SME0300 Cálculo Numérico
Aula 25

Maria Luísa Bambozzi de Oliveira
marialuisa @ icmc . usp . br

Página: **edisciplinas.usp.br**

2 de dezembro de 2020

ICMC USP
SÃO CARLOS

Aula Passada

Solução Numérica de EDOs:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x,y) \\ y(a) = y_0 \end{cases}, \quad x \in [a,b]$$

- Método Previsor-Corretor (PC):

  $P:$ método explícito de k-passos ($y_{n+k}^{[0]}$);

  $C:$ método implícito de k-passos ($y_{n+k}^{[s]}$);

Modo $P(EC)^m E$

Método Geral Explícito de 1-Passo

Para resolver métodos de k-passos, $k > 1$, precisamos obter valores iniciais necessários para utilizar os métodos. Esses valores devem ser os mais precisos possíveis.

Como? Podemos utilizar *Métodos de Taylor de ordem q* ou *Métodos de Runge-Kutta*.

Definição: Um **método geral explícito de 1-passo** é definido por

$$y_{n+1} = y_n + h\,\phi(x_n, y_n, h).$$

Definição: O método geral é de **ordem** q se q é o maior inteiro tal que

$$y(x+h) - y(x) - h\,\phi(x, y(x), h) = O(h^{q+1}),$$

onde $y(x)$ é a solução exata do PVI.

Método Geral de Runge-Kutta de R estágios:

$$y_{n+1} = y_n + h\,\phi(x_n, y_n, h),$$

onde

$$\begin{aligned}
\phi(x,y,h) &= \sum_{r=1}^{R} c_r\, k_r,\\
k_1 &= f(x,y),\\
k_r &= f\left(x + a_r\, h,\ y + h\sum_{s=1}^{r-1} b_{rs} k_s\right), \quad r = 2, 3, \ldots, R,\\
a_r &= \sum_{s=1}^{r-1} b_{rs}, \quad r = 2, 3, \ldots, R.
\end{aligned}$$

Comparar expansão da função $\phi(x,y,h)$ com a função $\phi_T(x,y,h)$ do método de Taylor.

Métodos de RK de Ordem 2: tomar $R = 2$.

$$\begin{aligned}\phi(x,y,h) &= c_1 k_1 + c_2 k_2,\\ k_1 &= f(x,y),\\ k_2 &= f(x + a_2\,h,\ y + h\,b_{21}\,k_1),\\ a_2 &= b_{21}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow k_2 &= f(x + a_2\,h,\ y + h\,a_2\,f) =\\ &= f(x,y) + (a_2\,h) f_x(x,y) + (h\,a_2\,f) f_y(x,y) +\\ &\quad + \frac{(a_2\,h)^2}{2!} f_{xx}(x,y) + (a_2\,h)(h\,a_2\,f) f_{xy}(x,y) +\\ &\quad + \frac{(h\,a_2\,f)^2}{2!} f_{yy}(x,y) + O(h^3)\end{aligned}$$

Métodos de Runge-Kutta (cont.)

$$
\begin{aligned}
\phi(x,y,h) &= c_1 f + c_2 \Bigg[f + (a_2\,h) f_x + (a_2\,h\,f) f_y + \frac{(a_2\,h)^2}{2!} f_{xx} + \\
&\qquad + (a_2\,h)^2 f\,f_{xy} + \frac{(a_2\,h\,f)^2}{2!} f_{yy} + O(h^3) \Bigg] \\
&= (c_1 + c_2) f + c_2\,a_2\,h\,(f_x + f_y\,f) + \\
&\qquad + \frac{(a_2\,h)^2}{2!} c_2 (f_{xx} + 2\,f\,f_{xy} + f_{yy}\,f^2) + O(h^3) \\
&= (c_1 + c_2) f + c_2\,a_2\,h\,(F) + \frac{(a_2\,h)^2}{2!} c_2\,(G) + O(h^3),
\end{aligned}
$$

Métodos de Runge-Kutta (cont.)

