

SCC-223 Estruturas de Dados I

Introdução a Árvores

Profa. Elaine Parros Machado de Sousa



Introdução

- Estruturas baseadas em **listas**: organização **linear** dos dados
 - propriedade básica => **relação sequencial** mantida entre seus elementos (posição relativa)
- Estruturas baseadas em **árvores**: organização dos dados de modo **não-linear**
 - propriedade básica => **relacionamento hierárquico** entre seus elementos

Listas Lineares

TAluno
Nome
Curso
Departamento
...

A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	...	An
----	----	----	----	----	----	----	-----	----

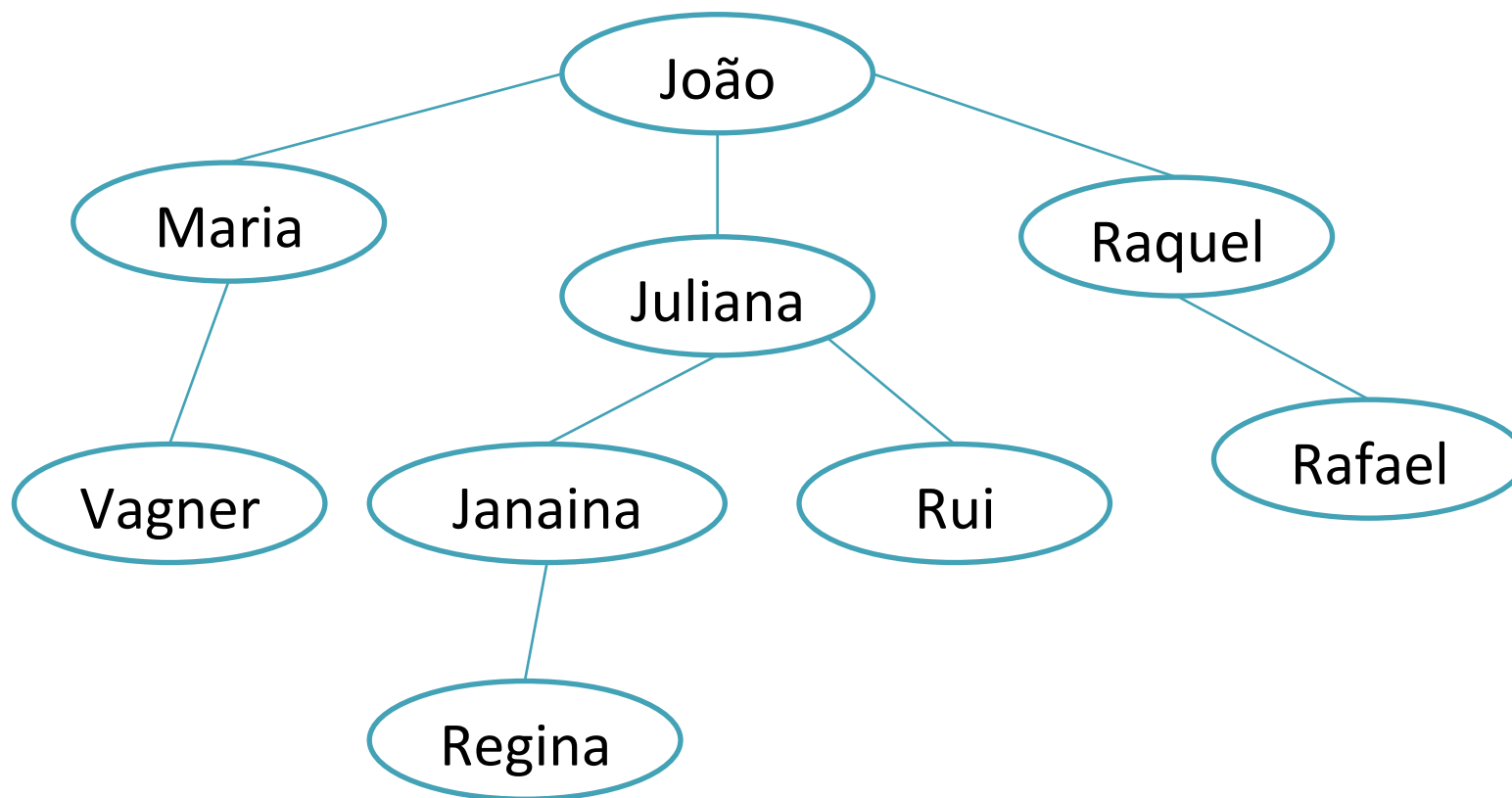
- Complexidade de tempo para os problemas:
 - Listar os alunos do departamento Dx?
 - Listar os alunos do curso Cx?
 - Idade média dos alunos do curso Cx?
 -



Estrutura de árvore: exemplos

- Problemas em que é necessária uma representação baseada na **relação hierárquica** entre os elementos
 - Árvores genealógicas
 - Organização de um livro
 - Estrutura organizacional de uma instituição
 - ...

