Física Moderna
Solución Taller 9

1 Modelo para un átomo como un electrón en una caja

Cierto átomo requiere 3 eV de energía para excitar un electrón desde el nivel fundamental al primer nivel excitado. Modele el átomo como un electrón en una caja 1D y calcule el ancho L de la caja

Solución

Se calcula la diferencia de energía entre el primer y segundo nivel de energía:

$$\Delta E = E_2 - E_1 = (4-1)\frac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2} \tag{1}$$

Se desepeja L:

$$L = \sqrt{\frac{3\pi^2\hbar^2}{2m\Delta E}} = 6.14\mathring{A}$$

---

2 Problema inverso: Obtener el potencial a partir de la función de onda

En una región del espacio, una partícula tiene una función de onda dada por:

$$\psi(x) = A\exp\left(-\frac{x^2}{2L^2}\right)$$

Y energía dada por:

$$E = \frac{\hbar^2}{2mL^2}$$

Donde L representa una longitud.

1. Calcule la energía potencial como una función de x.
2. Esboce un gráfico de $V(x)$ vs x.

Solución

2.1 Se despeja de la ecuación de Schrodinger el potencial:

$$V(x) = E + \frac{\hbar^2}{2m\psi(x)}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2}$$

Al calcular la derivada y reemplazar el valor de la energía se obtiene:

$$V(x) = \frac{\hbar^2 x^2}{2mL^4}$$

2.2 La gráfica es una parábola con concavidad positiva.

---

3 Electrón en un pozo cuadrado infinito 1D

Un electrón que se mueve en un pozo cuadrado infinito unidimensional está atrapado en el estado $n = 5$.

1. Calcule la probabilidad de encontrar el electrón entre $x = 0.2L$ y $x = 0.4L$.
2. Calcule la probabilidad de hallar el electrón dentro de un ancho $\Delta x = L/100$ en $x = L/2$. Es decir calcule la probabilidad de encontrar el electrón en el intervalo $(x - \frac{\Delta x}{2}, x + \frac{\Delta x}{2})$

Solución

3.1 La probabilidad se calcula haciendo la siguiente integral:

$$P(0.2L < x < 0.4L) = \int_{0.2L}^{0.4L} |\psi_5(x)|^2 dx = 0.2$$

3.2 Se repite la integral anterior pero con limites distintos:

$$P(0.01L - \frac{\Delta x}{2} < x < 0.01L + \frac{\Delta x}{2}) = \int_{0.01L-\frac{\Delta x}{2}}^{0.01L+\frac{\Delta x}{2}} |\psi_5(x)|^2 dx = 0.01 + \frac{1}{5\pi}\sin(0.05\pi) \approx 0.02$$

---

4 Electrón en un potencial constante

Se tiene una partícula de masa m en una región donde la energía potencial es una constante $V_0 < E$.

1. Demuestre que una solución de la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo para esa partícula esta dada por:
$$\psi(x) = Ae^{ikx}$$
2. Encuentre una expresión para k.
3. Calcule la longitud de onda de DeBroglie para el electrón.

Solución

4.1 Se calcula la segunda derivada:

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = -k^2\psi(x)$$

Reemplazando en la ecuación de Schrodinger vemos que si se cumple la siguiente igualdad, ϕ es solución:

$$\frac{\hbar^2 k^2}{2m} + V_0 = E$$

Note que $\hbar^2k^2/(2m)$ hace el papel de energía cinética y por lo tanto $\hbar k$ de momento.

4.2 De la igualdad despejamos k:

$$k = \frac{1}{\hbar}\sqrt{2m(E - V_0)}$$

4.3 El número de onda lo podemos asociar con una longitud de onda:

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{h}{\sqrt{2m(E - V_0)}}$$
