Universidad de los Andes

Departamento de Física

Métodos Matemáticos

Tarea 3: Series de Fourier

Solución 20151

Profesor: Gabriel Téllez

Autor: LVA

1 Series de Fourier y Funciones de Bessel

1. Se escribe la función f como una serie de fourier con periodo 2π (1).

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{int} \tag{1}$$

Usando el truco de Fourier se obtiene la expresión para los coeficientes (2).

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}dt \tag{2}$$

Utilizando integración por partes $\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$, haciendo $g'(x) = e^{-int}$ y $f(x) = f(t)$ se obtiene la relación (1.3). Esto no se puede utilizar para c_{-1} ya que se estaría dividiendo por 0.

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}dt = \frac{1}{2\pi}\frac{i}{n}f(t)e^{-int}\bigg|_0^{2\pi} + \frac{\alpha}{n}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-i(n-1)t}f(t)dt\right) = \frac{\alpha}{n}c_{n-1} \tag{3}$$

2. Debido a que $f(t) = exp(\alpha e^{it})$ es periodica se tiene que el coeficiente c_{-1}.

$$c_{-1} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{it}dt = \frac{-i}{2\pi\alpha}\int_0^{2\pi}\frac{df(t)}{dt}dt = \frac{-i}{2\pi\alpha}f(t)\bigg|_0^{2\pi} = 0 \tag{4}$$

Otra forma de mostrarlo es pasando a una integral de variable compleja. Sea γ la integral sobre el circulo unitario en el plano complejo, se tiene que:

$$\int_0^{2\pi} e^{\alpha e^{it}}e^{it}dt = -i\oint_\gamma e^{\alpha z}dz \tag{5}$$

Como la función exponencial es holomorfa sobre todo $\mathbb{C}$ esta integral es nula.

3. Por la deducción en el primer punto se tiene que $c_{-2} = -\alpha c_{-1} = 0$. Como la relación sirve para cualquier $n \leq -1$ se tiene que se van anular los coeficientes inferiores.

4. Esta relación se prueba como se muestra en la ecuación (6).

$$c_n = \frac{\alpha}{n}c_{n-1} = \frac{\alpha}{n}\frac{\alpha}{n-1}c_{n-2} = \cdots = \frac{\alpha^n}{n!}c_0 \tag{6}$$

5. Se quiere calcular (7).

$$c_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{\alpha e^{it}} dt \tag{7}$$

Para calcular la integral se nota que esta es equivalente a una integral de variable compleja sobre el cÃrculo unitario γ. Se hace el cambio de variable $z = e^{it}$ y el diferencial queda como $-i\frac{dz}{z} = dt$. Por lo que la integral (7) toma la forma (8). La función a integrar tiene un polo simple en $z = 0$.

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{\alpha e^{it}} dt = -i\frac{1}{2\pi}\int_\gamma \frac{e^{\alpha z}}{z} dz = 2\pi\frac{1}{2\pi}i(-i) = 1 \tag{8}$$

6. La relación de Parseval es (9).

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|^2 \tag{9}$$

Utilizando $|f(t)|^2 = |e^{\alpha\cos t}e^{i\alpha\sin t}|^2 = e^{2\alpha\cos t}$, el hecho que $c_n = 0\ \forall n \leq -1$ y que $c_n = \frac{\alpha^n}{n!}$ para $n \geq 0$. Remplazando en la relación de Parseval se obtiene (10), que es la relación que se pedía encontrar (1.5).