Estrutura de árvore: exemplo de árvore genealógica



Estrutura de árvore: exemplo de organização de um livro

Livro XYZ

1. Cap. 1

1.1 Seção 1

1.2 Seção 2

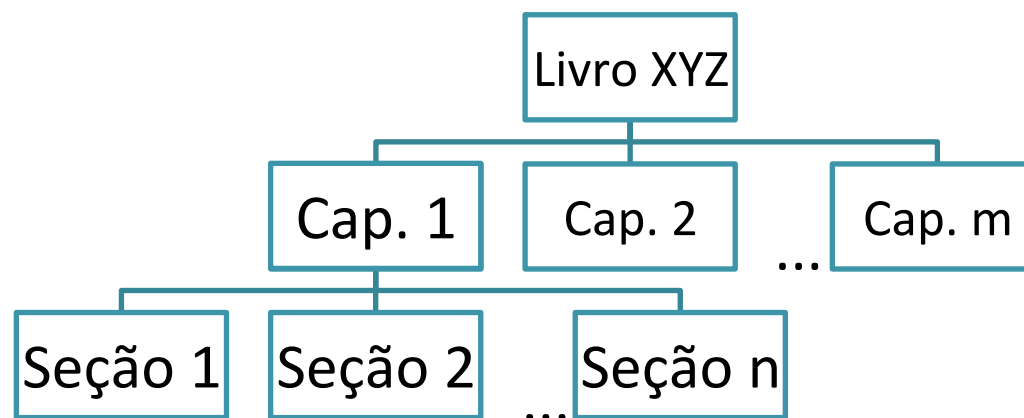
...

1.n Seção n

2 Cap. 2

...

m Cap. m



- Qual a complexidade?
 - Chegar a seção x do capítulo y...

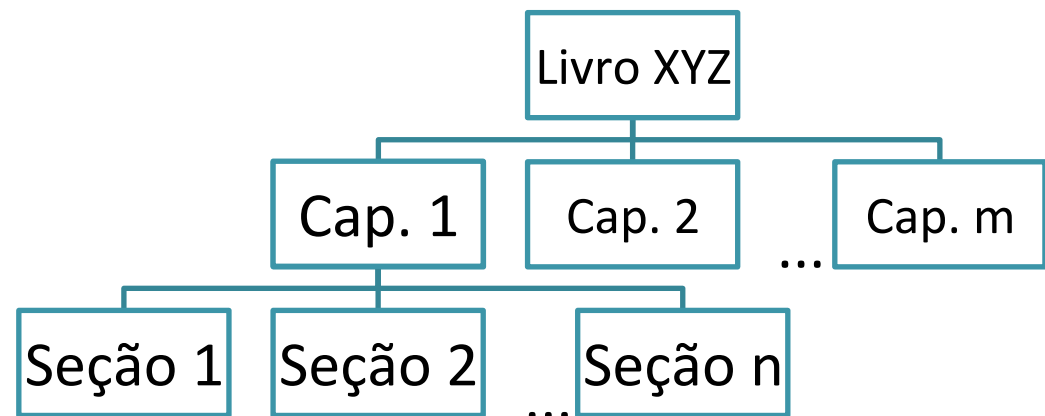


Justificativas/vantagens

- Representatividade no relacionamento entre os dados
- Facilidades na manipulação computacional dos dados
- **Exemplo:** representação baseada em árvores para a Estrutura Organizacional da USP => maior facilidade na extração de informações como:
 - Total de professores de um departamento
 - Total de salário dos funcionários de setor específico
 - Os diretores de cada centro
 - ...

Justificativas/vantagens

- **IMPORTANTE:** para extrair informações específicas de uma determinada ramificação da árvore não é necessário o percurso por toda a estrutura, uma vez que o relacionamento entre os dados nos permite uma consulta seletiva em regiões específicas da árvore!



Definição

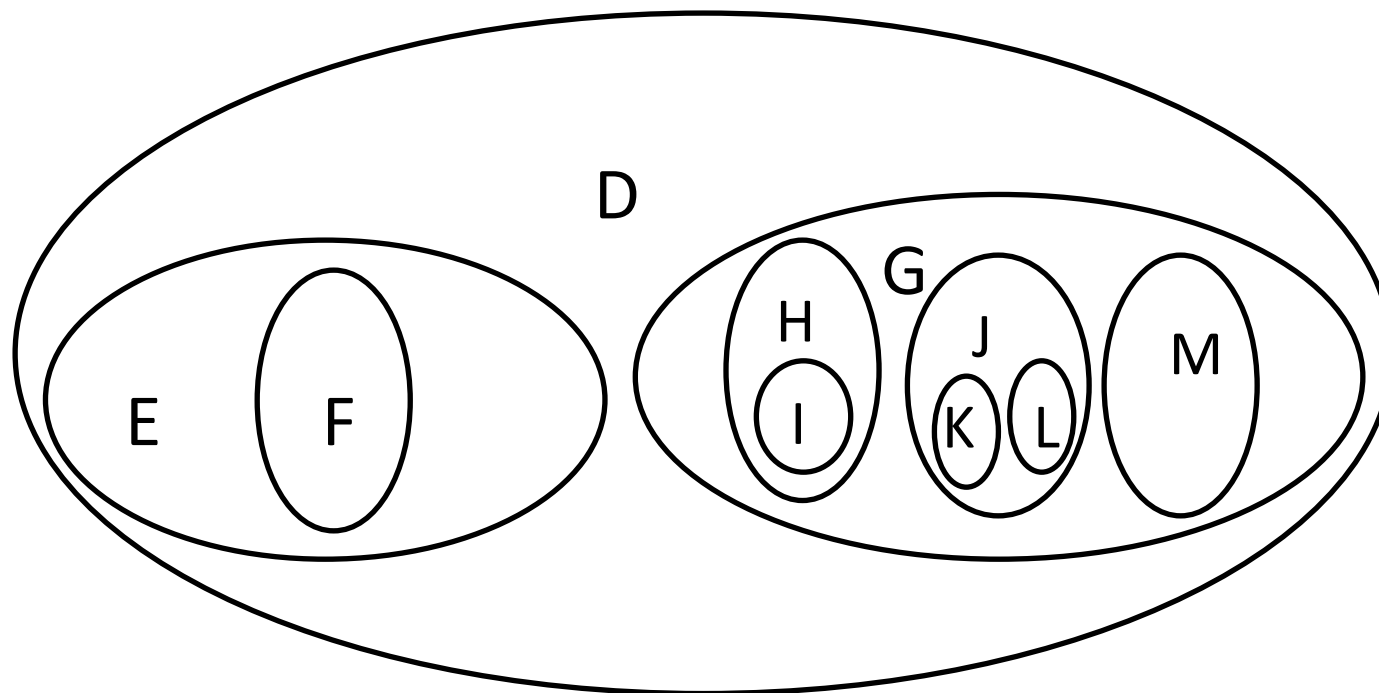
- Uma **árvore** enraizada **T** é um conjunto finito de elementos denominados **nós** (ou vértices) tais que:
 - $T = \emptyset \Rightarrow$ árvore a vazia, ou
 - $T = \{r\} \cup \{T_1\} \cup \{T_2\} \cup \dots \cup \{T_n\}$
onde:
 - **r** é um nó especial da árvore, chamado de **raiz**
 - os restantes constituem um único conjunto vazio ou são divididos em $n \geq 1$ conjuntos disjuntos não vazios, **T₁**, **T₂**, **T₃**, ..., **T_n**, chamados **subárvores** de **r**, sendo cada um também uma árvore