$$\phi(x,y,h) = (c_1 + c_2)f + c_2\, a_2\, h\, F + \frac{(a_2\, h)^2}{2!} c_2\, G + O(h^3),$$

$$\text{(Taylor)} \qquad y_{n+1} = y_n + h\, \phi_T(x,y,h),$$

$$\phi_T(x,y,h) = f(x,y) + \frac{h}{2!} f'(x,y) + \frac{h^2}{3!} f''(x,y) + O(h^3)$$

$$= f + \frac{h}{2!}(f_x + f_y\, f) + \frac{h^2}{3!}(f_{xx} + 2 f_{xy}\, f + f_{yy}\, f^2 + f_x\, f_y + f_y^2\, f) + O(h^3)$$

$$= f + \frac{h}{2!} F + \frac{h^2}{3!}\left[G + f_y\, F\right] + O(h^3)$$

Comparando $\phi(x,y,h)$ e $\phi_T(x,y,h)$, para ordem 2:

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ c_2\, a_2 = 1/2 \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} c_2 = 1 - c_1 \\ a_2 = \frac{1}{2(1-c_1)} \end{cases}$$

Métodos de Runge-Kutta (cont.)

$$\begin{aligned}\phi(x,y,h) &= c_1 k_1 + c_2 k_2,\\ k_1 &= f(x,y),\\ k_2 &= f(x + a_2 h,\, y + h\, a_2\, k_1),\end{aligned} \qquad \begin{cases} c_2 = 1 - c_1 \\ a_2 = \frac{1}{2(1-c_1)} \end{cases}$$

Para $c_1 = 0$: $c_2 = 1$; $a_2 = 1/2$; (**Euler Modificado**)

$$y_{n+1} = y_n + h\,\phi(x_n, y_n, h) \Rightarrow y_{n+1} = y_n + h\,k_2,$$
$$k_1 = f(x_n, y_n),$$
$$k_2 = f\left(x_n + \frac{1}{2}h,\, y_n + \frac{h}{2}k_1\right).$$

Para $c_1 = 1/2$: $c_2 = 1/2$; $a_2 = 1$; (**Euler Melhorado**)

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left(k_1 + k_2\right),$$
$$k_1 = f(x_n, y_n),$$
$$k_2 = f\left(x_n + h,\, y_n + h\,k_1\right).$$

Exemplo: Resolver o PVI

$$\begin{cases} y' = y + x - 2 \\ y(0) = 2 \end{cases}, \quad x \in [0,\ 0{,}2], \quad h = 0{,}1$$

utilizando o Método de Euler Melhorado:

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{2}\left(k_1 + k_2\right), \\ k_1 &= f(x_n, y_n), \\ k_2 &= f(x_n + h,\ y_n + h\,k_1). \end{aligned}$$

Solução: Temos $h = 0{,}1$, $x_0 = 0{,}0$, $x_1 = 0{,}1$, $x_2 = 0{,}2$, $y_0 = 2$ e $f(x,y) = y + x - 2$.

Precisamos calcular y_1 e y_2.

Métodos de Runge-Kutta (cont.)

Solução (cont.): $f(x,y) = y + x - 2$

Para $i = 0$: $x_0 = 0{,}0$, $y_0 = 2$.

Para $i = 1$: $x_1 = 0{,}1$; com $n = 0$,

$$k_1 = f(x_0, y_0) = f(0{,}0,\ 2) = 2 + 0{,}0 - 2 = 0{,}0$$

$$k_2 = f(x_0 + h, y_0 + h\,k_1) = f(0{,}1,\ 2) = 2 + 0{,}1 - 2 = 0{,}1$$

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{2}(k_1 + k_2) = 2 + \frac{0{,}1}{2}(0{,}0 + 0{,}1) = 2{,}005$$

Para $i = 2$: $x_2 = 0{,}2$; com $n = 1$,

$$k_1 = f(x_1, y_1) = f(0{,}1,\ 2{,}005) = 2{,}005 + 0{,}1 - 2 = 0{,}105$$

$$k_2 = f(x_1 + h, y_1 + h\,k_1) = f(0{,}2,\ 2{,}0155) = 2{,}0155 + 0{,}2 - 2 =$$
$$= 0{,}2155$$

$$y_2 = y_1 + \frac{h}{2}(k_1 + k_2) = 2{,}005 + \frac{0{,}1}{2}(0{,}105 + 0{,}2155) =$$
$$= 2{,}021025$$

Métodos de Runge-Kutta (cont.)

