SME0300 Cálculo Numérico
Aula 22

Maria Luísa Bambozzi de Oliveira
marialuisa @ icmc . usp . br

Página: **edisciplinas.usp.br**

18 de novembro de 2020

ICMC USP
SÃO CARLOS

Aulas Passadas

Integração Numérica:

Fórmulas de Newton-Cotes:

- Regra do Trapézio: $n = 1,\ a = x_0 < x_1 = b$

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{h}{2}\left[f(x_0) + f(x_1)\right]$$

- Regra 1/3 de Simpson: $n = 2,\ a = x_0 < x_1 < x_2 = b$

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 4\,f(x_1) + f(x_2)\right]$$

- Regra 3/8 de Simpson: $n = 3,\ a = x_0 < \cdots < x_3 = b$

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{3\,h}{8}\left[f(x_0) + 3\,f(x_1) + 3\,f(x_2) + f(x_3)\right]$$

Erros em Newton-Cotes;

Fórmulas de Quadratura de Gauss (Tabelas).

Introdução:

Equações Diferenciais podem ser utilizadas para descrever diversos problemas em Engenharia, Física e Estatística. Alguns exemplos:

- Estudos de redes elétricas;
- Teoria das vibrações;
- Dinâmica populacional;
- Escoamento de fluidos;
- etc.

Alguns podem ser descritos por *equações ordinárias* (EDO), enquanto outros são descritos por *equações diferenciais parciais* (EDP).

Vamos nos concentrar na introdução à resolução de EDOs através de métodos numéricos.

Equação Diferencial de primeira ordem:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f\left(x, y\right)$$

Queremos determinar uma função $y = y(x)$, diferenciável, com $x \in [a, b]$, tal que $y'(x) = f\left(x, y\left(x\right)\right)$. Se a propriedade for satisfeita, $y(x)$ é **solução** da ED.

O problema

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f\left(x, y\right) \\ y\left(x_0\right) = y_0 \end{cases}$$

é chamado de ***problema de valor inicial*** **(PVI)**.

Teorema (Existência e Unicidade):
Seja $f(x,y)$ definida e contínua em

$$D = \{(x,y) : \ a \leq x \leq b; \ -\infty < y < \infty\}.$$

Suponhamos que existe constante $L > 0$ tal que

$$\left|f(x,y) - f(x^*,y^*)\right| \leq L\left|y - y^*\right|, \ \forall (x,y), \ (x^*,y^*) \in D.$$

Então, se y_0 é um número dado, existe uma única solução $y(x)$ do PVI, onde $y(x)$ é contínua e diferenciável para todo $(x,y) \in D$.

A maioria das equações diferenciais encontradas não podem ser resolvidas analiticamente; portanto usamos métodos numéricos para resolvê-los.

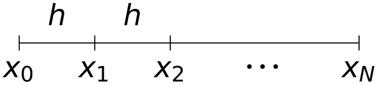
Solução Numérica de EDOs (cont.)

Consideremos a sequência de pontos $\{x_n\}$ definida por

$$x_n = x_0 + n\,h, \quad n = 0, 1, \ldots, N;$$

$$\text{com} \;\; x_0 = a; \quad x_N = b; \quad N = \frac{b-a}{h}.$$

h é o *tamanho do passo*, x_n são os *pontos da malha* e N é o *número de passos*.



Fazemos uma *discretização*, ou seja, obtemos a solução aproximada do PVI em um conjunto discreto de pontos $\{x_n : \; n = 0, 1, \ldots, N\}$.

$$y_n \approx y(x_n)\,; \quad f_n = f(x_n, y_n)$$

Métodos: Taylor de ordem q; Lineares de Passo Múltiplo; Previsor-Corretor; Runge-Kutta.

Método de Taylor de Ordem q

Vamos considerar que, em

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f\left(x, y\right) \\ y(x_0) = y_0, \end{cases}$$

a função f seja contínua e suficientemente derivável em relação a x e y.

Sendo $y(x)$ a solução exata do PVI, a expansão em série de Taylor para $y\left(x_n + h\right)$ em torno do ponto x_n é

$$y\left(x_n + h\right) = y\left(x_n\right) + h\,y'\left(x_n\right) + \frac{h^2}{2!}y''\left(x_n\right) + \ldots + \frac{h^q}{q!}y^{(q)}\left(x_n\right) +$$

$$+ \boxed{\frac{h^{q+1}}{(q+1)!}y^{(q+1)}\left(\xi_n\right)}, \quad x_n < \xi_n < x_n + h.$$

Erro de truncamento local

Método de Taylor de Ordem q (cont.)

