Universidad de los Andes

Departamento de Física

# Métodos Matemáticos
# Tarea 2 : Distribuciones y Convolución

Profesor : Gabriel Téllez

Semestre 2015-1

Para entregar el martes 10 de marzo de 2015.

## I La distribución $\Delta \ln r$ en dos dimensiones

1. **Preliminares.** En dos dimensiones un vector $\mathbf{r}$ puede representarse por sus coordenadas $(x, y)$, por su coordenada compleja $z = x + iy$ o por sus coordenadas polares $(r, \theta)$. Tenemos $z = re^{i\theta}$ y $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$.

   (a) Demostrar las leyes de transformación de las derivadas parciales

$$\frac{\partial}{\partial x} = \cos\theta \frac{\partial}{\partial r} - \sin\theta \frac{\partial}{r\partial\theta}, \tag{1.1a}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \sin\theta \frac{\partial}{\partial r} + \cos\theta \frac{\partial}{r\partial\theta}, \tag{1.1b}$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right), \tag{1.2a}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right), \tag{1.2b}$$

$$2\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = e^{i\theta}\frac{\partial}{\partial r} + ie^{i\theta}\frac{\partial}{r\partial\theta}, \tag{1.3a}$$

$$2\frac{\partial}{\partial z} = e^{-i\theta}\frac{\partial}{\partial r} - ie^{-i\theta}\frac{\partial}{r\partial\theta}. \tag{1.3b}$$

2. Sea la distribución

$$T = \left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)\frac{1}{x + iy}, \tag{1.4}$$

   en donde la derivada es en el sentido de las distribuciones.

   (a) Calcular $\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{1}{x+iy}\right)$ en el sentido usual de las funciones.

   (b) Expresar la acción de $T$ sobre una función test $\phi(x, y)$, $\langle T, \phi\rangle$ como una integral doble sobre $x$ y $y$.

(c) Para calcular esa integral pasar en coordenadas polares $(r, \theta)$ y demostrar que

$$\langle T, \phi \rangle = 2\pi\phi(0)\,. \tag{1.5}$$

(d) Deducir que

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)\frac{1}{x+iy} = 2\pi\delta \tag{1.6}$$

en el sentido de las distribuciones.

3. **La distribución $\Delta \ln r$.**

(a) Calcular

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)\ln r\,. \tag{1.7}$$

(b) Deducir que

$$\Delta \ln r = 2\pi\delta\,. \tag{1.8}$$

en donde $\Delta = (\partial/\partial x)^2 + (\partial/\partial y)^2$ es el operador laplaciano en dos dimensiones.

4. Si viviéramos en un mundo bidimensional y quisiéramos que las leyes de la electrostática fueran las mismas, en especial la ecuación de Poisson $\Delta\Phi = -\rho/\epsilon_0$, ¿cuál sería el potencial de interacción $\Phi$ entre dos cargas puntuales separadas por una distancia $r$ ?

# II Difusión de una partícula en una dimensión por un potencial delta

Una partícula de masa $m$ se mueve en linea recta por el eje $x$, desde la región $x < 0$ hacia la región $x > 0$. Inicialmente, en la región $x < 0$ la partícula tiene una velocidad $v_0\hat{\mathbf{i}}$ con $v_0 > 0$. En $x = 0$ hay un obstáculo contra el cual choca la partícula. La fuerza que ejerce este obstáculo sobre la partícula deriva de una energía potencial $V(x)$, que en este problema se modela con ayuda de la distribución de Dirac :

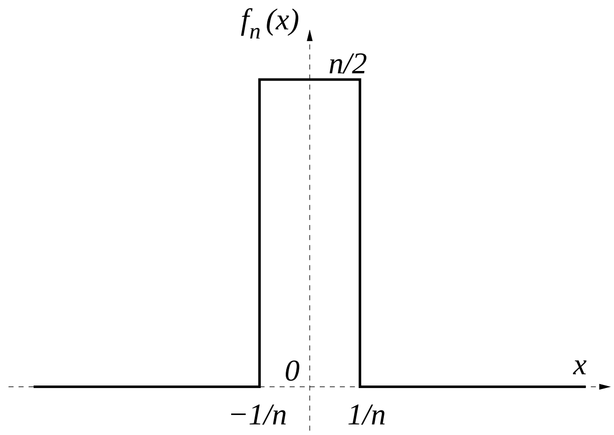
$$V(x) = -\lambda_0\delta(x)\,, \tag{2.1}$$

con $\lambda_0 > 0$.

