Universidad de los Andes

DEPARTAMENTO DE FÍSICA

MÉTODOS MATEMÁTICOS
TAREA 3 : SERIES DE FOURIER

Profesor : Gabriel Téllez

Semestre 2015-1

Para entregar el jueves 26 de marzo de 2015

I Series de Fourier y funciones de Bessel

Como veremos en próximos capítulos, cuando se trata de resolver algunas ecuaciones de la física, como por ejemplo la ecuación de Laplace, en un sistema que posee una simetría cilíndrica, la solución se expresa en términos de ciertas funciones especiales llamadas funciones de Bessel. Una de ellas llamada función de Bessel modificada de orden 0 tiene la representación integral siguiente

$$I_0(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} e^{x \cos t} \, dt \,. \tag{1.1}$$

En este problema nos proponemos encontrar el desarrollo en serie de Taylor de I_0 alrededor de cero, usando algunas propiedades de las series de Fourier.

Para ello consideremos la función

$$f(t) = \exp(\alpha e^{it}) \,. \tag{1.2}$$

en donde α es un parámetro real cualquiera. La función f es periódica de periodo 2π y por lo tanto se puede desarrollar en serie de Fourier.

1. Usando una integración por partes adecuada, demostrar la relación de recurrencia entre los coeficientes c_n de Fourier de f

$$c_{n+1} = \frac{\alpha}{n+1} c_n \,, \qquad \text{para } n \neq -1 \,. \tag{1.3}$$

2. Calcular directamente c_{-1} y mostrar que vale cero.
3. Deducir que para $n \leq -1$, $c_n = 0$.
4. Usando la relación de recurrencia, mostrar que para $n \geq 0$,

$$c_n = \frac{\alpha^n}{n!} c_0 \,. \tag{1.4}$$

5. Calcular c_0 usando métodos de variable compleja, o por otro método si prefiere.
6. Usar la relación de Parseval para demostrar la relación

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{2\alpha \cos t} \, dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha^{2n}}{(n!)^2} \,. \tag{1.5}$$

7. Deducir el desarrollo en serie de Taylor de $I_0(x)$ alrededor de $x = 0$.

II Series de Fourier y la cuerda vibrante

Una cuerda de largo L está extendida a lo largo del eje x y está fija en sus dos extremos $x = 0$ y $x = L$. Sea $u(x,t)$ la posición vertical del punto x de la cuerda en el instante t. Las vibraciones de la cuerda satisfacen la ecuación de onda lineal

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0\,. \tag{2.1}$$

Inicialmente, en $t = 0$, la forma de la cuerda está dada por $u(x,0) = u_0(x)$ con

$$u_0(x) = \begin{cases} \frac{2h}{L}\,x\,, & 0 \le x \le L/2 \\ \frac{2h}{L}\,(L-x) & L/2 \le x \le L \end{cases} \tag{2.2}$$

y no tiene velocidad inicial $\partial u(x,0)/\partial t = 0$.

1. Dibujar $u(x,0)$.
2. Encontrar la forma de la cuerda para $t > 0$, solucionando la ecuación de onda (2.1). Para esto, buscar la solución bajo la forma de una serie de Fourier

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t)\sin(k_n x)\,. \tag{2.3}$$

   Remplazar este *ansatz* en la ecuación de onda y determinar así cuánto valen los coeficientes $c_n(t)$ y los números de onda k_n. Usando la condición inicial dar la forma explícita de los $c_n(t)$.