Representações gráficas para árvores

- A estrutura de árvore pode ser representada graficamente de diferentes maneiras:
 - conjuntos aninhados
 - indentação
 - grafos, sendo esta a mais utilizada

Representação em conjuntos aninhados



Representação com indentação

D

.....E

..... F

.....G

..... H

..... I

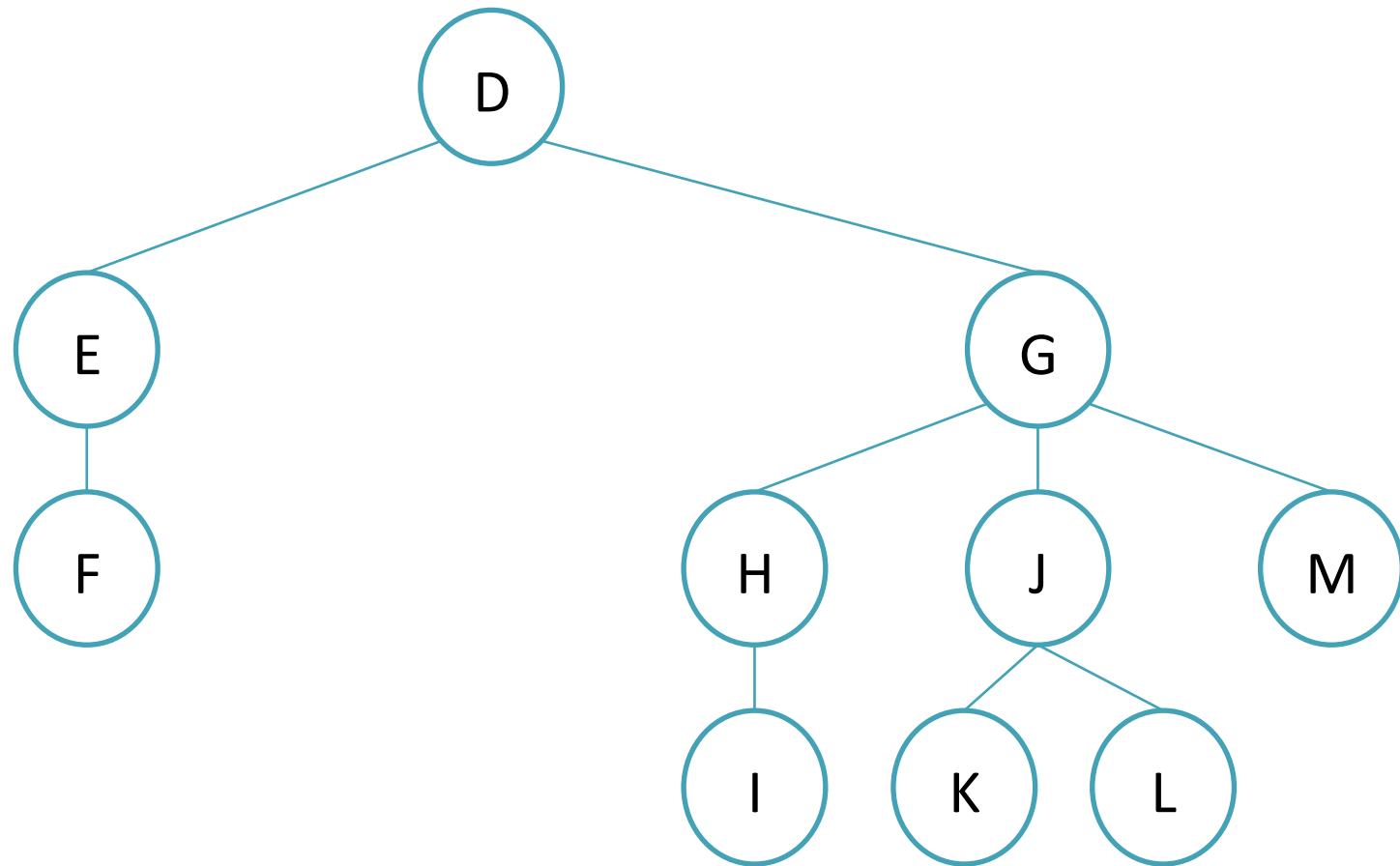
..... J

..... K

..... L

..... M

Representação utilizando grafos



Representação Aninhada

- Uma sequência S de $2n$ chaves, com n “{” e n “}” é dita **aninhada** quando, em cada subsequência de S , iniciada na posição 1 e com extremidade $i < 2n$, o número de “{” é maior do que o de “}”
- Exemplos:
 - a sequência { { } { } } é aninhada,
 - mas a sequência { { } } { } não



