Universidad de los Andes

Departamento de Física

Métodos Matemáticos

Tarea 2: Distribuciones y Convolución

Solución 20151

Profesor: Gabriel Téllez

Autor: LVA

1 La Distribución $\Delta \ln r$ en 2D

1.1 Preliminares

a. Para este punto se calculan las siguientes derivadas parciales que se requieren posteriormente. Teniendo en cuenta las relaciones: $(x, y) \to (rcos\theta, rsen\theta)$ y $(x, y) \to (\frac{z}{2} + \frac{\bar{z}}{2}, -i\frac{z}{2} + i\frac{\bar{z}}{2})$, se procede a calcular.

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial \sqrt{x^2 + y^2}}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = cos\theta \tag{1}$$

$$\frac{\partial r}{\partial x} = sen\theta \tag{2}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial tan\theta}{\partial x}\frac{\partial \theta}{\partial tan\theta} = \frac{\partial \frac{y}{x}}{\partial x}\frac{1}{sec^2\theta} = -\frac{y}{x^2 sec^2\theta} = -\frac{sen\theta}{r} \tag{3}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{cos\theta}{r} \tag{4}$$

$$\frac{\partial x}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial \left(\frac{z}{2} + \frac{\bar{z}}{2}\right)}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \tag{5}$$

$$\frac{\partial x}{\partial z} = \frac{1}{2} \tag{6}$$

$$\frac{\partial y}{\partial \bar{z}} = \frac{i}{2} \tag{7}$$

$$\frac{\partial y}{\partial z} = -\frac{i}{2} \tag{8}$$

Con estas 8 relaciones, se procede a mirar la acción de las derivadas de interés en una función de prueba "f". Para relacionarlas con las nuevas variables se usa la regla de la cadena.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x} = \left(cos\theta\frac{\partial}{\partial r} - \frac{sen\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\right) f \tag{9}$$

La ecuación (9) permite concluir la relación (1.1a) y de forma análoga se obtienen la (1.1b), (1.2a) y (1.2b). Para obtener las últimas dos relaciones que se piden, se combinan las que ya se mostraron:

$$\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y} = \left(cos\theta\frac{\partial}{\partial r} - \frac{sen\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\right) + i\left(sen\theta\frac{\partial}{\partial r} + \frac{cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\right) \tag{10}$$

Utilizando $cos\theta + isen\theta = e^{i\theta}$ y $icos\theta - sen\theta = ie^{i\theta}$ se obtiene:

$$\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y} = (cos\theta + isen\theta)\frac{\partial}{\partial r} + \frac{icos\theta - sen\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} = e^{i\theta}\frac{\partial}{\partial r} + i\frac{e^{i\theta}}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} \tag{11}$$

La relación (1.3a) se obtiene insertando el resultado (11) en la relación (1.2a). La ecuación (1.3b) se obtiene de forma análoga.

1.2 La distribución T

a. Sea $x \neq y$, utilizando las relaciones (1.2a) y $x + iy = re^{i\theta}$ se tiene:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)\frac{1}{x+iy} = \frac{\partial}{\partial\bar{z}}\left(\frac{2}{z}\right) = 0 \tag{12}$$

b. La distribución T se puede escribir de la forma Df, donde D es un operador lineal de derivadas parciales de primer orden. Utilizando la definición $< \frac{\partial f}{\partial x_i}, \phi >= - < f, \frac{\partial\phi}{\partial x_i} >$ se tiene:

$$< \frac{\partial f}{\partial x_i}, \phi >= - \int\int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{x+iy}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)\phi(x,y)dxdy \tag{13}$$

c. Utilizando la ecuación (11) y $dxdy = rdrd\theta$ se obtiene la siguiente integral doble:

$$< T, \phi >= - \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} \frac{e^{-i\theta}}{r}\left(e^{i\theta}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{e^{i\theta}}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\phi(r,\theta)rdrd\theta \tag{14}$$

Se mirará por aparte los dos sumandos de la integral, donde se utilizará el teorema de Fubini para poder intercambiar integrales a conveniencia:

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} e^{i\theta}\frac{\partial\phi}{\partial r}drd\theta = \int_0^{2\pi} \phi(r,\theta)|_{r=0}^{r=\infty}d\theta = -\phi(0,0)\int_0^{2\pi} d\theta = -2\pi\phi(0,0) \tag{15}$$

En (15) se utilizó el hecho que $\phi(0,\theta)$ no depende de la variable angular.

