Universidad de los Andes

Departamento de Física

Métodos Matemáticos

Tarea 4: Transformada de Fourier

Solución

Profesor: Gabriel Téllez

Autor: LVA

I Ecuación de difusión de calor

1. Usando la propiedad que relaciona la transformada de Fourier de la enésima derivada de una función con la transformada de Fourier de la función sin derivar, dada por la ecuación 1 se obtiene que la transformada del laplaciano es dada por la relación 2. Utilizando esta última relación se obtiene la ecuación que verifica a $\hat{f}$, la ecuación 3.

$$\mathcal{F}\left\{\frac{\partial^n f}{\partial x_i^n}(\boldsymbol{r},t)\right\}(\boldsymbol{\nu},t) = (2\pi i \nu_i)^n \hat{f}(\boldsymbol{\nu},t) \tag{1}$$

$$\mathcal{F}\left\{\Delta f(\boldsymbol{r},t)\right\} = -4\pi^2|\boldsymbol{\nu}|^2\hat{f}(\boldsymbol{\nu},t) \tag{2}$$

$$\frac{\partial \hat{f}}{\partial t}(\boldsymbol{\nu},t) = -4\pi^2 D|\boldsymbol{\nu}|^2\hat{f}(\boldsymbol{\nu},t) \tag{3}$$

2. La ecuación 3 se puede solucionar con el metodo de separación de variables. Se integra desde $t=0$ hasta $t=t$.

$$\int_0^t \frac{d\hat{f}}{\hat{f}} = -\int_0^t 4\pi^2 D|\boldsymbol{\nu}|^2\, dt \tag{4}$$

$$\hat{f}(\boldsymbol{\nu},t) = \hat{f}_0 e^{-4\pi^2 D|\boldsymbol{\nu}|^2 t} \tag{5}$$

3. Tanto $\hat{f}_0$ como la gaussiana dependen de $\boldsymbol{\nu}$. Utilizando la propiedad de la transformada de Fourier de un producto se puede expresar f como una convolución de $f_0(\boldsymbol{r})$ con $G(\boldsymbol{r},t)$ dada por la ecuación 6, donde $G(\boldsymbol{r},t)$ viene siendo la transformada de la gaussiana 7.

$$f(\boldsymbol{r},t) = \int_{\mathbb{R}^3} f_0(\boldsymbol{r'})G(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r'},t)d\boldsymbol{r'} \tag{6}$$

$$G(\boldsymbol{r},t) = \overline{\mathcal{F}}\left\{e^{-4\pi^2 D|\boldsymbol{\nu}|^2 t}\right\} = \int_{\mathbb{R}^3} e^{-4\pi^2 D|\boldsymbol{\nu}|^2 t} e^{2\pi i \boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{r}} d\boldsymbol{r} \tag{7}$$

4. Utilizando la fórmula para la tranformada de Fourier de una gaussiana en n dimensiones, con $\lambda = \sqrt{4\pi Dt}$, se obtiene una expresión explicita para G dada por 8.

$$G(\boldsymbol{r}, t) = \frac{e^{-\frac{\boldsymbol{r^2}}{4Dt}}}{(4\pi Dt)^{\frac{3}{2}}} \tag{8}$$

5. Como el delta de Dirac es el elemento neutro de convolución, se tiene que $f(\boldsymbol{r}, t) = G(\boldsymbol{r}, t)$.

6. El largo caracteristico es definido como la longitud que se requiere para que la temperatura disminuya a $e^{-1}\%$ de su valor máximo. En vista esto se tiene que $\boldsymbol{r}_c(t) = 2\sqrt{Dt}$.

II Espectroscopía por transformada de Fourier

1. Si se quiere que se cumpla $J(-k) = J(k)$ por lo que se debe tener Deltas centrados en $-k_1$ y $-k_2$. Esto explica por que se deben agregar los dos Deltas centrados en dichas posiciones.

2. Al insertar la función $J(k)$ en la expresión para $I(x)$ se obtiene la relación 9.

$$I(x) = I_0 + 2C(\cos(k_1 x) + \cos(k_2 x)) \tag{9}$$

3. Utilizando la fórmula de suma de cosenos con $q = k_1 x$ y $q = k_2 x$ se obtiene la intensidad luminosa como un producto de cosenos 10.

$$I(x) = I_0 + 4C cos\left(\frac{k_1 + k_2}{2} x\right) cos\left(\frac{k_1 - k_2}{2} x\right) \tag{10}$$

4. Como se puede ver en la figura 1, el periodo entre mínimos va como el inverso de la frecuencia envolvente que es la frecuencia menor. En este caso la frecuencia envolvente es Δk. Por lo que esta se puede determinar con la relación 11.

$$\delta x = \frac{2\pi}{\Delta k} \tag{11}$$

5. $W(k) * \delta(k - k') = W(k - k')$. Esto dice que al convolucionar estas dos funciones, se desplaza la función ventana al centro del delta de Dirac. Por lo que se tendrian 4 funciones ventana centradas alrededor de $k_1, k_2, -k_1$ y $-k_2$. Este es el modelo propuesto.