El objetivo de este problema es entender cómo es el movimiento de la partícula a nivel clásico primero y luego a nivel cuántico. Para esto será necesario resolver las ecuaciones de movimiento (de Newton a nivel clásico y de Schrödinger a nivel cuántico) en las cuales interviene una distribución de Dirac.

## II.1 Movimiento clásico

Para poder lidiar con la distribución de Dirac, en esta parte se propone considerar ésta como el límite de una secuencia "delta" de funciones $(f_n(x))_n$ que convergen hacia $\delta(x)$. Esta secuencia se muestra en la figura. Se considerará inicialmente que la energía potencial es $V_n(x) = -\lambda_0 f_n(x)$.




1. Calcular la fuerza $\mathbf{F}(x) = -\nabla V_n(x)$ correspondiente. Mostrar que la fuerza es cero en casi todo el eje $x$ excepto en dos posiciones particulares que precisará. ¿En qué dirección apunta la fuerza en cada una de esas posiciones ? Explicar cualitativamente lo que le ocurre a la partícula al pasar por esas posiciones.
2. Si la velocidad inicial de la partícula es $v_0$, ¿cuánto vale su energía mecánica $E$ ?
3. Usar la ley de conservación de la energía para determinar la velocidad $v_1$ de la partícula cuando entra en la región $-1/n < x < 1/n$.
4. ¿Cuál es la velocidad de la partícula al salir de esta región y estar en la parte $x > 1/n$ ?
5. Calcular el tiempo $t_1$ que demora la partícula en recorrer la región $-1/n < x < 1/n$.
6. La partícula demora un tiempo $t_1$ en la región $-1/n < x < 1/n$ diferente al tiempo $t_0$ que demoraría la misma partícula si no hubiera ningún obstáculo (situación “libre”). Calcular la diferencia de tiempo $t_1 - t_0$, y deducir el desfase espacial $D$ entre esas dos situaciones, es decir la distancia de ventaja que tendrá la partícula que chocó contra el obstáculo de una que no tenía obstáculo.
7. En el límite $n \to \infty$, cuando el potencial está dado por la distribución de Dirac (2.1), ¿cuánto vale el desfase $D$ ? Es posible o no diferenciar la situación con el obstaculo “delta” de la situación sin obstáculo a nivel clásico ?

## II.2 Descripción cuántica

En mecánica cuántica, la partícula está descrita por una función de onda $\Psi(x,t) = \psi(x)e^{-i\omega t}$, en donde $|\psi(x)|^2\,dx$ da la probabilidad de encontrar la partícula en una posición entre $x$ y $x + dx$. Esta función de onda se encuentra resolviendo la ecuación de Schrödinger. Si la partícula tiene una energía total $E = \hbar\omega$, esta ecuación toma la forma

$$\frac{-\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + V(x)\psi(x) = E\psi(x) \tag{2.2}$$

en donde $V(x)$ es la función de energía potencial, que para este problema es de la forma (2.1).