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} \frac{i}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}drd\theta = \int_0^{\infty} \frac{1}{r}\phi(r,\theta)|_{\theta=0}^{\theta=2\pi}d\theta = 0 \tag{16}$$

Esta última integral desaparece ya que $\phi(r,0) = \phi(r,2\pi)$. Juntando ambos resultados y gracias al signo menos que apareció de la definición de $< T, \phi >$, se obtiene lo pedido, ecuación (1.5).

d. Dado que $T = \left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)\frac{1}{x+iy}$ y que $< 2\pi\delta, \phi >= 2\pi\phi(0,0)$, se tiene que $< 2\pi\delta, \phi >=< T, \phi >$. Por lo que en el sentido de las distribuciones $T = 2\pi\delta$.

1.3 La distribución $\Delta \ln r$.

a. Utilizando los preliminares nuevamente se calcula:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)\ln r = \left(e^{-i\theta}\frac{\partial}{\partial r} - i\frac{e^{-i\theta}}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\ln r = \frac{e^{-i\theta}}{r} = \frac{1}{x+iy} \tag{17}$$

b. El laplaciano se puede escribir como $\Delta = \left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)$. Utilizando esto se tiene:

$$\Delta \ln r = \left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)\frac{1}{x+iy} = T = 2\pi\delta \tag{18}$$

1.4 Ley electroestática 2D

Se quiere que $\Delta\Phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$. En base al punto anterior y que ρ es una distribución de soporte acotado se puede resolver la ecuación con álgebra de convolución. En base a lo mostrado en los problemas anteriores, $\Delta\frac{\ln r}{2\pi} = \delta$. Por lo que:

$$\Phi = -\frac{\rho}{2\pi\epsilon_0} * \ln r \tag{19}$$

2 Difusión de una partícula en una dimensión por un potencial delta

2.1 Movimiento Clásico

1. Sea $H(x)$ la función escalon. f_n se puede escribir como:

$$f_n(x) = \frac{n}{2}\left(H\left(x+\frac{1}{n}\right) - H\left(x-\frac{1}{n}\right)\right)$$

La fuerza se calcula de acuerdo a (20) y utilizando $V_n(x) = -\lambda_0 f_n(x)$.

$$\mathbf{F}(x) = -\nabla V_n(x) = -\frac{\partial V_n}{\partial x}\hat{i} = \lambda_0\frac{n}{2}\left(\delta\left(x+\frac{1}{n}\right) - \delta\left(x-\frac{1}{n}\right)\right)\hat{i} \tag{20}$$

Esta ecuación(20) dice que la fuerza es 0 en todos los puntos menos en $x = \pm\frac{1}{n}$. En estos dos puntos $\mathbf{F}(x = \pm\frac{1}{n}) = \mp\infty$. En estas posiciones la partícula siente una fuerza instantánea infinita que intenta atraparla en el pozo potencial.

2. Como el potencial es cero, solo tiene energía cinética.

$$E = K + V = K = \frac{1}{2}mv_0^2 \tag{21}$$

3. Dado que no hay fuerzas externas actuando sobre el sistema, hay conservación de energía, $E_0 = E_1$.

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 - \lambda_0\frac{n}{2} \tag{22}$$

$$v_1 = \sqrt{v_0^2 + \frac{n\lambda_0}{m}} \tag{23}$$

4. Nuevamente por conservación de energía tiene que ser v_0.
5. Como la fuerza es nula una vez que se entra en la región del potencial, la velocidad es constante. Entonces $v_1 t_1 = x_1 = \frac{2}{n}$. Despejando t_1 se obtiene:

$$t_1 = \frac{2}{n}\frac{1}{\sqrt{v_0^2 + \frac{n\lambda_0}{m}}} \tag{24}$$

6. Si no hay potencial, la velocidad no cambia y se tiene que $t_0 = \frac{2}{n}\frac{1}{v_0}$. Como $v_1 > v_0$, la partícula que entró en el potencial le coge una distancia $D = v_0(t_0 - t_1)$.

