Universidad de los Andes

Departamento de Física

Métodos Matemáticos
Tarea 4 : Transformada de Fourier

Profesor : Gabriel Téllez

Semestre 2015-1

Para entregar el jueves 16 de abril de 2015.

I Ecuación de difusión del calor

La ecuación que describe cómo se reparte la temperatura en un medio en función del espacio y del tiempo es la llamada ecuación de difusión del calor que tiene la forma siguiente

$$\frac{\partial f}{\partial t}(\mathbf{r},t) = D\Delta f(\mathbf{r},t)\,, \tag{1.1}$$

en donde $f(\mathbf{r},t)$ es la temperatura en el punto $\mathbf{r}=(x,y,z)$ y en el tiempo t y D es una constante característica del medio considerado y se llama coeficiente de difusión.

Esta ecuación es bastante general y no sólo describe el problema de difusión del calor sino también, por ejemplo, la difusión de una substancia en un solvente (en ese caso f sería la densidad de la substancia).

En este problema nos proponemos resolver la ecuación de difusión (1.1) en el caso en que no hay fronteras espaciales y se conoce la condición inicial en $t=0$: $f(\mathbf{r},t=0)=f_0(\mathbf{r})$ con f_0 una función conocida (distribución de temperatura inicial).

1. Usando la transformada de Fourier $\hat{f}$ de f con respecto a las coordenadas espaciales

$$f(\mathbf{r},t) = \int_{\mathbb{R}^3} \hat{f}(\boldsymbol{\nu},t)\, e^{2i\pi\boldsymbol{\nu}\cdot\mathbf{r}}\, d\boldsymbol{\nu}\,, \tag{1.2}$$

¿cuál sería la ecuación que verifica la función $\hat{f}$?

2. La ecuación que obtuvo en el punto anterior es una ecuación diferencial con respecto a t de primer grado que se resuelve fácilmente. Resuelvala y exprese $\hat{f}(\boldsymbol{\nu},t)$ en función de la transformada de Fourier $\hat{f}_0(\boldsymbol{\nu})$ de la condición inicial $f_0(\mathbf{r})$.

3. Para obtener la solución en espacio directo de los $\mathbf{r}$ hay que tomar naturalmente la transformada de Fourier inversa de la solución que encontró en el punto anterior. Pero antes de hacerlo note que la solución obtenida en el punto anterior se expresa como un producto de dos funciones de $\boldsymbol{\nu}$. Usando la regla para el producto de convolución y la transformada de Fourier

$$\bar{\mathcal{F}}(gh) = (\bar{\mathcal{F}}g) * (\bar{\mathcal{F}}h)\,, \tag{1.3}$$

muestre que la solución $f(\mathbf{r},t)$ del problema de difusión se puede expresar como un producto de convolución (para las variables espaciales $\mathbf{r}$) entre la condición inicial $f_0(\mathbf{r})$ y una cierta función $G(\mathbf{r},t)$:

$$f(\mathbf{r},t) = \int_{\mathbb{R}^3} f_0(\mathbf{r}')G(\mathbf{r}-\mathbf{r}',t)\, d\mathbf{r}'\,. \tag{1.4}$$

4. Dé una expresión explicita de $G(\mathbf{r}, t)$. Puede ser útil recordar que la transformada de Fourier de una gaussiana es una gaussiana :

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{2i\pi\boldsymbol{\nu}\cdot\mathbf{r}}\, e^{-\pi\lambda^2\mathbf{r}^2}\, d\mathbf{r} = \frac{1}{\lambda^n} e^{-\pi\boldsymbol{\nu}^2/\lambda^2}\,, \tag{1.5}$$

en general para n dimensiones y $\lambda > 0$.
5. Consideremos el caso especial en que la condición inicial es

$$f_0(\mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r})\,, \tag{1.6}$$

que físicamente representa un caso idealisado en donde se calienta enormemente el origen O mientras el resto del material está frio. ¿Cuál sería entonces la solución $f(\mathbf{r}, t)$?
6. *Interpretación :* la solución anterior como función del espacio es una gaussiana, pero su largo cambia con el tiempo. ¿Cuál es el largo espacial característico en el cual hay una temperatura apreciable en el tiempo t ?