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{2\alpha\cos t} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^{2n}}{(n!)^2} \tag{10}$$

7. La función coseno tomara los mismos valores en los intervalos $[0, \pi]$ y $[\pi, 2\pi]$ pero en distinto orden. Debido a esto se ver la identidad (11). Tambien se puede ver haciendo el cambio de variable $2\pi - u = t$ y notando que $cos(2\pi - u) = cosu$ como en la ecuación (12).

$$\int_0^{2\pi} e^{2\alpha\cos t} dt = 2\int_0^{\pi} e^{2\alpha cost} dt \tag{11}$$

$$\int_0^{\pi} e^{2\alpha\cos t} dt = -\int_{2\pi}^{\pi} e^{2\alpha\cos u} du = \int_{\pi}^{2\pi} e^{2\alpha\cos u} du \tag{12}$$

Utilizando lo anterior, se tiene entonces que la expansión de I_0 está dada por (13), donde se utiliza la expansión que se dedujo con $\alpha = 1/2$.

$$I_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n} \frac{1}{(n!)^2} \tag{13}$$

2 Series de Fourier y la cuerda vibrante

1. La forma de la cuerda es como se muestra en la imagen (Figure 1).

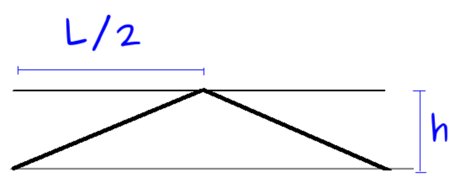

Figure 1: Cuerda

2.

Reemplazando la "ansatz" en la ecuación de onda se obtiene (14) y al simplificar se obtiene la ecuación diferencial temporal (15)

$$-\sum_{n=1}^{\infty} k_n^2 c_n(t)\sin(k_n x) - \frac{1}{c^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d^2 c_n(t)}{dt^2}\sin(k_n x) = 0 \tag{14}$$

$$k_n^2 c_n(t) + \frac{1}{c^2}\frac{d^2 c_n(t)}{dt^2} = 0 \tag{15}$$

Resolviendo la ecuación diferencial se obtienen los $c_n(t)$.

$$c_n(t) = A_n e^{ik_n ct} + B_n e^{-ik_n ct} \tag{16}$$

Como $\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 0$, se tiene que $B_n = A_n$, por lo que la solución toma la forma $c_n(t) = A_n\cos(k_n ct)$. Para determinar los coeficientes A_n se encuentra u_0, como una serie de Fourier. Un método que facilita este proceso consiste en encontrar la transformada de fourier para una función simétrica. Por lo que se define $u(-x) = -u(x)$ y se calcula sobre el nuevo periodo $\frac{1}{2L}$ los coeficientes b_n de esta nueva función.

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} u_0(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx = \frac{2}{L}\int_0^L u_0(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx \tag{17}$$

$$\int_0^L u_0(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx = \int_0^{\frac{L}{2}}\frac{2h}{L}x\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx + \int_{\frac{L}{2}}^{L}\frac{2h}{L}(L-x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx \tag{18}$$

$$\int x\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx = -x\left(\frac{L}{n\pi}\right)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + \int\left(\frac{L}{n\pi}\right)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx \tag{19}$$

$$\int x\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx = -x\left(\frac{L}{n\pi}\right)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + \left(\frac{L}{n\pi}\right)^2\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \tag{20}$$

$$\int_0^{\frac{L}{2}} x\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx - \int_{\frac{L}{2}}^{L} x\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx = -\left(\frac{L^2}{n\pi}\right)\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{2L^2}{n^2\pi^2}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{L^2}{n\pi}\cos(n\pi) \tag{21}$$

$$\int_{\frac{L}{2}}^{L}\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx = \left(\frac{L}{n\pi}\right)\left(\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \cos(n\pi)\right) \tag{22}$$

$$b_n = h\frac{8}{n^2\pi^2}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \tag{23}$$

Por lo que $A_n = b_n$ y $k_n = \frac{n\pi}{L}$. Entonces la serie de fourier de la función $u_0(x)$ esta dada por la ecuación (24).

$$u_0(x) = \frac{8h}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \tag{24}$$

Esta serie se puede encontrar numericamente en el enlace:
`http://nbviewer.ipython.org/github/lucasvarela/MetodosMatematicos/blob/master/TareaMetodosMatematicos_SerieFourierTriangulo.ipynb`