$$D = \frac{2}{n}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{n\lambda_0}{v_o^2 m}}}\right) \tag{25}$$

7. Dado que $\lim_{n\to\infty} D = 0$ se ve que no se puede percibir la presencia de un potencial delta.

2.2 Descripción Cuántica

1. Si $V = 0$, la ecuación se reduce a una ecuación diferencial lineal, homogénea y de segundo grado. Esta se resuelve con la técnica del polinomio característico. Se define: $k^2 \equiv \frac{2mE}{\hbar^2}$.

$$\psi(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx} \tag{26}$$

2. Si está libre solo tiene energía cinética por lo que $E \geq 0$.
3. Si viaja de izquierda a derecha entonces el coeficiente B de la ecuación (26) es nulo. Renombrando la constante $A = \sqrt{I}$ se obtiene:

$$\psi(x) = \sqrt{I}e^{ikx} \tag{27}$$

4. Las soluciones para $x \neq 0$ son de la forma (26) ya que el potencial es nulo en esta zona.

$$\psi(x < 0) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx} \tag{28}$$

$$\psi(x > 0) = Ce^{ikx} + De^{-ikx} \tag{29}$$

5.Tomando en cuenta el potencial delta, existe la posibilidad que la partícula se refleje o se transmita. Sin embargo no hay nada que devuelva la partícula una vez atraviesa el potencial, por lo que la constante D es nula.Se tiene:

$$\psi(x) = \sqrt{I}e^{ikx} + \sqrt{R}e^{-ikx} \tag{30}$$

$$\psi(x) = S(k)e^{ikx} \tag{31}$$

Las constantes que acompañan las soluciones son amplitudes de probabilidad. Su norma al cuadrado da la probabilidad de incidir, reflejarse o transmitirse.

6. La condición de continuidad da $\sqrt{I} + \sqrt{R} = S(k)$.

7. Utilizando la técnica usual para este tipo de ecuaciones se tiene (32).

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} - \lambda_0\delta(x)\psi(x) - E\psi(x) \right) dx = 0 \tag{32}$$

Como $\psi(x)$ es continua, su primitiva es continua y en el límite la integral se anula (33).

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} E\psi(x)dx = 0 \tag{33}$$

Para que aparezca un delta, ψ' debe ser discontinua. Esto implica que:

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \frac{d^2\psi(x)}{dx^2}dx = \psi'(0^+) - \psi'(0^-) \tag{34}$$

Y además:

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \delta(x)\psi(x)dx = \lim_{\epsilon \to 0} \psi(0) = \psi(0) \tag{35}$$

Juntando estos resultados se obtiene la condición de discontinuidad (36)

$$\psi'(0^+) - \psi'(0^-) + \frac{2m\lambda_0}{\hbar^2}\psi(0) = 0 \tag{36}$$

8. $I = 1$ y con las condiciones de continuidad y discontinuidad se obtienen las ecuaciones que permiten determinar R y $S(k)$.
Por discontinuidad $ik(S(k) - 1 + \sqrt{R}) = -\frac{2m\lambda_0}{\hbar^2}S(k)$.
Por continuidad $\sqrt{R} = S(k) - 1$.
Algunos pasos intermedios:

$$ik(2S(k)-2) = -\frac{2m\lambda_0}{\hbar^2}S(k)$$

$$S(k)\left(ki + \frac{m\lambda_0}{\hbar^2}\right) = ik$$

Finalmente se obtienen las expresiones para $S(k)$ y $\sqrt{R}$.

