C.Física Moderna: Solución Taller 6

Ley de Bragg, efecto Compton, efecto fotoeléctrico y ley de Stefan Boltzmann

1. Efecto Compton: Teoría

Describa el efecto Compton. Precisamente el escenario inicial y final. Luego escriba las condiciones de conservación de energía y momento para el experimento de Compton.

Solución

En el efecto Compton se tiene inicialmente un electrón en reposo y un fotón viajando hacia el electrón. Ambos colisionan y luego el electrón obtiene energía cinética y el fotón pierde energía. Al perder energía, la longitud de onda del fotón aumenta. Es importante notar que el cambio de longitud de onda depende únicamente del ángulo de dispersión del fotón. Por lo tanto se tiene la siguiente energía inicial:

$$E_i = m_e c^2 + \frac{hc}{\lambda_i}$$

Y final:

$$E_f = \sqrt{(m_e c^2)^2 + (\vec{p}_e c)^2} + \frac{hc}{\lambda_f}$$

Para el momento se tiene:

$$\vec{p}_i = \frac{h}{\lambda_i}\hat{\imath}$$

Y el momento final es:

$$\vec{p}_f = \left(|\vec{p}_e|\cos\phi + \frac{h}{\lambda_i}\cos\theta\right)\hat{\imath} + \left(|\vec{p}_e|\sin\phi - \frac{h}{\lambda_i}\sin\theta\right)\hat{\jmath}$$

---

2. Efecto Compton

En un experimento particular de efecto Compton se encuentra que la longitud de onda incidente λ_1 cambia en un 1.5 % cuando el ángulo de desplazamiento es $\theta = 120°$.

1. ¿Cuál es el valor de λ_1?
2. ¿Cuál será la longitud de onda del fotón dispersado cuando el ángulo sea de 75°? Asuma que la luz que incide tiene la longitud de onda calculada en el inciso anterior.

Solución

1.1 De la ecuación de efecto Compton se puede calcular el cambio de longitud de onda:

$$\lambda_2 - \lambda_1 = \frac{h}{mc}(1 - \cos\theta)$$

El cambio porcentual de la longitud de onda nos dice que:

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda_1} = 0.015$$

Juntando ambas ecuaciones se obtiene:

$$\lambda_1 = \frac{1}{0.015}\frac{h}{mc}(1 - \cos\theta) = 0.243\text{nm}$$

1.2 Se despeja λ_2 de la ecuación de efecto Compton con ángulo de $\theta = 75°$:

$$\lambda_2 = \lambda_1 + \frac{h}{mc}(1 - \cos\theta) = 0.245\text{nm}$$

---

3. Distancia interplanar de una muestra cristalina

En un experimento de difracción de rayos X ($\lambda = 0.1542$ nm) estos inciden sobre una muestra cristalina y como resultado el ángulo de dispersión primario es de $\theta = 19,3°$. Determinar la distancia interplanar de la muestra cristalina.

Solución

Se despeja d de la ley de Bragg:

$$d = \frac{\lambda}{2\sin\theta} = 0.233\text{nm}$$

---

4. Difracción de segundo orden

Un cristal difractan rayos X. El espectro de primer orden corresponde a un ángulo de 6.5° y la distancia entre planos es de 2.81×10^{-10} m. Determinar la longitud de onda de los rayos X y la posición del espectro de segundo orden.

Solución

La longitud de onda se calcula con la ley de Bragg a primer orden.

$$\lambda = 6.69 \times 10^{-11}\text{m}$$

La posición del espectro a segundo orden se obtiene con la ley de Bragg con $n = 2$:

$$\theta = \arcsin\left(\frac{2\lambda}{2d}\right) = 13.46°$$

---

5. Efecto fotoéléctrico

El emisor de un tubo fotoeléctrico tiene una longitud de onda umbral $\lambda_0 = 6000\text{Å}$. Calcular la longitud de onda de la luz incidente sobre el tubo si el potencial de frenado para esta luz es 2.5 V.