   La respuesta a esta pregunta muestra que el calor se propaga, en un tiempo t, una distancia proporcional a $\sqrt{t}$, comportamiento típico de todos los fenómenos de difusión.

II Espectroscopía por transformada de Fourier

Un poco de teoría

Cualquier interferómetro de dos ondas luminosas como por ejemplo el aparato de Michelson-Morley puede servir para determinar el espectro en frecuencia de una fuente luminosa por un método llamado espectroscopía por transformada de Fourier. A continuación se explica brevemente el principio de esta técnica. Para una explicación más detallada se recomienda consultar cualquier libro de óptica, como por ejemplo los mencionados al final del problema.

Una fuente luminosa monocromática de frecuencia angular ω y numero de onda $k = \omega/c$ emite un haz de luz que pasa por un interferómetro (por ejemplo el Michelson-Morley) que divide el haz en dos haces de intensidades iguales I. El interferómetro los desfasa de una diferencia de marcha óptica x (en el caso del Michelson con espejos perpendiculares x es dos veces la distancia entre un espejo y la imagen del otro espejo por la separatriz). Estos dos haces interfieren y la intensidad resultante es

$$I(x) = I|1 + e^{ikx}|^2 = 2I(1 + \cos(kx))\,. \tag{2.1}$$

Ahora consideremos el caso en que la fuente luminosa no es monocromática sino que tiene un cierto espectro de frecuencias luminosas. Este está caracterisado por una función de densidad espectral $J(k)$ tal que la intensidad luminosa $dI(k)$ emitida en un rango de numeros de onda $[k, k + dk]$ sea $dI(k) = J(k)dk$. Como dos ondas de frecuencias diferentes son incoherentes y no interfieren y por consiguiente las intensidades se suman, la intensidad a la salida del interferómetro al usar una fuente policromática sería

$$I(x) = \int_0^\infty 2J(k)(1 + \cos(kx))dk = \int_0^\infty 2J(k)dk + 2\int_0^\infty J(k)\cos(kx)dk\,. \tag{2.2}$$

Esta última formula se obtiene de (2.1) al hacer la suma de intensidades para cada numero de onda k. El primer término del último miembro de la ecuación (2.2) es una constante (no depende de x) y es la intensidad total I_0 de la fuente luminosa. El segundo termino es más interesante, se puede reescribir de la siguiente manera, definiendo $J(-k) = J(k)$,

$$I(x) = I_0 + \int_{-\infty}^{+\infty} J(k)e^{ikx}dk\,. \tag{2.3}$$

1. *Pregunta :* Verificar esta última formula.

La ecuación (2.3) muestra que la intensidad luminosa $I(x)$ como función de la diferencia de marcha es la *cotransformada de Fourier* de la densidad espectral $J(k)$ de la fuente luminosa (más la constante irrelevante I_0). Así, midiendo la intensidad del patrón interferencia se deduce por transformación de Fourier la densidad espectral de la fuente luminosa. A continuación vamos a estudiar un ejemplo clásico en que se aplican estas nociones. Se trata del estudio de la luz emitida por una lampara de gas de sodio.

El doblete del sodio

Una lampara de gas de sodio emite una luz amarilla, pero ésta no es en realidad puramente monocromática. Consiste (en lo que se refiere a la luz amarilla que es la intensidad predomimante) en dos rayas espectrales de longitudes de onda $\lambda_1 = 589.592$ nm y $\lambda_2 = 588.995$ nm. Definiendo los numeros de ondas correspondientes $k_{1,2} = 2\pi/\lambda_{1,2}$ la densidad espectral de la fuente puede describirse por

$$J(k) = C(\delta(k - k_1) + \delta(k - k_2)) \,. \tag{2.4}$$

para $k > 0$, $J(-k) = J(k)$ y en donde C una constante proporcional a la intensidad total de la onda. La separación entre las dos rayas es muy pequeña frente a la frecuencia de cada una de ellas, $\Delta k = k_2 - k_1 \ll k_{1,2}$. Este es un modelo muy simplificado, pero útil.