$$S(k) = \frac{1}{1 - i\frac{m\lambda_0}{k\hbar^2}} \tag{37}$$

$$\sqrt{R} = \frac{-1}{1 + i\frac{k\hbar^2}{m\lambda_0}} \tag{38}$$

9. Si $S(k) = \sqrt{T}e^{i\phi}$, entonces $|S(k)|^2 = T$.

$$T = \frac{1}{1 + \left(\frac{m\lambda_0}{k\hbar^2}\right)^2} \tag{39}$$

Para encontrar ϕ se hacen los siguientes trucos:

$$S(k) = \frac{1}{1 - i\frac{m\lambda_0}{k\hbar^2}}\frac{\sqrt{T}}{\sqrt{T}} \tag{40}$$

Identificando entonces:

$$e^{i\phi} = \frac{1}{1 - i\frac{m\lambda_0}{k\hbar^2}}\frac{1}{\sqrt{T}} = \frac{1 + i\frac{m\lambda_0}{k\hbar^2}}{\sqrt{1 + \left(\frac{m\lambda_0}{k\hbar^2}\right)^2}} \tag{41}$$

Por lo que se tiene:

$$\tan\phi = \frac{m\lambda_0}{k\hbar^2} \tag{42}$$

10. Como λ_0 aparece de la forma λ_0^2 en el coeficiente T, no importa el signo ya que el cuadrado lo elimina.

11. A diferencia de la situación clásica, hay probabilidad de reflexión ya que el coeficiente R no es nulo. La función de onda reparte su peso en una onda viajera que se va hacia la derecha y una que se va en la dirección contraria en que incidió.
12. El polo se obtiene cuando el denominador de $S(k)$ tiene un cero simple.

$$k = \frac{im\lambda_0}{\hbar^2} \tag{43}$$

3 Ecuación integral de Volterra

3.1

a. Si K es una función acotada en $[0, a]$ esto quiere decir que $\exists M$ tal que $K \leq M$. Con esto y utilizando el hecho que $K \in \mathbf{D}'_+$, se tiene que:

$$K * K(t) = \int_{\mathbb{R}} K(t-x)K(x)dx = \int_0^t K(t-x)K(x)dx \leq \int_0^t M^2 dx = tM^2 \tag{44}$$

Igualmente se tiene:

$$K * K * K(t) \leq \int_0^t xM^3 dx = M^3\frac{t^2}{2} \tag{45}$$

Se puede ver entonces que se cumple la desigualdad:

$$K^{*n} \leq \frac{t^{n-1}M^n}{(n-1)!} \equiv Mc_n \tag{46}$$

Identificamos que $\sum_{n=1}^{\infty} c_n = e^{tM}$. Esta serie converge uniformemente y $c_n \geq K^{*n}$ por lo que se puede usar el teorema de Weierstrass que garantiza la convergencia uniforme.

b Se reemplaza en la ecuación el candidato:

$$(\delta * K) * B = (\delta * K)\left(\delta + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n K^{*n}\right)$$

$$= \delta * \delta + \delta * K + \delta * \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n K^{*n} + K * \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n K^{*n}$$

$$\delta + K + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n K^{*n} - \delta * \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n K^{*n}$$

$$\delta + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n K^{*n} - \delta * \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n K^{*n} = \delta$$

3.2 Aplicación

a.

$$K * K = \int_0^x e^{\lambda x} dt = x e^{\lambda x} \tag{47}$$

$$K * K * K = \int_0^x t e^{\lambda(x-t)} dt = \frac{x^2}{2} e^{\lambda x} \tag{48}$$

b.

$$K^{*n} = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} e^{\lambda x} \tag{49}$$

c.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n K^{*n} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} e^{\lambda x} = -e^{\lambda x}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-x)^n}{n!} = -e^{(\lambda-1)x} \tag{50}$$

$$B = \delta - e^{(\lambda-1)x} \tag{51}$$

d

$$f(x) = B * g(x) = g(x) - g(t) * e^{t(\lambda-1)}(x) \tag{52}$$