Sendo

$$
\begin{aligned}
y'(x) &= \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x,y),\\
y''(x) &= \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f_x(x,y) + f_y(x,y)\,f(x,y),\\
y'''(x) &= \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2} = \frac{d}{dx}\left(f_x + f_y\,f\right) =\\
&= \frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_x}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \left[\frac{\partial f_y}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y}\frac{dy}{dx}\right] f + f_y\left[\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}\right] =\\
&= f_{xx} + f_{xy}\,f + \left[f_{yx} + f_{yy}\,f\right] f + f_y\left[f_x + f_y\,f\right] =\\
&= f_{xx} + 2f_{xy}\,f + f_{yy}\,f^2 + f_x\,f_y + f_y^2\,f, \quad \ldots
\end{aligned}
$$

e $y(x_n+h) \approx y(x_n) + h\,y'(x_n) + \ldots + \frac{h^q}{q!}y^{(q)}(x_n)$, temos

Método de Taylor de Ordem q (cont.)

$$y(x_n + h) \approx y(x_n) + h\,f(x_n, y(x_n)) + \ldots + \frac{h^q}{q!} f^{(q-1)}(x_n, y(x_n))$$

que pode ser aproximado por

$$y_{n+1} = y_n + h\,f_n + \frac{h^2}{2!} f'_n + \ldots + \frac{h^q}{q!} f_n^{(q-1)},$$

$$f_n^{(m)} = \frac{\mathrm{d}^m f}{\mathrm{d}x^m}(x_n, y_n), \quad m = 0, 1, \ldots, q-1$$

Método de Taylor de ordem q
$\Rightarrow$ Método de 1-passo Explícito.

Método de Taylor de Ordem q (cont.)

Exemplo: Resolver o PVI

$$\begin{cases} y' = y + x - 2 \\ y(0) = 2 \end{cases}, \quad x \in [0,\ 0{,}2], \quad h = 0{,}1$$

usando o método de Taylor de ordem 2.

$x_0, y_0, f_0, f'_0 \qquad x_1, y_1, f_1, f'_1 \qquad x_2, y_2, f_2, f'_2$

Solução:

Método de Taylor de ordem 2: $y_{n+1} = y_n + h\, f_n + (h^2/2) f'_n$.

Temos $h = 0{,}1$, $f(x,y) = y + x - 2$ e

$f'(x,y) = f_x(x,y) + f_y(x,y)\, f(x,y) = (1) + (1)\,(y + x - 2) = y + x - 1.$

Com $x_0 = 0{,}0$, $x_1 = 0{,}1$, $x_2 = 0{,}2$ e $y_0 = 2$, precisamos calcular y_1, y_2, f_0, f_1, f_2, f'_0, f'_1, f'_2.

$\underline{i = 0}$: $x_0 = 0{,}0$; $y_0 = 2$; $f_0 = y_0 + x_0 - 2 = 0{,}0$;
$f'_0 = y_0 + x_0 - 1 = 1.$

$\underline{i = 1}$: $x_1 = 0{,}1$; $y_1 = y_0 + h\, f_0 + (h^2/2) f'_0 = 2{,}005$;
$f_1 = y_1 + x_1 - 2 = 0{,}105$; $f'_1 = y_1 + x_1 - 1 = 1{,}105.$

$\underline{i = 2}$: $x_2 = 0{,}2$; $y_2 = y_1 + h\, f_1 + (h^2/2) f'_1 = 2{,}021025$;
$f_2 = y_2 + x_2 - 2 = 0{,}221025$; $f'_2 = y_2 + x_2 - 1 = 1{,}221025.$

Nem sempre podemos aplicar o método de Taylor de ordem q. Muitas vezes temos que parar antes da ordem q desejada. Vejamos um exemplo.

Se quisermos resolver um PVI no intervalo $x \in [1,\ 1{,}2]$ de $y' = y^{\frac{1}{4}}$ com $y(1) = 0$, não poderemos passar de $q = 1$, pois

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x,y) = y^{\frac{1}{4}}; \qquad f_0 = 0;$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x,y) = \frac{1}{4}y^{-\frac{3}{4}}y^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{4}y^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{4\sqrt{y}}; \qquad f_0' = ?$$