1. Explicar por qué la función completa $J(k)$ para k positivo o negativo es

$$J(k) = C(\delta(k - k_1) + \delta(k - k_2) + \delta(k + k_1) + \delta(k + k_2)) \,. \tag{2.5}$$

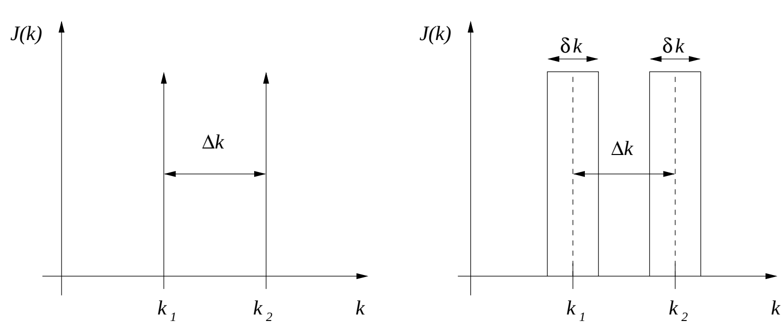
2. Usando la formula (2.3), calcular la intensidad luminosa que sale del interferómetro.
3. Esta intensidad es la suma de dos cosenos (más una constante). Usando la formula trigonométrica

$$\cos p + \cos q = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right) \,, \tag{2.6}$$

espresar la intensidad luminosa como un producto de dos cosenos (más una constante). Uno de los cosenos tiene una frecuencia alta y el otro una baja frecuencia, que crea una modulación amplitud sobre el coseno de alta frecuencia.

4. Se define la visibilidad o contraste de las franjas de interferencia como la diferencia de intensidades entre una franja luminosa y una franja oscura consecutivas. Esbozar el gráfico de $I(x)$ en función de x. Notar que hay un fenomeno de "batido" de frecuencias (frecuency beating), es decir que el contraste de las franjas de interferencia pasa sucesivamente por máximos y minimos, esto es debido a la modulación de amplitud señalada en el punto anterior. Explique cómo midiendo la distancia δx entre dos minimos de contraste de las franjas se puede determinar la separación espectral $\Delta k = k_2 - k_1$ de las dos rayas de la fuente de sodio.

Las rayas espectrales de la fuente de sodio no son en realidad tan finas como para modelisarlas por una distribución delta. Un modelo más realista sería considerar que cada raya tiene un grosor δk, con $\delta k \ll \Delta k$, como se muestra en la figura.



5. Explicar por qué en este modelo se puede decir que la densidad espectral es el producto de convolución

$$J(k) = W * (C(\delta(k-k_1) + \delta(k-k_2) + \delta(k+k_1) + \delta(k+k_2))) \tag{2.7}$$

en donde W es una función "ventana" definida por $W(k) = 1$ si $|k| \leq \delta k/2$ y $W(k) = 0$ en el caso contrario.

6. Usando la regla para el producto de convolución y la transformación de Fourier, deducir la intensidad luminosa $I(x)$.
7. Esbozar el gráfico de $I(x)$ en función de x. Notar que además del fenómeno de batimiento visto en el modelo anterior hay tambien una reducción general del contraste de las franjas a medida que aumenta x y a partir de un cierto rango $x > x_0$ la visibilidad es ya muy baja, con $x_0 \gg \delta x$. Explicar cómo midiendo ese x_0 se puede determinar el largo δk de cada raya espectral amarilla.

Para saber más

1. Introduction to Optics, F. Pedrotti y L. Pedrotti, capítulo 24, páginas 503–507, Ed. Prentice-Hall, 1987
2. Introduction to Modern Optics, G. Fowles, capitulo 3.9, páginas 80–82, Ed. Dover Publications, 1989

III Muestreo

El muestreo o conversión analógica a digital es un proceso muy utilizado en todas las ciencias y sus aplicaciones. Consiste en almacenar a intervalos regulares los valores de una función del tiempo $f(t)$, que llamaremos señal. Por ejemplo los discos compactos CD de música tienen almacenado un muestreo de la señal sonora que se grabó. Si el tiempo entre la toma de una muestra y la siguiente es T, se dice que la frecuencia de muestreo es $1/T$. Las muestras son los valores $f(nT)$ con $n \in \mathbb{Z}$.