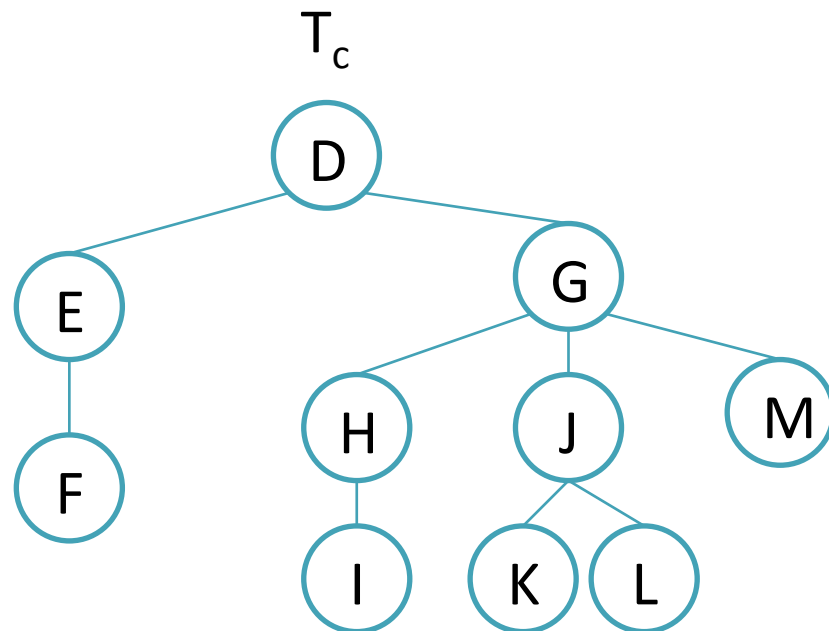
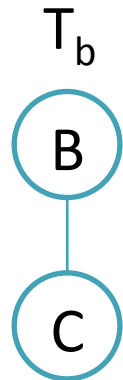
Representação Aninhada

- Uma sequência aninhada pode ser usada para representar uma árvore
 - as sequências de chaves representam as relações entre os nós da árvore – o rótulo de cada nó é inserido imediatamente à direita da “{” correspondente

