule la incertidumbre de energía para una transición.
2. La incertidumbre de la longitud de onda $\Delta\lambda$ de una transición de un estado excitado E al fundamental E_1 es:
$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} \approx \frac{\Delta E}{E - E_1}$$
Calculela para la transición 2→1 del átomo de hidrógeno.

Solución

1. Usando el principio de incertidumbre:
$$\Delta E \geq \frac{h}{\tau} = 10^{-7}\text{eV}$$
2. Reemplazando los valores para un átomo de hidrógeno en la transición 2 a 1:
$$\Delta\lambda = 1.19 \times 10^{-15} \text{ m} = 1.19 \text{ pm}$$