SME0300 Cálculo Numérico
Aula 24

Maria Luísa Bambozzi de Oliveira
marialuisa @ icmc . usp . br

Página: **edisciplinas.usp.br**

26 de novembro de 2020

Aula Passada

Solução Numérica de EDOs:

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x,y) \\ y(a) = y_0 \end{cases}, \quad x \in [a,b]$$

- Método de k-Passos

$$\sum_{j=0}^{k} \alpha_j y_{n+j} = h \sum_{j=0}^{k} \beta_j f_{n+j}$$

  - Desenvolvimento de Taylor;
  - Integração Numérica.

Ordem e Constante do Erro:

O **operador diferença linear** $\mathcal{L}$, associado ao método linear de passo múltiplo

$$\sum_{j=0}^{k} \alpha_j y_{n+j} = h \sum_{j=0}^{k} \beta_j f_{n+j},$$

é definido por

$$\mathcal{L}[y(x);h] = \sum_{j=0}^{k} \left[\alpha_j y(x+jh) - h\beta_j y'(x+jh) \right]$$

onde $y(x)$ é função arbitrária continuamente diferenciável em $[a,b]$.

Métodos de k-Passos (cont.)

$$\mathcal{L}[y(x);h] = \sum_{j=0}^{k} \left[\alpha_j \, y(x+jh) - h \, \beta_j \, y'(x+jh) \right]$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}[y(x);h] = C_0 \, y(x) + C_1 h \, y'(x) + \ldots + C_q \, h^q \, y^{(q)}(x) + \ldots,$$

onde

$$C_0 = \alpha_0 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_k$$

$$C_1 = \alpha_1 + 2\alpha_2 + \ldots + k\alpha_k - (\beta_0 + \beta_1 + \ldots + \beta_k)$$

$$\vdots$$

$$C_s = \frac{1}{s!} \left(\alpha_1 + 2^s \alpha_2 + \ldots + k^s \alpha_k\right) + \\ - \frac{1}{(s-1)!} \left(\beta_1 + 2^{s-1} \beta_2 + \ldots + k^{s-1} \beta_k\right), \; s > 1$$

$$\vdots$$

Métodos de k-Passos (cont.)

O operador diferença e o método linear de passo múltiplo associado têm **ordem** q se

$$C_0 = C_1 = \cdots = C_q = 0 \quad \text{e} \quad C_{q+1} \neq 0.$$

C_{q+1} é a **constante do erro**.

Exemplo: Calcule a ordem e a constante do erro para o Método do Trapézio.

Solução: Sendo o Método do Trapézio

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left[f_n + f_{n+1}\right],$$

podemos reescrevê-lo como

$$y_{n+1} - y_n = h\left[\frac{1}{2} f_n + \frac{1}{2} f_{n+1}\right].$$

Como $\alpha_0 = -1$, $\alpha_1 = 1$, $\beta_0 = 1/2$, $\beta_1 = 1/2$, então:
$C_0 = \alpha_0 + \alpha_1 = 0$; $C_1 = \alpha_1 - (\beta_0 + \beta_1) = 0$;
$C_2 = \alpha_1/2 - \beta_1 = 0$.
Agora, $C_3 = \alpha_1/6 - \beta_1/2 = -1/12 \neq 0$. Então, $q = 2$.

Métodos de k-Passos (cont.)

Erro de Truncamento Local:
O **erro de truncamento local** em x_{n+k} do método linear de passo múltiplo é dado por

$$T_{n+k} = \mathcal{L}[y(x_n); h] = \sum_{j=0}^{k} \left[\alpha_j \, y(x_{n+j}) - h \, \beta_j \, y'(x_{n+j}) \right],$$

onde $y(x)$ é a solução exata do PVI.

Para o Método de Euler, $T_{n+1} = \frac{h^2}{2!} y''(\xi), \; x_n < \xi < x_{n+1}$.

Para o M. do Trapézio, $T_{n+1} = -\frac{h^3}{12} y'''(\xi), \; x_n < \xi < x_{n+1}$.

Métodos de k-Passos (cont.)

Consistência e Estabilidade: Dado o método linear de passo múltiplo, definimos inicialmente

$$\rho(\xi) = \sum_{j=0}^{k} \alpha_j \xi^j$$

como o (primeiro) polinômio característico.

Um método linear de passo múltiplo é **estável** se nenhuma raiz de $\rho(\xi)$ tem módulo maior que 1 e toda raiz com módulo 1 é simples.

Um método linear de passo múltiplo é **consistente** se tem ordem $q \geq 1$, isto é, se e somente se

$$C_0 = 0 \quad \text{e} \quad C_1 = 0.$$

Método de k-Passos (cont.)

Consistência:

- significa que a solução numérica corresponde à solução do PVI;
- limita a magnitude do erro local cometido em cada passo;

Estabilidade:

- controla a propagação do erro durante os cálculos.

Exemplo: Determine se o Método de Euler é estável e consistente.
Solução: Para que o Método de Euler seja estável, devemos definir seu primeiro polinômio característico e avaliar suas raízes.