Representação Aninhada

- Exemplo

- $T_a = \{A\}$
- $T_b = \{B, \{C\}\}$
- $T_c = \{D, \{E, \{F\}\}, \{G, \{H, \{I\}\}, \{J, \{K\}, \{L\}\}, \{M\}\}$



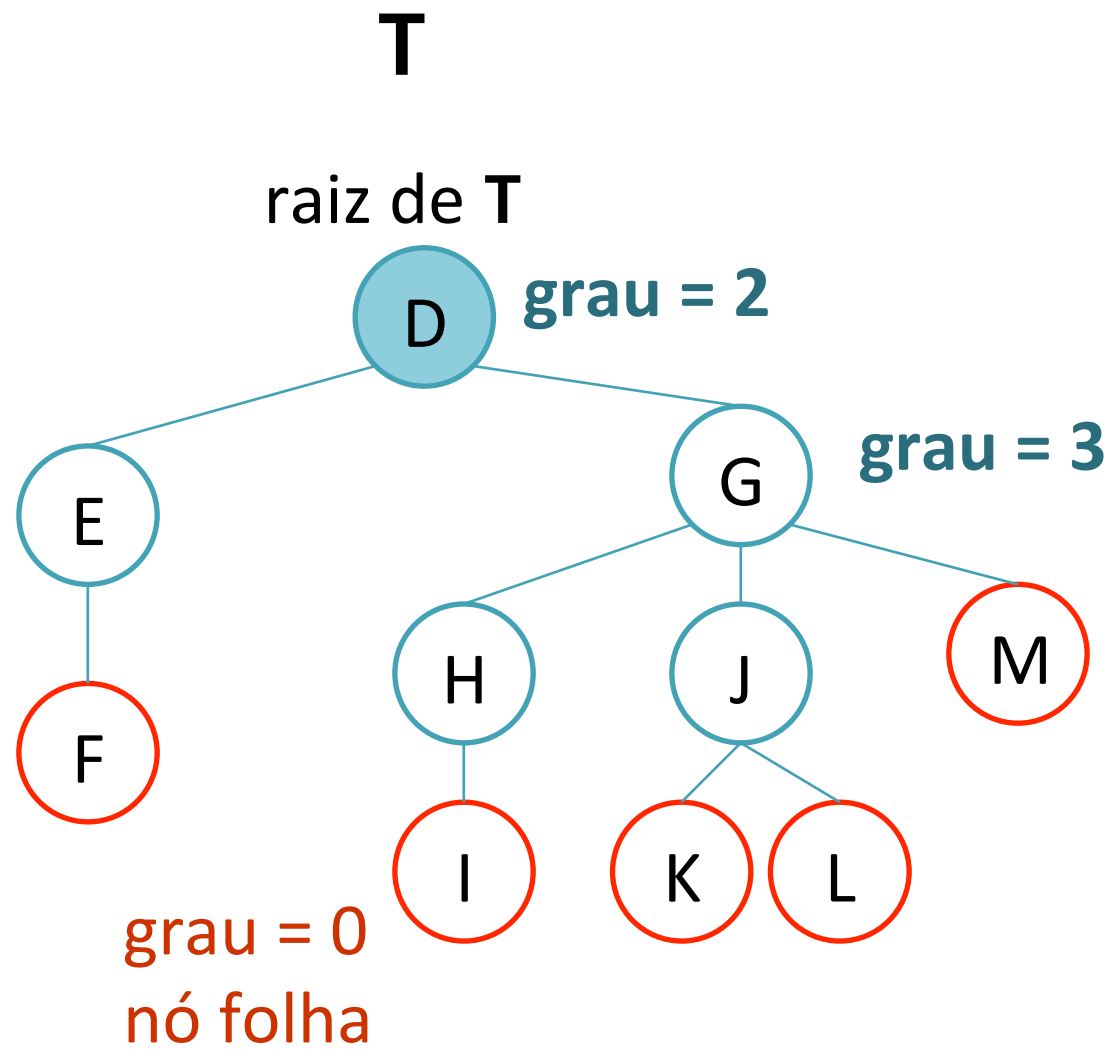
Representação Aninhada

- **Exercício:** representar as árvores usando grafos
 - $T_d = \{2, \{1\}, \{3\}\}$
 - $T_e = \{4, \{2, \{1\}, \{3\}\}, \{6, \{5\}, \{7\}\}\}$
 - $T_f = \{\text{Joao}, \{\text{Daniel}, \{\text{Andres}\}, \{\text{Fernanda}\}\}, \{\text{Maria}, \{\text{Marcos}\}, \{\text{Rafael}\}\}\}$

Terminologias

- Considerando uma árvore **T** e a definição dada de árvores anteriormente:
 - **grau de um nó** => o número de subárvores relacionadas ao nó
 - nós com **grau igual a zero** não possuem subárvores => **nós folhas ou terminais**
 - **grau da árvore** => grau máximo definido para todos os nós da árvore

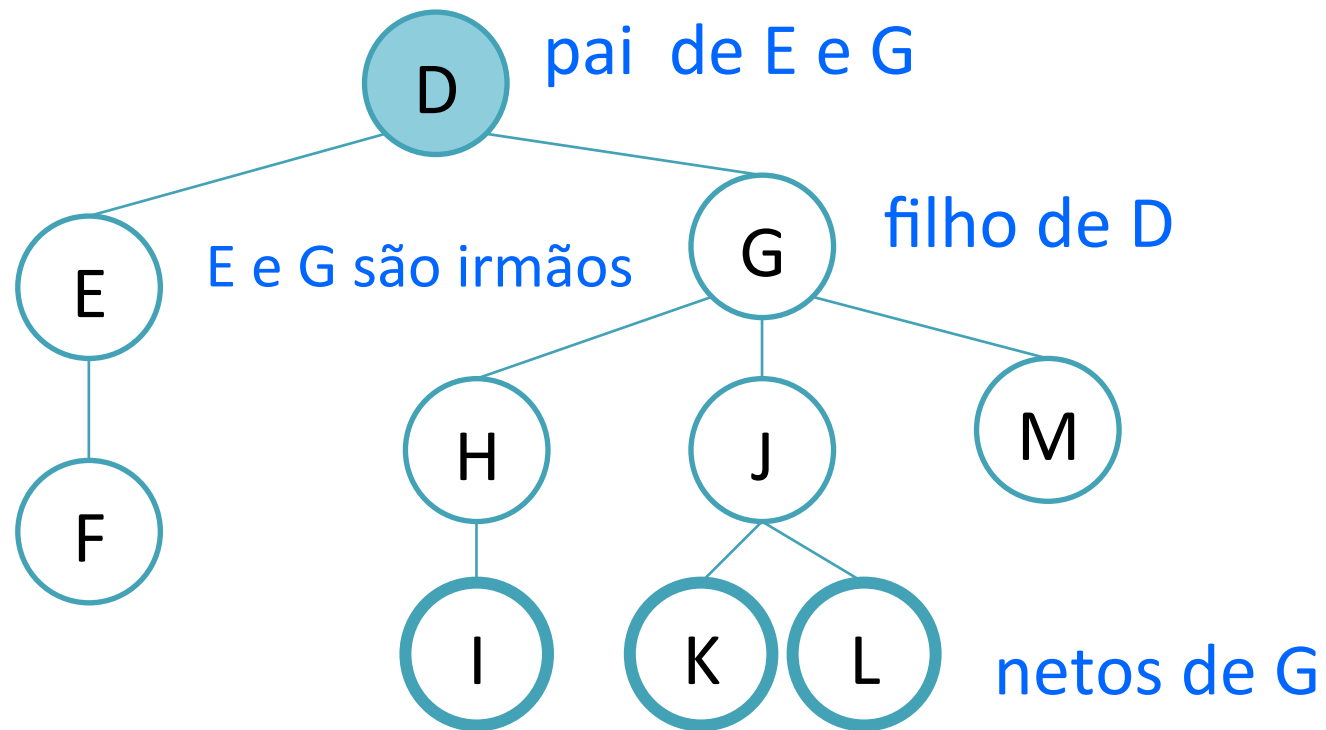
Exemplo



Terminologias

- Para identificar os nós na estrutura, usamos denominações da relação hierárquica existente em uma árvore genealógica
 - Cada raiz r_i da subárvore T_i é chamada **filho** de r . O termo **neto** é usado de modo análogo
 - O nó raiz r da árvore T é o **pai** de todas as raízes r_i das subárvores T_i . O termo **avô** é definido de modo análogo
 - Duas raízes r_i e r_j das subárvores T_i e T_j de T são ditas **irmãs**