1. Resuelva la ecuación de Schrödinger (2.2) para la partícula libre ($V(x) = 0$).

2. Dado que la partícula es libre, diga que implica esto sobre el signo de la energía $E$ y explique.
3. Si la partícula viaja de izquierda ($x < 0$) a derecha ($x > 0$), muestre que la solución es de la forma
$$\psi_I(x) = \sqrt{I} e^{ikx} \tag{2.3}$$
donde $I$ es una constante. Encuentre $k$.
4. Considere una onda que viaja de izquierda a derecha ahora con el potencial delta (2.1). Resuelva la ecuación para $x \neq 0$, mirando por separado los dos casos posibles $x > 0$ y $x < 0$. Tome $E > 0$.
5. Interpretando las soluciones como ondas viajeras, muestre que la solución es de la forma
$$\psi(x) = \sqrt{I} e^{ikx} + \sqrt{R} e^{-ikx}, \qquad \text{si } x < 0 \tag{2.4}$$
$$\psi(x) = S(k) e^{ikx}, \qquad \text{si } x > 0. \tag{2.5}$$
¿Qué significado físico tienen cada uno de los términos?
6. La función de onda debe ser continua, por lo que $\psi(0^+) = \psi(0^-)$. Escriba que condición impone esto sobre $I$, $R$ y $S(k)$.
7. Para encontrar la condición faltante se considera el caso $x = 0$. Para esto, integre la ecuación diferencial (2.2) en el intervalo $x \in [-\epsilon, \epsilon]$. Luego tome el límite $\epsilon \to 0^+$, y determine una condición que debe satisfacer $\psi'(0^-)$ y $\psi'(0^+)$.
8. Suponer $I = 1$ y determinar $R$ y $S(k)$.
9. Escriba $S$ de la forma $S(k) = \sqrt{T} e^{i\phi}$. Luego encuentre $T$ y $\phi$ utilizando las condiciones encontradas.
10. Muestre que $T$ no depende del signo de $\lambda_0$.
11. $R$ y $T$ representan los coeficientes de reflexión y transmisión respectivamente. Explique cualitativamente lo que ocurre con la función de onda al llegar al obstaculo en $x = 0$ y contrastar con la situación clásica.
12. $S(k)$ tiene un polo para algún $k$, encuéntrelo.

## III Ecuación integral de Volterra

1. Para $x \geq 0$ consideremos la ecuación integral
$$f(x) + \int_0^x K(x-t) f(t)\, dt = g(x)\,, \tag{3.1}$$
en donde $g(x)$ es una función dada, integrable y nula para $x < 0$, $K(x)$ otra función dada, integrable, llamada núcleo de la ecuación integral, también nula para $x < 0$ y $f(x)$ es la función incógnita, también nula para $x < 0$. Esta ecuación hace parte de un tipo de ecuaciones llamadas ecuaciones integrales de Volterra.

Como podrá notar la ecuación integral (3.1) se puede escribir como una ecuación de convolución en $\mathcal{D}'_+$

$$(\delta + K) * f = g\,, \tag{3.2}$$

y para obtener una solución basta con encontrar el inverso de convolución de $\delta + K$. En el álgebra de números reales (con la multiplicación usual) sabemos que el inverso de $1 + x$ es $(1 + x)^{-1} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n x^n$ si $|x| < 1$. Por analogía, un canditado a ser el inverso de convolución de $\delta + K$ sería

$$B = \delta + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n K^{*n}\,, \tag{3.3}$$

en donde $K^{*n} = K * K * \cdots * K$ es el producto de convolución de $K$ con sí mismo $n$ veces.

(a) Demostrar que si $K$ es una función acotada en todo intervalo $[0, a]$ para $a > 0$, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n K^{*n}\,, \tag{3.4}$$

converge uniformemente en $[0, a]$ y por consiguiente converge en $\mathcal{D}'_+$.

(b) Verificar que $B$ es efectivamente el inverso de $\delta + K$, es decir

$$(\delta + K) * B = \delta\,. \tag{3.5}$$

2. **Aplicación.** Consideremos el caso $K(x) = \exp(\lambda x)$ para $x > 0$ y $K(x) = 0$ si $x < 0$.

(a) Calcular $K * K$ y $K * K * K$.

(b) Calcular $K^{*n}$ para cualquier entero $n > 0$.

(c) Calcular la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n K^{*n}\,, \tag{3.6}$$

y determinar el inverso de convolución de $\delta + K$.

(d) Determinar la solución $f$ de la ecuación integral

$$f(x) + \int_0^x e^{\lambda(x-t)} f(t)\, dt = g(x)\,. \tag{3.7}$$