6. Primero se evalua la transformada de Fourier dada por la ecuación 12. Utilizando ese resultado para los 4 k's diferentes se obtiene la ecuación 13 que puede ser simplificada a la forma 14 utilizando la relación para la suma de cosenos.

$$\int_{\mathbb{R}} W(k - k') e^{ikx} dk = \int_{k' - \frac{\delta k}{2}}^{k' + \frac{\delta k}{2}} e^{ikx} dk = \frac{1}{ix} e^{ik'x} \left(e^{i\frac{\delta k}{2}x} - e^{-i\frac{\delta k}{2}x}\right) = \frac{2}{x} e^{ik'x} \sin\left(\frac{\delta k}{2} x\right) \tag{12}$$

$$I(x) = I_0 + \frac{2C}{x}\left(e^{ik_1 x} + e^{-ik_1 x} + e^{ik_2 x} + e^{-ik_2 x}\right) \sin\left(\frac{\delta k}{2} x\right) = I_0 + \frac{4C}{x}\left(\cos(k_1 x) + cos(k_2 x)\right) \sin\left(\frac{\delta k}{2} x\right) \tag{13}$$

$$I(x) = I_0 + \frac{8C}{x} \sin\left(\frac{\delta k}{2} x\right) cos\left(\frac{k_1 + k_2}{2} x\right) cos\left(\frac{k_1 - k_2}{2} x\right) \tag{14}$$

7. Utilizando el hecho de que $\delta k \ll \Delta k < k_1 + k_2$, se puede ver que cuando pase un periodo de la función seno se habra aumentado mucho x por lo que en comparación con el punto en el que se empezo ya no se debería notar el cambio. Entonces se tiene la relación aproximada dada por 15, donde x_0 es en el punto en que se llego a un mínimo de contraste y luego el contraste casi no es notable.Esto se puede ver graficamente en la figura 2.

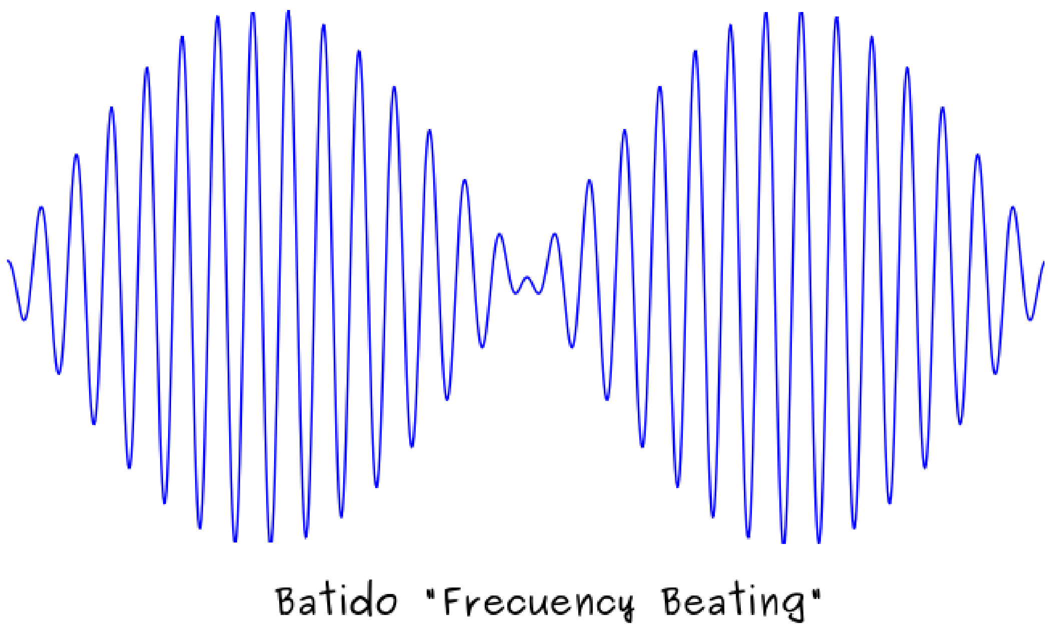

Figure 1: Batido

$$\pi \approx \frac{\delta k}{2}\, x_0 \tag{15}$$

$$x_0 \approx \frac{2\pi}{\delta k} \tag{16}$$

III Muestreo

III.1 Preguntas preliminares

1. La transformada está dada por la ecuación 17.

$$\mathcal{F}\left\{\sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta(t-nT)\right\} = \frac{1}{T}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta\left(\nu - \frac{n}{T}\right) \tag{17}$$