Sendo a fórmula do Método de Euler

$$y_{n+1} = y_n + h f_n,$$

então temos $\alpha_0 = -1$, $\alpha_1 = 1$, $\beta_0 = 1$ e todos os outros α_j, β_j são nulos.

Assim, o primeiro polinômio característico é dado por

$$\rho(\xi) = \alpha_0 + \alpha_1 \xi = \xi - 1$$

com raiz $\xi = 1$. Então, como a única raiz tem módulo 1 e é simples, o método é estável.

Como $T_{n+1} = \frac{h^2}{2!} y''(\xi),\ x_n < \xi < x_{n+1}$, então $q = 1$ e o método é consistente.

Métodos de k-Passos (cont.)

Se o erro de truncamento local é $C_{q+1} h^{q+1} y^{(q+1)}(\xi)$, $q \geq 1$, então o método é **consistente de ordem** q.

Convergência: $y_n \to y(x_n)$ quando $h \to 0$.

Um método de k-passos é **convergente** de ordem q se $y(x_n) - y_n = O(h^q)$ tende a zero quando $h \to 0$, com x_n fixo, isto é, se e somente se é estável e consistente de ordem q.

$$\text{CONVERGENTE} = \text{CONSISTENTE} + \text{ESTÁVEL}$$

Métodos Previsor-Corretor

Como usamos métodos lineares de passo múltiplo (de k-passos) *implícitos* para resolver o PVI

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad ?$$

Nos métodos de k-passos implícitos, em cada passo resolvemos para y_{n+k} com a equação

$$y_{n+k} = -\sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j \, y_{n+j} + h \sum_{j=0}^{k-1} \beta_j \, f_{n+j} + h \, \beta_k \, f(x_{n+k}, y_{n+k}).$$

Se h é suficientemente pequeno, podemos encontrar solução única para y_{n+k} através do *método iterativo*:

$$y_{n+k}^{[s]} = -\sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j \, y_{n+j} + h \sum_{j=0}^{k-1} \beta_j \, f_{n+j} + h \, \beta_k \, f(x_{n+k}, y_{n+k}^{[s-1]}),$$

$$s = 1, 2, \ldots$$

Métodos Previsor-Corretor (cont.)

Como encontrar $y_{n+k}^{[0]}$ para aplicar no método iterativo?

Utilizando um método linear de passos múltiplos *explícito*:

$$y_{n+k}^{[0]} = -\sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j^* \, y_{n+j} + h \sum_{j=0}^{k-1} \beta_j^* \, f_{n+j}, \quad (\textbf{Previsor})$$

Aplicando o resultado no método iterativo implícito (**Corretor**), calculamos $y_{n+k}^{[1]}, y_{n+k}^{[2]}, \ldots$

Indicamos as etapas como

$$P: \text{aplicação do Previsor}$$

$$E: \text{cálculo de } f(x_{n+k}, y_{n+k}^{[s]})$$

$$C: \text{aplicação do Corretor}$$

e o par PC é aplicado no modo $P(EC)^m E$, (EC) por m vezes, até a precisão desejada.

Exemplo: Resolver o PVI

$$\begin{cases} y' = y + x - 2 \\ y(0) = 2 \end{cases}, \quad x \in [0,\ 0{,}2], \quad h = 0{,}1$$

utilizando o par PC, onde

$$P: \quad y_{n+2} = y_{n+1} + \frac{h}{2}\left[-f_n + 3f_{n+1}\right],$$

$$C: \quad y_{n+2} = y_n + \frac{h}{3}\left[f_n + 4f_{n+1} + f_{n+2}\right]$$

no modo $P(EC)E$. *Obter os valores iniciais necessários pelo método de Euler*.

Métodos Previsor-Corretor (cont.)

Solução: Temos $h = 0{,}1$, $x_0 = 0{,}0$, $x_1 = 0{,}1$ e $x_2 = 0{,}2$. Do PVI, $f(x,y) = y + x - 2$ e $y_0 = 2$. Então precisamos calcular y_1, y_2, f_0, f_1, f_2.

Temos o método de Euler, $y_{n+1} = y_n + h f_n$, além do par PC no modo $P(EC)E$ (ver slide anterior).

Para $i = 0$: $x_0 = 0{,}0$, $y_0 = 2$ e $f_0 = y_0 + x_0 - 2 = 0{,}0$.

Para $i = 1$: $x_1 = 0{,}1$, $y_1 = y_0 + h f_0 = 2 + 0{,}1(0{,}0) = 2$ e $f_1 = y_1 + x_1 - 2 = 0{,}1$.

Para $i = 2$: $x_2 = 0{,}2$,

$$P: \quad y_2^{[0]} = y_1 + \frac{(0{,}1)}{2}\left[-f_0 + 3f_1\right] = 2{,}015;$$

$$E: \quad f_2^{[0]} = y_2^{[0]} + x_2 - 2 = 0{,}215;$$

$$C: \quad y_2^{[1]} = y_0 + \frac{(0{,}1)}{3}\left[f_0 + 4f_1 + f_2^{[0]}\right] = 2{,}0205 = y_2$$

$$E: \quad f_2^{[1]} = y_2^{[1]} + x_2 - 2 = 0{,}2205 = f_2$$

Como melhorar $y_1 \approx y(0{,}1)$?