SME0300 Cálculo Numérico
Aula 23

Maria Luísa Bambozzi de Oliveira
marialuisa @ icmc . usp . br

Página: **edisciplinas.usp.br**

19 de novembro de 2020

Aula Passada

Solução Numérica de EDOs:

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x,y) \\ y(a) = y_0 \end{cases}, \quad x \in [a,b]$$

- Introdução;
- Método de Taylor de Ordem q:

$$y_{n+1} = y_n + h\,f_n + \frac{h^2}{2} f_n' + \ldots + \frac{h^q}{q!} f_n^{(q-1)},$$

$$f_n = f(x_n, y_n), \quad x_n = x_0 + n\,h, \quad y_n \approx y(x_n)$$

$$f_n^{(m)} = \frac{\mathrm{d}^m f}{\mathrm{d}x^m}(x_n, y_n), \quad \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} f, \;\; f = f(x,y)$$

Método de k-Passos

Método Linear de Passo Múltiplo
(ou **Método de k-Passos**):

$$\sum_{j=0}^{k} \alpha_j y_{n+j} = h \sum_{j=0}^{k} \beta_j f_{n+j}$$

com: α_j, β_j constantes arbitrárias independentes de n;
$\alpha_k \neq 0$; α_0, β_0 não ambos nulos.

Supor que $\alpha_k = 1$.

Método é *explícito* se $\beta_k = 0$; *implícito* se $\beta_k \neq 0$.

Técnicas para obter métodos:

- Desenvolvimento de Taylor;
- Integração numérica.

Por **Desenvolvimento de Taylor:**
Supomos que f é contínua e suficientemente derivável em relação a x e y.

(1) Com $q = 1$ no método de Taylor de ordem q, obtemos o **método explícito de** 1**-passo**

$$y_{n+1} = y_n + h f_n. \quad (\textbf{Método de Euler})$$

(2) Vamos desenvolver $y(x_n+h)$ e $y(x_n-h)$ em série de Taylor em torno do ponto x_n:

$$y(x_n+h) = y(x_n) + h\,y'(x_n) + \frac{h^2}{2!}y''(x_n) + \frac{h^3}{3!}y'''(x_n) + \ldots$$
$$y(x_n-h) = y(x_n) - h\,y'(x_n) + \frac{h^2}{2!}y''(x_n) - \frac{h^3}{3!}y'''(x_n) + \ldots$$

Calculando $y(x_n+h)-y(x_n-h)$:

$$y(x_n+h)-y(x_n-h) = 2h\,y'(x_n) + \frac{h^3}{3}y'''(x_n) + \ldots$$

$$y(x_n+h)-y(x_n-h)=2h\,y'(x_n)+\frac{h^3}{3}y'''(x_n)+\ldots$$

Considerando apenas o primeiro termo da direita,

$$y_{n+1}-y_{n-1}=2h\,f_n.$$

Trocando n por $n+1$, obtemos um *método explícito de 2-passos*:

$$y_{n+2}=y_n+2h\,f_{n+1} \quad \text{(Regra do Ponto Médio)}$$

Obs.: Devemos ter disponíveis os valores de y_0 e de y_1 para iniciar os cálculos. O valor de y_1 deve ser calculado usando outro método (por exemplo, método de 1-passo).

Outros métodos de k-passos podem ser obtidos por desenvolvimento de Taylor.

Método de k-Passos (cont.)

Por **Integração Numérica:**
Integrando a ED $y'(x) = f(x, y(x))$ de x_n até x_{n+k}, obtemos

$$\int_{x_n}^{x_{n+k}} y'(x)\,\mathrm{d}x = \int_{x_n}^{x_{n+k}} f(x, y(x))\,\mathrm{d}x$$

Então,

$$y(x_{n+k}) = y(x_n) + \int_{x_n}^{x_{n+k}} f(x, y(x))\,\mathrm{d}x$$

para quaisquer dois pontos x_n e x_{n+k} em $[a, b]$.

Método de k-Passos (cont.)

(1) Com $k = 1$, obtemos:

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y(x))\,\mathrm{d}x$$

$$\Rightarrow \quad y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left[f_n + f_{n+1}\right] \quad (\textbf{Método do Trapézio})$$

(2) Com $k = 2$, obtemos:

$$y(x_{n+2}) = y(x_n) + \int_{x_n}^{x_{n+2}} f(x, y(x))\,\mathrm{d}x$$

$$\Rightarrow y_{n+2} = y_n + \frac{h}{3}\left[f_n + 4f_{n+1} + f_{n+2}\right] \quad (\textbf{Método de Simpson})$$

Ambos são *implícitos*.

Método de k-Passos (cont.)

(3) Usando Fórmulas de Newton-Cotes do tipo aberta (um dos pontos a e b não é o ponto extremo da fórmula de quadratura), onde integramos a equação diferencial de x_{n+1} até x_{n+2}, obtemos

$$y_{n+2} = y_{n+1} + \frac{h}{12}\left[-f_n + 8f_{n+1} + 5f_{n+2}\right]$$

(**Método de Adams-Moulton**) e também

$$y_{n+2} = y_{n+1} + \frac{h}{2}\left[-f_n + 3f_{n+1}\right]$$

(**Método de Adams-Bashforth**).