2. Esta cotransformada se calculó en un punto anterior, y esta dada por la ecuación 18.

$$\overline{\mathcal{F}}\left\{V_B(\nu)\right\} = \int_{\mathbb{R}} V_B(\nu) e^{2\pi i\nu t} d\nu = \int_{-B}^{B} e^{2\pi i\nu t} d\nu = \frac{\sin(2\pi t B)}{\pi t} \tag{18}$$

III.2 Teorema de Nyquist-Shannon

1. Recordando la identidad $f(x)\delta(x-a) = f(a)\delta(x-a)$ se ve como se puede escribir $g(t)$ solo en función de muestras 19.

$$g(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta(t-nT) f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta(t-nT) f(nT) \tag{19}$$

2. Utilizando la relación de la transformada de Fourier del producto y los resultados preliminares se obtiene la ecuación 20.

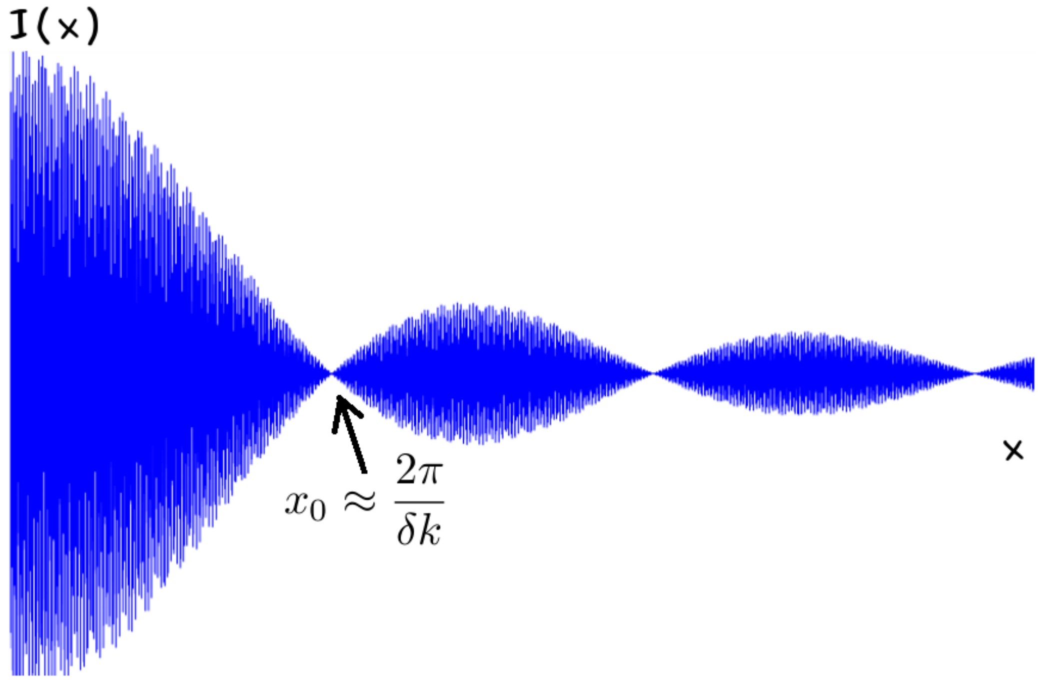

Figure 2: Batido Amortiguado

$$\hat{g}(\nu) = \mathcal{F}\left\{\sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta(t - nT)\right\} * \hat{f}(\nu) = \left\{\frac{1}{T}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta\left(\nu - \frac{n}{T}\right)\right\} * \hat{f}(\nu) = \frac{1}{T}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}\left(\nu + \frac{n}{T}\right) \tag{20}$$

3. En la figura 3 se tiene el caso $\frac{1}{T} > 2B$. En la figura 4 se tiene el caso $\frac{1}{T} < 2B$, en este caso se puede ver como se va deformando la forma original de $\hat{f}(\nu)$ haciendo más complicado reconstruir la señal.