Exemplo



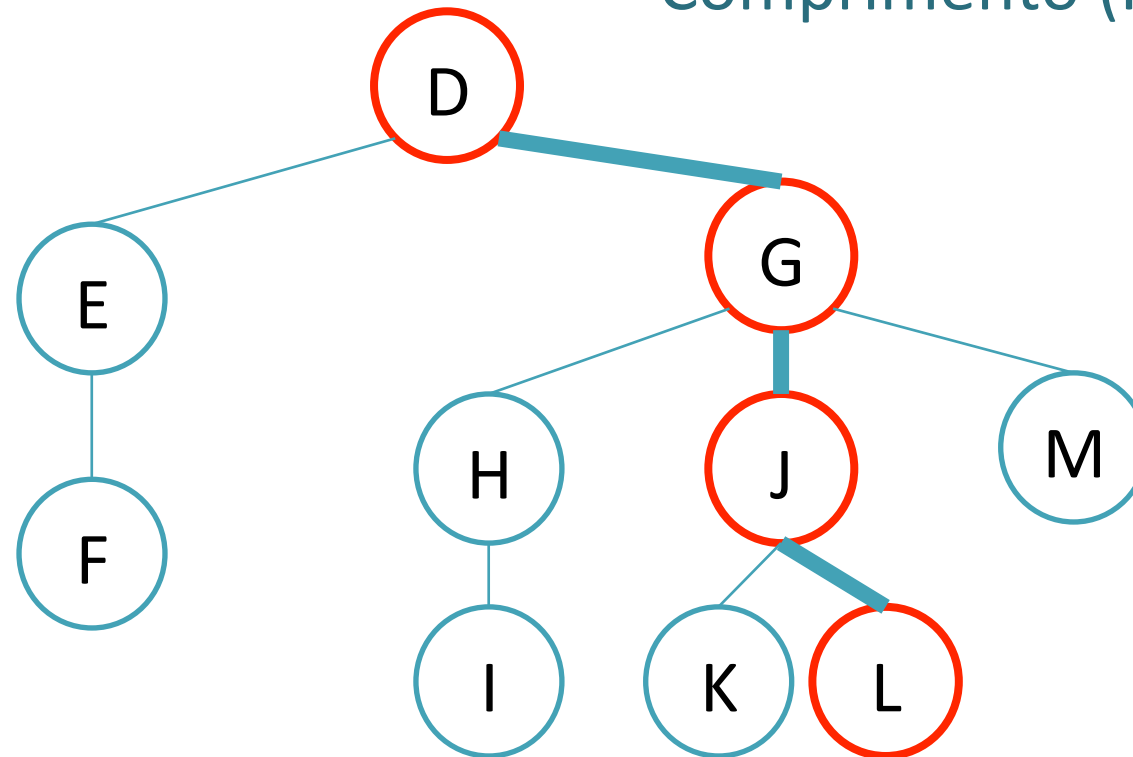
Definição

- Outras definições importantes são obtidas a partir da distância de um nó em relação a outros nós da árvore
 - **Caminho**: sequência não vazia de nós,
 $P = \{r_1, r_2, \dots, r_k\}$, onde o i -ésimo nó r_i da sequência é pai de r_{i+1}
 - **Comprimento**: tomando a definição de caminho, o comprimento de um caminho P é igual a $k-1$