Métodos de RK de ordem 3: tomar $R = 3$.

$$
\begin{aligned}
\phi(x,y,h) = c_1 k_1 + c_2 k_2 + c_3 k_3,\\
k_1 &= f\left(x,y\right),\\
k_2 &= f\left(x + a_2\,h,\; y + h\,b_{21}\,k_1\right),\\
k_3 &= f\left(x + a_3\,h,\; y + h\left(b_{31}k_1 + b_{32}k_2\right)\right),\\
a_2 &= b_{21},\\
a_3 &= b_{31} + b_{32}.
\end{aligned}
$$

Para ordem máxima (ordem 3),

$$
\begin{cases}
c_1 + c_2 + c_3 = 1\\
c_2\,a_2 + c_3\,a_3 = \frac{1}{2}\\
c_3\,b_{32}\,a_2 = \frac{1}{6}\\
c_2\,a_2^2 + c_3\,a_3^2 = \frac{1}{3}
\end{cases}
$$

Métodos de Runge-Kutta (cont.)

Para ordem 3,

$$\begin{cases} a_2 = b_{21} \\ a_3 = b_{31} + b_{32} \\ c_1 + c_2 + c_3 = 1 \\ c_2\, a_2 + c_3\, a_3 = \frac{1}{2} \\ c_3\, b_{32}\, a_2 = \frac{1}{6} \\ c_2\, a_2^2 + c_3\, a_3^2 = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_1 = \frac{2-3(a_2+a_3-2\,a_2\,a_3)}{6\,a_2\,a_3} \\ c_2 = \frac{2-3\,a_3}{6\,a_2(a_2-a_3)} \\ c_3 = \frac{3\,a_2-2}{6\,a_3(a_2-a_3)} \\ b_{31} = \frac{a_3\left(a_3+3\,a_2^2-3\,a_2\right)}{a_2(3\,a_2-2)} \\ b_{32} = \frac{a_3(a_2-a_3)}{a_2(3\,a_2-2)}, \\ b_{21} = a_2 \end{cases}$$

Se $a_2 = a_3 \ \left(= \frac{2}{3}\right)$,

$$b_{21} = \frac{2}{3}, \quad c_1 = \frac{1}{4}, \quad c_2 = \frac{3-4\,c_3}{4},$$
$$b_{31} = \frac{8\,c_3-3}{12\,c_3}, \quad b_{32} = \frac{1}{4\,c_3}.$$

Métodos de Runge-Kutta (cont.)

Método de Heun (ordem 3): $\left(a_2 = \frac{1}{3},\ a_3 = \frac{2}{3}\right)$

$$
\begin{aligned}
y_{n+1} &= y_n + h\,(k_1 + 3k_3)/4, \\
k_1 &= f(x_n, y_n), \\
k_2 &= f(x_n + h/3,\, y_n + (h/3)k_1), \\
k_3 &= f(x_n + (2h/3),\, y_n + (2h/3)k_2).
\end{aligned}
$$

M. de Nystrom (ordem 3): $\left(a_2 = a_3 = \frac{2}{3},\ c_3 = \frac{3}{8}\right)$

$$
\begin{aligned}
y_{n+1} &= y_n + h\,[k_1 + 3\,(k_2 + k_3)/2]/4, \\
k_1 &= f(x_n, y_n), \\
k_2 &= f(x_n + (2h/3),\, y_n + (2h/3)k_1), \\
k_3 &= f(x_n + (2h/3),\, y_n + (2h/3)k_2).
\end{aligned}
$$

Métodos RK de 4 estágios e ordem 4 em livros (mais utilizados).

Métodos de Runge-Kutta (cont.)

Seja $q(R)$ a maior ordem que pode ser obtida por um método RK de R estágios.

Então:

$$
\begin{aligned}
&q(R) = R, \quad R = 1, 2, 3, 4;\\
&q(5) = 4,\\
&q(6) = 5,\\
&q(7) = 6,\\
&q(8) = 6,\\
&q(9) = 7,\\
&q(R) \leq R - 2, \quad R = 10, 11, \ldots
\end{aligned}
$$