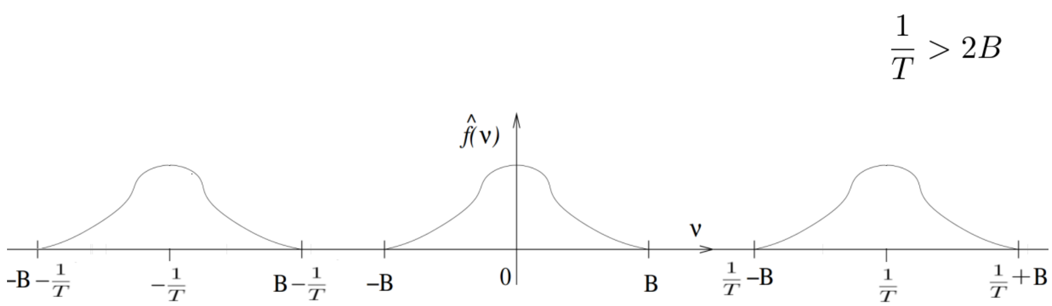

Figure 3: $\frac{1}{T} > 2B$

4. El espectro original se obtiene multiplicando la función ventana a $\hat{g}(\nu)$, como se muestra en la figura 5.

$$\hat{f}(\nu) = TV_B(\nu)\hat{g}(\nu) \tag{21}$$

5. Utilizando la relación para la cotransformada de Fourier de un producto: $\overline{\mathcal{F}}\{fg\} = \overline{\mathcal{F}}\{f\} * \overline{\mathcal{F}}\{g\}$, se obtiene 22.

$$f(t) = T\,\overline{\mathcal{F}}\left\{V_B(\nu)\right\} * \overline{\mathcal{F}}\left\{\hat{g}(\nu)\right\} = T\,\frac{\sin(2\pi tB)}{\pi t} * \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta(t - nT) f(nT)\right) = T\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{\sin(2\pi(t + nT)B)}{\pi(t + nT)} f(nT) \tag{22}$$

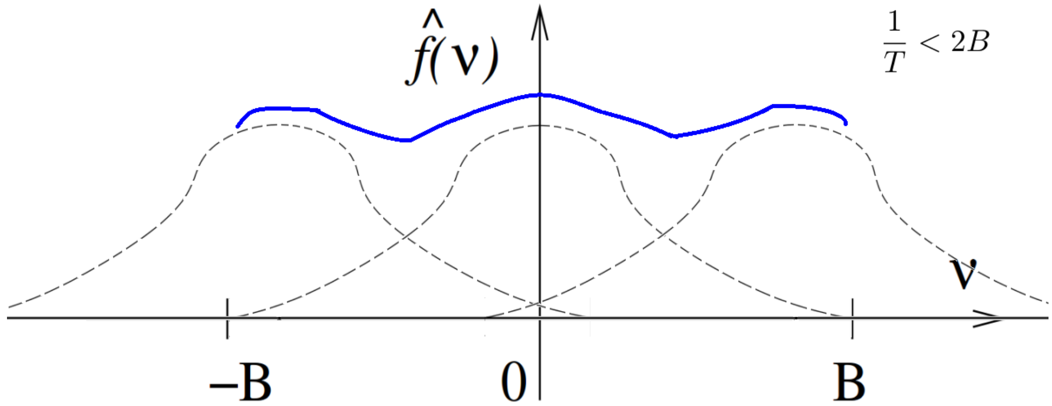

Figure 4: $\frac{1}{T} < 2B$

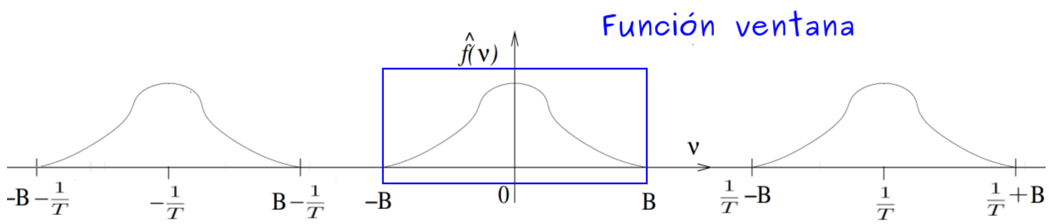

Figure 5: Función ventana extrayendo la función $\hat{f}(\nu)$ de la función $\hat{g}(\nu)$

6. Los humanos pueden escuchar frecuencias en el rango de 20 Hz a 20 kHz. El teorema de Nyquist-Shannon dice que se puede reconstruir la banda sonora si la frecuencia de muestreo es mayor o igual al valor de banda que acota el espectro, que en este caso es $B \sim 20\ kHz$ y $2B \sim 44\ kHz$.