Solución

De acuerdo a la teoría del efecto fotoeléctrico, la longitud de onda umbral me permite calcular la función trabajo del material:

$$K_{\text{max}} = \frac{hc}{\lambda} - \phi_0$$

Ya que si $K_{\text{max}} = 0$, entonces los fotoelectrones apenas se desprenden de la superficie del metal y $\lambda = \lambda_0$ (Longitud de onda Umbral). Por lo tanto podemos calcular la función trabajo mediante:

$$\phi_0 = \frac{hc}{\lambda_0} = 2.068eV$$

Dado que el potencial de frenado es una medida de la energía cinética máxima de los fotoelectrones, tenemos que $K_{\text{max}} = e\Delta V$ (donde e es la carga de un electrón). Con esto tenemos la ecuación para la longitud de onda dada por:

$$e\Delta V = \frac{hc}{\lambda} - \phi_0$$

Despejando se obtiene:

$$\lambda = \frac{hc}{e\Delta V + \phi_0} = 2716.3\text{Å}$$

---

6. Ley de Stefan Boltzmann

Para la radiación de cuerpo negro se tiene una radiancia espectral dada por:

$$u(\lambda, T) = \frac{8\pi hc\lambda^{-5}}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1}$$

- Muestre que la densidad de energía total en una cavidad de cuerpo negro es proporcional a T^4. De una expresión explicita para la constante de proporcionalidad α:

  $$u(T) = \alpha T^4$$

- Utilice la densidad de energía irradiada para obtener la ley de Stefan Boltzmann:

  $$I = \sigma T^4$$

  De la expresión para σ(déjela expresada, no encuentre el valor numérico).

Solución

La densidad de energía se obtiene integrando:

$$u(T) = 8\pi hc \int_{\mathbb{R}^+} \frac{\lambda^{-5}}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1} d\lambda$$

Para calcular se usa la sustitución $x = \frac{hc}{\lambda kT}$. Por lo que el diferencial es $dx = -\frac{hc}{\lambda^2 kT} d\lambda$. Se puede tomar con signo y luego cambiar los límites de integración o usando el valor absoluto del diferencial y manteniendo el sentido de integración se obtiene:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^+} \frac{\lambda^{-5}}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1} d\lambda &= \int_{\mathbb{R}^+} \frac{\lambda^{-5}}{e^x - 1} \left(\frac{\lambda^2 kT}{hc} \right) dx \\
&= \frac{kT}{hc} \int_{\mathbb{R}^+} \frac{\lambda^{-3}}{e^x - 1} dx \\
&= \frac{kT}{hc} \int_{\mathbb{R}^+} \frac{\left(\frac{kTx}{hc} \right)^3}{e^x - 1} dx \\
&= \frac{kT}{hc} \left(\frac{kT}{hc} \right)^3 \int_{\mathbb{R}^+} \frac{x^3}{e^x - 1} dx \\
&= \left(\frac{kT}{hc} \right)^4 \int_{\mathbb{R}^+} \frac{x^3}{e^x - 1} dx
\end{aligned}$$

Finalmente usando la integral dada se obtiene:

$$u(T) = \frac{8\pi^5 k^4}{15 h^3 c^3} T^4$$

De donde se distingue la constante de proporcionalidad:

$$\alpha = \frac{8\pi^5 k^4}{15 h^3 c^3}$$

Ahora para la intensidad se utiliza su relación con la densidad de energía irradiada:

$$I = \frac{c}{4} u$$

Usando la expresión de la densidad se obtiene la siguiente fórmula para la intensidad:

$$I = \frac{2\pi^5 k^4}{15 h^3 c^2} T^4$$

Distinguimos σ como la constante de proporcionalidad y calculamos su valor numérico:

$$\sigma = 5.67 \times 10^{-8} \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m^2 K^4}}$$

Fórmulas útiles

Efecto Compton:

$$\lambda_f - \lambda_i = \frac{h}{mc}(1 - \cos\theta)$$

Ley de Bragg

$$n\lambda = 2d\sin\theta$$

Energía de un fotón con frecuencia ν:

$$E = h\nu$$

Función de trabajo

$$K_{\max} = h\nu - \phi$$

Integral útil $\int_0^\infty \frac{x^3}{e^x-1} = \frac{\pi^4}{15}$.