Una pregunta muy importante que se puede uno hacer es si es posible reconstituir completamente la señal $f(t)$, $(t \in \mathbb{R})$ a partir de sus muestras $f(nT)$, $(n \in \mathbb{Z})$. La respuesta a esta pregunta la da un teorema conocido como teorema de Nyquist–Shannon que estudiaremos y demostraremos en este ejercicio.

Este teorema dice que si la señal tiene un espectro de banda acotada por B entonces es posible reconstituir la señal a partir de las muestras si la frecuencia de muestreo es superior o igual a $2B$. Decir que $f(t)$ tiene un espectro de banda acotada por B quiere decir que su transformada de Fourier $\hat{f}$ cumple $\hat{f}(\nu) = 0$ si $|\nu| > B$.

III.1 Preguntas preliminares

1. Sea $⧢(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta(t-n)$. Se recuerda que $\mathcal{F}⧢ = ⧢$. Deducir cuál es la transformada de Fourier de $⧢_T(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta(t-nT)$.
2. Sea $V_B(\nu)$ la función ventana de largo $2B$ definida así :

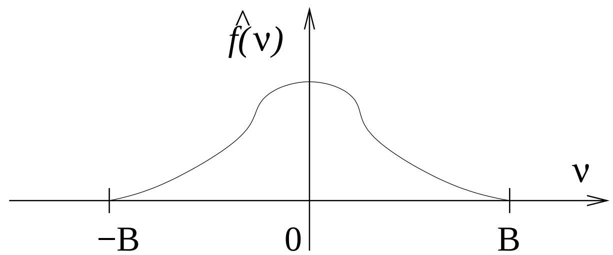
$$V_B(\nu) = \begin{cases} 1 & \text{si } |\nu| < B \\ 0 & \text{si } |\nu| > B \end{cases} \tag{3.1}$$

Calcular la cotransformada de Fourier de V_B.

III.2 Teorema de Nyquist–Shannon

En toda esta parte suponemos que la señal $f(t)$ tiene un espectro acotado por $B > 0$.

1. Calcular $g(t) = \sqcup\!\sqcup_T(t) f(t)$ y mostrar que $g(t)$ se puede expresar únicamente en función de las muestras $f(nT)$, y de ningún otro valor de $f(t)$ que no sea una muestra ($t \neq nT$). Matemáticamente el proceso de muestreo es multiplicar $f(t)$ por $\sqcup\!\sqcup_T(t)$.
2. Calcular la transformada de Fourier $\hat{g}$ de g en términos de la transformada de Fourier $\hat{f}$ de f. Indicación : será útil usar la respuesta a la pregunta preliminar 1 y la relación entre producto de convolución y transformadas de Fourier.
3. Suponer que $\hat{f}(\nu)$ es como se muestra en la figura. Dibujar cómo sería $\hat{g}(\nu)$. Considerar a parte los casos $1/T < 2B$ y $1/T > 2B$.



4. En el caso $1/T > 2B$ mostrar cómo se puede obtener el espectro original $\hat{f}(\nu)$ a partir del espectro de las muestras $\hat{g}(\nu)$. Podrá ser útil introducir la función ventana V_B.
5. Invertiendo la transformación de Fourier, deducir de la pregunta anterior una fórmula explícita para $f(t)$, **para todo** $t \in \mathbb{R}$, en términos de las muestras $f(nT)$. Indicación : será útil usar la respuesta a la pregunta preliminar 2 y de nuevo la relación entre producto de convolución y transformadas de Fourier.
6. Un ejemplo práctico de aplicación de este teorema es en los discos compactos CD de música. En estos el muestreo se hace a 44 kHz. ¿Por qué ?