Exemplo

$P(D, L) = \{D, G, J, L\}$

Comprimento (P) = 3

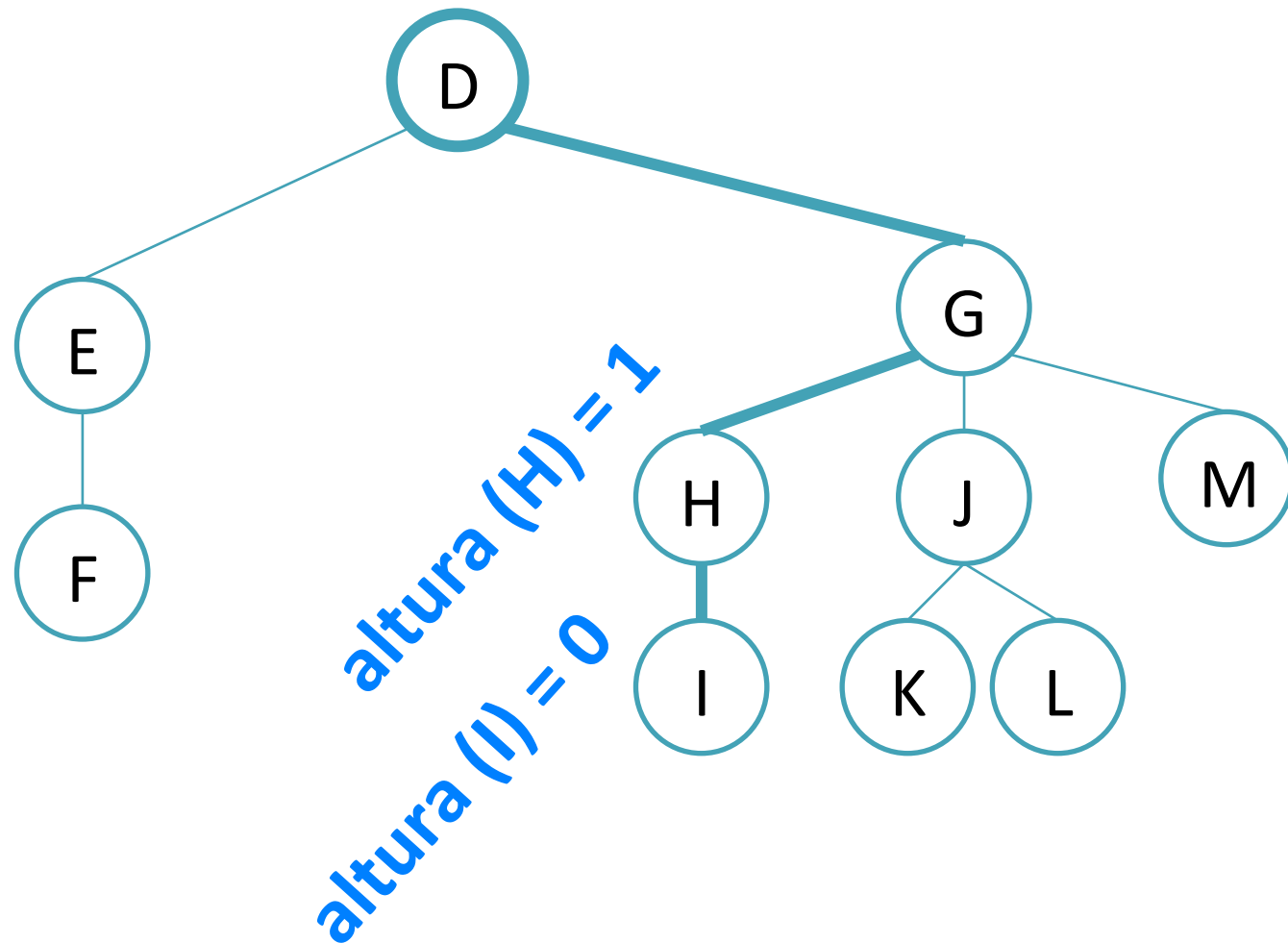


Terminologia

- **Altura de um nó r_i** \Rightarrow comprimento do **caminho mais longo** do nó r_i a uma folha
 - as folhas têm altura 0 (zero)
- **Altura da árvore:** é igual à altura da raiz r de T

Exemplo

altura (D) = altura (T) = 3



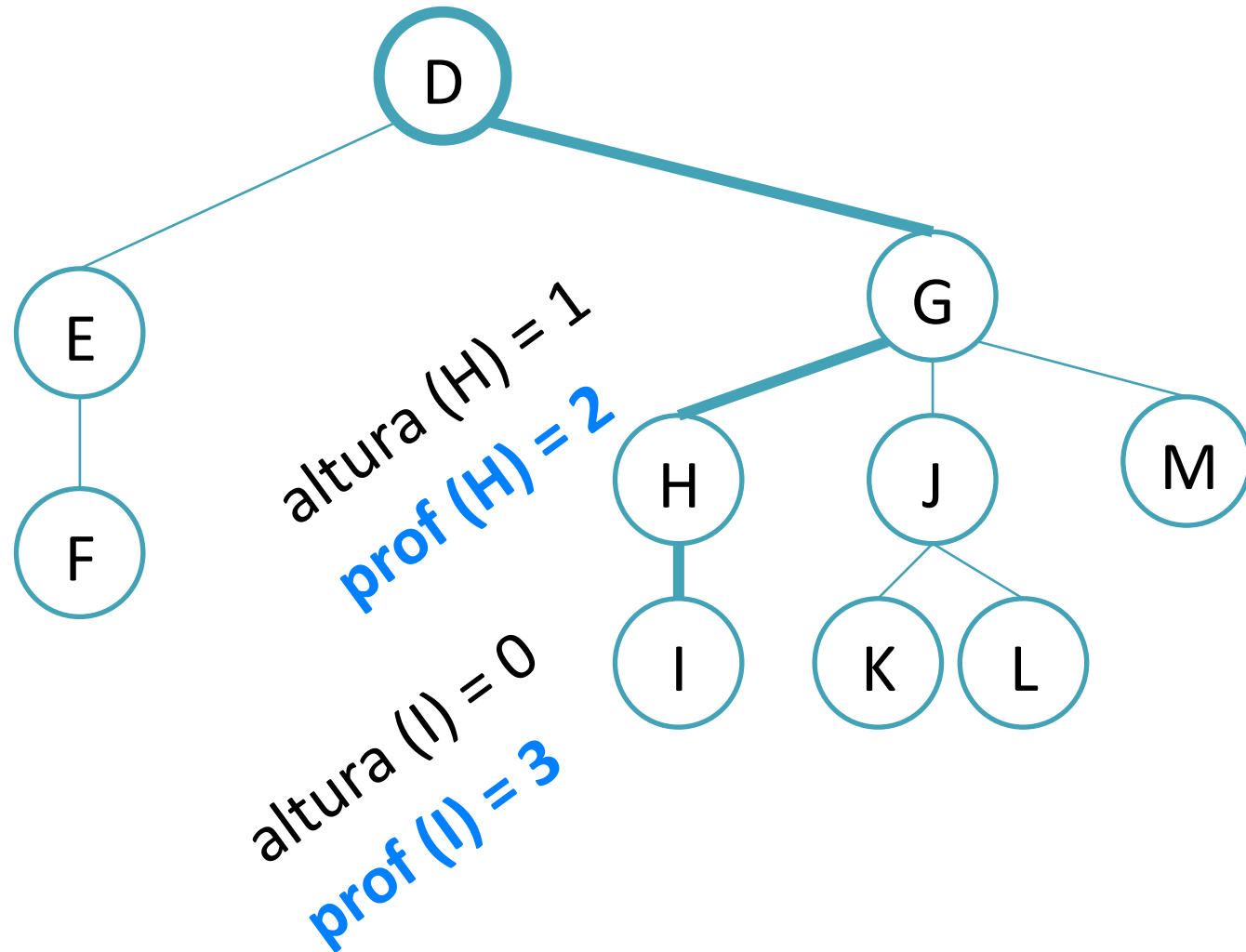
Terminologia

- **Profundidade**: a profundidade de um nó r_i de uma árvore T é o comprimento do **caminho (único)** em T entre a raiz r e o nó r_i
- **Nível**: um conjunto de nós com a mesma profundidade é denominado nível da árvore
 - a raiz está no nível 0 (zero)

Exemplo

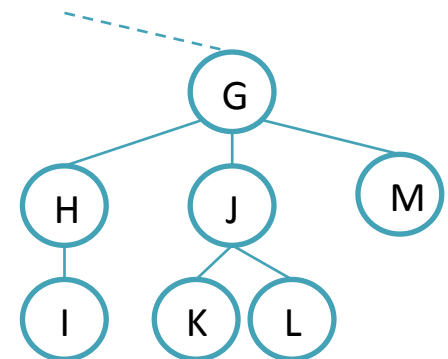
altura (D) = altura (T) = 3

prof (D) = 0



Terminologia

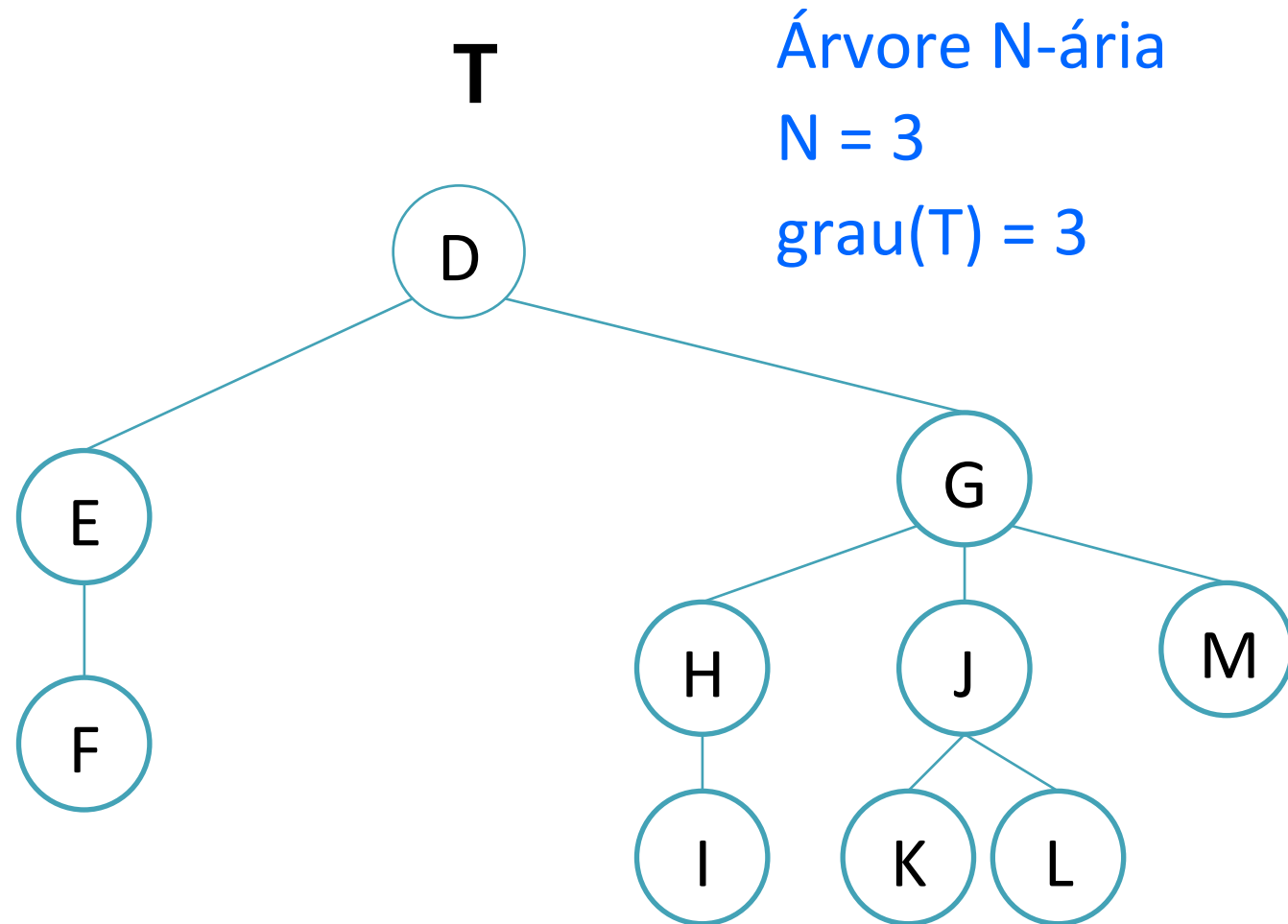
- **Ascendência e descendência:**
 - dados dois nós r_i e r_j :
 - o nó r_i é um **ancestral** de r_j se existe um caminho em T de r_i a r_j , tal que, o comprimento de P entre r_i e r_j seja diferente de 0 (zero)
 - de maneira análoga, define-se os **descendentes** de um nó



Árvores N-árias - Definição

- Uma **árvore N-ária T** é um conjunto finito de nós com as seguintes propriedades:
 - **T = \emptyset** e a árvore é dita vazia; ou
 - o conjunto consiste de um nó especial **r**, que é a raiz de **T**, e os nós restantes podem ser sempre divididos em **n** subconjuntos disjuntos, as **i**-ésimas subárvores de **r**, tal que **$1 \leq i \leq n$** , as quais também são árvores **N-árias**
- A **i**-ésima subárvore de um nó **v** de **T**, se existir, é denominada **i**-ésimo filho de **v**

Exemplo



Exercícios

1. Considere a seguinte árvore:

$$T_e = \{a, \{b, \{c, \{d\}\}, \{e, \{f\}, \{g\}\}\}, \{h, \{i\}\}\}$$

- Elabore as representações por conjunto, indentação e grafos
- Encontre o grau, altura e profundidade de cada nó

2. Partindo da definição de árvores n-árias, elabore a definição para árvores binárias